УДК 517.17: 539.37

Об условиях выпуклости изотропной функции от тензора второго ранга

Владимир М. Садовский*
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Получена 18.09.2010, окончательный вариант 25.10.2010, принята к печати 10.12.2010

Для скалярной функции, зависящей от инвариантов тензора второго ранга, получены условия выпуклости и сильной выпуклости относительно компонент этого тензора в произвольной декартовой системе координат. Показано, что если функция зависит только от четырех инвариантов: трех главных значений симметричной части тензора и модуля псевдовектора антисимметричной части, то полученные условия являются необходимыми и достаточными. Построена специальная система выпуклых инвариантов для конструирования потенциалов напряжений и деформаций в механике структурно неоднородных упругих сред, проявляющих моментные свойства.

Ключевые слова: изотропная тензорная функция, выпуклость, инварианты, нелинейная упругость, пластичность.

Выпуклые функции, определенные на пространствах тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформации, применяются при конструировании потенциалов нелинейной теории упругости [1–3], диссипативных потенциалов и поверхностей текучести в теории вязкопластических сред [4,5]. Для изотропных материалов, механические свойства которых не зависят от направления, такие функции — инварианты своих аргументов. В классических моделях механики деформируемых сред используются симметричные тензоры, обладающие тремя функционально независимыми инвариантами. Таковыми могут служить, например, главные значения тензора. Однако эти инварианты, вообще говоря, не являются выпуклыми функциями тензорных компонент, поэтому вопрос о выпуклости функции, зависящей от главных значений, не тривиальный.

В неклассических моделях, учитывающих микроструктуру материала, применяются несимметричные тензоры [6, 7]. В общем случае они имеют шесть функционально независимых инвариантов [8, 9]. В настоящей работе строится специальная система выпуклых инвариантов для произвольного тензора второго ранга и приводятся новые или мало известные в специальной литературе условия выпуклости функции, заданной на пространстве инвариантов, относительно компонент тензора в произвольной системе координат.

Вводные понятия, случай симметричного тензора

Действительная функция $f(u)$ от m независимых переменных $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ называется выпуклой, если ее надграфик $\operatorname{epi} f = \{(u,z) \mid f(u) \leqslant z\}$ представляет собой выпуклое множество. По определению, это множество вместе с любыми своими точками (u,z) и $(\tilde{u},\tilde{z})$ содержит точки отрезка $(u^\lambda, z^\lambda) \equiv \lambda(\tilde{u},\tilde{z}) + (1-\lambda)(u,z)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Выпуклая функция может принимать бесконечные значения, но тождественно равные $+\infty$ и $-\infty$ функции в дальнейшем не рассматриваются.

*sadov@icm.krasn.ru

Для выпуклой функции множество уровня $\{u \mid f(u) \leqslant C\}$ является выпуклым множеством при любом значении C.

Функция выпукла в том и только в том случае, если множество, на котором она конечна: $\operatorname{dom} f = \{u \mid f(u) < +\infty\}$, выпукло и для любых элементов u и $\tilde{u}$ этого множества выполняется неравенство

$$f(u^\lambda) \leqslant \lambda f(\tilde{u}) + (1-\lambda) f(u) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1). \tag{1}$$

Первый критерий выпуклости состоит в следующем. Дифференцируемая функция $f(u)$ выпукла в том и только в том случае, когда множество $\operatorname{dom} f$ выпукло и для любых двух векторов u и $\tilde{u} \in \operatorname{dom} f$ справедливо неравенство

$$f(\tilde{u}) - f(u) \geqslant (\tilde{u} - u) \cdot \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \tag{2}$$

в котором $\partial f(u)/\partial u$ — вектор–градиент $f(u)$, а точка между векторами означает скалярное произведение.

На его основе доказывается второй критерий выпуклости. Дважды непрерывно-дифференцируемая функция $f(u)$ выпукла в том и только в том случае, когда матрица Гессе $\partial^2 f(u)/\partial u^2$ неотрицательно определена в каждой точке выпуклого множества $\operatorname{dom} f$.

В качестве простого примера с помощью первого критерия можно показать, что если матрица A размерности $m \times m$ неотрицательно определена, то функция $f(u) = \sqrt{uAu}$ выпукла на всем пространстве. Непосредственно из второго критерия следует, что в этом случае выпукла квадратичная форма $f(u) = uAu$. Для единичной матрицы $A = I$ это означает выпуклость евклидовой нормы вектора $|u|$ и скалярного квадрата $|u|^2$.

