Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(1), 128–139

УДК 517.54 : 517.862

Билинейные спаривания для голоморфных (q, ρ)-форм

Ольга А. Сергеева*
Кемеровский государственный университет,
Красная, 6, Кемерово, 650043,
Россия

Получена 18.05.2010, окончательный вариант 25.06.2010, принята к печати 10.07.2010

В работах [1, 2] начато изучение нормированных пространств голоморфных мультипликативных автоморфных форм для фуксовой группы. В данной работе исследуются билинейные спаривания в этих пространствах в связи с общей (q, ρ)-двойственностью форм. Получено "симметричное" билинейное спаривание, которое можно использовать и в теории однозначных автоморфных форм. На основе введенных билинейных спариваний строятся мультипликативные операторы Берса, связанные с отражением относительно квазиокружности и устанавливающие связь между двойственными пространствами голоморфных форм для общей (q, ρ)-двойственности. Для всех операторов получена универсальная оценка нормы.

Ключевые слова: билинейное спаривание, двойственность, мультипликативная автоморфная форма, оператор Берса.

Введение

В статье исследуется общий случай двойственности в мультипликативной теории автоморфных форм, реализуемый через билинейные спаривания двойственных форм и соответствующие им операторы Берса. Отличительной особенностью мультипликативной теории является наличие характера $\rho \neq 1$ в задании всех изучаемых здесь объектов. В том числе изменения необходимы для нормы, билинейного спаривания, оператора Берса. Появляется новое понятие мультипликативно двойственных форм (их произведение — однозначная форма). Специально для таких форм в работе получен "симметричный" вариант билинейного спаривания, который непосредственно можно также использовать в однозначной теории. Всё это позволяет существенно расширить рамки классической теории и приводит к новым независимым от неё результатам.

1. Предварительные сведения

Пусть C — квазиокружность в $\overline{\mathbb{C}}$, то есть ориентируемая замкнутая жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, которая является образом единичной окружности по квазиконформному отображению. Обозначим $D_1 = IntC$, $D_2 = ExtC$, $\lambda_{D_j}(z)|dz|$ — метрику Пуанкаре в D_j, $j = 1, 2$. Далее там, где это не может привести к путанице, будем опускать обозначение области, принимая $\lambda(z)|dz|$ за метрику Пуанкаре, заданную в $D_1 \cup D_2$.

*Okoin@yandex.ru

Пусть G — отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с инвариантной кривой C такая, что D_1/G — компактная риманова поверхность рода $h \geqslant 2$.

Обозначим через $Hom(G,\mathbb{C}^*)$ группу всех характеров (одномерных представлений) ρ из G в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ с естественной операцией умножения.

Определение 1. *Измеримой мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ на D_1 (D_2) называется класс эквивалентности измеримых функций $\phi(z)$ с условием $\phi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\phi(z)$ для любого $A \in G$, $z \in D_1(D_2)$.*

Мультипликативная автоморфная форма f нулевого порядка с характером ρ на D_1 (D_2) называется мультипликативной функцией для ρ. Голоморфные мультипликативные автоморфные формы порядка q для характера ρ будем называть голоморфными (q,ρ)-формами. При этом (q,ρ)-форма и $(q,\frac{1}{\rho})$-форма считаются ρ-двойственными, а (q_1,ρ)-форма и (q_2,ρ)-форма — q-двойственными формами для $q = q_1 + q_2$. Формы, одновременно q- и ρ-двойственные, назовем формами общей двойственности или (q,ρ)-двойственными.

Если f_1 — мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на $D_1\,(D_2)$, то характер ρ_1 называется несущественным ([3]), а сама такая функция f_1 называется мультипликативной единицей для ρ_1.

Теорема ([3])**.** *Для любого характера $\rho \in Hom(G,\mathbb{C}^*)$ существует единственный несущественный характер ρ_1 такой, что $\rho_0 = \dfrac{\rho}{\rho_1}$ — нормированный характер для G, т. е.*

$$|\rho_0(A)| = \left|\frac{\rho}{\rho_1}(A)\right| = 1 \text{ для любого } A \in G. \tag{1}$$

Далее также полезными окажутся следующие факты:

Лемма 1 ([4, 5])**.** *Если D — односвязная жорданова область, ∞ не принадлежит D и $\lambda = \lambda_D$ задаёт метрику Пуанкаре на D, то для любой $z \in D$*

$$\lambda(z)|z - \partial D| \geqslant \frac{1}{4}, \tag{2}$$

где ∂D – граница D, $|z-\partial D| = \inf\limits_{z_1\in\partial D}|z - z_1|$.

Для вышеопределённых C, D_1 и D_2 ясно, что $\partial D_1 = C = \partial D_2$ и для любых $z \in D_1, \zeta \in D_2$ верно $|z - C| \leqslant |z-\zeta|$, $|\zeta - C| \leqslant |z - \zeta|$.

Лемма 2 ([4])**.** *Для каждого целого $q \geqslant 2$ и фиксированного $z \in D_2$ функция ${}_q\omega_z = \dfrac{1}{(\zeta - z)^{2q}}$, $\zeta \in D_1$, голоморфна на D_1 и верна оценка*

$$\iint\limits_{D_1} \lambda(\zeta)^{2-q}\,|{}_q\omega_z|\frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leqslant \frac{4^{q-2}2\pi}{q}\,\frac{1}{|z-C|^q}. \tag{3}$$

Отметим также, что функция $\dfrac{1}{(\zeta-z)^{2q}}$, как функция двух переменных $\zeta \in D_1, z\in D_2$, симметрична и обладает свойством инвариантности относительно группы G, а именно: $\dfrac{1}{(A\zeta - Az)^{2q}} = \dfrac{1}{(\zeta-z)^{2q}A'(\zeta)^q A'(z)^q}$ для любых $A \in G,\ 2 \leqslant q \in \mathbb{N}$.

