

УДК 512.54

Прямая и обратная задача о совместном движении трех вязких жидкостей в плоских слоях

Елена Н. Лемешкова*

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 29.01.2011, окончательный вариант 29.03.2011, принята к печати 01.04.2011

Найдено точное стационарное решение задачи о совместном однонаправленном движении трех вязких жидкостей в плоских слоях. Решение прямой и обратной нестационарной задачи получено в виде конечных аналитических формул методом преобразования Лапласа. Доказано, что если градиент давления в одной из жидкостей имеет конечный предел, то их решение выходит на стационарный режим. Для задачи о движении "затопленного слоя" показано, что скорости с ростом времени стремятся к разным постоянным.

Ключевые слова: поверхность раздела, краевая задача, преобразование Лапласа.

1. Постановка задачи

В приложениях часто возникают ситуации, когда имеется совместное движение трех жидких сред, контактирующих по некоторым поверхностям. Если контактирующие жидкости не растворимы друг в друге, то они образуют более или менее чёткие выраженные границы раздела. Типичный пример такой ситуации — система вода–нефть–воздух. Границы между этими средами стабильны в состоянии системы, близком к устойчивому равновесию (например, нефтяное пятно на поверхности водоема). Даже при развитии неустойчивости границы раздела (что может иметь место, в частности, при вытеснении нефти водой в капиллярах) описание движения такой среды, как системы несмешивающихся жидкостей, зачастую оказывается адекватным, в том числе и в диапазоне параметров, характеризующемся изменением топологии поверхности раздела.

Приведём условия на границе раздела, следуя работе [1]. Обозначим поверхность раздела через Γ . Тогда на ней выполнено кинематическое условие

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = V_n,$$

где \mathbf{n} — вектор нормали из области 1 в область 2 к поверхности раздела, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — скорости контактирующихся жидкостей, V_n — скорость перемещения поверхности Γ в направлении нормали \mathbf{n} . Если $f(x, t) = 0$ есть неявное уравнение поверхности Γ , то $V_n = -f_t / |\nabla_x f|$, $\nabla_x f = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3})$.

Также выполнено динамическое условие

$$[\mathcal{P}] \cdot \mathbf{n} = 2\sigma H \mathbf{n},$$

где \mathcal{P} — тензор напряжений, символ $[\mathcal{P}]$ означает скачок тензора на Γ , σ — коэффициент поверхностного натяжения, H — средняя кривизна поверхности Γ .

*lena_lemeshkova@mail.ru

Наряду с условиями, вытекающими из законов сохранения массы и импульса, на границе раздела выполняется непрерывность скорости

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2.$$

В типичной ситуации каждая из областей, помимо их общей "внутренней" границы Γ , имеет и "внешнюю" границу $S_{1,2}$. Будем предполагать, что границы $S_{1,2}$ являются поверхностями твёрдых тел и неподвижны. Тогда на них выполнены условия прилипания

$$\mathbf{u}_{1,2}|_{S_{1,2}} = 0.$$

В качестве основной модели движения вязкой жидкости будем использовать уравнения Навье-Стокса без учёта внешних сил.

При рассмотрении однонаправленного движения в плоских слоях $-h_1 < y < 0$, $0 < y < h_2$, $h_2 < y < h_3$ с общей границей раздела $y = 0$, $y = h_1$ и твёрдыми стенками $y = -h_1$, $y = h_3$ будем предполагать, что вектор скорости имеет $\mathbf{u}_j = (u_j(y, t), 0, 0)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда давление в каждой из жидкостей представимо в виде $p_j = \rho_j f_j(t)x + \alpha_j(t)$ с произвольными $f_j(t), \alpha_j, \rho_j > 0$ — постоянные плотности жидкостей. После подстановки в уравнения Навье-Стокса функции $u_j(y, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy} - f_1(t), -h_1 < y < 0; \quad (1)$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy} - f_2(t), 0 < y < h_2; \quad (2)$$

$$u_{3t} = \nu_3 u_{3yy} - f_3(t), h_2 < y < h_3. \quad (3)$$

Предполагается, что движение происходит только за счёт перепада давления, поэтому

$$u_j(y, 0) = 0. \quad (4)$$

Динамические условия на поверхности раздела приводят к равенству касательных напряжений

$$\mu_1 u_{1y}(0, t) - \mu_2 u_{2y}(0, t) = 0, \quad (5)$$

$$\mu_2 u_{2y}(h_2, t) - \mu_3 u_{3y}(h_2, t) = 0 \quad (6)$$

и соотношению $\rho_1 f_1 = \rho_2 f_2 = \rho_3 f_3$.