Выпуклая функция $f(u)$ называется сильно выпуклой, если вместо (1) выполняется более сильное неравенство

$$f(u^\lambda) \leqslant \lambda f(\tilde{u}) + (1-\lambda) f(u) - \lambda(1-\lambda)\,\varepsilon\,|\tilde{u} - u|^2$$

с некоторой сколь угодно малой положительной постоянной ε. Принимая во внимание очевидное тождество

$$|u^\lambda|^2 = \lambda |\tilde{u}|^2 + (1-\lambda)|u|^2 - \lambda(1-\lambda)|\tilde{u} - u|^2,$$

можно показать, что функция $f(u)$ сильно выпукла в том и только в том случае, когда для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $f(u) - \varepsilon\,|u|^2$ выпукла. Таким образом, если $f(u)$ дважды непрерывно-дифференцируемая функция, то для ее сильной выпуклости необходимо и достаточно, чтобы матрица $\partial^2 f(u)/\partial u^2 - 2\,\varepsilon\, I$ была неотрицательно определенной. Это условие обеспечивает равномерную положительную определенность матрицы Гессе для функции $f(u)$ – важное свойство, во многих случаях гарантирующее термодинамическую корректность моделей механики.

Доказательства приведенных выше утверждений общеизвестны [10, 11]. Далее в качестве вектора u будет рассматриваться вектор, составленный из компонент произвольного тензора второго ранга в трехмерном пространстве.

Условия выпуклости изотропной функции от компонент симметричного тензора получены в [12]. Пусть $f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ — выпуклая дважды непрерывно-дифференцируемая функция, зависящая от главных значений тензора $\Lambda = \Lambda^*$ (звездочка служит для обозначения сопряженного тензора), симметричная относительно аргументов:

$$f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = f(\Lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_3) = f(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_2).$$

Тогда порождаемая ею функция $f(\Lambda)$ выпукла относительно тензорных компонент $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ в произвольной декартовой системе координат.

Для доказательства рассматриваются три линейно независимые комбинации главных значений, предварительно перенумерованных в порядке убывания ($\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \Lambda_3$):

$$\mu_1 = \Lambda_1, \quad \mu_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \mu_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3.$$

Оказывается, каждая из них является выпуклой функцией от Λ_{ij}. Выпуклость $\mu_1(\Lambda)$ можно доказать с помощью известного представления для наибольшего собственного числа симметричной матрицы (принимается правило суммирования по повторяющимся индексам):

$$\mu_1 = \max_{|\nu|=1} \Lambda_{ij}\, \nu_i\, \nu_j,$$

в соответствии с которым

$$\mu_1(\Lambda^\lambda) = \max_{|\nu|=1} \Lambda^\lambda_{ij}\, \nu_i\, \nu_j = \max_{|\nu|=1} \big(\lambda\, \tilde\Lambda_{ij} + (1-\lambda)\, \Lambda_{ij}\big)\, \nu_i\, \nu_j \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \max_{|\nu|=1} \tilde\Lambda_{ij}\, \nu_i\, \nu_j + (1-\lambda) \max_{|\nu|=1} \Lambda_{ij}\, \nu_i\, \nu_j = \lambda\, \mu_1(\tilde\Lambda) + (1-\lambda)\, \mu_1(\Lambda).$$

Выпуклость $\mu_3(\Lambda)$ очевидна, так как $\mu_3 = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{33}$ — линейная функция. Наконец, комбинация μ_2 может быть представлена в виде суммы

$$\mu_2 = \mu_3 - \Lambda_3 = \mu_3 - \min_{|\nu|=1} \Lambda_{ij}\, \nu_i\, \nu_j = \mu_3 + \max_{|\nu|=1} \{-\Lambda_{ij}\, \nu_i\, \nu_j\},$$

и ее выпуклость следует из выпуклости каждого из слагаемых.