Определение 2 ([5]). *Измеримая на* $\mathbb{C}$ *функция* $\mu_q(z)$, $2 \leqslant q \in \mathbb{N}$, *называется обобщённым коэффициентом Бельтрами для разрывной группы* Γ *дробно-линейных преобразований* $\overline{\mathbb{C}}$ *с множеством разрывности* $\Omega(\Gamma)$ *и предельным множеством* $\Lambda(\Gamma) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega(\Gamma)$, *если* $\mu \mid_{\Lambda(\Gamma)}= 0$, $\mu(Az)A'(z)^{1-q}\overline{A'(z)} = \mu(z)$ *для любых* $A \in \Gamma$, $z \in \Omega(\Gamma)$ *и почти всюду на* $\overline{\mathbb{C}}$ *верна оценка*

$$|\mu(z)| \leqslant K\lambda(z)^{2-q}, \quad \text{где} \;\; K = \mathrm{const}. \tag{4}$$

2. Билинейные спаривания и операторы Берса в нормированных пространствах (q,ρ)-форм

Пусть $D = D_1$ или $D = D_2$, а C, D_1, D_2, G и ρ определены как в §1. Рассмотрим голоморфные (q,ρ)-формы ϕ на D, для которых

$$\|\phi\|^p_{q,p,G,\rho} = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |dz \wedge d\overline{z}| < \infty, \quad 1 \leqslant p \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где f_1 — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_1 с условием (1). Они образуют замкнутое нормированное пространство $A^p_q(D,G,\rho)$ голоморфных (q,ρ)-форм, интегрируемых со степенью p. Для (q,ρ)-форм ϕ_1 и ϕ_2 из пространств $A^p_q(D,G,\rho)$ и $A^{p'}_q(D,G,\rho)$ соответственно, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, определено билинейное спаривание [1, 2]:

$$(\phi_1,\phi_2)_{q,\rho,D,G} = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-2q} \frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2} \frac{i}{2} dz \wedge d\overline{z}. \tag{6}$$

Билинейное спаривание (6), как видно, работает только с голоморфными (q,ρ)-формами, имеющими общий порядок $q \geqslant 2$ и общий характер $\rho \in Hom(G,\mathbb{C}^*)$.

Для случая (q,ρ)-двойственных форм на D введём соответствующее билинейное спаривание:

$$\langle \varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G} = \iint\limits_{D/G} \mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z}, \tag{7}$$

где $\varphi \in A^p_{q_1}(D,G,\rho)$, $\psi \in A^{p'}_{q_2}(D,G,\dfrac{1}{\rho})$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $q = q_1 + q_2$, μ_q – фиксированный обобщённый коэффициент Бельтрами класса $C^1(D)$ для $q = q_1 + q_2$. С помощью оценки (4) и неравенства Гёльдера нетрудно установить, что интеграл (7) конечен. Покажем, что билинейное спаривание (7) корректно определено, т. е. не зависит от выбора фундаментальной области ω группы G:

$$\iint\limits_{\omega} \mu_{q_1+q_2}(z)\varphi(z)\psi(z)\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z} = \iint\limits_{\omega} \mu_{q_1+q_2}(Az)A'(z)^{1-q_1-q_2}\overline{A'(z)}\frac{\varphi(Az)A'(z)^{q_1}}{\rho(A)} \times$$
$$\times \psi(Az)A'(z)^{q_2}\rho(A)\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z} = \iint\limits_{A(\omega)} \mu_{q_1+q_2}(z)\varphi(z)\psi(z)\frac{i}{2}dz \wedge d\overline{z} \text{ для любого } A \in G.$$

Укажем некоторые особые свойства этого билинейного спаривания:

1. Билинейное спаривание (7) симметрично, т. е. $\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G}=\langle\psi,\varphi\rangle_{q_2,q_1,D,G}$ для любых $\varphi\in A^p_{q_1}(D,G,\rho)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_2}(D,G,\frac{1}{\rho})$.

2. Билинейное спаривание (7) задаёт линейное соответствие между пространствами $\Omega^{q_1}_\rho(\mathfrak{U})$ и $\left(\Omega^{q_2}_{\frac{1}{\rho}}(\frac{1}{\mathfrak{U}})\right)^*$, где $\Omega^{q_1}_\rho(\mathfrak{U})$ — пространство мероморфных дифференциалов Прима ([6]) порядка q_1 для ρ, кратных дивизору $\mathfrak{U}\in Div(D/G)$ на компактной римановой поверхности $F=D/G$, $\left(\Omega^{q_2}_{\frac{1}{\rho}}(\frac{1}{\mathfrak{U}})\right)^*$ – пространство, сопряжённое к $\Omega^{q_2}_{\frac{1}{\rho}}(\frac{1}{\mathfrak{U}})$. Следовательно, возможно применение этого билинейного спаривания в пространствах двойственных мероморфных (q,ρ)-форм.

3. Билинейное спаривание (7) непосредственно может быть также использовано в теории однозначных автоморфных форм.

В работе [2] на основе приведенных выше билинейных спариваний (6) и (7) получены основные мультипликативные модификации оператора Берса:

$$(\mathcal{B}^{hom}_C\varphi)(z)=\frac{i}{2}\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-2q_1}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta-z)^{2q_1}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}d\zeta\wedge d\overline{\zeta},\quad z\in D_2,\tag{8}$$

$$(\mathcal{B}^{ord}_C\varphi)(z)=\frac{i}{2}\iint\limits_{D_1}\frac{\mu_q(\zeta)f_1(z)}{(\zeta-z)^{2q_2}f_1(\zeta)}\varphi(\zeta)d\zeta\wedge d\overline{\zeta},\ q=q_1+q_2,\ z\in D_2,\tag{9}$$

где φ — это голоморфная (q_1,ρ)-форма на D_1 относительно группы G, т. е. $\varphi\in A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)$. Кроме определяющего действия оператора Берса — обращения области определения формы относительно квазиокружности C, эти два оператора устанавливают связь между пространствами двойственных голоморфных (q,ρ)-форм. Оператор $\mathcal{B}^{hom}_C$ обращает характер формы, сохраняя её порядок: $\mathcal{B}^{hom}_C\varphi\in A^p_{q_1}(D_2,G,\frac{1}{\rho})$. Оператор $\mathcal{B}^{ord}_C$, наоборот, q-двойственно изменяет порядок формы и не влияет при этом на её характер: $\mathcal{B}^{ord}_C\varphi\in A^p_{q_2}(D_2,G,\rho)$, $q=q_1+q_2$.

