Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(4), 527–535

УДК 512.544.2

# Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами

**Яков Н. Нужин***
Институт фундаментальной подготовки
Сибирский федеральный университет
Киренского, 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 18.05.2011, окончательный вариант 25.06.2011, принята к печати 10.07.2011

*Введено понятие производного ковра и установлено разложение ковровой подгруппы группы Шевалле над коммутативным кольцом в произведение производной ковровой подгруппы и ковровых подгрупп ранга 1.*

*Ключевые слова: группа Шевалле, коммутативное кольцо, ковер аддитивных подгрупп, факторизация.*

## Введение

При решении различных задач возникали наборы подмножеств (идеалов, аддитивных подгрупп и др.)

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

определенного ассоциативного кольца с условиями

$$\mathfrak{S}_{ir}\mathfrak{S}_{rj} \subseteq \mathfrak{S}_{ij},\ 1 \leqslant i, r, j \leqslant n, \tag{1}$$

см. [1–10]. Такие наборы назывались коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы — ковровыми, сетевыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. В данной статье используется первый термин. Понятия ковра и ковровой подгруппы были перенесены на группы Шевалле с различными модификациями и названиями [11–13]. Отбросив все диагональные множества $\mathfrak{S}_{ii}$, получаем элементарный ковер $\mathfrak{A}$, что собственно и происходило при переносе понятия ковра на группы Шевалле.

В недавней работе [14] В.А.Койбаев строит ковер $\mathfrak{B}$, производный (в оригинале "ассоциированную сеть") от исходного элементарного ковра аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}$ степени $n \geqslant 3$, полагая

$$\mathfrak{B}_{ij} = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} \mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j.$$

При $n = 3$ ковер $\mathfrak{B}$ можно наглядно представить таблицей

$$\begin{pmatrix} * & \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{32} & \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{32} & * & \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{32}\mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{12} & * \end{pmatrix}.$$

В статье производный ковер определяется для всех групп Шевалле над коммутативным кольцом с единицей и устанавливается разложение ковровой подгруппы в произведение производной ковровой подгруппы и ковровых подгрупп ранга 1.

*nuzhin2008@rambler.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

# 1. Обозначения и терминология

Далее $\Phi$ — приведенная неразложимая система корней ранга $l$, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа $\Phi$ над коммутативным кольцом $K$ с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\},\ r \in \Phi.$$

Подгруппы $X_r$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{2}$$

Назовем *(элементарным) ковром типа* $\Phi$ *ранга* $l$ *над* $K$ всякий набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$$

кольца $K$ с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js},\ \text{при } r, s, ir+js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0, \tag{3}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j),\ r, s, ir+js \in \Phi. \tag{4}$$

Здесь и далее $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над $K$ определяет *ковровую* подгруппу

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$$

в группе Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством $M$. Возникает следующий естественный вопрос: *будет ли подгруппа $M$, порожденная своими пересечениями $M \cap X_r$, $r \in \Phi$, ковровой?*

Если $\Phi = A_l, D_l, E_l$, то для любой пары линейно независимых корней $r$, $s$ и любых $t, u \in K$

$$[x_r(t), x_s(u)] = \begin{cases} x_{r+s}(\pm tu), & \text{если } r+s \in \Phi, \\ 1, & \text{если } r+s \notin \Phi, \end{cases}$$

и, следовательно, подгруппа $M$, порожденная пересечениями

$$M \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r),\ r \in \Phi,$$

является ковровой и определяется ковром аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$.

Однако, в общем случае, как показывают примеры 1 и 2, ответ на указанный выше вопрос отрицательный.

**Пример 1.** Пусть $M$ — подгруппа группы Шевалле типа $B_2$ над полем характеристики 2, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где $a$ и $b$ — фундаментальные корни. Тогда

$$[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(1)x_{2a+b}(1),$$

но по отдельности элементы $x_{a+b}(1)$ и $x_{2a+b}(1)$ не лежат в $M$ и, следовательно, $M$ не является ковровой подгруппой.