В силу выпуклости и симметрии $f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ выполняются неравенства

$$\frac{\partial f}{\partial \Lambda_1} \geqslant \frac{\partial f}{\partial \Lambda_2} \geqslant \frac{\partial f}{\partial \Lambda_3}.$$

Действительно, полагая

$$f(\lambda) = f\Big(\lambda\, \Lambda_1 + (1-\lambda)\, \Lambda_2, \lambda\, \Lambda_2 + (1-\lambda)\, \Lambda_1, \Lambda_3\Big),$$

можно показать, что

$$f(\lambda) \leqslant \lambda\, f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + (1-\lambda)\, f(\Lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_3) = f(1),$$

то есть что функция $f(\lambda)$ не убывает в окрестности точки $\lambda = 1$. Таким образом,

$$\frac{d\, f(1)}{d\lambda} \geqslant 0: \quad (\Lambda_1 - \Lambda_2) \frac{\partial f}{\partial \Lambda_1} + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial f}{\partial \Lambda_2} \geqslant 0,$$

откуда $\partial f/\partial \Lambda_1 \geqslant \partial f/\partial \Lambda_2$, если $\Lambda_1 > \Lambda_2$. Если же $\Lambda_1 = \Lambda_2$, то производные $\partial f/\partial \Lambda_1$ и $\partial f/\partial \Lambda_2$ оказываются равными в силу симметрии $f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ по первым двум аргументам. Аналогично доказывается неравенство $\partial f/\partial \Lambda_2 \geqslant \partial f/\partial \Lambda_3$.

Принимая во внимание, что $\Lambda_1 = \mu_1$, $\Lambda_2 = \mu_2 - \mu_1$, $\Lambda_3 = \mu_3 - \mu_2$, получим два неравенства

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_1} = \frac{\partial f}{\partial \Lambda_1} - \frac{\partial f}{\partial \Lambda_2} \geqslant 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mu_2} = \frac{\partial f}{\partial \Lambda_2} - \frac{\partial f}{\partial \Lambda_3} \geqslant 0, \tag{3}$$

которые используются при проверке выпуклости $f(\Lambda)$. Матрица Гессе для этой функции равна

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \Lambda_{ij}\, \partial \Lambda_{kl}} = \sum_{p,q=1}^{3} \frac{\partial \mu_q}{\partial \Lambda_{kl}}\, \frac{\partial^2 f}{\partial \mu_p\, \partial \mu_q}\, \frac{\partial \mu_p}{\partial \Lambda_{ij}} + \sum_{p=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial \mu_p}\, \frac{\partial^2 \mu_p}{\partial \Lambda_{ij}\, \partial \Lambda_{kl}}.$$

Здесь слагаемое, отвечающее $p = 3$, опущено, так как μ_3 линейно зависит от Λ_{ij} и, следовательно, $\partial^2\mu_3/\partial\Lambda_{ij}\,\partial\Lambda_{kl} = 0$. Существование производных от главных значений Λ_k и, как следствие, от выпуклых инвариантов μ_p по компонентам тензора следует из известной теоремы матричной алгебры.

Неотрицательная определенность матриц, составленных из слагаемых первой суммы в правой части полученного равенства, доказывается непосредственно: если α_{ij} — произвольные коэффициенты, то

$$\alpha_{kl}\,\frac{\partial\mu_q}{\partial\Lambda_{kl}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\mu_p\,\partial\mu_q}\,\frac{\partial\mu_p}{\partial\Lambda_{ij}}\,\alpha_{ij} = \alpha_q\,\frac{\partial^2 f}{\partial\mu_p\,\partial\mu_q}\,\alpha_p,$$

где $\alpha_p = \alpha_{ij}\,\partial\mu_p/\partial\Lambda_{ij}$. Это выражение неотрицательно в силу второго критерия, записанного по отношению к функции $f = f(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, выпуклость которой может быть установлена на основании неравенства (1) с учетом линейной зависимости μ_k от $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Неотрицательная определенность матриц, отвечающих слагаемым второй суммы, следует из выпуклости $\mu_1(\Lambda)$ и $\mu_2(\Lambda)$, а также из неравенств (3). Таким образом, утверждение полностью доказано.

На самом деле справедливо обратное утверждение: если функция выпукла относительно компонент симметричного тензора в произвольной системе координат, то она, очевидно, выпукла в системе главных осей этого тензора относительно главных значений. Кроме того, она симметрична, поскольку в силу изотропности допускается произвольная перенумерация главных значений. Таким образом, рассматриваемые условия выпуклости являются необходимыми и достаточными.

