Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(3), 344–349

УДК 517.53, 517.52

Интегральный признак сходимости некоторых кратных рядов

Елена В. Зубченкова*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.02.2011, окончательный вариант 25.03.2011, принята к печати 10.04.2011

Доказан интегральный признак сходимости кратного ряда, представляющего сумму значений рациональной функции в узлах целочисленной решетки.

Ключевые слова: эллиптический полином, квазиэллиптический полином, кратные ряды, многогранник Ньютона.

Введение

Рассматриваются кратные ряды

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{Q(k)}, \tag{1}$$

где P и Q — полиномы n переменных. Предполагается, что Q является квазиэллиптическим полиномом по Ермолаевой–Циху [1], отличным от нуля на $\mathbb{R}^n$.

В настоящей статье доказывается признак абсолютной сходимости рядов (1) при вышеуказанном предположении на полином Q. Отметим, что поскольку при доказательстве будет использован признак абсолютной сходимости соответствующих кратных интегралов, то наш результат интерпретируется как интегральный признак сходимости рядов (1).

В интегральном признаке сходимости главный персонаж – это порядок убывания членов ряда, который в случае эллиптических знаменателей измеряется одной величиной, а именно степенью знаменателя. В более общем случае порядок убывания следует измерять полистепенью, точнее многогранником Ньютона знаменателя.

1. Случай эллиптического знаменателя

В данном параграфе речь пойдет о сходимости ряда (1) с эллиптическим знаменателем Q.

Напомним, что полином $Q(x) = Q(x_1, ..., x_n)$ называется *эллиптическим*, если его старшая однородная составляющая неотрицательна в $\mathbb{R}^n$ и обращается в нуль лишь при $x = 0$. Таким образом, у эллиптического полинома эта составляющая знакопостоянна, и мы будем считать, что она положительная при $x \neq 0$.

Следующее утверждение многократно использовалось многими авторами в различных частных ситуациях. Мы приводим его в качестве прелюдии перехода к более общему случаю квазиэллиптического знаменателя.

*elenazubchenkova@rambler.ru

Теорема 1. *Если в (1) $Q(x)$ — эллиптический полином, не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$, то ряд (1) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $degP + n < degQ$.*

При доказательстве этой теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Ряд*

$$S_{n,d} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(k_1^2 + ... + k_n^2 + 1)^{\frac{d}{2}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(|k|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}}$$

сходится тогда и только тогда, когда $n < d$.

Доказательство. Сначала обоснуем аналогичный критерий для интеграла

$$\mathcal{I}_{n,d} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(|x|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}}.$$

Для этого воспользуемся сферической заменой координат $x = x(r, \varphi)$, для которой $dx = \Omega(\varphi) r^{n-1} d\varphi dr$.

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(|x|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}} = \int\limits_{D} \Omega(\varphi) d\varphi \int\limits_{0}^{\infty} \frac{r^{n-1} dr}{(\Theta(\varphi) r^2 + 1)^{\frac{d}{2}}},$$

где $\Omega(\varphi), \Theta(\varphi)$ — полиномы, зависящие от тригонометрических функций, $D = [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^{n-1}_{\varphi}$.

Поскольку Ω и Θ непрерывны на компакте D, то для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы сходился внутренний интеграл, то есть выполнялось условие $n < d$.

Докажем теперь, что из сходимости интеграла $\mathcal{I}_{n,d}$ будет следовать сходимость ряда $S_{n,d}$.

Для удобства мы введем также величину $S_{0,d} = 1$.

Каждой точке $k \in \mathbb{Z}^n$ сопоставим куб $C_k = k + [0; 1]^n$. Очевидно, что для любой точки $x \in C_k$ выполняются неравенства $|k|^2 + 1 \leqslant |x|^2 + 1 \leqslant |k + I|^2 + 1$, где $I = (1, ..., 1)$. Интегрируя по кубу C_k, для каждого $k \in \mathbb{Z}^n$ будем иметь неравенства:

$$\frac{1}{(|k + I|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}} \leqslant \int\limits_{C_k} \frac{dx}{(|x|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}} \leqslant \frac{1}{(|k|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}}.$$

Заметим, что семейство кубов $\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ не перекрывается (любая пара таких кубов либо не пересекается, либо пересекается по грани). Поэтому, суммируя по $k \in \mathbb{Z}^n$ соответствующие члены этих неравенств, получим $S_{n,d} - nS_{n-1,d} \leqslant I_{n,d} \leqslant S_{n,d}$. Правое неравенство показывает, что из расходимости $I_{n,d}$ следует расходимость $S_{n,d}$. Второе неравенство перепишем в виде $S_{n,d} \leqslant I_{n,d} + nS_{n-1,d}$.