**Пример 2.** Пусть $M$ — подгруппа группы Шевалле типа $G_2$ над полем характеристики 3, порожденная двумя корневыми элементами $x_a(1)$ и $x_b(1)$, где $a$ и $b$ — фундаментальные корни. Тогда

$$[x_a(1), x_b(1)] = x_{a+b}(\pm 1)x_{2a+b}(\pm 1)x_{3a+b}(\pm 1)x_{3a+2b}(\pm 1),$$

но по отдельности элементы $x_{a+b}(1)$ и $x_{3a+b}(1)$ не лежат в $M$ и, следовательно, $M$ не является ковровой подгруппой.

Интересный пример ковра можно найти в книге Р.Стейнберга [15, §10, стр. 144].

**Пример 3.** Пусть $K$ — несовершенное поле характеристики 2. Множество квадратов его элементов $K^2$ является собственным подполем поля $K$. Пусть $\Phi = B_l$, $l \geqslant 2$. Положим

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} K, & \text{если } r \text{ короткий корень,} \\ K^2, & \text{если } r \text{ длинный корень.} \end{cases}$$

Тогда набор

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$$

является элементарным ковром. Р.Стейнберг называет ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A})$ "непонятной" и отмечает, что она является простой. В действительности, вместо $K^2$ можно взять любое подполе, лежащее между $K^2$ и $K$.

Несколько слов о терминологии. В 1976 г., описывая параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативными локальными кольцами, К.Сузуки [11] называет ковром (в оригинале "carpet") типа $\Phi$ над коммутативным кольцом $K$ всякий набор его идеалов $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ с условием

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s}, \text{ при } r, s, r+s \in \Phi. \tag{5}$$

Двумя годами позже, перенося результаты статьи [11] на полулокальные кольца, Н.А.Вавилов [12] называет наборы идеалов с условиями (5) сетями. Определение ковра, принятое в нашей статье, принадлежит В.М.Левчуку [13]. Оставим название *сеть* за наборами аддитивных подгрупп с условиями (5). Несложно показать, что любая сеть аддитивных подгрупп является ковром, однако, не всякий ковер является сетью, это, в частности, показывает пример 3. При $\Phi = A_l, D_l, E_l$ эти два понятия эквивалентны и, более того, они совпадают и для остальных систем корней $\Phi$, если пересечение мультипликативной группы кольца $K$ с аддитивной подгруппой, порожденной единицей, содержит все структурные константы $C_{ij,rs}$ коммутаторной формулой Шевалле [13, лемма 13].

В действительности, сеть типа $\Phi$ является автоматическим переносом на группы Шевалле понятия матричного ковра (сети). Этот автоматизм и приводил к ограничениям на характеристику основного кольца в применениях этого понятия в работах [11, 12] и др. и, как правило, для типов $B_l, C_l, F_4$ требовалась обратимость 2, а для типа $G_2$ — 2 и 3. В отличие от сети, ковер типа $\Phi$ определяется коммутаторной формулой (4), что, в конечном счете, и позволило получать различные результаты без ограничений на характеристику основного кольца. Наряду с первой работой [13] в данном направлении, см. также [16–19].

## 2. Производные ковры

По элементарному ковру $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ ранга $l \geqslant 2$ определим набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{B}_p = \sum_{\substack{i,j>0 \\ ir+js=p}} C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j, \ p \in \Phi,$$

где суммирование ведется по всем натуральным числам $i, j$ и корням $r, s \in \Phi$, для которых $ir + js = p$.

**Пример 4.** Пусть {a,b} — база системы корней $\Phi = B_2$. В этом случае коммутаторная формула имеет вид:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u),$$
$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu).$$

Поэтому

$$\mathfrak{B}_{a+b} = \mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b + \mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b},$$

$$\mathfrak{B}_{2a+b} = 2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} + \mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b + \mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b}.$$

Остальные шесть аддитивных подгрупп $\mathfrak{B}_p$ определяются аналогично.

