УДК 512.816+514.142

Проективная геометрия и феноменологическая симметрия

Владимир А. Кыров*
Горно-Алтайский государственный университет,
Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.09.2011, принята к печати 10.11.2011

В данной работе изучается физическая структура максимального ранга в проективном пространстве $(PV)^s$ *над алгеброй гиперкомплексных чисел* V*. Доказывается, что эту структуру образует группа проективных преобразований пространства* $(PV)^s$*.*

Ключевые слова: проективное пространство, группа проективных преобразований.

В начале XIX в. возникла проективная геометрия, источником появления которой служит графика и архитектура. Большой вклад в развитие проективной геометрии внесли: Понселе, который изучал проективные свойства фигур, Шаль и Штейнер, развившие синтетическое направление, Дезарг, доказавший важные теоремы, приведшие к понятию гармонической группы элементов, и др.

На современном этапе можно выделить два подхода к определению проективной геометрии [1]. Первый — синтетический, в основу которого положены аксиомы связи, порядка и непрерывности. Второй подход аналитический, связанный с введением в проективном пространстве сложного отношения четырех точек. В проективной геометрии ключевое значение имеет изучение проективного отображения. Семейство проективных отображений, сохраняющих основное отношение n+3 точек в пространстве размерности n, в одномерном случае совпадающее с гармоническим отношением, образует группу проективных преобразований. Можно доказать, что единственным инвариантом проективной группы является основное отношение. Это дает возможность выхода для проективной геометрии на Эрлангенскую программу Ф. Клейна.

В данной статье предлагается новый подход к определению проективной геометрии, в основу которой положена система аксиом теории физических структур, появившейся при анализе фундаментальных законов физики. Данный подход устанавливает связь проективной геометрии не только с теорией групп преобразований, но и с теорией квазигрупп. Так, в частности, основное отношение в проективной геометрии имеет естественную квазигрупповую интерпретацию.

1. Физическая структура ранга $(n+1,2)$

1. Рассмотрим два топологических пространства B и N.

Определение 1. Говорят, что на топологических пространствах B и N определена *физическая структура (ФС) ранга (n + 1,2)*, если существует непрерывное отображение $f : B \times N \to B$, называемое *метрическим*, и выполняются аксиомы [2]:

A1. $\forall\langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle \in \Omega_{B^n}$, $\forall\langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle \in \Omega_{B^n}$, $\exists!\alpha \in N$:

$$f(i_1, \alpha) = b_1,\ f(i_2, \alpha) = b_2, \ldots, f(i_n, \alpha) = b_n,$$

*kfizika@gasu.ru

где $\Omega_{B^n} \subset B^n$ — открытое и плотное подпространство.

Построим отображение $F_{j_1 j_2 \cdots j_n} : N \to \Omega_{B^n}$: $F_{j_1 j_2 \cdots j_n}(\alpha) = (f(j_1\alpha),\ f(j_2\alpha), \ldots, f(j_n\alpha))$, где $\langle j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle \in \Omega_{B^n}$. По A1 данное отображение — биекция.

A1$'$. Отображение $F_{j_1 j_2 \cdots j_n} : N \to \Omega_{B^n}$, где $\langle j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle \in \Omega_{B^n}$, является гомеоморфизмом.

A2. $\forall \alpha \in \Omega_N$ отображение $f_\alpha : B \to B$, на элементах задаваемое формулой $f_\alpha(i) = f(i\alpha)$, является гомеоморфизмом, причем $\Omega_N \subset N$ — открытое и плотное подпространство.

A3. (*Аксиома феноменологической симметрии*) $\forall \langle i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ и $\forall \langle \alpha_0, \alpha\rangle \in N \times \Omega_N$ существует функциональная связь:

$$f(i_0\alpha_0) = g(f(i_0\alpha), f(i_1\alpha), f(i_2\alpha), \ldots, f(i_n\alpha), (i_1\alpha_0), f(i_2\alpha_0), \ldots, f(i_n\alpha_0)),$$

где $g : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B \to B$ — непрерывное отображение.