Учитывая, что в силу инвариантности евклидовой нормы тензора

$$f(\Lambda) - \varepsilon\,\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} = f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) - \varepsilon\,(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2),$$

нетрудно доказать следующее утверждение.

Для того чтобы функция $f(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ была сильно выпуклой относительно компонент симметричного тензора в произвольной декартовой системе координат, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно выпуклой как функция трех переменных – главных значений тензора, и симметричной относительно этих переменных.

Случай несимметричного тензора

Справедливо более общее утверждение. Если изотропная дважды непрерывно–дифференцируемая скалярная функция $f(\Lambda)$ зависит только от четырех аргументов — трех главных значений симметричной части $\Lambda^s = (\Lambda + \Lambda^*)/2$ тензора Λ и модуля псевдовектора, ассоциированного с антисимметричной частью $\Lambda^a = (\Lambda - \Lambda^*)/2$, то для ее выпуклости (сильной выпуклости) относительно компонент тензора Λ, записанного в произвольной декартовой системе координат, необходимо и достаточно, чтобы она была симметричной относительно главных значений Λ^s:

$$f(\Lambda_1^s, \Lambda_2^s, \Lambda_3^s, |\Lambda^a|) = f(\Lambda_2^s, \Lambda_1^s, \Lambda_3^s, |\Lambda^a|) = f(\Lambda_1^s, \Lambda_3^s, \Lambda_2^s, |\Lambda^a|),$$

неубывающей по $|\Lambda^a|$ (чтобы удовлетворяла условию $\partial f/\partial|\Lambda^a| \geqslant 4\,\varepsilon\,|\Lambda^a|$ при некотором $\varepsilon > 0$) и выпуклой (сильно выпуклой) по совокупности аргументов.

Действительно, пусть f — выпуклая функция относительно компонент Λ_{ij}, зависящая только от указанных четырех аргументов – инвариантов тензора Λ. В системе главных осей симметричной части этого тензора, которая может быть получена специальным поворотом исходной координатной системы, тензоры Λ^s и Λ^a принимают следующий вид:

$$\Lambda^s = \begin{pmatrix} \Lambda_1^s & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2^s & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3^s \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^a = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_3^a & \Lambda_2^a \\ \Lambda_3^a & 0 & -\Lambda_1^a \\ -\Lambda_2^a & \Lambda_1^a & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется показать, что функция $f(\Lambda_1^s, \Lambda_2^s, \Lambda_3^s, |\Lambda^a|)$ является выпуклой, неубывающей по $|\Lambda^a| = \sqrt{(\Lambda_1^a)^2 + (\Lambda_2^a)^2 + (\Lambda_3^a)^2}$ и симметричной относительно Λ_k^s.

Симметрия этой функции следует из ее изотропности – независимости от поворота системы координат, выпуклость следует из выпуклости $f(\Lambda)$ на множестве тензоров частного вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1^s & -\Lambda_3^a & 0 \\ \Lambda_3^a & \Lambda_2^s & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3^s \end{pmatrix} \qquad (\Lambda_3^a \geqslant 0).$$

Неубывание функции по последнему аргументу доказывается методом от противного. Предположим, что в окрестности некоторой точки $\Lambda_1^s, \Lambda_2^s, \Lambda_3^s, |\Lambda^a| = \chi$ эта функция строго убывающая. Тогда $\partial f(\Lambda_1^s, \Lambda_2^s, \Lambda_3^s, \chi)/\partial|\Lambda^a| < 0$. Рассмотрим следующую пару тензоров с одинаковыми системами инвариантов:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1^s & -\chi & 0 \\ \chi & \Lambda_2^s & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3^s \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1^s & -\chi\cos\varphi & \chi\sin\varphi \\ \chi\cos\varphi & \Lambda_2^s & 0 \\ -\chi\sin\varphi & 0 & \Lambda_3^s \end{pmatrix}$$