Покажем, что набор $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_p \mid p \in \Phi\}$ является ковром. Пусть $\mathfrak{B}_{p_1}\mathfrak{B}_{p_2} \in \mathfrak{B}$. Тогда по определению набора $\mathfrak{B}$ имеем

$$\mathfrak{B}_{p_1} = \sum_{\substack{i_1,j_1>0\\ i_1r_1+j_1s_1=p_1}} C_{i_1j_1,r_1s_1}\mathfrak{A}_{r_1}^{i_1}\mathfrak{A}_{s_1}^{j_1},$$

$$\mathfrak{B}_{p_2} = \sum_{\substack{i_2,j_2>0\\ i_2r_2+j_2s_2=p_2}} C_{i_2j_2,r_2s_2}\mathfrak{A}_{r_2}^{i_2}\mathfrak{A}_{s_2}^{j_2}.$$

По определению ковра $\mathfrak{A}$, то есть в силу включений (3), получаем включения

$$C_{i_1j_1,r_1s_1}\mathfrak{A}_{r_1}^{i_1}\mathfrak{A}_{s_1}^{j_1} \subseteq \mathfrak{A}_{p_1},$$

$$C_{i_2j_2,r_2s_2}\mathfrak{A}_{r_2}^{i_2}\mathfrak{A}_{s_2}^{j_2} \subseteq \mathfrak{A}_{p_2}.$$

Отсюда $\mathfrak{B}_{p_1} \subseteq \mathfrak{A}_{p_1}$ и $\mathfrak{B}_{p_2} \subseteq \mathfrak{A}_{p_2}$, а следовательно,

$$C_{ij,p_1p_2}\mathfrak{B}_{p_1}^i\mathfrak{B}_{p_2}^j \subseteq C_{ij,p_1p_2}\mathfrak{A}_{p_1}^i\mathfrak{A}_{p_2}^j \subseteq \mathfrak{B}_{ip_1+jp_2},$$

если сумма $ip_1 + jp_2$ является корнем. Это и означает, что набор $\mathfrak{B}$ является ковром. Будем называть его *производным* от $\mathfrak{A}$.

Для каждой системы корней $\Phi$ определим число

$$m = m(\Phi) = \max_{r,s\in\Phi} \frac{(r,r)}{(s,s)}.$$

В действительности,

$$m = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi = A_l, D_l, E_l,\\ 2, & \text{если } \Phi = B_l, C_l, F_4,\\ 3, & \text{если } \Phi = G_2. \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Пусть $\mathfrak{B}$ — ковер, производный от ковра $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ ранга $l \geqslant 2$. Тогда*

$$m!\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_{-p}\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_p,\ p \in \Phi. \tag{6}$$

*Доказательство.* Пусть $\Phi = A_l, D_l, E_l$ и $p \in \Phi$. Тогда подгруппа $\mathfrak{B}_p$ аддитивно порождается множествами $\mathfrak{A}_{r_i}\mathfrak{A}_{s_i}$ для всех пар корней $r_i, s_i \in \Phi$ с условием $r_i + s_i = p$. Ясно, что корни $r_i, s_i$ составляют базу подсистемы корней типа $A_2$. В этом случае $m = 1$, поэтому нужно установить включения

$$(\mathfrak{A}_{r_1}\mathfrak{A}_{s_1})(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})(\mathfrak{A}_{r_3}\mathfrak{A}_{s_3}) \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

В силу определений элементарного ковра $\mathfrak{A}$ и производного ковра $\mathfrak{B}$ получаем

$$(\mathfrak{A}_{r_1}\mathfrak{A}_{s_1})(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})(\mathfrak{A}_{r_3}\mathfrak{A}_{s_3}) \subseteq \mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})\mathfrak{A}_p = (\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-s_2})(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_p) \subseteq \mathfrak{A}_{r_2}\mathfrak{A}_{s_2} \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Пусть $\Phi = B_l, C_l, F_4$ и $p$ — короткий корень из $\Phi$. Тогда подгруппа $\mathfrak{B}_p$ аддитивно порождается множествами $\mathfrak{A}_{r_i}\mathfrak{A}_{s_i}$ для всех пар корней $r_i, s_i \in \Phi$ с условием $r_i + s_i = p$, причем