Кинематические условия приводят к равенствам:

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), u_2(h_2, t) = u_3(h_2, t). \quad (7)$$

К граничным соотношениям (5)–(7) добавляются условия прилипания на твёрдых стенках:

$$u_1(-h_1, t) = 0, u_3(h_3, t) = 0. \quad (8)$$

Аналогичная задача о движении двух вязких жидкостей изучена в работе [2].

2. Стационарное течение

Предположим, что скорость и давление не зависят от времени — стационарное течение, тогда начальные условия не ставятся. Поэтому $u_j = u_j^0(y)$, $f_j = f_j^0 = \text{const}$ и уравнения (1)–(3) примут вид $u_{jyy}^0 = f_j/\nu_j$, $j = 1, 2, 3$, откуда

$$u_j = \frac{f_j^0}{2\nu_j} y^2 + c_j^1 y + c_j^2. \quad (9)$$

Постоянные c_j^1 и c_j^2 определим из граничных условий (4) – (8) и, после некоторых вычислений, найдем представления для скоростей:

$$\begin{aligned} u_1^0(y) &= \frac{\rho_1 f_1^0 h_3^2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{h}_1^2 y^2}{h_1^2} + \frac{\bar{h}_1 g y}{h_1} + \bar{h}_1 (g - \bar{h}_1) \right]; \\ u_2^0(y) &= \frac{\rho_1 f_1^0 h_3^2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{h}_1^2 \bar{\mu}_1 y^2}{h_1^2} + \frac{\bar{h}_1 \bar{\mu}_1 g y}{h_1} + \bar{h}_1 (g - \bar{h}_1) \right]; \\ u_3^0(y) &= \frac{\rho_1 f_1^0 h_3^2 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{h}_1^2 y^2}{h_1^2} + \frac{\bar{h}_1 g y}{h_1} - 1 - g \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Проведем обезразмеривание всех скоростей на $\rho_1 f_1^0 h_3^2 / 2\mu_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(\xi) &= \bar{h}_1^2 \xi^2 + g \bar{h}_1 \xi, \quad -1 \leq \xi \leq 0, \\ \bar{u}_2^0(\xi) &= \bar{h}_1^2 \bar{\mu}_1 \xi^2 + g \bar{h}_1 \bar{\mu}_1 \xi + (1 - \bar{\mu}_1)(\bar{h}_1 + g), \quad 0 \leq \xi \leq \bar{h}_2 / \bar{h}_1, \\ \bar{u}_3^0(\xi) &= \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{h}_1^2 \xi^2 + g \bar{h}_1 \xi - 1 - g), \quad \bar{h}_2 / \bar{h}_1 \leq \xi \leq 1 / \bar{h}_1, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\xi = y/h_1$, $\bar{h}_1 = h_1/h_3$, $\bar{h}_2 = h_2/h_3$, $g = \frac{\bar{h}_1^2 + \bar{\mu}_1(\bar{\mu}_2 - 1)\bar{h}_2^2 - \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{\bar{h}_1 + \bar{\mu}_1(1 - \bar{\mu}_2)\bar{h}_2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}$.

На рис. 1 приведён вид профилей скоростей в слоях. Кривая 2 хорошо демонстрирует разрыв производных скоростей на линиях раздела $\xi = 0$, $\xi = \bar{h}_2$.