(φ — произвольный угол), на которых функция принимает одно и то же значение. Для этой пары

$$\tilde{\Lambda} - \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \chi(1-\cos\varphi) & \chi\sin\varphi \\ -\chi(1-\cos\varphi) & 0 & 0 \\ -\chi\sin\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что в общем случае $4|\Lambda^a|^2 = (\Lambda_{32} - \Lambda_{23})^2 + (\Lambda_{13} - \Lambda_{31})^2 + (\Lambda_{21} - \Lambda_{12})^2$,

$$\frac{\partial|\Lambda^a|}{\partial\Lambda} = \frac{1}{4|\Lambda^a|}\begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{12} - \Lambda_{21} & \Lambda_{13} - \Lambda_{31} \\ \Lambda_{21} - \Lambda_{12} & 0 & \Lambda_{23} - \Lambda_{32} \\ \Lambda_{31} - \Lambda_{13} & \Lambda_{32} - \Lambda_{23} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\chi}\begin{pmatrix} 0 & -\chi & 0 \\ \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

на основе второго критерия выпуклости получаем противоречие:

$$0 \geqslant \sum_{i,j=1}^{3} (\tilde{\Lambda}_{ij} - \Lambda_{ij})\frac{\partial f}{\partial\Lambda_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial|\Lambda^a|}\sum_{i,j=1}^{3} (\tilde{\Lambda}_{ij} - \Lambda_{ij})\frac{\partial|\Lambda^a|}{\partial\Lambda_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial|\Lambda^a|}\chi(1-\cos\varphi) > 0,$$

которое завершает доказательство необходимости.

Для доказательства достаточности после перенумерации главных значений симметричной части Λ_k^s в порядке убывания рассмотрим выпуклые инварианты

$$\mu_1 = \Lambda_1^s, \qquad \mu_2 = \Lambda_1^s + \Lambda_2^s, \qquad \mu_3 = \Lambda_1^s + \Lambda_2^s + \Lambda_3^s.$$

Кроме того, инвариант $\mu_4(\Lambda) = |\Lambda^a|$ является выпуклой функцией относительно Λ_{ij} как частный случай функции вида $\sqrt{uAu}$ с неотрицательно определенной матрицей A.

Повторяя фрагмент приведенного выше доказательства для случая симметричного тензора, можно установить, что $\partial f/\partial\mu_1 \geqslant 0$ и $\partial f/\partial\mu_2 \geqslant 0$. Учитывая линейность уравнений, связывающих аргументы выпуклой функции $f(\Lambda_1^s, \Lambda_2^s, \Lambda_3^s, |\Lambda^a|)$ с инвариантами μ_k, можно с помощью неравенства (1) установить выпуклость функции $f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$:

$$f(\mu_1^\lambda, \mu_2^\lambda, \mu_3^\lambda, \mu_4^\lambda) = f((\Lambda_1^s)^\lambda, (\Lambda_2^s)^\lambda, (\Lambda_3^s)^\lambda, |\Lambda^a|^\lambda) \leqslant \lambda f(\tilde{\Lambda}_1^s, \tilde{\Lambda}_2^s, \tilde{\Lambda}_3^s, |\tilde{\Lambda}^a|) +$$

$$+(1-\lambda)f(\Lambda_1^s,\Lambda_2^s,\Lambda_3^s,|\Lambda^a|)=\lambda f(\tilde\mu_1,\tilde\mu_2,\tilde\mu_3,\tilde\mu_4)+(1-\lambda)f(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4).$$

По второму критерию выпуклости соответствующая матрица Гессе размерности 4×4 неотрицательно определена. Матрица Гессе по переменным Λ_{ij} вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{kl}}=\sum_{p,q=1}^{4}\frac{\partial\mu_q}{\partial\Lambda_{kl}}\frac{\partial^2 f}{\partial\mu_p\partial\mu_q}\frac{\partial\mu_p}{\partial\Lambda_{ij}}+\sum_{p\neq3}\frac{\partial f}{\partial\mu_p}\frac{\partial^2\mu_p}{\partial\Lambda_{ij}\partial\Lambda_{kl}},$$

каждое из слагаемых в правой части которой определяет неотрицательно определенную матрицу. Следовательно, функция $f(\Lambda)$ выпукла.