2. Введем обозначения $w_1 = f(j_1\alpha)$, $w_2 = f(j_2\alpha), \ldots, w_n = f(j_n\alpha)$, $z = f(i\gamma)$, где $\gamma \in \Omega_N$. Таким образом, исходная метрическая функция записывается так:

$$f(i\alpha) = f(F_\gamma^{-1}(z), F_{j_1 j_2 \cdots j_3}^{-1}(w_1, w_2, \ldots, w_n)) = \overline{f}(z, w_1, w_2, \ldots, w_n), \tag{1}$$

где $\overline{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$. Построенное отображение $\overline{f}$ — непрерывно и удовлетворяет аксиомам A1 — A3, т.е. задает метрическое отображение ФС ранга (n+1,2).

Обозначим $f(j_m\gamma) = e_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Тогда можно доказать [2]:

$$\overline{f}(e_m, w_1, w_2, \ldots, w_n) = w_m,\ \overline{f}(z, e_1, e_2, \ldots, e_n) = z.$$

3. На Ω_{B^n} введем бинарную операцию:

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n)(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n), \tag{2}$$

причем $\overline{f}_m = \overline{f}(z_m, w_1, w_2, \ldots, w_n)$. В работе [2] доказывается, что бинарная операция (2) является квазигрупповой [3]. Эту операцию можно расширить до отображения $D : B^n \times \Omega_{B^n} \to B^n$, которое индуцирует отображение $\overline{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$. Явный вид для D совпадает с (2), при условии $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in B^n$. Можно доказать тождество [2]:

$$(XY)Z = X(YZ),\ X \in B^n,\ Y, Z \in \Omega_{B^n}. \tag{$*$}$$

Если $X \in \Omega_{B^n}$, то тождество (*) служит аксиомой ассоциативности, поэтому квазигруппа Ω_{B^n} с бинарной операцией (2) будет непрерывной группой с единицей E. В общем случае (*) задает основное свойство группы преобразований [4], остальные свойства вытекают из A1 и A2, поэтому множество отображений D образует непрерывную группу преобразований с параметрической группой Ω_{B^n}, индуцирующее также непрерывную и транзитивную группу преобразований пространства B с действием $\overline{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$.

4. **Теорема 1.** *Тождество из аксиомы A3 эквивалентно следующему:*

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \tilde{f}(w_n, a_1, \ldots, a_n)) = \\ &= \tilde{f}(\tilde{f}(z, b_1, \ldots, b_n), \tilde{f}(w_1, b_1, \ldots, b_n), \ldots, \tilde{f}(w_n, b_1, \ldots, b_n)), \end{aligned} \tag{3}$$

причем $\tilde{f}(z, w_1, \ldots, w_n) = \overline{f}(z, (w_1, \ldots, w_n)^{-1})$, $\forall\ \langle w_1, \ldots, w_n\rangle, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle,\ \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \Omega_{B^n}$, $\forall z \in B$, $(w_1, \ldots, w_n)^{-1}$ *— элемент, обратный к* $(w_1, \ldots, w_n)$ *в группе* Ω_{B^n}.

Тождество (3) несложно представить в виде

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \tilde{f}(w_n, a_1, \ldots, a_n)) = \tilde{f}(z, w_1, \ldots, w_n). \tag{3$'$}$$

Доказательство. Из определения отображений $\overline{f}$ и $\tilde{f}$ следует выполнимость аксиомы A2, т.е. однозначная разрешимость этих функций относительно первого аргумента. Поэтому разрешая тождество (3) относительно первого аргумента левой части, получаем аксиому A3.

Докажем теперь обратное. Для этого в тождестве (*) положим $Y = A$, $Z = (YA)^{-1}$. После приведения подобных имеем $(XA)(YA)^{-1} = XY^{-1}$. Каждая компонента этого тождества совпадает с $(3')$. □

Отметим, что тождество $(3')$ является обобщением тождества Уорда для квазигруппы с бинарной операцией $\bullet$ [5]:

$$(x \bullet a) \bullet (y \bullet a) = x \bullet y.$$

Это обобщение получено из аксиомы феноменологической симметрии, которая есть результат анализа физических законов.

Заметим, что отображение $\tilde{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$ также задает ФС ранга (n+1,2), т.е. непрерывную группу преобразований пространства B.