для пар $r_i, s_i$ возможны следующие два случая: 1) $r_i, s_i$ — короткие корни; 2) $r_i$ — короткий корень, $s_i$ — длинный. Для каждого случая нужно установить включения

$$2(\mathfrak{A}_{r_1}\mathfrak{A}_{s_1})(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})(\mathfrak{A}_{r_3}\mathfrak{A}_{s_3}) \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Если пара $r_2, s_2$ типа 1), то

$$2(\mathfrak{A}_{r_1}\mathfrak{A}_{s_1})(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})(\mathfrak{A}_{r_3}\mathfrak{A}_{s_3}) \subseteq 2\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})\mathfrak{A}_p =$$

$$= 2(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-s_2})(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_p) \subseteq 2\mathfrak{A}_{r_2}\mathfrak{A}_{s_2} \subseteq 2\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Если пара $r_2, s_2$ типа 2), то

$$2(\mathfrak{A}_{r_1}\mathfrak{A}_{s_1})(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})(\mathfrak{A}_{r_3}\mathfrak{A}_{s_3}) \subseteq 2\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_{-s_2})\mathfrak{A}_p =$$

$$= (\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-s_2})(2\mathfrak{A}_{-r_2}\mathfrak{A}_p) \subseteq \mathfrak{A}_{r_2}\mathfrak{A}_{s_2} \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Заметим, что, в отличие о первого случая, в этом случае коэффициент $m! = 2$ из включения (6) существенно используется.

Пусть $\Phi = B_l, C_l, F_4$ и $p$ — длинный корень из $\Phi$. Тогда подгруппа $\mathfrak{B}_p$ аддитивно порождается множествами $2\mathfrak{A}_{r_i}\mathfrak{A}_{r_i+s_i}$, $\mathfrak{A}^2_{r_i}\mathfrak{A}_{s_i}$ и $\mathfrak{A}_{p_i}\mathfrak{A}_{q_i}$ для всех пар корней $r_i, s_i \in \Phi$ с условием $2r_i + s_i = p$ и соответственно для всех пар длинных корней $p_i, q_i \in \Phi$ с условием $p_i + q_i = p$. Таким образом, достаточно показать каждое и следующих трех включений:

$$2\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}_{-p_i}\mathfrak{A}_{-q_i})\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{B}_p;$$

$$2\mathfrak{A}_p(2\mathfrak{A}_{-r_i}\mathfrak{A}_{-r_i-s_i})\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{B}_p;$$

$$2\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}^2_{-r_i}\mathfrak{A}_{-s_i})\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Два первых включения устанавливаются так же, как и в случае 1) для короткого корня $p$, причем в обоих случаях опять с избыточным умножением на 2. В третьем случае

$$2\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}^2_{-r_i}\mathfrak{A}_{-s_i})\mathfrak{A}_p \subseteq 2(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-r_i})(\mathfrak{A}_{-r_i}\mathfrak{A}_{-s_i})\mathfrak{A}_p \subseteq 2\mathfrak{A}_{r_i+s_i}\mathfrak{A}_{-r_i-s_i}\mathfrak{A}_p \subseteq 2\mathfrak{A}_{r_i+s_i}\mathfrak{A}_{r_i} \subseteq \mathfrak{A}_p.$$

Наконец, рассмотрим самый сложный случай $\Phi = G_2$. Пусть $\{a, b\}$ — база $\Phi$. В этом случае коммутаторная формула имеет вид:

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u)x_{3a+b}(\pm t^3u)x_{3a+2b}(\pm t^3u^2),$$

$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu)x_{3a+b}(\pm 3t^2u)x_{3a+2b}(\pm 3tu^2),$$

$$[x_a(t), x_{2a+b}(u)] = x_{3a+b}(\pm 3tu),$$

$$[x_b(t), x_{3a+b}(u)] = x_{3a+2b}(\pm tu).$$

Не теряя общности, можно считать, что $p$ есть либо $3a + 2b$, либо $2a + b$.

Пусть $p = 3a + 2b$. Тогда подгруппа $\mathfrak{B}_p$ аддитивно порождается множествами:

$$\mathfrak{A}_{3a+b}\mathfrak{A}_b, \quad 3\mathfrak{A}_{2a+b}\mathfrak{A}_{a+b}, \quad 3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}^2_{a+b}, \quad 3\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}^2_{2a+b}, \quad \mathfrak{A}^3_a\mathfrak{A}^2_b, \quad \mathfrak{A}^3_{-a}\mathfrak{A}^2_{3a+b}.$$

