Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2011, 4(1), 85–101

УДК 517.54+537.2

Примеры решения задач о проводящем эллипсе во внешних электрических полях

Владимир П. Казанцев
Евгений Н. Шляхтич*
Институт инженерной физики и радиоэлектроники,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 12.05.2010, окончательный вариант 27.07.2010, принята к печати 10.09.2010

Получено и представлено в комплексных переменных решение задачи о проводящем эллипсе во внешних электрических полях с помощью аппарата характеристических мультиполей. Рассмотрены конкретные примеры: проводящий эллипс в поле, комплексный потенциал которого представляет собой элементарные функции (в качестве примеров рассматриваются функции: $-E^*z^n$ и $-E^*\exp(\gamma z)$); проводящий эллипс в поле, комплексный потенциал которого представляет собой специальную функцию (в качестве примера взята функция Бесселя $-E^*J_n(\gamma z)$); проводящий эллипс в электрическом поле точечного мультиполя, расположенного вне эллипса; точечный мультиполь, экранированный внутри эллипса. В процессе решения поставленной задачи получены разложения комплексных потенциалов внешних полей по многочленам Чебышева в области эллипса.

Ключевые слова: характеристические мультиполи, проводящий эллипс, комплексный потенциал, наведенные заряды, поверхностная плотность зарядов, собственная электростатическая энергия зарядов, энергия электростатического взаимодействия, электростатика, многочлены Чебышева.

Введение

Для решения электростатических задач о проводящем эллипсе наиболее удобным, на наш взгляд, является применение аппарата характеристических мультиполей. Под характеристическими мультиполями эллипса мы понимаем базисные распределения плотностей зарядов на границе проводящего эллипса. Некоторые общие соотношения, необходимые для решения задачи о проводящем эллипсе во внешнем электрическом поле, были изложены нами в работе [1]. Анализу конкретных примеров и посвящена данная работа. Прежде, чем приступить к рассмотрению этих примеров, напомним необходимые нам основные соотношения [1].

Функция $G(z) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right)$ конформно отображает внешнюю к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

*Shlyahtich2005@yandex.ru

область на область, внешнюю к окружности

$$|G(z)| = A = \frac{a+b}{2}$$

комплексной плоскости G.

Базисные комплексные потенциалы, соответствующие единичным значениям компонент мультипольных моментов минимальных порядков поляризационных зарядов эллипса, могут быть выражены через $G(z)$:

$$\begin{gathered}
\Pi_{kr}(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o k}\begin{cases} \dfrac{1}{G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ \dfrac{c^k}{2^{k-1}\left(A^{2k} + (c/2)^{2k}\right)} T_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A\,; \end{cases} \\
\Pi_{ki}(z) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_o k}\begin{cases} \dfrac{1}{G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ -\dfrac{c^k}{2^{k-1}\left(A^{2k} - (c/2)^{2k}\right)} T_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A\,. \end{cases}
\end{gathered} \tag{1}$$

Заметим, что

$$T_k(z/c) = \frac{2^{k-1}}{c^k}\left(G^k(z) + \left(\frac{c^2}{4G(z)}\right)^k\right) \tag{2}$$

— это многочлен Чебышева первого рода.

Источниками комплексных потенциалов (1) служат заряды, распределенные по эллипсу с плотностями

$$\begin{aligned}
\sigma_{kr} &= \frac{A^k}{\pi(A^{2k} + (c/2)^{2k})}\frac{\cos(k\alpha)}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}; \\
\sigma_{ki} &= \frac{A^k}{\pi(A^{2k} - (c/2)^{2k})}\frac{\sin(k\alpha)}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}};
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha = \arg G(z)$.

Приведем выражения для базисных электрических полей:

$$\begin{gathered}
E^*_{kr}(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ -\dfrac{c^{k-1}}{2^{k-1}k\left(A^{2k} + (c/2)^{2k}\right)} T'_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A\,; \end{cases} \\
E^*_{ki}(z) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_o}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ \dfrac{c^{k-1}}{2^{k-1}k\left(A^{2k} - (c/2)^{2k}\right)} T'_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A\,. \end{cases}
\end{gathered} \tag{4}$$

$E^*_{kr}(z)$ и $E^*_{ki}(z)$, как видно из соотношений (4), могут быть аналитически продолжены из области $|G(z)| > A$ внутрь эллипса вплоть до отрезка оси абсцисс, соединяющего фокусы эллипса. Рассматривая эти аналитические продолжения как электрические поля, можно найти плотности электрических зарядов

$$\tilde{\sigma}_{kr} = \frac{2^k}{\pi c^k}\frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}; \quad \tilde{\sigma}_{ki} = i\sigma_{kr}, \tag{5}$$

которые служат источниками аналитических продолжений полей и лежат на отрезке оси абсцисс $-c < x < c$. Таким образом, находим источники электрического поля внутри эллипса, создающие такие же электрические поля вне эллипса, что и электрические заряды, распределенные по эллипсу, то есть решаем задачу "заметания" зарядов с границы эллиптической области внутрь ее. Интересно, что решением задачи заметания электрических зарядов, распределенных по эллипсу с плотностью σ_{ki}, служат мнимые электрические заряды, распределенные по отрезку $-c < x < c$ с плотностью $\tilde{\sigma}_{ki}$ так, что мнимые заряды появляются здесь как эквивалентные, создающие такое же электрическое поле вне эллипса, как и электрические заряды эллипса.

При решении задачи об электрически нейтральном проводящем эллипсе, находящемся во внешнем электрическом поле с комплексным потенциалом $\pi(z)$, можно представить комплексный потенциал наведенных на эллипсе зарядов суммой потенциалов характеристических мультиполей эллипса

$$\Pi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kr}\Pi_{kr}(z) + x_{ki}\Pi_{ki}(z)); \tag{6}$$

$$x_{kr} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} + (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\sigma_{kr}\, dl; \tag{7}$$

$$x_{ki} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} - (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\sigma_{ki}\, dl. \tag{8}$$

При этом для расчета значения электростатической энергии наведенных зарядов

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kr}\sigma_{kr}(z) + x_{ki}\sigma_{ki}(z)) \tag{9}$$

может быть использована формула

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x_{kr}^2}{A^{2k} + (c/2)^{2k}} + \frac{x_{ki}^2}{A^{2k} - (c/2)^{2k}} \right). \tag{10}$$

Итак, основной целью данной работы было показать, что аппарат характеристических мультиполей полностью решает задачу о проводящем эллипсе во внешнем электрическом поле. Принципиальная схема решения этой задачи представлена формулами (6)–(10), однако вопрос о практической ценности этой схемы может быть подтвержден лишь анализом возможности относительно простого вычисления коэффициентов (7) и (8) для типичных внешних электростатических полей. Такой анализ и проводится в данной работе.