Обозначим $k_q=\dfrac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}$ — константу для целого $q\geqslant 2$.

Теорема 1 ([2]). *Для произвольного характера $\rho\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$ модифицированный оператор Берса $\mathcal{B}^{hom}_C$ является непрерывным антилинейным отображением между пространствами ρ-двойственных форм: $\mathcal{B}^{hom}_C:A^p_q(D_1,G,\rho)\to A^p_q(D_2,G,\frac{1}{\rho})$, $p\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p<\infty$, с нормой $\|\mathcal{B}^{hom}_C\|\leqslant k_q$. Кроме того, для любых $\varphi\in A^p_q(D_1,G,\rho)$ и $\psi\in A^{p'}_q(D_2,G,\frac{1}{\rho})$, с $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, верно $\left(\mathcal{B}^{hom}_C\varphi,\psi\right)_{q,\frac{1}{\rho},D_2,G}=\overline{\left(\varphi,\mathcal{B}^{hom}_{-C}\psi\right)}_{q,\rho,D_1,G}$.*

Теорема 2 ([2]). *Для произвольного характера $\rho\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$ модифицированный оператор Берса $\mathcal{B}^{ord}_C$ является непрерывным линейным отображением из $A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)$ в $A^p_{q_2}(D_2,G,\rho)$, $p\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p<\infty$, с нормой $\|\mathcal{B}^{ord}_C\|\leqslant Kk_{q_2}$ (где K – константа из неравенства (4) для $q=q_1+q_2$), и удовлетворяет условию "самосопряжённости" относительно билинейного спаривания (7), а именно: для любых голоморфных $\varphi\in A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_1}(D_2,G,\frac{1}{\rho})$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, верно $\left\langle\mathcal{B}^{ord}_C\varphi,\psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G}=\left\langle\varphi,\mathcal{B}^{ord}_{-C}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}$.*

Замечание 1. *В теоремах 1 и 2 для форм на D_2 используются операторы $\mathcal{B}^{hom}_{-C}$ и $\mathcal{B}^{ord}_{-C}$, которые также определяются с помощью (8) и (9) соответственно, если заменить область интегрирования D_1 на D_2.*

3. Композиция модифицированных операторов Берса

При работе с общей (q,ρ)-двойственностью голоморфных форм естественно рассмотреть композицию операторов Берса $\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}$, которая двойственно меняет и функциональную (порядок), и мультипликативную характеристики формы. Однако заметим, что композиция $\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}$ уже не будет являться оператором Берса, так как её действие не связано с инвертированием относительно кривой C области определения формы.

Пусть φ — произвольная (q_1,ρ)-форма на $D_1=IntC$. Тогда действие оператора $\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}$ на таких формах φ определяется по правилу

$$(\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}\varphi)(\zeta)=\mathcal{B}^{ord}_{-C}(\mathcal{B}^{hom}_{C}\varphi)(\zeta)=\frac{i}{2}\iint\limits_{D_2}\frac{\mu_{q_1+q_2}(z)f_1(z)}{(z-\zeta)^{2q_2}f_1(\zeta)}(\mathcal{B}^{hom}_{C}\varphi)(z)dz\wedge d\overline{z}=$$
$$=\frac{-1}{4}\iint\limits_{D_2}\frac{\mu_{q_1+q_2}(z)f_1(z)}{(z-\zeta)^{2q_2}f_1(\zeta)}\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q_1}\overline{\varphi(\zeta_1)}d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}}{(\zeta_1-z)^{2q_1}\overline{f_1(\zeta_1)}f_1(z)}\right)dz\wedge d\overline{z}=$$
$$=\frac{-1}{4}\iint\limits_{D_2}\frac{\mu_{q_1+q_2}(z)}{(z-\zeta)^{2q_2}f_1(\zeta)}\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q_1}\overline{\varphi(\zeta_1)}d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}}{(\zeta_1-z)^{2q_1}\overline{f_1(\zeta_1)}}\right)dz\wedge d\overline{z},\ \zeta\in D_1.$$

Теорема 3. *Антилинейный оператор $\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}$ осуществляет непрерывное отображение $A^1_{q_1}(D_1,G,\rho)\to A^1_{q_2}(D_1,G,\frac{1}{\rho})$ пространств (q,ρ)-двойственных голоморфных форм, определенных на $D_1=IntC$, $q_1\geqslant 2$, $q_2\geqslant 2$, и справедлива оценка*

$$\|\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}\|\leqslant Kk_{q_1}k_{q_2},\tag{10}$$

где K — это константа из (4) для $q=q_1+q_2$. Кроме того, для любых голоморфных $\varphi\in A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)$ и $\psi\in A^{p'}_{q_1}(D_1,G,\rho)$ на D_1 с $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ верно равенство

$$\left\langle\varphi,\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}\psi\right\rangle_{q_1,q_2,D_1,G}=\left\langle\mathcal{B}^{ord}_{C}\varphi,\mathcal{B}^{hom}_{C}\psi\right\rangle_{q_2,q_1,D_2,G}.\tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in A^1_{q_1}(D_1,G,\rho)$. Голоморфность формы $\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}(\varphi)$ на D_1 следует из теорем 1, 2 и свойства голоморфности композиции. Оценим

$$\|\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}(\varphi)\|_{q_2,1,G,\frac{1}{\rho}}=\iint\limits_{\omega_1}\lambda(\zeta)^{2-q_2}\frac{|\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}(\varphi)(\zeta)|}{\frac{1}{|f_1(\zeta)|}}|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|\leqslant\frac{1}{4}\iint\limits_{\omega_1}\lambda(\zeta)^{2-q_2}\times$$
$$\times|f_1(\zeta)|\left[\iint\limits_{D_2}\frac{|\mu_{q_1+q_2}(z)|}{|z-\zeta|^{2q_2}|f_1(\zeta)|}\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q_1}|\varphi(\zeta_1)|}{|\zeta_1-z|^{2q_1}|f_1(\zeta_1)|}|d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}|\right)|dz\wedge d\overline{z}|\right]|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|.$$