Теперь сходимость $S_{n,d}$ вытекает из сходимости $I_{n,d}$ по индукции: если $d > n$, то $d > n - 1$, тем самым, по предположению индукции, $S_{n-1,d}$ сходится. □

Замечание. *Для ряда*

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{(|k^2| + 1)^{\frac{d}{2}}} \tag{2}$$

условием его абсолютной сходимости является $degP + n < d$.

Это следует из очевидного неравенства

$$k_1^{\gamma_1}...k_n^{\gamma_n} \leqslant (k_1^2 + ... + k_n^2 + 1)^{\frac{|\gamma|}{2}},$$

где $|\gamma| = \gamma_1 + ...\gamma_n$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через Q_d старшую однородную составляющую полинома Q. Тогда, в силу эллиптичности полинома Q и того, что он не обращается в нуль на $\mathbb{R}^n$, имеем двусторонние оценки вида

$$cQ_d(k) \leq |Q(k)| \leqslant CQ_d(k), \quad c'(|k|^2 + 1)^{\frac{d}{2}} \leqslant Q_d(k) \leqslant C'(|k|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}$$

с некоторыми константами c, C, c', C'.

Таким образом, члены ряда (1) допускают оценки

$$(CC')^{-1}\frac{|P(k)|}{(|k|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}} \leqslant \left|\frac{P(k)}{Q(k)}\right| \leqslant (cc')^{-1}\frac{|P(k)|}{(|k|^2 + 1)^{\frac{d}{2}}},$$

из которых видно, что поведение ряда (1) напрямую следует их поведения ряда (2). $\square$

2. Случай квазиэллиптического знаменателя

Пусть дан полином

$$Q(x) = Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$$

с комплексными коэффициентами и множество $\operatorname{supp} Q = \{\alpha \in (\mathbb{N} \cup 0)^n : a_\alpha \neq 0\}$ — носитель полинома Q. Напомним, что *многогранником Ньютона* $\Delta = \Delta(Q)$ полинома Q называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ для $\operatorname{supp} Q$, а *срезкой* полинома Q в направлении $q \in \mathbb{R}^{n*}$ (здесь $\mathbb{R}^{n*}$ — сопряженное пространство к $\mathbb{R}^n$) называется полином

$$Q_q(x) = \sum_{\alpha \in \Delta^q} a_\alpha x^\alpha,$$

где $\Delta^q = \{k \in \Delta : \langle q, k\rangle = \min_{l \in \Delta}\langle q, l\rangle\}$ — грань в направлении q.

Полином Q называется *квазиэллиптическим* [1], если для любого ненулевого направления $q \in \mathbb{R}^{n*}$ срезка $Q_q \neq 0$ в торе $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.

Для формулировки следующего результата нам понадобится понятие полного многогранника Ньютона, приведенное в статье [2]: многогранник Δ называют *полным*, если

$$\beta \in \Delta \Rightarrow \{\gamma \in \mathbb{R}^n_+, \gamma < \beta\} \subset \Delta.$$

Запись $\gamma < \beta$ означает, что $\gamma_1 \leq \beta_1, ..., \gamma_n \leq \beta_n$, причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Пусть $\Delta^0(Q)$ – внутренность многогранника $\Delta(Q)$. Сформулируем необходимое и достаточное условие сходимости интеграла с квазиэллиптическим знаменателем, полученное в работе [1].

Теорема (Ермолаева, Цих). *Если Q — квазиэллиптический полином, не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$, то интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

абсолютно сходится тогда и только тогда, когда $I + \Delta(P) \subset \Delta^0(Q)$.

При доказательстве следующего результата мы будем пользоваться данным критерием сходимости интегралов. Тем самым, наш результат интерпретируется как интегральный признак сходимости ряда (1).

Теорема 2. *Пусть* $Q(x)$ *— квазиэллиптический полином с полным многогранником Ньютона* $\Delta(Q)$ *и* $Q(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда ряд*

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

абсолютно сходится, если

$$I + \Delta(P) \subset \Delta^0(Q). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ область (рис. 1) $\Pi := \{t \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, t| < \varepsilon\}$, где ε будем брать достаточно малым, но фиксированным.