Вопросы о сходимости представляющих решения задач рядов (6) потенциалов характеристических мультиполей рассмотрены в работе [1] и монографии [2]. Сходимость этих рядов по энергетической норме обусловлена вариационной схемой построения таких решений, согласно которой энергия (10) ограничена сверху. Для более детального анализа сходимости рядов (6) в работе [1] предложено понятие эллипса сходимости, характерное для разложения аналитических функций по полиномам Чебышева. Что касается поточечной скорости сходимости, то понятие эллипса сходимости позволяет утверждать, что такая скорость сходимости будет не медленнее (согласно теореме Абеля), чем скорость сходимости ряда аналитической функции, представляющей комплексный потенциал внешнего поля на границе эллипса.

1. Эллипс в электрических полях с комплексными потенциалами $-\mathbf{E}^*\mathbf{z}^\mathbf{n}$

Чтобы провести вычисления по формулам предыдущего раздела, заметим , что для вычисления коэффициентов x_{kr} и x_{ki} в соотношениях (6) и (9) вместо формул (7) и (8) здесь удобно использовать эквивалентные

$$x_{kr} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} + (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\tilde{\sigma}_{kr}\, dl; \tag{11}$$

$$x_{ki} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} - (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\tilde{\sigma}_{ki}\, dl, \tag{12}$$

интегрирование в которых проводится по отрезку оси абсцисс, соединяющему фокусы эллипса. Напомним, что $\tilde{\sigma}_{kr}$ и $\tilde{\sigma}_{ki}$ определены формулами [1]:

$$\tilde{\sigma}_{kr} = \frac{2^k}{\pi c^k}\frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}; \quad \tilde{\sigma}_{ki} = i\sigma_{kr}. \tag{13}$$

Принимая их во внимание, запишем:

$$x_{kr} = 2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} + (c/2)^{2k})E_{nr} \int\limits_{-c}^{c} \frac{2^k}{\pi c^k} x^n \frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx, \tag{14}$$

$$x_{ki} = 2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} - (c/2)^{2k})E_{ni} \int\limits_{-c}^{c} \frac{2^k}{\pi c^k} x^n \frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx. \tag{15}$$

С помощью справочника [3] находим, что для n и k одинаковой четности при условии $n \geqslant k$

$$I = \int\limits_{-c}^{c} \frac{2^k}{\pi c^k} x^n \frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx = \left(\frac{c}{2}\right)^{n-k} C_n^{\frac{n+k}{2}}.$$

Если же n и k имеют разную четность или $n < k$, то $I = 0$.

Наведенные на эллипсе заряды во внешней к эллипсу области создадут электрическое поле с комплексным потенциалом

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \Big(EA^{2(n-2k)} + E^*(c/2)^{2(n-2k)}\Big)(c/2)^{2k} C_n^{n-k} \frac{1}{G^{n-2k}(z)}. \tag{16}$$

Внутри же эллипса

$$\Pi(z) = E^* \frac{c^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{n-k} T_{n-2k}(z/c). \tag{17}$$

Комплексному потенциалу $\Pi(z)$, определенному формулами (16) и (17), соответствует электростатическая энергия

$$\begin{aligned} W(\Pi(z)) = \frac{1}{2}2\pi\varepsilon_o \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (n-2k)(c/2)^{2k} C_n^{n-k} \Big((A^{2(n-2k)} + (c/2)^{2(n-2k)})E_r^2 + \\ + (A^{2(n-2k)} - (c/2)^{2(n-2k)})E_i^2 \Big). \end{aligned} \tag{18}$$

В заключение этого раздела приведем формулу разложения целых степеней z по многочленам Чебышева:

$$z^n = \frac{c^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{n-k} (T_{n-2k}(z/c) - \mathrm{Re}(i)^{n-2k}), \tag{19}$$

следующую из соотношения (17).

2. Эллипс в электрических полях с комплексными потенциалами $-\mathbf{E}^* \exp(\gamma \mathbf{z})$

Для вычисления коэффициентов x_{kr} и x_{ki} в соотношениях (6) и (9), определяющих комплексные потенциалы наведенных на эллипсе зарядов и плотность их распределения по эллипсу, здесь удобно воспользоваться формулами (11) и (12), согласно которым при условии вещественности постоянной γ находим

$$x_{kr} = 2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} + (c/2)^{2k}) E_{nr} \int_{-c}^{c} \exp(\gamma x) \frac{2^k}{\pi c^k} \frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx, \tag{20}$$

$$x_{ki} = 2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} - (c/2)^{2k}) E_{ni} \int_{-c}^{c} \exp(\gamma x) \frac{2^k}{\pi c^k} \frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx. \tag{21}$$

С помощью справочника [3] находим

$$\int_{-c}^{c} \exp(\gamma x) \frac{2^k}{\pi c^k} \frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx = \frac{2^k}{c^k} I_k(\gamma c),$$

где $I_k(\gamma c)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Наведенные на эллипсе заряды во внешней к эллипсу области создадут электрическое поле с комплексным потенциалом

$$\Pi(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(E A^{2k} + E^* (c/2)^{2k} \right) \frac{2^k}{c^k} I_k(\gamma c) \frac{1}{G^k(z)}. \tag{22}$$

Внутри же эллипса

$$\Pi(z) = 2E^* \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\gamma c) T_k(z/c). \tag{23}$$

Во введении мы говорили, что скорость сходимости решения будет не медленнее (согласно теореме Абеля), чем скорость сходимости ряда аналитической функции, представляющей комплексный потенциал внешнего поля на границе эллипса. На примере полученного потенциала (23) проанализируем, от чего зависит скорость сходимости определяющего этот потенциал ряда. Принимая во внимание то, что функция $I_k(\gamma c)$ положительна, запишем

$$|\Pi(z)| < D \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\gamma c) |T_k(z/c)|, \tag{24}$$

где D — некоторая положительная константа. Так как максимум модуля многочлена Чебышева достигается на границе эллипса, можно записать:

$$|\Pi(z)| < D\sum_{k=1}^{\infty} I_k(\gamma c)\Big(\frac{2^k A^k}{c^k} + \frac{c^k}{2^{k+1}A^k}\Big), \tag{25}$$

где A — внешний конформный радиус эллипса.

Обращаясь к интегральному представлению функции Бесселя мнимого аргумента [4], запишем:

$$I_k(\gamma c) < \Big(\frac{\gamma c}{2}\Big)^k \frac{\exp(\gamma c)}{\sqrt{\pi}(k-1)!}. \tag{26}$$

Из соотношений (25) и (26) в итоге получаем (заметим, что из выражения (25) мы взяли первое слагаемое, так как второе сходится быстрее):

$$|\Pi(z)| < D\frac{(\gamma A)\exp(\gamma c)}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\gamma A)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{27}$$

Откуда видно, что ряд (23) сходится абсолютно и не медленнее, чем $\exp(x)$, где $x = \gamma A$.