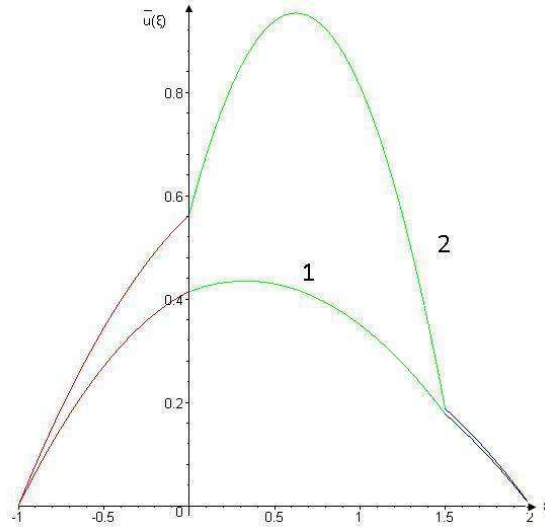


Рис. 1. Кривая 1: $\mu_1 = 1,5$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$; кривая 2: $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 6$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1,5$, $h_3 = 2$

3. Решение нестационарной задачи методом преобразований Лапласа

Применим преобразование Лапласа к задаче (1)–(8). Получим для изображений $U_j(y, p)$ уравнение

$$U_{jyy} - \frac{pU_j}{\nu_j} = \frac{F_j}{\nu_j}, \quad (12)$$

где $F_j = F_j(p)$ — изображения функций $f_j(t)$, $j = 1, 2, 3$; использованы начальные условия (4). К (12) добавляются преобразованные условия (5)–(8):

$$\mu_1 U_{1y}(0, p) - \mu_2 U_{2y}(0, p) = 0, \quad (13)$$

$$\mu_2 U_{2y}(h_2, p) - \mu_3 U_{3y}(h_2, p) = 0. \quad (14)$$

$$U_1(0, p) = U_2(0, p), U_2(h_2, p) = U_3(h_2, p). \quad (15)$$

$$U_1(-h_1, p) = 0, U_3(h_3, p) = 0 \quad (16)$$

Общее решение уравнения (12), $j = 1, 2, 3$, имеет вид

$$U_j = C_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}}(y + h_1) + C_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}}(y + h_1) - \frac{F_j}{p}, \quad (17)$$

где постоянные C_1^j, C_2^j определим из граничных условий (13)–(16):

$$\begin{aligned} C_1^1 &= \frac{1}{\Delta} \left[-b_1 - (a_2 b_2 + a_1 b_3) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 + (a_2 b_3 + a_1 b_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right], \\ C_1^2 &= \frac{F_1}{p}, \\ C_2^1 &= \frac{1}{\Delta} \left[-b_1 \left(-\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 + \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\nu_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + a_2 \left(b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\nu_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \right) \right], \\ C_2^2 &= \frac{1}{\Delta} \left[b_1 \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\nu_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - a_1 \left(b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\nu_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \right) \right], \\ C_3^1 &= \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2) \right)^{-1} \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_2}} \left(C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2) \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 + h_1) - \frac{F_3}{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_1 + h_2) \right), \\ C_3^2 &= \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2) \right)^{-1} \left(\frac{F_3}{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_1 + h_2) - \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_2}} \left(C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2) \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 + h_1) \right), \\ a_1 &= \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2) + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2), \\ a_2 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2) + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (h_1 + h_2), \\ b_1 &= \frac{F_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2) p} + \frac{F_2 - F_3}{p}, b_2 = \frac{1}{p} \left[F_1 (1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1) - F_2 \right], b_3 = -\frac{\bar{\mu}_1 F_1}{\sqrt{\nu_1} p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Delta = a_2 \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right) +$$

$$+ a_1 \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 - \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right),$$

где $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2, \bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3, \bar{\nu}_1 = \nu_1/\nu_2, \bar{\nu}_2 = \nu_2/\nu_3$.

Предположим, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = f_1^0 = \text{const}$, тогда $\lim_{p \rightarrow 0} pF_1(p) = f_1^0$ [3]. Используя равенства (17)–(18), проводя достаточно длинные выкладки, можно доказать (подобно работе [2]) предельные равенства $\lim_{p \rightarrow 0} pU_j(y, p) = u_j^0$. Значит, решение $u_j(y, t)$ нестационарной задачи (1)–(8) в этом случае сходится к решению (10) стационарной задачи.

