Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(1), 123–127

УДК 517.53

Разложение интегралов некоторых классов в обобщенные степенные ряды

Светлана В. Савина*
ФГОБУВПО "Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации",
Ленинградский пр., 49, Москва, 125993,
Россия

Получена 18.08.2010, окончательный вариант 25.10.2010, принята к печати 20.11.2010

Исследуется разложение интегралов типа Коши специального вида в равномерно и абсолютно сходящиеся обобщенные степенные ряды, которые можно любое число раз "дифференцировать" обобщенной производной D_z аналогично правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов, выводятся формулы для нахождения обобщенной производной.

Ключевые слова: аналитичность, обобщенный степенной ряд, обобщенная производная.

В работе Х.П.Дзебисова [1] был рассмотрен интеграл вида

$$F_{\alpha\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \tau^{\gamma-1}d\tau \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\varsigma)}{\varsigma - u}d\varsigma,$$

где $u = \tau z$, $\varphi(\varsigma)$ — непрерывная на окружности $\Gamma = \{\varsigma : |\varsigma| = 1\}$ функция, α, β, γ — действительные числа, удовлетворяющие условиям $0 < \alpha < \beta < 1$, $\gamma \geqslant 1$. При $|u| = 1$ внутренний интеграл понимается как особый (сингулярный) в смысле главного значения по Коши. Его существование гарантируется, если плотность $\varphi(\varsigma)$ удовлетворяет условию Гельдера-Липшица.

Рассмотрим вопрос о представимости в виде обобщенных степенных рядов интегралов

$$F_{\alpha}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\alpha} \tau^{\gamma-1}d\tau \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\varsigma)}{\varsigma - u}d\varsigma, \tag{1}$$

$$F_{\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta}^{1} \tau^{\gamma-1}d\tau \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\varsigma)}{\varsigma - u}d\varsigma, \tag{2}$$

где $u = \tau z$, плотность $\varphi(\varsigma)$ определена на окружности $\{\Gamma = \varsigma : |\varsigma| = 1\}$ и удовлетворяет на ней условию Гельдера с показателем ν $(0 < \nu \leqslant 1)$, константа $\gamma \geqslant 1$, константа α удовлетворяет условию $0 < \alpha \leqslant 1$, константа β удовлетворяет условию $0 \leqslant \beta < 1$.

Теорема 1. *Пусть плотность интеграла (1) аналитична в круге $|z| < \dfrac{1}{\alpha} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда в области $G_2 = \{z \in C : |z| > \dfrac{1}{\alpha}\}$ функция $F_{\alpha}(z)$, представимая интегралом (1), разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся обобщенный степенной ряд (8), который можно любое число раз "дифференцировать" обобщенной производной D_z аналогично правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов.*

*savinas@list.ru

Доказательство. Выберем ε_1 так, чтобы $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, и разложим $\varphi(\varsigma)$ в ряд Тейлора в круге $|z| < \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{3}$$

где $a_n = \dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Обозначим $M = \max\limits_{|z|=\frac{1}{\alpha}+\varepsilon_1} |\varphi(z)|$. В силу неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда имеем $|a_n| \leqslant A_n = \frac{M}{\left(\frac{1}{\alpha}+\varepsilon_1\right)^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Отсюда следует, что в круге $|z| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$ ряд (3) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n,$$

а значит, ряд (3) в этом круге сходится равномерно и абсолютно. При этом оказываются сходящимися и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n, \tag{4}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)A_n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)A_n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n. \tag{5}$$

В области G_2 интеграл (1) является, вообще говоря, неаналитической функцией (интеграл (1) может обладать аналитичностью в некоторых подобластях области G_2), и в этой области справедлива формула

$$F_\alpha(z) = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1}\psi^+(u)d\tau + \int\limits_{\tau_1}^{\alpha} \tau^{\gamma-1}\psi^-(u)d\tau, \tag{6}$$

где

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(\varsigma)}{\varsigma - u}d\varsigma = \begin{cases} \psi^+(u), \text{ если } |u| < 1, \\ \psi^-(u), \text{ если } |u| > 1, \end{cases}$$

τ_1 является функцией от $|z| : \tau_1 = \tau_1(|z|) = \dfrac{1}{|z|}$.