Комплексному потенциалу $\Pi(z)$, определенному формулами (22) и (23), соответствует электростатическая энергия

$$W(\Pi(z)) = \frac{1}{2}2\pi\varepsilon_o \sum_{k=1}^{\infty} kI_k^2(\gamma c)\Big(((2A/c)^{2k}+1)E_r^2 + ((2A/c)^{2k}-1)E_i^2\Big). \tag{28}$$

Отметим также, что из соотношения (23) следует, что

$$\exp(\gamma z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(\gamma c)\Big(T_k(z/c) - \mathrm{Re}(i)^k\Big). \tag{29}$$

3. Эллипс в электрических полях с комплексными потенциалами $-\mathbf{E}^*\mathbf{J_n}(\gamma\mathbf{z})$

Здесь мы рассмотрим пример, показывающий, что аппарат характеристических мультиполей позволяет получить решение задачи о проводящем эллипсе во внешнем электрическом поле, когда комплексный потенциал этого поля определяется не только элементарными, но и специальными функциями.

Для вычисления коэффициентов x_{kr} и x_{ki} в соотношениях (6) и (9), определяющих комплексные потенциалы наведенных на эллипсе зарядов и плотность их распределения по эллипсу, удобно воспользоваться формулами (11) и (12), согласно которым при условии вещественности постоянной γ находим

$$x_{kr} = 2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} + (c/2)^{2k})E_{nr}\int_{-c}^{c} J_n(\gamma x)\frac{2^k}{\pi c^k}\frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2-x^2}}\,dx, \tag{30}$$

$$x_{ki} = 2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} - (c/2)^{2k})E_{ni}\int_{-c}^{c} J_n(\gamma x)\frac{2^k}{\pi c^k}\frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2-x^2}}\,dx. \tag{31}$$

С помощью справочника [3] находим, что для n и k одинаковой четности

$$\int\limits_{-c}^{c} J_n(\gamma x)\frac{2^k}{\pi c^k}\frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2-x^2}}\,dx = \frac{2^k}{c^k}J_{(k+n)/2}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{(k-n)/2}\left(\frac{\gamma c}{2}\right).$$

Если же n и k имеют разную четность, то $x_{kr} = x_{ki} = 0$. Наведенные на эллипсе заряды во внешней к эллипсу области создадут электрическое поле с комплексным потенциалом

$$\Pi(z) = \sum_{p=1}^{\infty}\left(EA^{4p} + E^*(c/2)^{4p}\right)\frac{2^{2p}}{c^{2p}}J_{p+q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)\frac{1}{G^{2p}(z)} \tag{32}$$

при четных значениях $n = 2q;\ q = 0,\ 1\ldots$ и

$$\Pi(z) = \sum_{p=1}^{\infty}\left(EA^{4p-2} + E^*(c/2)^{4p-2}\right)\frac{2^{2p-1}}{c^{2p-1}}J_{p+q-1}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)\frac{1}{G^{2p-1}(z)} \tag{33}$$

при нечетных значениях $n = 2q-1;\ q = 1,\ 2\ldots$. Внутри же эллипса

$$\Pi(z) = 2E^*\sum_{p=1}^{\infty}J_{p+q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)T_{2p}(z/c) \tag{34}$$

при четных значениях $n = 2q;\ q = 0,\ 1\ldots$ и

$$\Pi(z) = 2E^*\sum_{p=1}^{\infty}J_{p+q-1}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)T_{2p-1}(z/c) \tag{35}$$

при нечетных значениях $n = 2q-1;\ q = 1,\ 2\ldots$.

Комплексному потенциалу $\Pi(z)$, определенному формулами (32) и (34), соответствует электростатическая энергия

$$\begin{aligned} W(\Pi(z)) = \frac{1}{2}2\pi\varepsilon_o\sum_{p=1}^{\infty}2pJ_{p+q}^2\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}^2\left(\frac{\gamma c}{2}\right)\Big(((2A/c)^{4p}+1)E_r^2 + \\ +((2A/c)^{4p}-1)E_i^2\Big). \end{aligned} \tag{36}$$

Электростатическая энергия

$$\begin{aligned} W(\Pi(z)) = \frac{1}{2}2\pi\varepsilon_o\sum_{p=1}^{\infty}(2p-1)J_{p+q-1}^2\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}^2\left(\frac{\gamma c}{2}\right)\Big(((2A/c)^{4p-2}+1)E_r^2 + \\ +((2A/c)^{4p-2}-1)E_i^2\Big) \end{aligned} \tag{37}$$

соответствует комплексному потенциалу, определенному соотношениями (33) и (35). Отметим также, что из соотношения (34) следует, что

$$J_{2q}(\gamma z) = J_{2q}(0) + 2\sum_{p=1}^{\infty}J_{p+q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)\Big(T_{2p}(z/c) - (-1)^p\Big), \tag{38}$$

а из соотношения (35) —

$$J_{2q-1}(\gamma z) = 2\sum_{p=1}^{\infty}J_{p+q-1}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)J_{p-q}\left(\frac{\gamma c}{2}\right)T_{2p-1}(z/c). \tag{39}$$

4. Эллипс в электрическом поле точечного мультиполя, расположенного вне эллипса

Задача об эллипсе в электрическом поле одного точечного мультиполя, расположенного вне эллипса в точке $\tilde{z}$, может быть решена с помощью оператора

$$\mathbf{D}_m = \frac{1}{m!}\Big(\lambda_m \partial^m_{\tilde{z}} + \lambda^*_m \partial^m_{\tilde{z}^*}\Big). \tag{40}$$

В работе [1] для эллипса в поле точечного заряда мы получили следующие потенциалы наведенных зарядов. Вне эллипса

$$\begin{aligned}\Pi(z) = \frac{-\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{A^{2k}+(c/2)^{2k}}{G^k(z)}\operatorname{Re}\frac{1}{G^k(\tilde{z})} - i\frac{A^{2k}-(c/2)^{2k}}{G^k(z)}\operatorname{Im}\frac{1}{G^k(\tilde{z})}\right) = \\ = -\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{A^{2k}}{G^{*\,k}(\tilde{z})G^k(z)} + \frac{(c/2)^{2k}}{G^k(\tilde{z})G^k(z)}\right) = \\ = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\left(1-\frac{A^2}{G^*(\tilde{z})G(z)}\right)\left(1-\frac{(c/2)^2}{G(\tilde{z})G(z)}\right)\right).\end{aligned} \tag{41}$$

Внутри эллипса

$$\Pi(z) = -\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kG^k(\tilde{z})}\frac{c^k}{2^{k-1}}T_k(z/c). \tag{42}$$