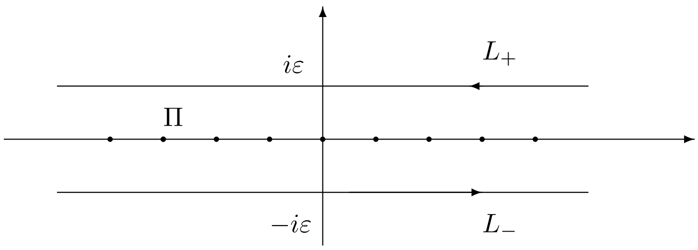

Рис. 1

Зафиксируем переменные $z_2, ..., z_n$ и в каждом целочисленном значении $z_1 = k_1$ представим дробь $P(z)/Q(z)$ в виде вычета

$$\frac{P(k_1, z_2, ..., z_n)}{Q(k_1, z_2, ..., z_n)} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1 = k_1} \frac{P(z)}{Q(z)(e(z_1) - 1)},$$

где $e(t) = e^{2\pi i t}$. Выражение под знаком вычета мероморфно в области Π и имеет простые полюсы в точках $z_1 = k_1 \in \mathbb{Z}$.

По теореме о вычетах для любой ограниченной области

$$\Pi_\alpha = \{t \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, t| < \alpha, |\mathrm{Im}\, t| < \varepsilon\} \subset \Pi,$$

где α — полуцелое положительное число, при фиксированных переменных $z_2, ..., z_n$ имеем

$$\sum_{k_1 = -[\alpha]}^{[\alpha]} \frac{P(k_1, z_2, ..., z_n)}{Q(k_1, z_2, ..., z_n)} = \int\limits_{\partial \Pi_\alpha} \frac{P(z_1, ..., z_n)}{Q(z_1, ..., z_n)(e(z_1) - 1)} dz_1.$$

Отметим, что функция $e(t) - 1$ ограничена и отделена от нуля на границе области Π_α. В самом деле, согласно равенству

$$|e(x + iy) - 1| = [e^{-4\pi y} - 2e^{-2\pi y} \cos 2\pi x + 1]^{\frac{1}{2}}$$

на вертикальных отрезках $x = \pm\alpha$ границы $\partial \Pi_\alpha$ ее модуль принимает свои значения из промежутка

$$[1 + e^{-2\pi\varepsilon}; 1 + e^{2\pi\varepsilon}],$$

а на горизонтальных отрезках $t = x \pm i\varepsilon$ – из промежутка

$$[1 - e^{-2\pi\varepsilon}; 1 + e^{-2\pi\varepsilon}].$$

Предположим теперь, что наряду с полнотой $\Delta(Q)$ выполнено условие (4): $I + \Delta(P) \subset \Delta^0(Q)$. Покажем, что при этих условиях для любых фиксированных переменных $z_2, ..., z_n$ степень полинома P по переменной z_1 по крайней мере на 2 единицы меньше степени полинома Q. В самом деле, согласно условию (4), для каждого $\beta \in \operatorname{supp} P$ в $\Delta^0(Q)$ лежит точка $\beta + I$. В силу полноты многогранника $\Delta(Q)$ ему принадлежит и любая проекция на координатные оси, поэтому в $\Delta(Q)$ есть точка вида $(\beta_1 + \kappa, 0, ..., 0)$, где $\kappa \geqslant 2$.

При указанном соотношении на степени полиномов P и Q интегралы по вертикальным отрезкам границы $\partial\Pi_\alpha$ стремятся к нулю, когда $\alpha \to \infty$. Тогда

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \frac{P(k_1, z_2, ..., z_n)}{Q(k_1, z_2, ..., z_n)} = \int_{\partial\Pi} \frac{P(z_1, ..., z_n)}{Q(z_1, ..., z_n)(e(z_1) - 1)} dz_1.$$

Фиксируя поочередно оставшиеся переменные и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{P(k)}{Q(k)} = \int_{(\partial\Pi)^n} \frac{P(z_1, ..., z_n)}{Q(z_1, ..., z_n) \prod\limits_{j=1}^{n} (e(z_j) - 1)} dz_1 ... dz_n. \tag{4}$$

При этом декартова степень $(\partial\Pi)^n$ представляется в виде суммы

$$(\partial\Pi)^n = \sum_{(I,J)} \pm(L_+^I \times L_-^J)$$

ориентированных декартовых произведений $L_+^I \times L_-^J$, где суммирование ведется по всем разбиениям I, J множества $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ (т.е. $I \cup J = [n]$, $I \cap J = \emptyset$).