Учитывая, что внутренний интеграл в формуле (1) является интегралом Коши, следовательно, $\psi^+(u) = \varphi(u)$, $\psi^-(u) \equiv 0$, перепишем формулу (1) в виде

$$F_\alpha(z) = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1}\varphi(u)d\tau,$$

что в силу (3) эквивалентно

$$F_\alpha(z) = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\right)d\tau. \tag{7}$$

В правой части (7) можно перейти к почленному интегрированию, поскольку из сходимости ряда (3) в круге $|z| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$ следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ и интегрирование с весом $\tau^{\gamma-1}$ не ухудшает сходимости ряда, что следует из оценки произвольного слагаемого ряда (7) $P_n^+ = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1} u^n d\tau$:

$$\left|P_n^+\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1} \left|a_n\right| \left|u\right|^n d\tau\right| < \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1} A_n d\tau = \frac{1}{\gamma} A_n \tau_1^{\gamma} < \frac{1}{\gamma} A_n.$$

Таким образом, всюду в области G_2 функция $F_\alpha(z)$, представимая интегралом (1), разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся функциональный ряд (по признаку Вейерштрасса)

$$F_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1} u^n d\tau$$

или, если $b_n(\tau_1) = \dfrac{a_n}{\gamma+n} \cdot \tau_1^{\gamma+n} = \dfrac{\varphi^n(0)}{(\gamma+n)\,n!} \cdot \tau_1^{\gamma+n}$, в ряд

$$F_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\tau_1) z^n. \tag{8}$$

Слагаемые P_n^+ назовем положительными составляющими интеграла (1). В области аналитичности $G_1 = \left\{z \in C : |z| < \dfrac{1}{\alpha}\right\}$ они обращаются в полиномы, а составленный из них ряд (ряд (8) при значении $\tau_1 = 1$) — в обычный равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд.

Ряд (8) назовем *обобщенным степенным рядом* или обобщенным рядом Тейлора. Его "коэффициенты" — функции $b_n(\tau_1)$ являются квазиконстантами оператора D_z. В области G_1 они обращаются в обычные константы: $b_n(\alpha) = \dfrac{a_n}{\gamma+n} \cdot \alpha^{\gamma+n}$.

Далее, применяя оператор D_z к обеим частям (8) и внося в правой части оператор за знак суммирования, получим $D_z\left[F_\alpha(z)\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_z\left[b_n(\tau_1) z^n\right]$.

С учетом правила действия оператора D_z на произведение имеем $D_z\left[b_n(\tau_1) z^n\right] = b_n(\tau_1) D_z(z^n) = b_n(\tau_1) \dfrac{\partial}{\partial z}(z^n) = n b_n(\tau_1) z^{n-1}$ и, следовательно,

$$D_z\left[F_\alpha(z)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n(\tau_1) z^{n-1}. \tag{9}$$

Покажем равномерную сходимость ряда (9). Применяя оператор D_z к обеим частям (7), получим

$$D_z\left[F_\alpha(z)\right] = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1} D_z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\right) d\tau. \tag{10}$$

Вычисляя произвольное слагаемое из правой части (10), будем иметь:

$$\int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1} D_z\left(a_n u^n\right) d\tau = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma-1} a_n \frac{\partial u^n}{\partial z} d\tau = n\, a_n \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma} u^{n-1} d\tau.$$

Оценим полученное выражение:

$$\left| n\,a_n \int\limits_0^{\tau_1} \tau^\gamma u^{n-1} d\tau \right| \leqslant n\,|a_n| \int\limits_0^{\tau_1} \tau^\gamma\,|u|^{n-1}\,d\tau < n\,A_n \int\limits_0^{\tau_1} \tau^\gamma d\tau =$$

$$= \frac{1}{\gamma+1} n\,A_n \tau_1^{\gamma+1} \leqslant \frac{1}{\gamma+1} n\,A_n.$$

Отсюда, в силу сходимости числового ряда (4), ряд (9) сходится равномерно и абсолютно.

Итак, обобщенный ряд Тейлора (8) можно почленно "дифференцировать" обобщенной производной D_z, причем эта операция аналогична правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов.

Покажем, что ряд (8) можно аналогичным образом "дифференцировать" обобщенной производной D_z любое число раз.