В случае, когда эллипс находится в поле мультиполя, комплексный потенциал наведенных на эллипсе зарядов вне и внутри эллипса может быть получен путем действия оператора $\mathbf{D_m}$ на представленные рядами правые части соотношений (41) и (42) при условии $\lambda_o = 1$. Введем обозначения

$$\partial^m_{\tilde{z}}\frac{1}{G^k(\tilde{z})} = F^{(m)}_k(z), \tag{43}$$

используя которое для комплексного потенциала наведенных зарядов вне эллипса запишем

$$\Pi(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o m!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Big(\lambda^*_m F^{(m)\,*}_k(\tilde{z})A^{2k} + \lambda_m F^{(m)}_k(\tilde{z})(c/2)^{2k}\Big)\frac{1}{G^k(z)}. \tag{44}$$

Внутри эллипса

$$\Pi(z) = -\frac{\lambda_m}{2\pi\varepsilon_o m!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}F^{(m)}_k(\tilde{z})\frac{c^k}{2^{k-1}}T_k(z/c). \tag{45}$$

Собственную электростатическую энергию наведенных зарядов находим как

$$\begin{aligned}W(\Pi(z)) = -\operatorname{Re}\frac{1}{2m!}\lambda_m\partial^m_z\Pi(z)\bigg|_{z=\tilde{z}} = \\ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o m!^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Big(|\lambda_m|^2A^{2k}|F^{(m)}_k(\tilde{z})|^2 + \operatorname{Re}\lambda^2_m(c/2)^{2k}F^{(m)\,2}_k(\tilde{z})\Big).\end{aligned} \tag{46}$$

Учитывая, что сумма внешнего электрического поля и поля наведенных на эллипсе зарядов внутри эллипса равна нулю, с помощью соотношения (44) находим разложение функции $(z-\tilde{z})^{-m}$ в ряд по полиномам Чебышева

$$\frac{1}{(z-\tilde{z})^m} = \frac{(-1)^m}{\tilde{z}^m} + \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{\infty}F^{(m)}_k(\tilde{z})\frac{c^k}{2^{k-1}}(T_k(z/c) - \operatorname{Re}(i)^k), \tag{47}$$

справедливое внутри эллипса
$$|G(z)| = |G(\tilde{z})|.$$

Для определения плотности распределения по эллипсу наведенных зарядов можно использовать формулу (9), подставив в нее
$$\begin{aligned} x_{kr} &= -\operatorname{Re}\frac{\lambda_m}{m!}F_k^{(m)}(\tilde{z})(A^{2k}+(c/2)^{2k}); \\ x_{ki} &= \operatorname{Im}\frac{\lambda_m}{m!}F_k^{(m)}(\tilde{z})(A^{2k}-(c/2)^{2k}). \end{aligned} \tag{48}$$

Приведем выражения через $G(z)$ для нескольких $F_k^{(m)}(z)$:
$$\begin{gathered} F_k^{(1)}(z) = -\tfrac{k}{G^{k-1}(z)(G^2(z)-(c/2)^2)}; \\ F_k^{(2)}(z) = \frac{k(k-1)}{G^{k-2}(z)(G^2(z)-(c/2)^2)^2} + \frac{2k}{G^{k-4}(z)(G^2(z)-(c/2)^2)^3}; \\ F_k^{(3)}(z) = -\frac{k(k-1)(k-2)}{G^{k-3}(z)(G^2(z)-(c/2)^3)^2} - \frac{6k(k-2)}{G^{k-5}(z)(G^2(z)-(c/2)^2)^4} - \\ -\frac{12k}{G^{k-7}(z)(G^2(z)-(c/2)^2)^5}. \end{gathered} \tag{49}$$

Другой способ определения комплексного потенциала наведенных зарядов позволяет представить этот потенциал на комплексной плоскости G суммой потенциалов точечных мультиполей.

Чтобы представить комплексный потенциал точечного мультиполя
$$\pi(z) = \frac{\lambda_m}{2\pi m\varepsilon_o(z-\tilde{z})^m} \tag{50}$$
на комплексной плоскости G должным образом, воспользуемся соотношениями
$$z = G + \frac{c^2}{4G}; \quad \tilde{z} = \tilde{G} + \frac{c^2}{4\tilde{G}}; \quad z - \tilde{z} = (G-\tilde{G})\left(1 - \frac{c^2}{4G\tilde{G}}\right)$$
и запишем
$$\pi(z) = \frac{\lambda_m}{2\pi m\varepsilon_o}\frac{G^m}{(G-\tilde{G})^m(G-c^2/4\tilde{G})^m} = \frac{\lambda_m}{2\pi m\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{A_k^{(m)}}{(G-\tilde{G})^k} + \frac{B_k^{(m)}}{(G-c^2/4\tilde{G})^k}\right), \tag{51}$$
сводя таким образом задачу о проводящем эллипсе в электрическом поле точечного мультиполя к задаче о проводящей окружности $|G| = A$ в электрическом поле нескольких точечных мультиполей, расположенных в точках $G_1 = \tilde{G}$; $G_2 = c^2/4\tilde{G}$, лежащих вне и внутри окружности соответственно.

Комплексный потенциал наведенных на окружности зарядов находим методом, описанным в работе [5]. В результате имеем
$$\Pi(z) = -\frac{1}{2\pi m\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\lambda_m^* A_k^{(m)*}G^k}{(A^2-\tilde{G}^*G)^k} + \frac{\lambda_m B_k^{(m)}}{(G-c^2/4\tilde{G})^k} - \frac{(-1)^k\lambda_m^* A_k^{(m)*}}{\tilde{G}^{*k}}\right). \tag{52}$$

Эта формула и будет определять комплексный потенциал наведенных на эллипсе зарядов. В отличие от соотношения (44) здесь комплексный потенциал наведенных зарядов найден с помощью конечной суммы.

Комплексный потенциал экранированного эллипсом мультиполя запишем, добавив к $\Pi(z)$ $\pi(z)$:

$$\Pi_m(z) = \Pi(z) + \pi(z) = -\frac{1}{2\pi m\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\lambda_m^* A_k^{(m)\,*} G^k}{(A^2-\tilde{G}^* G)^k} - \frac{\lambda_m A_k^{(m)}}{(G-\tilde{G})^k} - \frac{(-1)^k\lambda_m^* A_k^{(m)\,*}}{\tilde{G}^{*\,k}}\right). \quad (53)$$

Отсюда получаем выражения для комплексной напряженности электрического поля экранированного точечного диполя:

$$E_m^*(z) = \frac{G'}{2\pi m\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{m} k\left(\frac{\lambda_m^* A_k^{(m)\,*} A^2 G^{k-1}}{(A^2-\tilde{G}^* G)^{k+1}} + \frac{\lambda_m A_k^{(m)}}{(G-\tilde{G})^{k+1}}\right) \quad (54)$$