Доказательство сильной выпуклости при выполнении условий, заключенных в скобки, можно получить, переходя от функции $f(\Lambda)$ к функции

$$f(\Lambda)-\varepsilon\,\Lambda_{ij}\Lambda_{ij}=f(\Lambda_1^s,\Lambda_2^s,\Lambda_3^s,|\Lambda^a|)-\varepsilon\left((\Lambda_1^s|^2+(\Lambda_2^s)^2+(\Lambda_3^s)^2+2|\Lambda^a|^2\right).$$

Система выпуклых инвариантов

Изотропные функции, зависящие от инвариантов несимметричных тензоров, используются в теории моментных сред. В таких средах наряду с поступательными учитываются вращательные степени свободы частиц, поэтому тензор деформаций оказывается несимметричным. Однако доказанное утверждение практически непригодно в этой теории. Оно носит частный характер: в общем случае несимметричный тензор имеет шесть функционально независимых инвариантов Λ_k^s и Λ_k^a. Простым примером изотропной функции, которая не может быть выражена через четыре инварианта Λ_k^s и $|\Lambda^a|$, является определитель, описывающий изменение объема частицы:

$$\det\Lambda=\Lambda_1^s\Lambda_2^s\Lambda_3^s+\Lambda_1^s(\Lambda_1^a)^2+\Lambda_2^s(\Lambda_2^a)^2+\Lambda_3^s(\Lambda_3^a)^2.$$

Фиксируя главные значения Λ_k^s, можно указать две системы инвариантов Λ_k^a и $\tilde\Lambda_k^a$ с одинаковыми модулями $|\Lambda^a|=|\tilde\Lambda^a|$, но с разными определителями.

Построим более содержательную систему выпуклых инвариантов, через которую определитель и другие характеристики деформированного состояния среды вычисляются однозначно. Пусть R и V — ортогональный и симметричный тензоры, участвующие в полярном разложении Кэли:

$$\Lambda=R\cdot V,\qquad R\cdot R^*=I,\qquad V=V^*,\qquad \det V\geqslant0.$$

Тензор V имеет три функционально независимых инварианта – главные значения $V_1\geqslant V_2\geqslant V_3$, с помощью которых описывается деформация среды. Наибольшее из них неотрицательно в силу условия $\det V\geqslant0$. У тензора R инвариантов тоже три, но особый интерес представляет только один из них — угол поворота частицы.

Покажем, что следующие комбинации инвариантов деформации:

$$\mu_1=V_1,\qquad \mu_2=\sqrt{V_1^2+V_2^2},\qquad \mu_3=\sqrt{V_1^2+V_2^2+V_3^2}\tag{4}$$

являются выпуклыми. Действительно, так как $\Lambda^*\cdot\Lambda=V^2$, то

$$\mu_1=\max_{|\nu|=1}\sqrt{\Lambda_{ki}\Lambda_{kj}\nu_i\nu_j}.$$

Входящее сюда подкоренное выражение представляет собой неотрицательную квадратичную форму относительно компонент тензора Λ, поэтому функция $\sqrt{\Lambda_{ki}\Lambda_{kj}\nu_i\nu_j}$ выпукла и, как следствие, выпукла функция μ_1. В этом легко убедиться, проверяя неравенство (1).

На основании формулы $\mu_3 = \sqrt{\Lambda_{ij}\Lambda_{ij}}$ доказывается выпуклость μ_3. Наконец μ_2 можно записать в виде

$$\mu_2 = \sqrt{\mu_3^2 - V_3^2} = \sqrt{\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} - \min_{|\nu|=1} \Lambda_{ki}\Lambda_{kj}\nu_i\nu_j} = \max_{|\nu|=1} \sqrt{\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} - \Lambda_{ki}\Lambda_{kj}\nu_i\nu_j}. \qquad (5)$$

Из цепочки уравнений и неравенств

$$\Lambda_{ki}\Lambda_{kj}\nu_i\nu_j \leqslant \max_{|\nu|=1} \Lambda_{ki}\Lambda_{kj}\nu_i\nu_j = V_1^2 \leqslant V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = \Lambda_{ij}\Lambda_{ij}$$

вытекает, что подкоренное выражение в правой части (5) также представляет собой неотрицательную квадратичную форму относительно Λ_{ij}. Отсюда следует выпуклость μ_2.

В дополнение к системе (4) в качестве выпуклого инварианта, характеризующего поворот, примем $\mu_4 = |\Lambda^a|$. Этот инвариант тождественно равен нулю при отсутствии поворота частицы, когда $R = I$, и отличен от нуля при $R \neq I$.