2. Физическая структура ранга (4,2) на проективной прямой над алгеброй гиперкомплексных чисел

1. Рассмотрим вещественную алгебру гиперкомплексных чисел V. Элементами алгебры V являются гиперкомплексные числа вида

$$z = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_s i_s,$$

где $x_0, \ldots, x_s$ — действительные числа, $i_1, \ldots, i_s$ — мнимые единицы, умножение которых определяется по формулам

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta 0} + p_{\alpha\beta 1} i_1 + \cdots + p_{\alpha\beta s} i_s,$$

где $p_{\alpha\beta 0}, \ldots, p_{\alpha\beta s}$ — действительные числа, $\alpha, \beta = 1, \ldots, s$.

Если $s = 1$, то алгебра гиперкомплексных чисел совпадает с полем действительных чисел R. При $s = 2$ существуют три неизоморфные алгебры гиперкомплексных чисел — это алгебра комплексных чисел ($i^2 = -1$), алгебра двойных чисел ($i^2 = 1$) и, наконец, алгебра дуальных чисел ($i^2 = 0$). При $s = 3$ имеем 11 неизоморфных ассоциативных алгебр гиперкомплексных чисел ранга 3 [6]. Из них две некоммутативные и 9 коммутативных.

Можно показать, что множество делителей нуля алгебры гиперкомплексных чисел V нигде не плотно в V.

2. Далее полагаем $n = 3$, т.е изучаем ФС ранга $(4, 2)$. Обозначим через $B = \Omega_{VP} \subset VP$ открытое и плотное подмножество точек $x \in VP$ таких, что $\langle x, x', x'' \rangle \in \Omega_{(VP)^3} \subset (\Omega_{VP})^3$. Проективная прямая VP определяется стандартным образом, т.е как пучок прямых в V^2. Метрическое отображение $\overline{f} : \Omega_{VP} \times \Omega_{(VP)^3} \to \Omega_{VP}$ задает действие непрерывной группы преобразований в Ω_{VP}.

Теорема 2. *Три пары точек (z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3) подмножества Ω_{VP} проективной прямой VP над алгеброй гиперкомплексных чисел V, причем $A = (z_1, z_2, z_3), C = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega_{(VP)^3}$, $w_1 = \overline{f}(z_1, a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = \overline{f}(z_2, a_1, a_2, a_3)$, $w_3 = \overline{f}(z_3, a_1, a_2, a_3)$, однозначно определяют преобразование, переводящее эти точки друг в друга.*

Действительно, так как $A, C, Z \in \Omega_{(VP)^3}$, причем $C = AZ$, то элемент Z находится однозначно.

Эта теорема формулируется и для отображения $\tilde{f}$:

Теорема 2$'$. *Три пары точек* (z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3) *подмножества* Ω_{VP}, *причем* $A = (z_1, z_2, z_3), C = (w_1, w_2, w_3) \in \Omega_{(VP)^3}$, $w_1 = \tilde{f}(z_1, a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = \tilde{f}(z_2, a_1, a_2, a_3)$, $w_3 = \tilde{f}(z_3, a_1, a_2, a_3)$, *однозначно определяют преобразование.*

Сформулируем теперь основную теорему.

Теорема 3. *ФС ранга (4,2) с метрической функцией* $\bar{f} : \Omega_{VP} \times \Omega_{(VP)^3} \to \Omega_{VP}$ *на подмножестве* Ω_{VP} *проективной прямой* VP *над ассоциативной алгеброй гиперкомплексных чисел* V *существует и с точностью до системы проективных координат единственна. В явном виде для метрической функции имеем*

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{4}$$

где $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ *— неоднородная проективная координата, матрица* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *обратима.*

Заметим, что в проективной геометрии проективной прямой VP метрическое отображение (4) интерпретируется как проективное преобразование. Если $V = R$, то (4) — проективное преобразование обычной, т.е вещественной, проективной прямой [1].

Доказательство теоремы 3. Проективные однородные координаты в VP обозначим (λ_1, λ_2). Левая часть тождества (3) в проективных координатах имеет вид $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$, а правая часть — (λ_1', λ_2'). Поэтому это тождество имеет такой вид:

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1', \ \bar{\lambda}_2 = \lambda_2'.$$

В проективной геометрии преобразование $\tilde{f}$ называется проективным. Две различные проективные системы однородных координат связаны линейными функциями, поэтому

$$\lambda_1' = c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2, \ \lambda_2' = c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2, \tag{**}$$

причем матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ обратима. Тогда проективное преобразование $\tilde{f}$ задается уравнениями (**) или (4). Этим самым существование доказано. Единственность следует из построения проективных координат.