На рис. 2 зелёным цветом изображён случай, когда $\bar{f}(\tau) = 1 + e^{-\tau} \cos(\tau)$, а красным — $\bar{f}(\tau) = \sin(5\tau)$, то есть $\bar{f}(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$ и решение не сходится к стационарному; $\bar{f}(\tau) = f_1(t)/f_1^0$ — безразмерный градиент давления в первой жидкости, $\tau = \nu_1 t h_1^{-2}$ — безразмерное время. В первом случае, как и следовало ожидать, решение сходится к стационарному режиму.

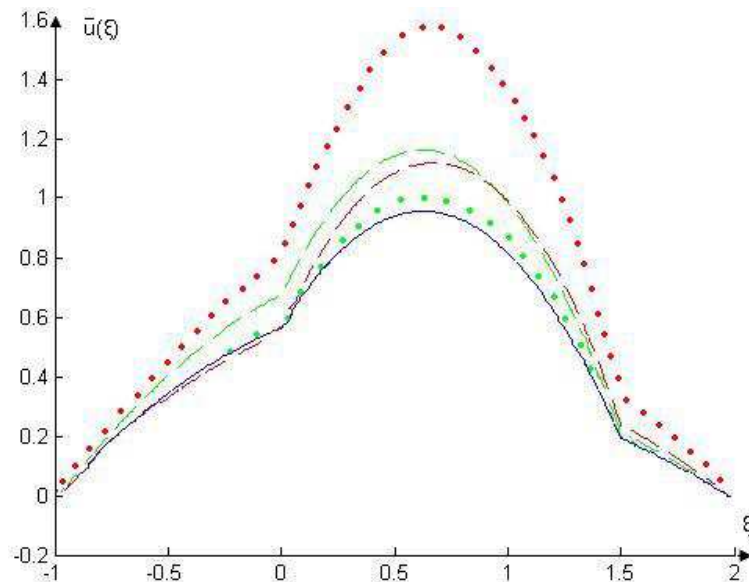


Рис. 2. Профили скоростей в слоях при $\mu_1 = 1,5, \mu_2 = 2, \mu_3 = 3, h_1 = 1, h_2 = 1,5, h_3 = 2$
 $\tau = 3(\dots), \tau = 1,5(-)$, стационарное решение(-)

4. Об определении градиента давления

Очень часто вместо перепада давления задают объёмный расход жидкостей в слоях:

$$q_1(t) = \int_0^{h_1} u_1(y, t) dy, q_2(t) = \int_{h_1}^{h_2} u_2(y, t) dy, q_3(t) = \int_{h_2}^{h_3} u_3(y, t) dy. \quad (19)$$

Применяя преобразование Лапласа к равенствам (19) и используя формулы (17), получим выражения для изображений $q_j(t)$, $j = 1, 2, 3$:

$$Q_1(p) = C_1^1 \sqrt{\frac{\nu_1}{p}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 - 1 \right) + C_2^1 \sqrt{\frac{\nu_1}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 + \frac{F_1}{p} h_1, \quad (20)$$

$$Q_2(p) = C_1^2 \sqrt{\frac{\nu_2}{p}} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right) + C_2^2 \sqrt{\frac{\nu_2}{p}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right) + \frac{F_2}{p} (h_2 - h_1), \quad (21)$$

$$Q_3(p) = C_1^3 \sqrt{\frac{\nu_3}{p}} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_3 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_2 \right) + C_2^3 \sqrt{\frac{\nu_3}{p}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_3 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_2 \right) + \frac{F_3}{p} (h_3 - h_2). \quad (22)$$

Предположим, что расход $q_1(t)$ в первом слое задан. Тогда из (20) найдется $F_1(p)$, а значит, и градиент давления $f_1(t)$. Поскольку $\rho_1 F_1(p) = \rho_2 F_2(p) = \rho_3 F_3(p)$, то расходы в двух других слоях могут быть определены по формулам (21), (22). Преобразования Лапласа скоростей (а значит, и сами скорости в слоях) находятся по формулам (17), (18). Таким образом, решена обратная задача: по известному расходу в одном из слоёв однозначно определены два других расхода и скорости в слоях.