и плотности распределения наведенных на эллипсе зарядов

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{2\pi m}\frac{d\alpha}{dl}\sum_{k=1}^{m} k\left(\frac{\lambda_m^* G^* A_k^{(m)\,*}}{(G^*-\tilde{G}^*)^{k+1}} + \frac{\lambda_m A_k^{(m)} G}{(G-\tilde{G})^{k+1}}\right). \quad (55)$$

Формулы для вычисления $A_k^{(m)}$ *и* $B_k^{(m)}$ получим путем разложения на простые дроби рациональной функции

$$\begin{aligned}\frac{G^m}{(G-G_1)^m(G-G_2)^m} &= \frac{1}{(G_1-G_2)^m}\left(\frac{G_1}{G-G_1} - \frac{G_2}{G-G_2}\right)^m = \\ &= \frac{1}{(G_1-G_2)^m}\left(\frac{G_1^m}{(G-G_1)^m} + \frac{(-G_2)^m}{(G-G_2)^m} + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k \frac{G_1^k(-G_2)^{m-k}}{(G-G_1)^k(G-G_2)^{m-k}}\right).\end{aligned} \quad (56)$$

Чтобы провести такое разложение, заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{(G-G_1)^k(G-G_2)^{m-k}} &= \frac{1}{(k-1)!(m-k-1)!}\partial_{G_1}^{k-1}\partial_{G_2}^{m-k-1}\frac{1}{(G-G_1)(G-G_2)} = \\ &= \frac{1}{(k-1)!(m-k-1)!}\partial_{G_1}^{k-1}\partial_{G_2}^{m-k-1}\frac{1}{(G_1-G_2)}\left(\frac{1}{G-G_1} - \frac{1}{G-G_2}\right).\end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k-1)!(m-k-1)!}\partial_{G_1}^{k-1}\partial_{G_2}^{m-k-1}\frac{1}{(G_1-G_2)(G-G_1)} = \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\partial_{G_1}^{k-1}\frac{1}{(G_1-G_2)^{m-k}}\frac{1}{G-G_1} = \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} C_{k-1}^p \frac{(-1)^{m-k}(m-p-2)!}{(k-1)!(m-k-1)!(G_2-G_1)^{m-p-1}}\frac{p!}{(G-G_1)^{p+1}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k-1)!(m-k-1)!}\partial_{G_1}^{k-1}\partial_{G_2}^{m-k-1}\frac{1}{(G_1-G_2)(G-G_2)} = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(m-k-1)!}\partial_{G_2}^{(m-k-1)!}\frac{1}{(G_1-G_2)^k}\frac{1}{G-G_2} = \\ &= \sum_{p=0}^{m-k-1} C_{m-k-1}^p \frac{(-1)^k(m-p-2)!}{(k-1)!(m-k-1)!(G_1-G_2)^{m-p-1}}\frac{p!}{(G-G_2)^{p+1}}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(G-G_1)^k(G-G_2)^{m-k}} = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{(-1)^{m-k}C_{m-p-2}^{k-p-1}}{(G_2-G_1)^{m-p-1}}\frac{1}{(G-G_1)^{p+1}}+ \\ + \sum_{p=0}^{m-k-1} C_{m-k-1}^{p}\frac{(-1)^k C_{m-p-2}^{k-1}}{(G_1-G_2)^{m-p-1}}\frac{1}{(G-G_2)^{p+1}} = \\ = \sum_{p=1}^{k} \frac{(-1)^{m-k}C_{m-p-1}^{k-p}}{(G_2-G_1)^{m-p}}\frac{1}{(G-G_1)^{p}} + \sum_{p=1}^{m-k}\frac{(-1)^k C_{m-p-1}^{k-1}}{(G_1-G_2)^{m-p}}\frac{1}{(G-G_2)^{p}}. \tag{57}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (55) и изменяя в ней порядок суммирования, будем иметь

$$\frac{G^m}{(G-G_1)^m(G-G_2)^m} = \frac{1}{(G_1-G_2)^m}\left(\frac{G_1^m}{(G-G_1)^m} + \frac{(-G_2)^m}{(G-G_2)^m} + \right. \\ + \sum_{p=1}^{m-1}\left(\frac{1}{(G-G_1)^p}\sum_{k=p}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}C_{m-p-1}^{k-p}C_m^k G_1^k(-G_2)^{m-k}}{(G_2-G_1)^{m-p}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(G-G_2)^p}\sum_{k=1}^{m-p}\frac{(-1)^k C_{m-p-1}^{k-1}C_m^k G_1^k(-G_2)^{m-k}}{(G_1-G_2)^{m-p}}\right). \tag{58}$$

Отсюда находим

$$A_m^{(m)} = \frac{G_1^m}{(G_1-G_2)^m};\;\; B_m^{(m)} = \frac{G_2^m}{(G_2-G_1)^m}; \\ A_p^{(m)} = \sum_{k=p}^{m-1}\frac{C_{m-p-1}^{k-p}C_m^k G_1^k (G_2)^{m-k}}{(G_1-G_2)^m(G_2-G_1)^{m-p}};\;\; 0<p<m; \\ B_p^{(m)} = \sum_{k=1}^{m-p}\frac{C_{m-p-1}^{k-1}C_m^k G_1^k (G_2)^{m-k}}{(G_2-G_1)^m(G_1-G_2)^{m-p}};\;\; 0<p<m. \tag{59}$$

В частности,

$$A_1^{(1)} = \frac{G_1}{(G_1-G_2)};\quad B_1^{(1)} = \frac{G_2}{(G_2-G_1)}; \\ A_2^{(2)} = \frac{G_1^2}{(G_1-G_2)^2};\;\; A_1^{(2)} = \frac{2G_1G_2}{(G_1-G_2)^2(G_2-G_1)}; \\ B_2^{(2)} = \frac{G_2^2}{(G_2-G_1)^2};\;\; B_1^{(2)} = \frac{2G_1G_2}{(G_2-G_1)^2(G_1-G_2)}; \\ A_3^{(3)} = \frac{G_1^3}{(G_1-G_2)^3};\;\; A_2^{(3)} = \frac{3G_1^2G_2}{(G_1-G_2)^3(G_2-G_1)};\;\; A_1^{(3)} = \frac{3G_1G_2(G_1+G_2)}{(G_1-G_2)^5}; \\ B_3^{(3)} = \frac{G_2^3}{(G_2-G_1)^3};\;\; B_2^{(3)} = \frac{3G_1^2G_2}{(G_2-G_1)^3(G_1-G_2)};\;\; B_1^{(3)} = \frac{3G_1G_2(G_1+G_2)}{(G_2-G_1)^5}. \tag{60}$$

Заметим, что преимуществом представления комплексного потенциала наведенных зарядов в форме (51) по сравнению с представлением его в виде бесконечного ряда (44) служит, например, то обстоятельство, что потенциал (51) легко может быть аналитически продолжен внутрь эллипса, причем положения особенностей этого аналитического продолжения совсем нетрудно найти.