Таким образом, достаточно показать включения

$$6\mathfrak{A}_pM\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{B}_p,$$

где $M$ совпадает с одним из следующих шести множеств:

$$\mathfrak{A}_{-3a-b}\mathfrak{A}_{-b}, \quad 3\mathfrak{A}_{-2a-b}\mathfrak{A}_{-a-b}, \quad 3\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}^2_{-a-b}, \quad 3\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}^2_{-2a-b}, \quad \mathfrak{A}^3_{-a}\mathfrak{A}^2_{-b}, \quad \mathfrak{A}^3_a\mathfrak{A}^2_{-3a-b}.$$

В первом случае

$$6\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}_{-3a-b}\mathfrak{A}_{-b})\mathfrak{A}_p \subseteq 6(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-3a-b})(\mathfrak{A}_{-b}\mathfrak{A}_p) \subseteq 6\mathfrak{A}_b\mathfrak{A}_{3a+b} \subseteq 6\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

В втором случае

$$6\mathfrak{A}_p(3\mathfrak{A}_{-2a-b}\mathfrak{A}_{-a-b})\mathfrak{A}_p \subseteq 18(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-2a-b})(\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_p) \subseteq 18\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq 6\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

В третьем случае

$$6\mathfrak{A}_p(3\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}^2_{-a-b})\mathfrak{A}_p \subseteq 18(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-a-b})\mathfrak{A}_{-a}(\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_p) \subseteq 18\mathfrak{A}_{2a+b}\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} =$$

$$= 9\mathfrak{A}_{2a+b}(2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b}) = 9\mathfrak{A}_{2a+b}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq 3\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Четвертый случай подобен третьему. В пятом случае

$$6\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}^3_{-a}\mathfrak{A}^2_{-b})\mathfrak{A}_p \subseteq 6\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}^2_{-a}(\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b})(\mathfrak{A}_{-b}\mathfrak{A}_p) \subseteq 6\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}^2_{-a}\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_{3a+b} \subseteq$$

$$\subseteq 6(\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-a-b})\mathfrak{A}_{-a}(\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{3a+b}) \subseteq 6\mathfrak{A}_{2a+b}\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} =$$

$$= 3\mathfrak{A}_{2a+b}(2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b}) \subseteq 3\mathfrak{A}_{2a+b}\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Шестой случай подобен пятому.

Пусть $p = 2a + b$. Тогда подгруппа $\mathfrak{B}_p$ аддитивно порождается множествами:

$$\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{3a+b}, \quad \mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_{3a+2b}, \quad 2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b}, \quad \mathfrak{A}^2_a\mathfrak{A}_b, \quad \mathfrak{A}^2_{a+b}\mathfrak{A}_{-b}.$$

Таким образом, достаточно показать включения

$$6\mathfrak{A}_pM\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{B}_p,$$

где $M$ совпадает с одним из следующих пяти множеств:

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-3a-b}, \quad \mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-3a-2b}, \quad 2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-a-b}, \quad \mathfrak{A}^2_{-a}\mathfrak{A}_{-b}, \quad \mathfrak{A}^2_{-a-b}\mathfrak{A}_b.$$

В первом случае

$$6\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{-3a-b})\mathfrak{A}_p \subseteq 2(3\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_a)(\mathfrak{A}_{-3a-b}\mathfrak{A}_p) \subseteq 2\mathfrak{A}_{3a+b}\mathfrak{A}_{-a} \subseteq 2\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Второй случай подобен первому. В третьем случае

$$6\mathfrak{A}_p(2\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-a-b})\mathfrak{A}_p = 6(2\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-a})\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_p \subseteq 6\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_p =$$

$$= 2(3\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_p)\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq 2\mathfrak{A}_{3a+2b}\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq 2\mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{A}_p.$$

В четвертом случае

$$6\mathfrak{A}_p(\mathfrak{A}^2_{-a}\mathfrak{A}_{-b})\mathfrak{A}_p \subseteq 3(2\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_{-a})(\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b})\mathfrak{A}_p \subseteq 3\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-a-b}\mathfrak{A}_p =$$

$$= (3\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_p)\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{3a+2b}\mathfrak{A}_{-a-b} \subseteq \mathfrak{B}_p.$$

Пятый случай подобен четвертому. □

Отметим, что для $\Phi = A_l$ включения (6) установил ранее В.А.Койбаев [14].