Найдем теперь поведение $f_1(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$. Для этого предположим, что существуют пределы ($q_1(0) = 0$, так как $u_1(y, 0) = 0$)

$$\lim_{t \rightarrow 0} q_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = q_\infty,$$

причем расход $q_1(t)$ задан. Согласно свойствам преобразования Лапласа

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pQ_1(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow 0} pQ_1(p) = q_\infty.$$

Выражение для $F_1(p)$ найдем из (20) в виде

$$F_1(p) = \frac{Q_1(p)}{C_1^1 \sqrt{\frac{\nu_1}{p}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 - 1 \right) + \frac{\sqrt{\nu_1}}{p\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} + \frac{h_1}{p}}.$$

Из предыдущей формулы и выражения для C_1^1 из (18) получим

$$pF_1(p) \approx \frac{pQ_1(p)}{2h_1} p.$$

Таким образом, чтобы при $t \rightarrow \infty$ градиент давления $f_1(t)$ имел конечный предел, должно выполняться $Q_1(p) \approx p^{-2}$ при $p \rightarrow 0$. На рис. 3 показано поведение безразмерного градиента давления для безразмерного расхода $q(\tau) = e^{-\tau} \sin \tau$. Для него $Q_1(p) = ((p+1)^2 + 1)^{-1}$, и $f(\tau)$ имеет разрыв при $\tau \approx 4, 28$ (преобразование Лапласа для таких функций существует [3]). Физически разрыв означает, что при $\tau > 4, 28$ скорость меняет знак при заданном ξ .

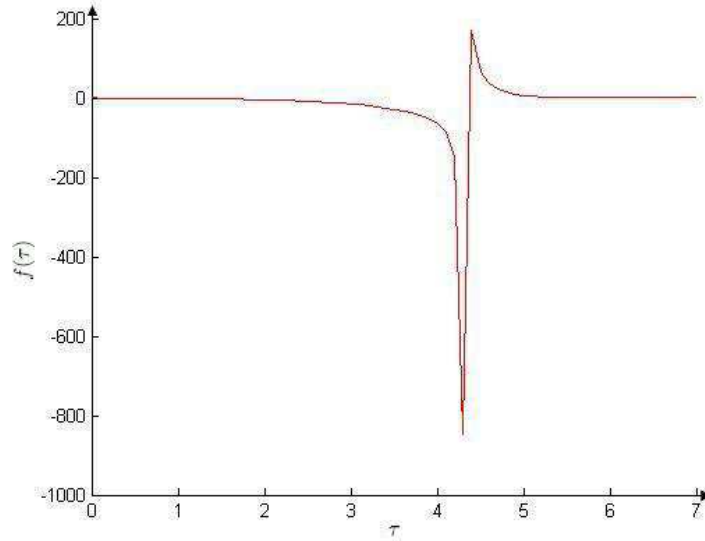


Рис. 3. Градиент давления $f(\tau)$ при $q_1(\tau) = e^{-\tau} \sin \tau$

5. Случай полубесконечных областей

Устремим h_1, h_3 к бесконечности, считая, что выполнены условия $|U_1(y, p)| < \infty, y \rightarrow -\infty$; $|U_3(y, p)| < \infty, y \rightarrow \infty$. Тогда решения уравнения (12) примут вид