Обратим также внимание на то, что, умножая левую и правую части соотношения (47) на

$T_k(x/c)/\sqrt{c^2-x^2}$, полагая в них $z=x$ и проводя интегрирование по отрезку, соединяющему фокусы эллипса, получим

$$\int\limits_{-c}^{c} \frac{T_k(x/c)\,dx}{(\tilde{z}-x)^m\sqrt{c^2-x^2}} = \frac{(-1)^m \pi c^k}{m!2^k} F_k^{(m)}(\tilde{z}). \tag{61}$$

Отметим, что интеграл отсутствует в справочнике [3].

5. Точечный мультиполь, экранированный внутри эллипса

Как и в предыдущем разделе, получим формулы, описывающие электрическое поле экранированного внутри эллипса точечного мультиполя, из соотношений для единичного точечного заряда, полученных нами в [1], с помощью оператора (40) $\mathbf{D}_m = \dfrac{1}{m!}\Big(\lambda_m \partial_{\tilde{z}}^m + \lambda_m^* \partial_{\tilde{z}^*}^m\Big)$.

Так, выражение для плотности наведенных на проводящем эллипсе точечным диполем зарядов находим, действуя оператором $\mathbf{D_1}$ на правую часть формулы [1]:

$$\begin{gathered}\sigma = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}\Bigg(1+ \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k c^k}{2^{k-2}} \left(\frac{\operatorname{Re} T_k(\tilde{z}/c)\cos(k\alpha)}{A^{2k}+(c/2)^{2k}} + \frac{\operatorname{Im} T_k(\tilde{z}/c)\sin(k\alpha)}{A^{2k}-(c/2)^{2k}} \right)\Bigg).\end{gathered} \tag{62}$$

В результате будем иметь

$$\begin{gathered}\sigma_m(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{A^k c^{k-m}}{2^{k-2}m!} \left(\frac{\operatorname{Re}\lambda_m T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)\cos(k\alpha)}{A^{2k}+(c/2)^{2k}} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{Im}\lambda_m T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)\sin(k\alpha)}{A^{2k}-(c/2)^{2k}} \right).\end{gathered} \tag{63}$$

Для вычисления производных от многочленов Чебышева первого рода используем представление

$$\begin{gathered}T_k(x) = \sum_{p=0}^{[k/2]} b_{k-2p}^{(k)} x^{k-2p} = 2^{k-1}x^k - k2^{k-3}x^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2!}2^{k-5}x^{k-4} - \\ -\frac{k(k-4)(k-5)}{3!}2^{k-7}x^{k-6} + \frac{k(k-5)(k-6)(k-7)}{4!}2^{k-9}x^{k-8} - \\ -\frac{k(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{5!}2^{k-11}x^{k-10} + \ldots.\end{gathered} \tag{64}$$

Коэффициенты $b_{k-2p}^{(k)}$ можно находить по формулам

$$\begin{gathered}b_k^{(k)} = 2^{k-1}; \quad b_{k-2}^{(k)} = -k2^{k-3}; \\ b_{k-2p}^{(k)} = (-1)^p \frac{k(k-p-1)(k-p-2)\ldots(k-2p+1)}{p!} 2^{k-2p-1}.\end{gathered} \tag{65}$$

Тогда

$$T_k^{(m)}(x) = \sum_{p=0}^{[(k-m)/2]} \frac{(k-2p)!}{(k-2p-m)!} b_{k-2p}^{(k)} x^{k-2p-m}. \tag{66}$$

В частности, значения производных от полиномов Чебышева по $x = 0$ будут равны нулю, если порядок дифференцирования и степень полинома имеют разные четности, если же k и m одинаковой четности, то

$$T_k^{(m)}(0) = m! b_m^{(k)}. \tag{67}$$

Распределению наведенных зарядов (63) будет отвечать комплексный потенциал, выражение для которого внутри эллипса получим путем действия оператора $\mathbf{D_m}$ на правую часть соотношения [1]:

$$\gamma(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\left(\ln\left(\frac{A}{R}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}(T_k(\tilde{z}^*/c)A^{2k} - (c/2)^{2k}T_k(\tilde{z}/c))}{2^{2k-2}k(A^{4k} - (c/2)^{4k})} T_k(z/c)\right). \tag{68}$$

В результате получим

$$\Pi_m(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = -\sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-m}(\lambda_m^* T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c)A^{2k} - \lambda_m T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o m!\, 2^{2k-2}k(A^{4k} - (c/2)^{4k})} T_k(z/c). \tag{69}$$

Собственную энергию наведенных на эллипсе зарядов находим как

$$\begin{gathered} W_{mm}(\tilde{z}, \tilde{z}^*) = -\frac{1}{2m!} \operatorname{Re} \lambda_m \partial_z^m \Pi_m(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*)\Bigg|_{z=\tilde{z}} = \\ = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-2m}(|\lambda_m|^2 |T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)|^2 A^{2k} - \operatorname{Re} \lambda_m^2 (T_k^{(m)}(\tilde{z}/c))^2 (c/2)^{2k})}{4\pi\varepsilon_o k(m!)^2\, 2^{2k-2}(A^{4k} - (c/2)^{4k})}. \end{gathered} \tag{70}$$

Представим эту формулу в виде

$$W_{mm}(\tilde{z}, \tilde{z}^*) = \frac{1}{2} \vec{\lambda}_m \cdot \hat{B}^{(m)}(\tilde{z}) \cdot \vec{\lambda}_m; \quad \vec{\lambda}_m = (\lambda_{mr}; \lambda_{mi}),$$

вводя в рассмотрение матрицу $\hat{B}^{(m)}(\tilde{z})$, для элементов которой из (69) найдем

$$\begin{gathered} B_{rr}^{(m)}(\tilde{z}) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-2m}(|T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)|^2 A^{2k} - \operatorname{Re}(T_k^{(m)}(\tilde{z}/c))^2 (c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o k(m!)^2\, 2^{2k-2}(A^{4k} - (c/2)^{4k})}; \\ B_{ii}^{(m)}(\tilde{z}) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-2m}(|T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)|^2 A^{2k} + \operatorname{Re}(T_k^{(m)}(\tilde{z}/c))^2 (c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o k(m!)^2\, 2^{2k-2}(A^{4k} - (c/2)^{4k})}; \\ B_{ri}^{(m)}(\tilde{z}) = B_{ir}^{(m)}(\tilde{z}) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-2m} \operatorname{Im}(T_k^{(m)}(\tilde{z}/c))^2 (c/2)^{2k}}{2\pi\varepsilon_o k(m!)^2\, 2^{2k-2}(A^{4k} - (c/2)^{4k})}. \end{gathered} \tag{71}$$