В последнем интеграле воспользуемся оценкой (4) для обобщённого коэффициента Бельтрами $\mu_{q_1+q_2}$ с константой K. Затем, применяя теорему Фубини для обращения порядка интегрирования и свойства инвариантности функций λ,φ,f_1, а также функции двух переменных $(z-\zeta)^2$, $\zeta\in D_1$, $z\in D_2$, относительно группы G, получаем:

$$\|\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}(\varphi)\|_{q_2,1,G,\frac{1}{\rho}}\leqslant\frac{K}{4}\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q_1}|\varphi(\zeta_1)|}{|f_1(\zeta_1)|}\left[\iint\limits_{\omega_1}\lambda(\zeta)^{2-q_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_1-q_2}|dz\wedge d\overline{z}|}{|z-\zeta|^{2q_2}|z-\zeta_1|^{2q_1}}\right)|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|\right]|d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}|=\frac{K}{4}\sum_{A\in G}\iint\limits_{A^{-1}(\omega_1)}\frac{\lambda(A\zeta_1)^{2-2q_1}}{|A'(\zeta_1)|^{2q_1-2}}\times$$

$$\times\frac{|\varphi(A\zeta_1)||A'(\zeta_1)|^{q_1}}{|\rho(A)||f_1(A\zeta_1)||\rho_1(A)|^{-1}}\left[\iint\limits_{\omega_1}\lambda(A\zeta)^{2-q_2}|A'(\zeta)|^{2-q_2}\left(\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(Az)^{2-q_1-q_2}}{|A'(z)|^{q_1+q_2-2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{|A'(z)|^{q_1+q_2}|A'(\zeta)|^{q_2}|A'(\zeta_1)|^{q_1}|dz\wedge d\overline{z}|}{|Az-A\zeta|^{2q_2}|Az-A\zeta_1|^{2q_1}}\right)|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|\right]|d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}|.$$

Ввиду того, что D_2 инвариантно относительно G, после замены переменных интегрирования полученное выражение примет вид

$$\frac{K}{4}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q_1}|\varphi(\zeta_1)|}{|f_1(\zeta_1)|}\sum_{A\in G}\left[\iint\limits_{A(\omega_1)}\lambda(\zeta)^{2-q_2}\left(\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_1-q_2}|dz\wedge d\overline{z}|}{|z-\zeta|^{2q_2}|z-\zeta_1|^{2q_1}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|\right]|d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}|=\frac{K}{4}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q_1}|\varphi(\zeta_1)|}{|f_1(\zeta_1)|}\left[\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_1-q_2}}{|z-\zeta_1|^{2q_1}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|}{|\zeta-z|^{2q_2}}\right)|dz\wedge d\overline{z}|\right]|d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}|. \tag{12}$$

Последнее равенство обусловлено применением теоремы Фубини к двум внутренним интегралам.

Докажем как вспомогательный факт, что для каждого целого $q\geqslant 2$ и фиксированного $\zeta\in\omega_1$ верна оценка

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\leqslant k_q\lambda_{D_1}(\zeta)^q. \tag{13}$$

Действительно, так как для каждого фиксированного $A\in G$ область $A(\omega_2)\subset D_2$ односвязна и не содержит ∞, то, взяв ограничение λ с большей области на подмножества, получаем

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}=\sum_{A\in G}\left[\iint\limits_{A(\omega_2)}\frac{\lambda_{A(\omega_2)}(z)^{2-q}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant 4^{q-2}\sum_{A\in G}\left[\iint\limits_{A(\omega_2)}\frac{|z-\partial A(\omega_2)|^{q-2}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\right]\leqslant 4^{q-2}\iint\limits_{\sum\limits_{A\in G}A(\omega_2)}\frac{|z-C|^{q-2}}{|z-\zeta|^{2q}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\leqslant$$

$$\leqslant 4^{q-2}\iint\limits_{D_2}|z-\zeta|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\leqslant 4^{q-2}\iint\limits_{|z-\zeta|>|\zeta-C|}|z-\zeta|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}=$$

$$=4^{q-2}\iint\limits_{|z|>|\zeta-C|}|z|^{-q-2}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}=\frac{4^{q-2}2\pi}{q}\frac{1}{|\zeta-C|^q}\leqslant\frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}\lambda_{D_1}(\zeta)^q=k_q\lambda_{D_1}(\zeta)^q.$$

Продолжим оценку нормы композиции $\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}$. Воспользуемся методом доказательства оценки (13), а именно: в силу аддитивности интеграла рассмотрим ограничение среднего интеграла в (12) с большей области D_2 на её односвязные, конечные подмножества $A(\omega_2)\subset D_2, A\in G$. Применяя также саму оценку (13) и неравенства (2),(3), получим:

$$\|\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}(\varphi)\|_{q_2,1,G,\frac{1}{\rho}}\leqslant\frac{Kk_{q_2}}{2}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-2q_1}|\varphi(\zeta_1)|}{|f_1(\zeta_1)|}\left[\sum_{A\in G}\Big(\iint\limits_{A(\omega_2)}\frac{\lambda_{A(\omega_2)}(z)^{2-q_1}}{|z-\zeta_1|^{2q_1}}\times\right.$$

$$\left.|dz\wedge d\overline{z}|\Big)\right]|d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}|\leqslant Kk_{q_1}k_{q_2}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{2-q_1}|\varphi(\zeta_1)|}{|f_1(\zeta_1)|}|d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1}|=Kk_{q_1}k_{q_2}\|\varphi\|_{q_1,1,G,\rho}.$$