## 3. Факторизация ковровой подгруппы

Пусть $r, s$ линейно независимые корни, то есть $r \neq \pm s$, и $t, u \in K$. Тогда коммутаторную формулу (4) можно переписать в виде

$$x_s(u)x_r(t) = x_r(t)x_s(u) \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \tag{7}$$

где суммирование берется по всем парам положительных чисел $i, j$, для которых $ir + js$ корень, по возрастанию суммы $i + j$. Числа $C_{ij,rs}$ называются структурными константами и совпадают с одним из чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Для любого $r \in \Phi$ положим

$$E_r(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r),\ x_{-r}(\mathfrak{A}_{-r})\rangle.$$

Зафиксируем какой-либо линейный порядок на множестве положительных корней $\Phi^+$ системы корней $\Phi$. Пусть

$$\Phi^+ = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}.$$

В группе $E(\Phi, \mathfrak{A})$ выделим подмножества $G_0, G_1, \ldots, G_k$. По определению

$$G_0 = E(\Phi, \mathfrak{B}),$$

где $\mathfrak{B}$ — ковер, производный от ковра $\mathfrak{A}$, и при $i = 1, 2, \ldots, k$

$$G_i = G_{i-1}E_{r_i}(\Phi, \mathfrak{A}).$$

**Теорема 2.** *Пусть $\mathfrak{B}$ — ковер, производный от ковра $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ ранга $l \geqslant 2$ над кольцом $K$. Тогда каждое множество $G_i$ является подгруппой, причем*

$$E(\Phi, \mathfrak{B}) = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \cdots \leqslant G_k = E(\Phi, \mathfrak{A}) \tag{8}$$

*В частности,*

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = E(\Phi, \mathfrak{B}) \prod_{r \in \Phi^+} E_r(\Phi, \mathfrak{A}), \tag{9}$$

*где сомножители $E_r(\Phi, \mathfrak{A})$ в произведении можно брать в любом порядке.*

*Доказательство.* Включения (8) и равенство (9) получаются вытягиванием вправо корневых элементов из $E_r(\Phi, \mathfrak{A})$ в нужном порядке с помощью соотношений (7). При этом, если соседние корневые элементы не лежат в одной подгруппе $E_r(\Phi, \mathfrak{A})$ и не коммутируют, то появляется дополнительно либо один корневой элемент из $E(\Phi, \mathfrak{B})$, либо произведение двух, трех или четырех корневых элементов, каждый из которых также лежит в подгруппе $E(\Phi, \mathfrak{B})$ в силу ее определения. □

Для $\Phi = A_l$ факторизацию (9) установил ранее В.А.Койбаев [20].

Отметим также, что теорема 2 может быть полезна при исследовании следующих вопросов В.М.Левчука.

А) *Какие условия на ковер $\mathfrak{A}$ (в терминах $\mathfrak{A}_r$) над коммутативным кольцом $K$ необходимы и достаточны для того, чтобы ковер $\mathfrak{A}$ был допустимым?* [21, вопрос 7.28, 1980 г.]

Б) *Верно ли, что для допустимости ковра $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ над полем $K$ необходима и достаточна допустимость его подковров $\{\mathfrak{A}_r,\ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1?* [21, вопрос 15.46, 2002 г.]

Ковер $\mathfrak{A}$ типа $\Phi$ ранга $l$ над кольцом $K$ называется *допустимым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r),\ r \in \Phi.$$

В пользу положительного ответа на вопрос Б) свидетельствует тот факт, что соотношения (2), коммутаторная формула Шевалле (4), из которой происходит условие ковровости (3), и соотношения в группах $\langle X_r,\ X_{-r}\rangle,\ r \in \Phi$, составляют полную систему определяющих отношений универсальной группы Шевалле над полем [15, §6, теорема 8]. Отметим также, что в случае локально конечного поля $K$ в [16] получен положительный ответ на вопрос Б).