Энергия взаимодействия зарядов, распределенных по эллипсу с плотностями (62) и (63), может быть определена с помощью соотношений

$$\begin{gathered} W_{m0}(\tilde{z}, \tilde{z}^*) = -\operatorname{Re} \Pi_m(\tilde{z}, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = \\ = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-m}(\lambda_m^* T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c)A^{2k} - \lambda_1 T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o m!\, 2^{2k-2}k(A^{4k} - (c/2)^{4k})} T_k(z/c). \end{gathered} \tag{72}$$

Представим эту формулу в виде

$$W_{m0}(\tilde{z},\tilde{z}^*) = B_r^{(m0)}(\tilde{z})\lambda_{mr} + B_i^{(m0)}(\tilde{z})\lambda_{mi}, \tag{73}$$

где

$$B_r^{(m0)}(\tilde{z}) = \operatorname{Re}\sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-m}(T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c)A^{2k} - T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o m!\,2^{2k-2}k(A^{4k}-(c/2)^{4k})}\,T_k(z/c); \tag{74}$$

$$B_i^{(m0)}(\tilde{z}) = \operatorname{Im}\sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-m}(T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c)A^{2k} + T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o m!\,2^{2k-2}k(A^{4k}-(c/2)^{4k})}\,T_k(z/c). \tag{75}$$

Энергия взаимодействия зарядов, распределенных по эллипсу с плотностями, определяемыми формулой (63) для различных значений m, может быть найдена с помощью соотношений

$$\begin{gathered} W_{mn}(\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{n!}\operatorname{Re}\lambda_n\partial_z^n\Pi_m(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)\Big|_{z=\tilde{z}} = \\ = \operatorname{Re}\sum_{k=\max(m,n)}^{\infty} \frac{c^{2k-m-n}(\lambda_m^*\lambda_n T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)A^{2k} - \lambda_m\lambda_n(T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c))(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o k m! n!\,2^{2k-2}(A^{4k}-(c/2)^{4k})} T_k^{(n)}(\tilde{z}/c)\,. \end{gathered} \tag{76}$$

Представим эту формулу в виде

$$W_{mn}(\tilde{z},\tilde{z}^*) = \vec{\lambda}_m\cdot\hat{B}^{(mn)}(\tilde{z})\cdot\vec{\lambda}_n; \quad \vec{\lambda}_m = (\lambda_{mr};\lambda_{mi}),$$

вводя в рассмотрение матрицу $\hat{B}^{(mn)}(\tilde{z})$, для элементов которой из (75) найдем

$$\begin{gathered} B_{rr}^{(mn)}(\tilde{z}) = \operatorname{Re}\sum_{k=\max(m,n)}^{\infty} \frac{c^{2k-m-n}(T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)A^{2k} - (T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c))(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o k m! n!\,2^{2k-2}(A^{4k}-(c/2)^{4k})} T_k^{(n)}(\tilde{z}/c); \\ B_{ii}^{(mn)}(\tilde{z}) = \operatorname{Re}\sum_{k=\max(m,n)}^{\infty} \frac{c^{2k-m-n}(T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)A^{2k} + (T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c))(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o k m! n!\,2^{2k-2}(A^{4k}-(c/2)^{4k})} T_k^{(n)}(\tilde{z}/c); \\ B_{ri}^{(mn)}(\tilde{z}) = -\operatorname{Im}\sum_{k=\max(m,n)}^{\infty} \frac{c^{2k-m-n}(T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)A^{2k} - (T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c))(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o k m! n!\,2^{2k-2}(A^{4k}-(c/2)^{4k})} T_k^{(n)}(\tilde{z}/c); \\ B_{ir}^{(m)}(\tilde{z}) = \operatorname{Im}\sum_{k=\max(m,n)}^{\infty} \frac{c^{2k-m-n}(T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)A^{2k} + (T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c))(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o k m! n!\,2^{2k-2}(A^{4k}-(c/2)^{4k})} T_k^{(n)}(\tilde{z}/c). \end{gathered} \tag{77}$$

В частности, при $\tilde{z}=0$ соотношения (63)–(76) примут форму

$$\begin{gathered} \sigma_m(z,0,0) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^{m+2p}c^{2p}}{2^{m+2p-2}}\times \\ \times\left(\frac{\lambda_{mr}b_m^{(m+2p)}\cos((m+2p)\alpha)}{A^{2m+4p}+(c/2)^{2m+4p}} + \frac{\lambda_{mi}b_m^{(m+2p)}\sin((m+2p)\alpha)}{A^{2m+4p}-(c/2)^{2m+4p}}\right); \end{gathered} \tag{78}$$

$$\Pi_m(z,0,0) = -\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c^{m+4p}b_m^{(m+2p)}(\lambda_m^* A^{2m+4p} - \lambda_m(c/2)^{2m+4p})}{2\pi\varepsilon_o\,2^{2m+4p-2}(m+2p)(A^{4m+8p}-(c/2)^{4m+8p})}\,T_{m+2p}(z/c). \tag{79}$$

Собственную энергию наведенных на эллипсе зарядов находим как

$$W_{mm}(0) = -\frac{1}{2m!}\operatorname{Re}\lambda_m \partial_z^m \Pi_m(z,0,0)\bigg|_{z=0} =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{4p} b_m^{(m+2p)\,2}(|\lambda_m|^2 A^{2m+4p} - \operatorname{Re}\lambda_m^2 (c/2)^{2m+4p})}{4\pi\varepsilon_o (m+2p)\, 2^{2m+4p-2}(A^{4m+8p} - (c/2)^{4m+8p})}. \tag{80}$$

Представим эту формулу в виде

$$W_{mm}(0) = \frac{1}{2}\vec{\lambda}_m \cdot \hat{B}^{(m)}(0)\cdot \vec{\lambda}_m; \quad \vec{\lambda}_m = (\lambda_{mr}; \lambda_{mi}),$$

записываем

$$B_{rr}^{(m)}(0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{4p} b_m^{(m+2p)\,2}}{4\pi\varepsilon_o (m+2p)\, 2^{2m+4p-2}(A^{2m+4p} + (c/2)^{2m+4p})};$$
$$B_{ii}^{(m)}(0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{4p} b_m^{(m+2p)\,2}}{4\pi\varepsilon_o (m+2p)\, 2^{2m+4p-2}(A^{2m+4p} - (c/2)^{2m+4p})}; \tag{81}$$
$$B_{ri}^{(m)}(0) = B_{ir}^{(m)}(0) = 0.$$

Энергия взаимодействия зарядов, распределенных по эллипсу с плотностями, определяемыми формулами (62) при $\tilde{z} = 0$ и (78), будет отлична от нуля для четных $m = 2q$:

$$W_{2q\,0}(0) = -\operatorname{Re}\Pi_{2q}(0,0,0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q} c^{2q+4p} b_{2q}^{(2q+2p)}(\lambda_{2q}^* A^{4q+4p} - \lambda_{2q}(c/2)^{4q+4p})}{2\pi\varepsilon_o\, 2^{4q+4p-2}(2q+2p)(A^{8q+8p} - (c/2)^{8q+8p})}. \tag{82}$$