Таким образом, доказано $\|\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}(\varphi)\|_{q_2,1,G,\frac{1}{\rho}}\leqslant Kk_{q_1}k_{q_2}\|\varphi\|_{q_1,1,G,\rho}$, из чего получаем (10), а также ограниченность и непрерывность антилинейного оператора $\mathcal{B}^{ord}_{-C}\circ\mathcal{B}^{hom}_{C}$. Равенство (11) является следствием теоремы 2 и определяющих свойств оператора $\mathcal{B}^{hom}_{C}$. $\square$

4. Модифицированный оператор Берса для общей (q,ρ)-двойственности голоморфных форм

Пусть D — открытое множество в $\mathbb{C}$ с не менее чем тремя граничными точками, конформно эквивалентное единичному кругу Δ; Γ — отмеченная разрывная группа конформных преобразований множества D на себя такая, что $D/\Gamma=F$ — отмеченная компактная риманова поверхность рода $g\geqslant 2$.

В §2 введено билинейное спаривание (7) для пространств (q,ρ)-двойственных голоморфных форм на D, которое предполагает двойственность спариваемых форм не только по порядку, но и по характеру. Рассмотрим ещё один вариант билинейного спаривания для q-двойственных форм на D, для которого условие ρ-двойственности заменяется другим.

Пусть $\varphi\in A^p_{q_1}(D,\Gamma,\rho_\varphi)$, $\psi\in A^{p'}_{q_2}(D,\Gamma,\rho_\psi)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, такие что в представлениях Фаркаша-Кра $\rho_\varphi=\rho_{0,\varphi}\rho_{1,\varphi}$ и $\rho_\psi=\rho_{0,\psi}\rho_{1,\psi}$ для нормированных составляющих выполняется условие: $\rho_{0,\varphi}\overline{\rho_{0,\psi}}=1$, или, эквивалентно, $\dfrac{\rho_{0,\varphi}}{\rho_{0,\psi}}=1$.

Замечание 2. *В частности, такими формами могут быть (q,ρ)-двойственные формы на D, если нормированный характер ρ_0 для ρ удовлетворяет условию $\rho_0^2=1$.*

Для таких форм φ и ψ на D при условии, что $2\leqslant q_2-q_1\in\mathbb{N}$, билинейное спаривание может быть задано в виде

$$[\psi,\varphi]_{q_2,q_1,D,\Gamma}=\iint\limits_{D/\Gamma}\frac{\lambda(z)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(z)}{f_{1,\psi}(z)\overline{f_{1,\varphi}}(z)}\psi(z)\overline{\varphi(z)}\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z},\tag{14}$$

где $\mu_{q_2-q_1}$ — фиксированный обобщённый коэффициент Бельтрами класса $C^1(D)$ для целого $\widetilde{q}=q_2-q_1\geqslant 2$ с условием

$$|\mu_{q_2-q_1}|\leqslant K_1\lambda^{2-q_2+q_1}\ \text{почти всюду на}\ \overline{\mathbb{C}}\ (K_1\ \text{— константа для}\ \widetilde{q}=q_2-q_1),\tag{15}$$

$f_{1,\psi}$ и $f_{1,\varphi}$ — единицы для несущественных характеров $\rho_{1,\psi}$ и $\rho_{1,\varphi}$ соответственно. Интеграл в (14) конечен, что следует из оценки (15) и неравенства Гёльдера

$$\left(\iint_D |x(\zeta)y(\zeta)|d\nu\right)^p \leqslant \iint_D |x(\zeta)|^p d\nu \left(\iint_D |y(\zeta)|^{p'} d\nu\right)^{\frac{p}{p'}}, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{16}$$

для случая, когда мера $d\nu = \lambda(z)^2 \dfrac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}$ и функции $x(z) = \lambda(z)^{-q_1}\dfrac{\overline{\varphi(z)}}{\overline{f_{1,\varphi}}}$, $y(z) = \lambda(z)^{-q_2}\dfrac{\overline{\psi(z)}}{\overline{f_{1,\psi}}}$.

Если ω — фундаментальная область для Γ в D, то для любого $A\in\Gamma$ имеем

$$\iint_\omega \frac{\lambda(z)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(z)}{f_{1,\psi}(z)\overline{f_{1,\varphi}}(z)}\psi(z)\overline{\varphi(z)}\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z} = \iint_\omega \frac{\lambda(Az)^{-2q_1}\rho_{1,\psi}(A)\overline{\rho_{1,\varphi}(A)}}{|A'(z)|^{2q_1}f_{1,\psi}(Az)\overline{f_{1,\varphi}(Az)}}\times$$

$$\times\frac{\mu_{q_2-q_1}(Az)A'(z)^{1-q_2+q_1}\overline{A'(z)}\psi(Az)A'(z)^{q_2}\overline{\varphi(Az)}\,\overline{A'(z)^{q_1}}}{\rho_\psi(A)\overline{\rho_\varphi(A)}}\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z} =$$

$$= \iint_{A(\omega)} \frac{\lambda(z)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(z)}{f_{1,\psi}(z)\overline{f_{1,\varphi}}(z)}\psi(z)\overline{\varphi(z)}\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}.$$

Поэтому интеграл в (14) не зависит от выбора фундаментальной области ω.

В соответствии с новым билинейным спариванием (14) определим оператор Берса по правилу: для голоморфной (q_1,ρ)-формы φ на D_1 положим

$$(\mathcal{B}^1_C\varphi)(z) = \frac{i}{2}\iint_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(\zeta)}{(\zeta-z)^{2q_2}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}\overline{\varphi(\zeta)}d\zeta\wedge d\overline{\zeta},\ \ z\in D_2, \tag{17}$$

где C, D_1, D_2, G, $f_1,\mu_{q_2-q_1}$ определены, как и выше.