(4) можно записать еще в таком виде:

$$z' = \frac{w_2 - z}{w_2 - w_1} \div \frac{w_3 - z}{w_3 - w_1}. \tag{5}$$

Эта формула в проективной геометрии интерпретируется как сложное отношение четырех точек [1]. По (5) легко записать явный вид тождества (3):

$$\frac{\tilde{f}(w_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\tilde{f}(w_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(w_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \div \frac{\tilde{f}(w_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\tilde{f}(w_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \tilde{f}(w_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} =$$

$$= \frac{\tilde{f}(w_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(z, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\tilde{f}(w_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(w_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)} \div \frac{\tilde{f}(w_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(z, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\tilde{f}(w_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) - \tilde{f}(w_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3)}. \tag{3''}$$

3. Можно показать, что отображение

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, w_2, e_3), \ e_3 = \tilde{f}(e_3, w_1, w_2, e_3), \ e_3 \in \Omega_{VP}, \tag{6}$$

на $\Omega_{VP}/\{e_3\}$ задает ФС ранга (3,2) (несложная проверка аксиом A1, A2, A3), т.е. непрерывную группу преобразований. Явный вид такого метрического отображения следующий:

$$z' = \frac{az + ce_3^2 + de_3 - ae_3}{cz + d}, \ w_1 = \frac{ae_1 + b}{ce_1 + d}, \ w_2 = \frac{ae_2 + b}{ce_2 + d}. \tag{7}$$

Пусть $e_3 = \infty$. Тогда (7) принимает вид

$$z' = \frac{(w_1 - w_2)z + w_2 e_1 - w_1 e_2}{e_1 - e_2}. \tag{7$'$}$$

Заметим, что группа (6) является стационарной подгруппой с неподвижной точкой e_3 транзитивной группы преобразований (4). В работе [7] утверждается, что любые две стационарные подгруппы транзитивной группы преобразований изоморфны.

Две физические структуры ранга $(n+1, 2)$ с метрическими функциями $f, f' : B \times N \to B$ называются *эквивалентными*, если группы Ω_B и Ω'_B изоморфны.

Теорема 4. *Две ФС ранга (3,2) с метрическими функциями (7) и* $(7')$ *эквивалентны.*

4. Рассмотрим в группе (6) преобразования, оставляющие точку e_2 неподвижной. Эти преобразования задают на $\Omega_{VP}/\{e_2, e_3\}$ метрическое отображение

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, e_2, e_3),\ e_3 = \tilde{f}(e_3, w_1, e_2, e_3),\ e_2 = \tilde{f}(e_2, w_1, e_2, e_3),\ \ w_1 = \tilde{f}(e_1, w_1, e_2, e_3) \tag{8}$$

ФС ранга (2,2). В явном виде для (8) имеем:

$$z' = \frac{az - ce_2e_3}{cz + a - c(e_2 + e_3)},\ a(w_1 - e_1) = c[w_1(e_2 + e_3 - e_1) - e_2e_3] \tag{9}$$

или

$$z' = \frac{zw_1(e_2 + e_3 - e_1) - ze_2e_3 - w_1e_2e_3 + e_1e_2e_3}{zw_1 - ze_1 - w_1e_1 - e_2e_3 + e_1(e_2 + e_3)}. \tag{9$'$}$$

Заметим, что формула (9) в $\Omega_{VP}/\{e_2, e_3\}$ задает квазигрупповую бинарную операцию. Эта квазигруппа является группой.

Теорема 5. *Группа* $\Omega_{VP}/\{e_2, e_3\}$ *с бинарной операцией (9′) является изоморфной группе* $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ *с бинарной операцией*

$$z' = zw. \tag{10}$$

Группа $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ *изоморфна группе обратимых элементов алгебры гиперкомплексных чисел.*

Доказательство. Доказательство первой части этой теоремы следует из теоремы 4. Очевидно, группа $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ состоит из обратимых элементов алгебры гиперкомплексных чисел V. Так как единственной открытой и плотной подгруппой в V является только мультипликативная, то группа $\Omega_{VP}/\{0, \infty\}$ совпадает с мультипликативной подгруппой. □