Справедливо следующее утверждение. Если функция $f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ выпукла и ее первые производные $\partial f/\partial \mu_k$ по всем аргументам неотрицательны, то она выпукла относительно компонент тензора Λ. Если, кроме того, выпуклой является функция $f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) - \varepsilon\,\mu_3^2$ и выполняется неравенство $\partial f/\partial \mu_3 \geqslant 2\,\varepsilon\,\mu_3$ при некотором достаточно малом значении $\varepsilon > 0$, то функция f является сильно выпуклой относительно компонент тензора Λ.

Заметим, что аналогичным способом можно выписать выпуклые инварианты несимметричного тензора, основываясь на левом разложении Кэли в произведение симметричного и ортогонального тензоров: $\Lambda = W \cdot R$, и что вопрос о построении полной системы выпуклых инвариантов, состоящей из шести функционально независимых комбинаций, остается открытым.

В заключение приведем специальную систему условий, при выполнении которых функция, зависящая только от трех инвариантов V_1, V_2 и V_3 несимметричного тензора Λ, заведомо не является выпуклой. Принципиально то, что этим условиям автоматически удовлетворяет потенциал напряжений в теории гиперупругости [3] как функция от тензора дисторсии: $f(V_1, V_2, V_3) = 0$, если $V_1 = V_2 = V_3 = 1$ (упругая энергия равна нулю в естественном, недеформированном состоянии среды) и $f(V_1, V_2, V_3) > 0$, если $(V_1-1)^2 + (V_2-1)^2 + (V_3-1)^2 > 0$ (упругая энергия положительна в деформированном состоянии).

От противного, допустим, что хотя бы одна из таких функций выпукла. Тогда для нее множество уровня

$$\{\Lambda \mid f(\Lambda) \leqslant 0\}$$

является выпуклым множеством. Так как $f(\Lambda) \geqslant 0$, то это множество представимо в виде $\{\Lambda \mid f(\Lambda) = 0\}$. Из приведенной системы условий следует, что оно совпадает с группой ортогональных тензоров. Противоречие в том, что такая группа не образует выпуклое множество, поскольку очевидно, например, что выпуклая комбинация двух ортогональных тензоров $R = I$ и

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{равная} \quad \frac{1}{2}\tilde{R} + \frac{1}{2}R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

не является ортогональным тензором.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053) и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 40.

Список литературы

[1] Л.И.Седов, Механика сплошной среды, Т. 2, М., Наука, 1994.

[2] Ю.Н.Работнов, Механика деформируемого твердого тела, М., Наука, 1979.

[3] С.К.Годунов, Е.И.Роменский, Элементы механики сплошных сред и законы сохранения, Новосибирск, Научная книга, 1998.

[4] П.П.Мосолов, В.П.Мясников, Механика жесткопластических сред, М., Наука, 1981.

[5] Г.И.Быковцев, Д.Д.Ивлев, Теория пластичности, Владивосток, Дальнаука, 1998.

[6] В.А.Пальмов, Основные уравнения теории несимметричной упругости, *Прикл. матем. и мех.*, **28**(1964), вып. 3, 401–408.

[7] О.В.Садовская, В.М.Садовский, Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред, М., Физматлит, 2008.

[8] Э.Спенсер, Теория инвариантов, М., Мир, 1974.

[9] П.А.Жилин, Модифицированная теория симметрии тензоров и тензорных инвариантов, *Известия ВУЗов, Северо-Кавказский регион, Естественные науки. Нелинейные проблемы механики сплошных сред*, 2003, 176–195.

[10] Р.Т.Рокафеллар, Выпуклый анализ, М., Мир, 1973.

[11] В.Г.Карманов, Математическое программирование, М., Наука, 1980.

[12] W.H.Yang, A useful theorem for constructing convex yield functions, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, **47**(1980), № 2, 301–305.

Conditions for Convexity of the Isotropic Function of the Second-rank Tensor

Vladimir M. Sadovskii

For a scalar function, depending on the invariants of the second-rank tensor, condition of convexity and strong con-vexity are obtained with respect to the components of this tensor in an arbitrary Cartesian coordinate system. It is shown that if a function depends only on the four invariants: three principal values of the symmetric part of a tensor and modulus of pseudovector of the antisymmetric part, these conditions are necessary and sufficient. A special system of convex invariants is suggested to construct potentials for the stresses and strains in the mechanics of structurally inhomogeneous elastic media, exhibiting moment properties..

Keywords: isotropic tensor function, convexity, invariants, nonlinear elasticity, plasticity.