Установим, что после действия оператора $\mathcal{B}^1_C$ получаем $(q_2,\frac{1}{\rho})$-форму $\mathcal{B}^1_C\varphi$ на D_2 и, таким образом, формы φ и $\mathcal{B}^1_C\varphi$ являются (q,ρ)-двойственными. Действительно, для любых $\zeta\in D_1$ и $A\in G$ найдется $\zeta_1\in D_1$ такая, что $\zeta = A\zeta_1$, и имеем равенства

$$(\mathcal{B}^1_C\varphi)(Az)A'(z)^{q_2} = A'(z)^{q_2}\iint_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}\,\mu_{q_2-q_1}(\zeta)}{(\zeta-Az)^{2q_2}f_1(Az)}\,\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{f_1(\zeta)}}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\overline{\zeta} =$$

$$= A'(z)^{q_2}\iint_{D_1}\frac{\lambda(A\zeta_1)^{-2q_1}\,\mu_{q_2-q_1}(A\zeta_1)}{(A\zeta_1-Az)^{2q_2}f_1(Az)}\,\frac{\overline{\varphi(A\zeta_1)}}{\overline{f_1(A\zeta_1)}}\,\frac{i}{2}|A'(\zeta_1)|^2d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1} =$$

$$= \iint_{D_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{-2q_1}|A'(\zeta_1)|^{2q_1}\,\mu_{q_2-q_1}(\zeta_1)A'(\zeta_1)^{q_2-q_1-1}\overline{A'(\zeta_1)}^{-1}}{(\zeta_1-z)^{2q_2}A'(\zeta_1)^{q_2}\,f_1(z)\rho_1(A)}\,\frac{\overline{\varphi(\zeta_1)}\,\overline{A'(\zeta_1)}^{-q_1}\overline{\rho(A)}}{\overline{f_1(\zeta_1)}\,\overline{\rho_1(A)}}\,\frac{i}{2}|A'(\zeta_1)|^2\times$$

$$\times d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1} = \frac{\overline{\rho(A)}}{\rho_1(A)\,\overline{\rho_1(A)}}\iint_{D_1}\frac{\lambda(\zeta_1)^{-2q_1}\,\mu_{q_2-q_1}(\zeta_1)}{(\zeta_1-z)^{2q_2}f_1(z)}\,\frac{\overline{\varphi(\zeta_1)}}{\overline{f_1(\zeta_1)}}\frac{i}{2}d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta_1} = \frac{1}{\rho(A)}(\mathcal{B}^1_C\varphi)(z).$$

Докажем, что для голоморфной формы φ на D_1 форма $\mathcal{B}^1_C\varphi$ будет голоморфной на D_2. Для этого сначала докажем голоморфность произведения

$$(\mathcal{B}^1_C\varphi)(z)\,f_1(z) = \frac{i}{2}\iint_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(\zeta)}{(\zeta-z)^{2q_2}\overline{f_1(\zeta)}}\overline{\varphi(\zeta)}d\zeta\wedge d\overline{\zeta} \tag{18}$$

для $z \in D_2$. При этом, используя теорему Римана и обычные свойства инвариантности, можно предположить, что $D_1 = \Delta = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\Big\}$, $D_2 = \Delta^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \cup \partial\Delta)$. В этом случае имеем

$$\left|(\mathcal{B}_C^1\varphi)(z)\, f_1(z)\right| = \left|\iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(\zeta)}{(\zeta-z)^{2q_2}}\ \overline{\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}}\, \frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{2}\right| \leqslant \iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}}{|\zeta-z|^{2q_2}}\, |\mu_{q_2-q_1}(\zeta)| \times$$

$$\times \left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right| \frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leqslant K_1 \iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}}{|\zeta-z|^{2q_2}} \lambda(\zeta)^{2-q_2+q_1} \left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right| \frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2} =$$

$$= K_1 \iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}} \left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right| \frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2},$$

где K_1 — константа из оценки (4) для $q = q_2 - q_1$.

Функция $\frac{\varphi}{f_1}$ голоморфна и однозначна в Δ (она становится мультипликативной для нормированного характера при проектировании на Δ/G). В силу ограниченности ω и того, что для любой $\zeta \in \Delta$ существует $\zeta_1 \in \omega$ с условием $\left|\frac{\varphi}{f_1}(\zeta)\right| = \left|\frac{\varphi}{f_1}(\zeta_1)\right|$, заключаем, что модуль $\left|\frac{\varphi}{f_1}\right|$ достигает своего максимума η в Δ. Отсюда

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}} \left|\frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}\right| \frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leqslant \eta \iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}} \frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2}.$$

Применяя к последнему выражению оценки $|\zeta - z| \geqslant |\zeta - \partial\Delta|$, $|\zeta - z| \geqslant |z - \partial\Delta|$ для любых $\zeta \in \Delta$, $z \in \Delta^*$; и $\dfrac{1}{|\zeta-\partial\Delta|} \leqslant 4\lambda(\zeta) = \dfrac{4}{1-|\zeta|^2}$, $\zeta \in \Delta$, $\dfrac{1}{|z-\partial\Delta|} \leqslant \dfrac{1}{|z-\partial\omega_2|} \leqslant 4\lambda_{\omega_2}(z)$, $z \in \omega_2 \subset \Delta^*$, получаем

$$\left|(\mathcal{B}_C^1\varphi)(z)\, f_1(z)\right| \leqslant \eta K_1 \iint\limits_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta-\partial\Delta|^{q_2}|z-\partial\Delta|^{q_2}} \frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leqslant 4^{2q_2}\eta K_1 \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \iint\limits_{\Delta} \lambda(\zeta)^{2-q_1} \times$$

$$\times \frac{|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|}{2} = 4^{2q_2}\eta K_1 \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 r(1-r^2)^{q_1-2} dr = 4^{2q_2}\eta K_1 \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \frac{\pi}{q_1-1},$$

$z \in \omega_2 \subset \Delta^*$. Так как $\lambda_{\omega_2}(z)^{q_2}$ ограничена на любом компакте $K \Subset \Delta^*$, $K \cap \omega_2 \neq \emptyset$, то интеграл в (18) сходится абсолютно и равномерно по параметру z на любом компакте $K \Subset \Delta^*$. Кроме того, подынтегральная функция в (18) при любом фиксированном $\zeta \in \Delta$ аналитична по z и вместе со своей производной по z, равной $2q_2 \dfrac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(\zeta)}{(\zeta-z)^{2q_2+1}} \overline{\dfrac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}}$, является непрерывной по совокупности переменных $(\zeta, z) \in \Delta \times \Delta^*$. Поэтому (18) определяет голоморфную форму $(\mathcal{B}_C^1\varphi)(z)\, f_1(z)$ для $z \in \Delta^*$ и, следовательно, для $z \in D_2$.