Хорошо известно, что элементарный (матричный) ковер

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j\}$$

продолжается до полного ковра тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j,$$

см., например, [10, стр. 25] или [13, лемма 6]. Это продолжение можно получить, положив

$$\mathfrak{A}_{ii} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji},\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

и в этом случае множество матриц вида

$$e + \sum_{i,j=1}^{n} \mathfrak{A}_{ij} e_{ij}$$

является полугруппой относительно матричного умножения, где $e$ — единичная матрица, $e_{ij}$ — матрица, у которой на позиции $(i, j)$ стоит 1, а на остальных местах нули. При $\Phi = A_{n-1}$ ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ порождается трансвекциями

$$t_{ij}(u) = e + ue_{ij},\ u \in \mathfrak{A}_{ij},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j.$$

Таким образом, если ковер типа $A_l$ продолжается до полного ковра, то он является допустимым. Отсюда в силу теоремы 1 производный ковер типа $A_l$ является допустимым и, следовательно, для этого типа теорема 2 дает разложение ковровой подгруппы в произведение подгрупп, определяемых допустимыми коврами, если потребовать как в вопросе Б) допустимость всех подковров ранга 1. Поэтому в связи с возможными применениями теоремы 2 к вопросам А) и Б) представляет интерес следующий вопрос.

В) *Будет ли любой производный ковер типа* $\Phi$ *над коммутативным кольцом* $K$ *допустимым?*

*Исследования поддержаны грантом РФФИ (проект №01–09–00717).*

## Список литературы

[1] C.Chevalley, L'arithmetique dans les algebres de matrices, *Actual. scient. et industr.*, №323, Paris, 1936.

[2] M.Newman, R.Reiner, Inclusion theorem for congruence subgroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91**(1959), №3, 369–380.

[3] Ю.И.Мерзляков, Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп, *Алгебра и логика*, **3**(1964), №4, 48–58.

[4] Д.К.Фаддеев, Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, *Труды матем. института АН СССР*, **80**(1965), 145–182.

[5] Н.С.Романовский, Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом, *Матем. заметки*, **6**(1969), №3, 335–345.

[6] Н.С.Романовский, О подгруппах общей и специальных линейных групп над кольцом, *Матем. заметки*, **9**(1971), №6, 699–708.

[7] М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков, Основы теории групп, М., Наука, 1972.

[8] З.И.Боревич, О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом, *Вестник ЛГУ*, **13**(1976), №3, 16–24.

[9] З.И.Боревич, Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц, *Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР*, **64**(1976), 12–29.

[10] З.И.Боревич, О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями, *Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР*, **75**(1978), 22–31.

[11] K.Suzuki, On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings, *Tohoku Math. J.*, **29**(1976), №1, 57–66.

[12] Н.А.Вавилов, О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом, *Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР*, **75**(1978), 43–58

[13] В.М.Левчук, Параболические подгруппы некоторых $AB\Lambda$-групп, *Матем. заметки*, **31**(1982), №4, 509–525.

[14] В.А.Койбаев, Сети, ассоциированные с элементарными сетями, *Владикавказский матем. журнал*, **12**(2010), №4, 39–43.

[15] Р.Стейнберг, Лекции о группах Шевалле, М., Мир, 1975.

[16] В.М.Левчук, Порождающие множества корневых элементов групп Шевалле над локально конечным полем, *Алгебра и логика*, **22**(1983), №4, 48–58.

[17] В.М.Левчук, Центральные ряды и ряды коммутантов некоторых подгрупп групп Шевалле, *Докл. АН СССР*, **313**(1990), №4, 799–802.

[18] В.М.Левчук, Коммутаторное строение некоторых подгрупп групп Шевалле, *Укр. матем. журнал*, **44** (1992), №6, 786–795.

[19] С.Г.Колесников, В.М.Левчук, Обобщенные конгруэнц-подгруппы групп Шевалле, *Сиб. мат. журн.*, **40**(1999), №22, 336–351.

[20] В.А.Койбаев, Элементарные сети, *Труды ИММ Уро РАН*, **17**(2011), №4 (в печати).

[21] Коуровская тетрадь, 17-е изд., Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2010.

# Factorization of Carpet Subgroups of the Chevalley Groups over Commutative Rings

**Yakov N. Nuzhin**

*A concept of derivative carpet is introduced and it is proved that a carpet subgroup of the Chevalley group over commutative ring is a product of the derivative carpet subgroup and carpet subgroups of rank 1.*

*Keywords: Chevalley groups, commutative ring, carpet of additive subgroups, factorization.*