5. **Теорема 6.** *На подмножестве* Ω_{VP} *проективной прямой* VP *задается ФС ранга (4,2) тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел* V *ассоциативна.*

Доказательство. Действительно, ФС ранга (2,2), построенная редукцией ФС ранга (4,2) над проективной прямой VP, изотопна группе с бинарной операцией (10). Если умножение в V неассоциативно, то построенная бинарная операция также не будет ассоциативной, т.е. не задает группу. Противоречие. Обратное очевидно. □

6. **Теорема 7.** *ФС ранга* $(n+1, 2)$, $n \geqslant 4$, *с метрической функцией* $f : \Omega_{VP} \times N \to \Omega_{VP}$ *не существует.*

Доказательство. Предположим, что ФС ранга $(n+1, 2)$, $n \geqslant 4$, существует. В тождестве $(3')$ положим $a_k = e_k$, $k = 4, \ldots, n$, а также зафиксируем произвольные точки w_k:

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}(w_2, a_1 \ldots, a_n), \tilde{f}(w_3, a_1, \ldots, a_n), w_4, \ldots, w_n) =$$

$$= \tilde{f}(z, w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

Тогда метрическая функция (1) при фиксированных w_k, $k = 4, \ldots, n$, удовлетворяет аксиомам A1, A2, A3 при $n = 3$, т.е. задает ФС ранга (4,2). Тогда для метрической функции, согласно теореме 3, получаем

$$\tilde{f} = \frac{a(w_4, \ldots, w_n)z + b(w_4, \ldots, w_n)}{c(w_4, \ldots, w_n)z + d(w_4, \ldots, w_n)}.$$

Это общий вид метрической функции ФС ранга $(n + 1, 2)$, $n \geqslant 4$ на подмножестве Ω_{VP} проективной прямой VP. Видно, что данная функция вырождена по координатам второго множества, т.е. не задает ФС ранга $(n + 1, 2)$, $n \geqslant 4$. □

3. Физическая структура ранга $(s + 3{,}2)$ на проективном пространстве VP^s, $s \geqslant 2$, над алгеброй гиперкомплексных чисел

1. В данном параграфе полагаем $n = s + 2$, т.е изучаем ФС ранга (5,2), (6,2) и т.д. Проективное пространство VP^s определяется стандартным образом, т.е пучок прямых в V^{s+1}. Обозначим через $B = \Omega_{VP^s} \subset VP^s$ открытое и плотное подмножество точек $x \in VP^s$ таких, что $\langle x, x^1, \ldots, x^s \rangle \in \Omega_{(VP^s)^{s+2}} \subset (\Omega_{VP^s})^{s+2}$. Метрическое отображение $\bar{f} : \Omega_{VP^s} \times \Omega_{(VP^s)^{s+2}} \to \Omega_{VP^s}$ задает действие непрерывной группы преобразований в Ω_{VP^s}.

Теорема 8. *n пар точек $(z_1, w_1), \ldots, (z_{s+2}, w_{s+2})$ подмножества Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s над алгеброй гиперкомплексных чисел V, причем $A = (z_1, \ldots, z_{s+2})$, $C = (w_1, \ldots, w_{s+2}) \in \Omega_{(VP^s)^{s+2}}$, $w_1 = \bar{f}(z_1, a_1, \ldots, a_{s+2})$, $\ldots$, $w_{s+2} = \bar{f}(z_{s+2}, a_1, \ldots, a_{s+2})$, однозначно определяют преобразование, переводящее эти точки друг в друга.*

Теорема 9. *ФС ранга $(s+3, 2)$, $s \geqslant 2$, с метрической функцией $\bar{f} : \Omega_{VP^s} \times \Omega_{(VP^s)^{s+2}} \to \Omega_{VP^s}$ на подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s над ассоциативной алгеброй гиперкомплексных чисел V существует и с точностью до системы проективных координат единственна:*

$$z'^1 = \frac{a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \cdots + a_s^1 z^s + a^1}{a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_s z^s + a}, \ldots, z'^s = \frac{a_1^s z^1 + a_2^s z^2 + \cdots + a_s^s z^s + a^s}{a_1 z^1 + a_2 z^2 + \cdots + a_s z^s + a} \qquad (11)$$

где $z^1, \ldots, z^s$ — неоднородные проективные координаты точки z, матрица коэффициентов системы обратима.