$$\begin{aligned} U_1(y, p) &= C_1 e^{\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} y} - \frac{F_1}{p}, -\infty \leq y \leq 0; \\ U_2(y, p) &= C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} y + C_4 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} y - \frac{F_2}{p}, 0 \leq y \leq h_2; \\ U_3(y, p) &= C_3 e^{-\sqrt{\frac{p}{\nu_3}} y} - \frac{F_3}{p}, h_2 \leq y \leq \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как динамические и кинематические условия не меняются, то постоянные C_j определяются из условий (13)–(16) (они также получаются из (18) при $h_{1,3} \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} C_1 &= C_4 + \frac{F_1(1 - \bar{\rho}_1)}{p}, C_2 = \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} C_1, \\ C_3 &= \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \left(C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 + C_4 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 \right) e^{\sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_2}, \\ C_4 &= \frac{F_1 \left[\frac{\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1}{\operatorname{ch} \sqrt{\bar{p}}} + \frac{\bar{\mu}_1(\bar{\rho}_1 - 1)}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} - \operatorname{th} \sqrt{\bar{p}} \right) \right]}{p \left[\left(\frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} - \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \right) \operatorname{th} \sqrt{\bar{p}} + \frac{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2}} - 1 \right]} \end{aligned} \quad (24)$$

где $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2, \bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3, \bar{\nu}_1 = \nu_1/\nu_2, \bar{\nu}_2 = \nu_2/\nu_3, \bar{\rho}_1 = \rho_1/\rho_2, \bar{\rho}_2 = \rho_1/\rho_3, \bar{p} = p h_2^2/\nu_2$. Единственным стационарным решением задачи о движении "затопленного слоя" (случай полубесконечных областей) будет покой, который не является пределом нестационарного решения (23)–(24) при $p \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. Рис. 4 иллюстрирует этот факт: градиент давления стремится к нулю, однако скорости в затопленной струе и полубесконечных слоях с ростом времени не стремятся к нулю.

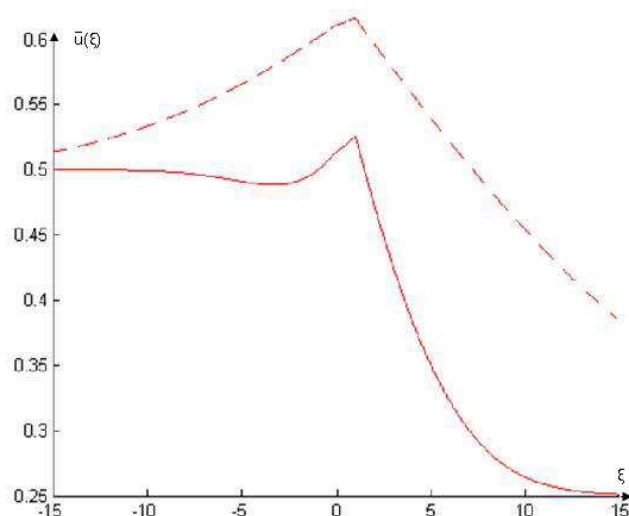


Рис. 4. Профили скоростей в слоях при $\mu_1 = 1,5$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1,5$, $h_3 = 2$
 $\tau = 100(-)$, $\tau = 10(-)$, $f(\tau) = e^{-\tau} \sin \tau$

Замечание. Если в формулах (17), (18) устремить h_3 к бесконечности, то получим решение, описывающее нестационарное движение большого пятна нефти и воды под ней под действием ветра. Ветер и вызывается перепадом давления в воздухе.

Автор выражает благодарность профессору В.К.Андрееву за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №11-01-00283.

Список литературы

- [1] В.В.Пухначев, Движение вязкой жидкости со свободными границами, Новосибирск, НГУ, 1989.
- [2] В.К.Андреев, Об одной сопряжённой начально-краевой задаче, *Дифференциальные уравнения*, **44**(2008), №5, 1–7.
- [3] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1987.

Direct and Inverse Problems on the Joint Movement of the Three Viscous Liquids in the Flat Layers

Elena N. Lemeshkova

The exact stationary decision of the problem about the joint movement of the three viscous liquids in the flat layers has been found. The decision of the direct and inverse non-stationary problem has been given in the form of the final analytical formulas using the method of Laplas transformation. The following statement has been proved: if a gradient of the pressure in one liquid has a final limit, then the decision is located on a stationary mode. Also for a problem about the "the flooded layer" movement it has been shown that velocities converge to the different constants with the time growth.

Keywords: interface, boundary value problem, Laplace transformation.