Покажем теперь, что множитель $\dfrac{1}{f_1(z)}$, $z \in D_2$, не влияет на сходимость интеграла в (17), а значит, из доказанной голоморфности произведения $(\mathcal{B}_C^1\varphi)(z)\, f_1(z)$ следует голоморфность формы $(\mathcal{B}_C^1\varphi)(z)$, $z \in D_2$. Для этого сначала зафиксируем некоторую локально конечную фундаментальную область $\omega \in D_2$. Тогда для любой $z_0 \in \omega$ всегда найдётся окрестность $U(z_0)$, целиком содержащаяся в ω и такая, что функция $f_1(z)$ в этой окрестности отграничена от нуля и бесконечности, т. е. существуют константы m и M,

$0 < m \leqslant M < \infty$ такие, что

$$m \leqslant |f_1(z)| \leqslant M \text{ для всех } z \in U(z_0). \tag{19}$$

Действительно, если предположить, что для любой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 и для любого $m > 0$ существует $z \in U(z_0)$, для которой $|f_1(z)| < m$, то существует последовательность точек $z_n \in \omega$ такая, что $z_n \to z_0$, $n \to \infty$, и $f_1(z_n) \to 0$, $n \to \infty$. Но в силу непрерывности функции f_1 получаем, что $f_1(z_0) = 0$. А это противоречит отсутствию нулей у функции f_1. Аналогично доказывается, что f_1 отграничена от ∞ на ω. Таким образом, f_1 локально на ω отграничена от нуля и бесконечности. Пусть теперь $\widetilde{z_0} \in D_2$ – произвольная точка на D_2. По свойствам фундаментальной области существуют преобразование $T \in G$ и точка $z_0 \in \omega$ такие, что $\widetilde{z_0} = T(z_0)$. Рассмотрим окрестность точки $\widetilde{z_0}$ в виде $V(\widetilde{z_0}) = T(U(z_0))$, где $U(z_0)$ – окрестность точки z_0, в которой выполняется условие (19). Для каждой $\widetilde{z} \in V(\widetilde{z_0})$ существует $z' \in U(z_0)$ такое, что $\widetilde{z} = T(z')$. Следовательно, $f_1(\widetilde{z}) = \rho(T) f_1(z')$. Так как $0 < m \leqslant |f_1(z')| \leqslant M < \infty$ и $0 < |\rho(T)| < \infty$ для каждого фиксированного T, то $f_1(\widetilde{z})$ отграничена от 0 (и от ∞). В силу произвольности $\widetilde{z_0}$ значения $f_1(z)$ отграничены от 0 (и от ∞) в некоторой окрестности любой точки z из D_2. Поэтому $\dfrac{1}{f_1(z)}$ (и $f_1(z)$) локально на D_2 принимает конечные значения, следовательно, после умножения обеих частей в (18) на $\dfrac{1}{f_1(z)}$ получим интеграл, определяющий голоморфную мультипликативную форму $\mathcal{B}^1_C\varphi$ (умножение на локально ограниченную аналитическую функцию не нарушает голоморфности). Предположив, что ω_1 и ω_2 — локально конечные фундаментальные области для G в D_1 и D_2 соответственно, оценим норму $\|\mathcal{B}^1_C\varphi\|_{q_2,p,G,\frac{1}{\rho}}$. Ввиду свойства (15) имеем

$$\|\mathcal{B}^1_C\varphi\|^p_{q_2,p,G,\frac{1}{\rho}} = \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2}|f_1(z)|^p \left| \iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{-2q_1}\mu_{q_2-q_1}(\zeta)}{(\zeta - z)^{2q_2}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)} \overline{\varphi(\zeta)} \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \right|^p \frac{|dz \wedge d\overline{z}|}{2} \leqslant$$

$$\leqslant K_1^p \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2}|f_1(z)|^p \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-q_1}|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - z|^{2q_2}|f_1(\zeta)||f_1(z)|} \frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \right)^p \frac{|dz \wedge d\overline{z}|}{2} \leqslant$$

$$\leqslant K_1^p \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{2q_2}|f_1(\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \right) \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}} \frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \right)^{p-1} \frac{|dz \wedge d\overline{z}|}{2}.$$

В последнем неравенстве воспользовались неравенством Гёльдера (16). Далее, последовательно применяя интегральную оценку (3), неравенство (2), инвариантность подынтегральных функций относительно группы G и теорему Фубини, получаем:

$$\|\mathcal{B}^1_C\varphi\|^p_{q_2,p,G,\frac{1}{\rho}} \leqslant K_1^p (k_{q_2})^{p-1} \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-q_2} \left(\iint\limits_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{2q_2}|f_1(\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \right) \frac{|dz \wedge d\overline{z}|}{2} =$$

$$= K_1^p (k_{q_2})^{p-1} \sum_{A \in G} \iint\limits_{\omega_2} \lambda(z)^{2-q_2} \left(\iint\limits_{A^{-1}(\omega_1)} \frac{\lambda(A\zeta)^{2-q_2-pq_1}|A'(\zeta)|^2}{|A\zeta - Az|^{2q_2}|A'(z)|^{-q_2}} \frac{|\varphi(A\zeta)|^p|\rho_0(A)|^{-p}}{|f_1(A\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \right) \times$$