Доказывается как теорема 3.

2. Рассмотрим в (11) подмножество, оставляющих на месте точки $e_{k+1}, \ldots, e_n \in \Omega_{VP^s}$ преобразований. Обозначим через $\Omega_{VP^s}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ подпространство в Ω_{VP^s} подвижных точек относительно данных преобразований. Тогда имеем отображение

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, \ldots, w_k, e_{k+1}, \ldots, e_n),\ e_l = \tilde{f}(e_l, w_1, \ldots, w_k, e_{k+1}, \ldots, e_n),\ l = k + 1, \ldots, n, \qquad (12)$$

которое в $\Omega_{VP^s}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ задает ФС ранга $(k+1{,}2)$, т.е. непрерывную группу преобразований. Если фиксируется другой набор точек $e^*_{k+1}, \ldots, e^*_n$, то получаем новое метрическое отображение, также задающее ФС ранга $(k + 1{,}2)$ на $\Omega_{VP^s}(e^*_{k+1}, \ldots, e^*_n)$:

$$z' = \tilde{f}(z, w_1, \ldots, w_k, e^*_{k+1}, \ldots, e^*_n),\ e^*_l = \tilde{f}(e^*_l, w_1, \ldots, w_k, e^*_{k+1}, \ldots, e^*_n),\ l = k + 1, \ldots, n. \qquad (1')$$

Теорема 10. *Две ФС ранга $(k+1{,}2)$ с метрическими функциями (12) и (12') эквивалентны.*

Доказывается так же, как и теорема 4.

3. Рассмотрим проективную плоскость над алгеброй гиперкомплексных чисел. Из теоремы 9 следует существование и единственность ФС ранга (5,2):

$$z'^1 = \frac{a_1 z^1 + a_2 z^2 + a}{c_1 z^1 + c_2 z^2 + c},\ z'^2 = \frac{b_1 z^1 + b_2 z^2 + b}{c_1 z^1 + c_2 z^2 + c}.$$

По теореме 10 фиксируя точку, получаем ФС ранга (4,2), эквивалентную структуре:

$$z'^1 = \frac{a_1 z^1 + a}{c_1 z^1 + c},\ z'^2 = \frac{b_1 z^1 + b_2 z^2 + b}{c_1 z^1 + c}.$$

Если зафиксировать еще одну точку, то получим ФС ранга (3,2):

$$z'^1 = a_1 z^1 + a,\ z'^2 = b_2 z^2 + b.$$

И, наконец, фиксирование третьей точки дает ФС ранга (2,2)

$$z'^1 = a_1 z^1,\ z'^2 = b_2 z^2.$$

4. Рассмотрим частный случай вещественной проективной плоскости RP^2. Тогда предыдущие формулы примут соответственно следующий вид — для (5,2):

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a}{c_1 x + c_2 y + c},\ y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{c_1 x + c_2 y + c},$$

для (4,2):

$$x' = \frac{a_1 x + a}{c_1 x + c},\ y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{c_1 x + c},$$

для (3,2):

$$x' = ax + b,\ y' = cy + d,$$

и, наконец, для (2,2):

$$x' = ax,\ y' = cy.$$

5. Рассмотрим еще действительное проективное пространство. Из теоремы 9 следует существование и единственность триметрической ФС ранга (6,2):

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d},\quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d},\quad z' = \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d}.$$

Фиксируя точку, получаем ФС ранга (5,2), эквивалентную структуре с метрическим отображением:

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a}{d_1 x + d_2 y + d},\quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{d_1 x + d_2 y + d},\quad z' = \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c}{d_1 x + d_2 y + d}.$$

Фиксируя вторую точку, получаем

$$x' = \frac{a_1 x + a}{d_1 x + d},\quad y' = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{d_1 x + d},\quad z' = \frac{c_1 x + c_3 z + c}{d_1 x + d}.$$

Фиксируем теперь третью точку:

$$x' = a_1 x + a,\ y' = b_2 y + b,\ z' = c_3 z + c.$$

И, наконец, фиксируя четвертую точку, приходим к структуре ранга (2,2):

$$x' = a_1 x, \; y' = b_2 y, \; z' = c_3 z.$$

6. **Теорема 11.** *На подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s существует ФС ранга $(s+3{,}2)$ тогда и только тогда, когда алгебра гиперкомплексных чисел V ассоциативна.*