Докажем, во-первых, что ряд, получаемый в результате повторного применения к (10) оператора D_z, также сходится равномерно и абсолютно. Запишем ряд (10) в виде

$$D_z\,[F_\alpha(z)] = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^{n-1} \right) d\tau.$$

Действуя на обе части обобщенной производной, получим

$$D_z^{(2)}\,[F_\alpha(z)] = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^\gamma D_z \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^{n-1} \right) d\tau.$$

Внося оператор D_z за знак суммирования, имеем

$$D_z^{(2)}\,[F_\alpha(z)] = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\partial u^{n-1}}{\partial z} \right) d\tau$$

или

$$D_z^{(2)}\,[F_\alpha(z)] = \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma+1} D_z \left(\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1) a_n u^{n-2} \right) d\tau. \tag{11}$$

Из оценки произвольного слагаемого из правой части (11)

$$\left| n\,(n-1)a_n \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma+1} u^{n-2} d\tau \right| \leqslant n\,(n-1)\,|a_n| \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma+1}\,|u|^{n-2}\,d\tau <$$

$$< n\,(n-1)A_n \int\limits_0^{\tau_1} \tau^{\gamma+1} d\tau = \frac{1}{\gamma+2} n\,(n-1)A_n\,\tau_1^{\gamma+2} \leqslant \frac{1}{\gamma+2} n\,(n-1)A_n$$

и сходимости числового ряда (5) следует, что ряд (11) сходится равномерно и абсолютно.

Во-вторых, применяя оператор D_z к обеим частям (9) и внося в правой части оператор за знак суммирования, получим $D_z^{(2)}\,[F_\alpha(z)] = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n\,(n-1) b_n(\tau_1) z^{n-2}$.

Ясно, что операцию "дифференцирования" ряда (8) обобщенной производной D_z можно применять любое число раз. Образуемые при этом равномерно и абсолютно сходящиеся обобщенные степенные ряды имеют вид

$$D_z^{(k)}\left[F_\alpha(z)\right] = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)...(n-k+1) b_n(\tau_1) z^{n-k}, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

или $D_z^{(k)}\left[F_\alpha(z)\right] = \sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n^{[k]}(\tau_1) z^{n-k},\ k = 1, 2, 3, ...,$ где $b_n^{[k]}(\tau_1) = n\,(n-1)...(n-k+1)\, b_n(\tau_1) = \dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{(\gamma+k)(n-k)!}\tau_1^{\gamma+n}.$ □

Аналогично можно доказать теорему 2.

Теорема 2. *Пусть плотность интеграла* (2) *аналитична в круге* $|z| < \dfrac{1}{\beta} + \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$. *Тогда в области* $G_1 = \left\{ z \in C : 1 < |z| < \dfrac{1}{\beta} \right\}$ *функция* $F_\beta(z)$, *представимая интегралом* (2), *разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся обобщенный степенной ряд*

$$F_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n(0)}{(\gamma+n)\,n!} \cdot \left(\tau_2^{\gamma+n} - \beta^{\gamma+n}\right) z^n,$$

который можно любое число раз "дифференцировать" обобщенной производной аналогично правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов: $D_z^{(k)}\left[F_\beta(z)\right] =$
$= \sum\limits_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)...(n-k+1) b_n(\tau_2) z^{n-k}, k = 1, 2, 3, ...,$ *где* $b_n(\tau_2) = \dfrac{a_n}{\gamma+n} \cdot \left(\tau_2^{\gamma+n} - \beta^{\gamma+n}\right) = \dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{(\gamma+n)\,n!} \cdot \left(\tau_2^{\gamma+n} - \beta^{\gamma+n}\right).$

Список литературы

[1] Х.П.Дзебисов, Свойства функций в пространствах C^1 и C^2, определенных некоторыми интегралами, *Математический анализ и теория функций*, М., МОПИ им. Н.К.Крупской, (1974), вып. 5, 102–118.

Decomposition of Integrals of the Some Classes in Generalized Power Series

Svetlana V. Savina

It is investigated the decomposition of the Cauchy integrals the special kind in uniformly and absolutely converging generalized power series which it is possible to "differentiate" any number of times of the generalized derivative like the rule of differentiation by z of usual power series. It is deduced the formulas for a finding of the generalized derivative.

Keywords: the analyticity, generalized power series, the generalized derivative.