$$\times \frac{|dz \wedge d\overline{z}|}{2} = K_1^p (k_{q_2})^{p-1} \sum_{A \in G} \iint\limits_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|A'(z)|^{-q_2}} \left(\iint\limits_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|\zeta - Az|^{2q_2}|f_1(\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\overline{\zeta}|}{2} \right) \times$$

$$\times\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}=K_1^p(k_{q_2})^{p-1}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\left(\sum_{A\in G}\iint\limits_{\omega_2}\frac{\lambda(Az)^{2-q_2}}{|\zeta-Az|^{2q_2}}|A'(z)|^2\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|}{2}=K_1^p(k_{q_2})^{p-1}\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-pq_1}|\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p}\left(\iint\limits_{D_2}\frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}}\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\right)\frac{|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|}{2}=$$

$$=(K_1k_{q_2})^p\iint\limits_{\omega_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-pq_1}}{|f_1(\zeta)|^p}|\varphi(\zeta)|^p\times\frac{|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|}{2}=(K_1k_{q_2})^p\|\varphi\|^p_{q_1,p,G,\rho}.$$

Если $\mathbb{N}\ni q_1-q_2\geqslant 2$, то оператор перехода от голоморфных (q_1,ρ)-форм φ на D_1 к голоморфным $(q_2,\frac{1}{\rho})$-формам на D_2 определяется в виде

$$(\mathcal{B}_C^2\varphi)(z)=\frac{i}{2}\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{-2q_2}\overline{\mu_{q_1-q_2}(\zeta)}}{(\zeta-z)^{2q_2}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}\overline{\varphi(\zeta)}d\zeta\wedge d\overline{\zeta},\ z\in D_2, \tag{20}$$

где $\mu_{q_1-q_2}$ — фиксированный обобщённый коэффициент Бельтрами класса $C^1(D_1)$ для целого $\widetilde{q}=q_1-q_2\geqslant 2$ со свойством

$$|\mu_{q_1-q_2}|\leqslant K_2\lambda^{2-q_1+q_2}\ \text{почти всюду на}\ \overline{\mathbb{C}}\ \ (K_2 - \text{константа для}\ \widetilde{q}=q_1-q_2). \tag{21}$$

Доказательство того, что $\mathcal{B}_C^2\varphi$ является голоморфной $(q_2,\frac{1}{\rho})$-формой на D_2, проводится аналогично случаю оператора $\mathcal{B}_C^1$. Кроме того, также имеем

$$\|\mathcal{B}_C^2\varphi\|^p_{q_2,p,G,\frac{1}{\rho}}=\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-pq_2}|f_1(z)|^p\left|\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{-2q_2}\overline{\mu_{q_1-q_2}(\zeta)}}{(\zeta-z)^{2q_2}\overline{f_1(\zeta)}f_1(z)}\overline{\varphi(\zeta)}\frac{i}{2}d\zeta\wedge d\overline{\zeta}\right|^p\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\leqslant$$

$$\leqslant K_2^p\iint\limits_{\omega_2}\lambda(z)^{2-pq_2}|f_1(z)|^p\left(\iint\limits_{D_1}\frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z|^{2q_2}|f_1(\zeta)||f_1(z)|}\frac{|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|}{2}\right)^p\frac{|dz\wedge d\overline{z}|}{2}\leqslant$$

$$\leqslant(K_2k_{q_2})^p\|\varphi\|^p_{q_1,p,G,\rho}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Для произвольного характера* $\rho\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$ *модифицированные операторы Берса:* $\mathcal{B}_C^1$ *для случая* $\mathbb{N}\ni q_2-q_1\geqslant 2$ *и* $\mathcal{B}_C^2$ *для случая* $\mathbb{N}\ni q_1-q_2\geqslant 2$ *являются антилинейными непрерывными отображениями из пространства* $A^p_{q_1}(D_1,G,\rho)$ *в «*(q,ρ)*-двойственное» пространство* $A^p_{q_2}(D_2,G,\frac{1}{\rho})$ *с нормами* $\|\mathcal{B}_C^1\|\leqslant K_1k_{q_2}$, $\|\mathcal{B}_C^2\|\leqslant K_2k_{q_2}$ *соответственно, где* $k_{q_2}=\dfrac{4^{2(q_2-1)}2\pi}{q_2}$, K_1 *из (15),* K_2 *из (21).*

Автор поддержан грантом ФЦП, № 02.740.11.0457.

Список литературы

[1] О.А.Сергеева, Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм, *Вестник НГУ*, **5**(2005), №4, 45-63.

[2] О.А.Сергеева, Модифицированные операторы Берса и двойственность голоморфных мультипликативных автоморфных форм, *Сиб. матем. журн*, **50**(2009), №4, 902-914.

[3] H.M.Farkas, I.Kra, Riemann Surfaces, *Graduate Texts in Mathematics*, №71, Springer-Verlag, 1992.

[4] L.Bers, A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings, *Acta Math.*, **116**(1966), 115-134.

[5] И.Кра, Автоморфные формы и клейновы группы, М., Мир, 1975.

[6] В.В.Чуешев, Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности, Ч. 2, Кемерово, КемГУ, 2003.

The Bilinear Pairings for the Holomorphic (q, ρ)-Forms

Olga A. Sergeeva

Study was started in [1,2] of the normed spaces of multiplicative holomorphic automorphic forms for a Fuchsian group. In the present article bilinear pairings for general duality of the (q, ρ)-forms are considered. The symmetric variant of bilinear pairing which can be used in the theory of single-valued automorphic forms is received. On the basis of the entered bilinear pairings the modified integral Bers operators corresponding to them are investigated. These operators relate to a reflection in some quasicircle and also are connected to the general duality of (q, ρ)-forms. Under study the universal norm estimates for all operators is received.

Keywords: bilinear pairing, duality, multiplicative automorphic form, Bers operator.