Доказательство. Рассмотрим ФС ранга $(s+3{,}2)$ на подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s с метрическим отображением (13). Фиксируя $s+1$ точек, приходим к ФС ранга (2,2), эквивалентной структуре с отображением

$$z'^1 = a_1 z^1, \; \ldots, \; z'^s = a_s z^s.$$

Данное метрическое отображение является групповой операцией s-кратного прямого произведения мультипликативной группы алгебры гиперкомплексных чисел V. Значит, алгебра гиперкомплексных чисел V ассоциативна. Обратное очевидно. □

7. **Теорема 12.** *ФС ранга $(n+1,2)$, $n \geqslant s+3$ с метрической функцией $f : \Omega_{VP^s} \times N \to \Omega_{VP^s}$ не существует.*

Доказательство. Предположим, что ФС ранга $(n+1,2)$, $n \geqslant s+3$, существует. В $(3')$ положим $a_k = e_k$, $k = s+3, \ldots, n$, а также зафиксируем произвольные точки w_k:

$$\tilde{f}(\tilde{f}(z, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}(w_1, a_1, \ldots, a_n), \tilde{f}(w_2, a_1 \ldots, a_n), \ldots, \tilde{f}(w_{s+2}, a_1, \ldots, a_n), w_{s+3}, \ldots, w_n) =$$

$$= \tilde{f}(z, w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

Тогда метрическая функция (1) при фиксированных w_k, $k = s+3, \ldots, n$, удовлетворяет аксиомам A1, A2, A3 для $n = s+2$, т.е. задает ФС ранга $(s+3{,}2)$. Поэтому для метрического отображения, согласно теореме 9, получаем

$$z'^1 = \frac{a_1^1(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^1 + a_2^1(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^2 + \cdots + a_s^1(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^s + a^1(w_{s+3}, \ldots, w_n)}{a_1(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^1 + a_2(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^2 + \cdots + a_s(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^s + a(w_{s+3}, \ldots, w_n)},$$

$$z'^s = \frac{a_1^s(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^1 + a_2^s(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^2 + \cdots + a_s^s(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^s + a^s(w_{s+3}, \ldots, w_n)}{a_1(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^1 + a_2(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^2 + \cdots + a_s(w_{s+3}, \ldots, w_n) z^s + a(w_{s+3}, \ldots, w_n)}.$$

Это общий вид метрического отображения ФС ранга $(n+1,2)$, $n \geqslant s+3$, на подмножестве Ω_{VP^s} проективного пространства VP^s. Видно, что данное отображение вырождено по координатам второго множества, т.е. не задает ФС ранга $(n+1,2)$, $n \geqslant s+3$. □

Список литературы

[1] Н.В.Ефимов, Высшая геометрия, М., ФМ, 1961.

[2] А.А.Симонов, Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур, Приложение к книге Кулакова Ю.И. "Теория физических структур", М., Компания Юниверс Контракт, 2004.

[3] В.Д.Белоусов, Основы теории квазигрупп и луп, М., Наука, 1967.

[4] Л.С.Понтрягин, Непрерывные группы, М., Наука, 1973.

[5] S.K.Chatterjea, On Ward quasigroups, *Pure Math. Manuscript*, (1987), №6, 31–34.

[6] Г.Г.Михайличенко, Р.М.Мурадов, Физические структуры как геометрии двух множеств, Горно-Алтайск, Изд-во Горно-Алт. гос. ун-та, 2008.

[7] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, Основы теории групп Ли, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., ВИНИТИ, **20**(1988), 5–101.

[8] Г.Г.Михайличенко, Феноменологическая и групповая симметрия в геометрии двух множеств (теории физических структур), *Докл. АН СССР*, **24**(1985), №1, 39–41.

[9] В.В.Горбацевич, А.Л.Онищик, Группы Ли преобразований, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М., ВИНИТИ, **20**(1988), 108–248.

Projective Geometry and Phenomenological Symmetry

Vladimir A. Kyrov

In this paper it is investigated the physical structure of the maximal range in a projective space $(PV)^s$ over the algebra of hypercomplex numbers V. It is proved that this structure is formed by the group of projective transforms of the space $(PV)^s$.

Keywords: projective space, group of projective transforms.