Обозначим через ε_{IJ} вектор с n координатами, у которого на местах с номерами из I стоят значения ε, а на местах с номерами из J – значения $-\varepsilon$. Тогда интеграл

$$\int_{(\partial\Pi)^n} \frac{P(z)}{Q(z) \prod\limits_{j=1}^{n} (e(z_j) - 1)} dz$$

представится суммой 2^n интегралов вида

$$\int_{L_+^I \times L_-^J} \frac{P(z)}{Q(z) \prod\limits_{j=1}^{n} (e(z_j) - 1)} dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x + i\varepsilon_{IJ})}{Q(x + i\varepsilon_{IJ}) g(x, \varepsilon_{IJ})} dx, \tag{5}$$

где $g(x, \varepsilon_{IJ}) = \prod\limits_{j=1}^{n} (e(x_j + i\varepsilon_{IJ}) - 1)$. Функция g ограничена и отделена от нуля на $\mathbb{R}^n$, поскольку, как отмечалось выше, каждый ее множитель принимает свои значения из отрезка

$$[1 - e^{-2\pi\varepsilon_{IJ}}; 1 + e^{-2\pi\varepsilon_{IJ}}],$$

ограниченного и отделенного от нуля при малых $\varepsilon_{IJ} = \pm\varepsilon$.

Таким образом, каждый из интегралов (6) сходится одновременно с интегралом

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(x + i\varepsilon_{IJ})}{Q(x + i\varepsilon_{IJ})} dx. \tag{6}$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $Q(x)$ — *квазиэллиптический полином с полным многогранником Ньютона* $\Delta(Q)$ *и* $Q(x) \neq 0$ *на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ *полином*

$$Q_\varepsilon(x) = Q(x + i\varepsilon) = Q(x_1 + i\varepsilon_1, ..., x_n + i\varepsilon_n)$$

также квазиэллиптический, причем не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство леммы. Заметим, что для любого монома x^α полином $(x+i\varepsilon)^\alpha = (x_1 + i\varepsilon_1)^{\alpha_1}...(x_n + i\varepsilon_n)^{\alpha_n}$ имеет вид

$$x^\alpha + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} c_\beta(\varepsilon) x^\beta, \tag{7}$$

где все $c_\beta(0) = 0$ и $\beta < \alpha$ означает, что все $\beta_j \leqslant \alpha_j$, причем хотя бы одно из неравенств строгое. В силу полноты многогранника $\Delta(Q)$ отсюда следует, что при достаточно малых ε многогранники Ньютона полиномов $Q_\varepsilon(x)$ не меняются и они совпадают с $\Delta(Q)$. Более того, условие квазиэллиптичности заведомо сохраняется для всех граней Δ^q, не лежащих в координатных плоскостях размерности, равной $dim\Delta^q$: ввиду (7) срезки полинома $Q_\varepsilon(x)$ на такие грани не зависят от ε. Если же k-мерная грань Δ^q лежит в k-мерной координатной плоскости $\alpha_{i_1} = ... = \alpha_{i_{n-k}} = 0$, то срезка Q_{Δ^q} совпадает с сужением полинома Q на координатную плоскость $L = \{x_{j_1} = ... = x_{j_k} = 0\}$, где $J = (j_1, ..., j_k)$ — дополнительный мультииндекс к $I = (i_1, ..., i_{n-k})$. Но поскольку $Q \neq 0$ на $\mathbb{R}^n$, то и $Q_{\Delta^q} = Q\mid_L \neq 0$.

Первоначальный полином не равен нулю на сооответствующей торической компактификации $X \supset \mathbb{R}^n$. Поэтому, ввиду компактности X, полином Q отделен от нуля на X. При малых возмущениях он остается таким же. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет применить теорему Ермолаевой и Циха для интеграла (6), на основании которой мы заключаем абсолютную сходимость интеграла

$$\int_{(\partial\Pi)^n} \frac{P(z)}{Q(z) \prod_{j=1}^{n} (e(z_j) - 1)} dz$$

как суммы 2^n абсолютно сходящихся интегралов (5), когда выполнено условие (3). □

Список литературы

[1] Т.О.Ермолаева, А.К.Цих, Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов, *Мат. сб.*, **187**(1996), №9, 45–64.

[2] Л.Р.Волевич, С.Г.Гиндикин, Об одном классе гипоэллиптических полиномов, *Мат. сб.*, **75(117)**(1968), №3, 400–416.

Integral Convergence Criterion for the Multiple Series

Elena V.Zubchenkova

We proved an integral convergence criterion for the series, representing the sum of a rational function over the lattice.

Keywords: elliptic polynomial, quasi-elliptic polynomial, multiple series, Newton polytope.