Эту энергию также удобно записать как

$$W_{2q\,0}(0,0) = B_r^{(2q\,0)}\lambda_{2q\,r} + B_i^{(2q\,0)}\lambda_{2q\,i}, \tag{83}$$

где

$$B_r^{(2q\,0)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q} c^{2q+4p} b_{2q}^{(2q+2p)}}{2\pi\varepsilon_o\, 2^{4q+4p-2}(2q+2p)(A^{4q+4p} + (c/2)^{4q+4p})}; \tag{84}$$

$$B_i^{(2q\,0)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q} c^{2q+4p} b_{2q}^{(2q+2p)}}{2\pi\varepsilon_o\, 2^{4q+4p-2}(2q+2p)(A^{4q+4p} - (c/2)^{4q+4p})}. \tag{85}$$

Энергия взаимодействия зарядов, распределенных по эллипсу с плотностями, определяемыми формулой (78) для различных значений m, может быть найдена как

$$W_{mn}(0,0) = -\frac{1}{n!}\operatorname{Re}\lambda_n \partial_z^n \Pi_m(z,0,0)\bigg|_{z=0}.$$

Эта величина будет равна нулю, если m и n имеют разные четности. Если же четности m и n одинаковы, то при $m > n$

$$W_{mn}(0,0) = \operatorname{Re}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{m-n+2p} b_m^{(m+2p)}(\lambda_m^* \lambda_n A^{2m+4p} - \lambda_m \lambda_n (c/2)^{2m+4p})}{2\pi\varepsilon_o (m+2p)\, 2^{2m+4p-2}(A^{4m+8p} - (c/2)^{4m+8p})} b_n^{(m+2p)}. \tag{86}$$

Представим эту формулу в виде $W_{mn}(\tilde{z}, \tilde{z}^*) = \vec{\lambda}_m \cdot \hat{B}^{(mn)}(0) \cdot \vec{\lambda}_n$; $\vec{\lambda}_m = (\lambda_{mr}; \lambda_{mi})$, вводя в рассмотрение матрицу $\hat{B}^{(mn)}(\tilde{z})$, для элементов которой из (75) найдем

$$\begin{gathered} B_{rr}^{(mn)}(0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{m-n+2p} b_m^{(m+2p)}}{2\pi\varepsilon_o (m+2p)\, 2^{2m+4p-2}(A^{2m+4p} + (c/2)^{2m+4p})} b_n^{(m+2p)}; \\ B_{ii}^{(mn)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{m-n+2p} b_m^{(m+2p)}}{2\pi\varepsilon_o (m+2p)\, 2^{2m+4p-2}(A^{2m+4p} - (c/2)^{2m+4p})} b_n^{(m+2p)}; \\ B_{ri}^{(mn)} = B_{ir}^{(m)} = 0. \end{gathered} \tag{87}$$

Комплексный потенциал экранированного точечного мультиполя вне эллипса равен нулю, а внутри эллипса

$$\begin{gathered} \tilde{\Pi}_m(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = \frac{\lambda_m}{2\pi m \varepsilon_o (z - \tilde{z})^m} + \Pi_m(z, \tilde{z}, \tilde{z}^*) = \\ = \frac{\lambda_m}{2\pi m \varepsilon_o (z - \tilde{z})^m} - \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-m}(\lambda_m^* T_k^{(m)}(\tilde{z}^*/c) A^{2k} - \lambda_m T_k^{(m)}(\tilde{z}/c)(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o m!\, 2^{2k-2} k (A^{4k} - (c/2)^{4k})} T_k(z/c). \end{gathered} \tag{88}$$

Используя это выражение, энергию взаимодействия экранированного точечного мультиполя, расположенного в точке z_1, с экранированным точечным зарядом λ_o, расположенным в точке z_2, можно представить как

$$\begin{gathered} W_{10}(z_1, z_2) = \operatorname{Re} \lambda_o \tilde{\Pi}_m(z_2, z_1, z_1^*) = \operatorname{Re} \frac{\lambda_o \lambda_m}{2\pi\varepsilon_o m (z_2 - z_1)^m} - \\ - \operatorname{Re} \lambda_o \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-m}(\lambda_m^* T_k^{(m)}(z_1^*/c) A^{2k} - \lambda_m T_k^{(m)}(z_1/c)(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o m!\, 2^{2k-2} k (A^{4k} - (c/2)^{4k})} T_k(z_2/c). \end{gathered} \tag{89}$$

Соответственно для энергии взаимодействия двух экранированных точечных мультиполей $\lambda_m^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$, расположенных в точках z_1 и z_2, будем иметь

$$\begin{gathered} W_{mn}(z_1, z_2) = \frac{1}{n!} \partial_z^n \tilde{\Pi}_m(z, z_1, z_1^*) \bigg|_{z=z_2} = \operatorname{Re} \frac{(-1)^n (n+m-1)! \lambda_m^{(1)} \lambda_n^{(2)}}{2\pi\varepsilon_o m! n! (z_2 - z_1)^{m+n}} - \\ - \operatorname{Re} \lambda_n \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c^{2k-m-n}(\lambda_m^* T_k^{(m)}(z_1^*/c) A^{2k} - \lambda_m T_k^{(m)}(z_1/c)(c/2)^{2k})}{2\pi\varepsilon_o m! n!\, 2^{2k-2} k (A^{4k} - (c/2)^{4k})} T_k^{(n)}(z_2/c). \end{gathered} \tag{90}$$

Заключение

Рассмотрение разнообразных примеров решения задачи о проводящем эллипсе во внешних электрических полях показало, что аппарат характеристических мультиполей является универсальным методом решения поставленной задачи и позволяет решать весь класс задач о проводящем эллипсе во внешних электрических полях, каким бы ни был сложным потенциал этого внешнего поля. В заключение отметим, что аппарат характеристических мультиполей весьма эффективен при рассмотрении электростатических задач для эллипса, в связи с чем возникает задача распространения этого аппарата на другие геометрические фигуры. В случае удачного решения поставленной задачи богатые возможности аппарата характеристических мультиполей смогут раскрыться в полной мере.

Список литературы

[1] В.П.Казанцев, Е.Н.Шляхтич, Характеристические мультиполи эллипса и решение задачи о проводящем эллипсе во внешних электрических полях, *Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика*, **2**(2009), №4, 410–425.

[2] В.П.Казанцев, Аналитическая электростатика на плоскости, Красноярск, Сибирский федеральный университет, 2008.

[3] А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев, Интегралы и ряды. Специальные функции, М., Наука, 1983.

[4] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Наука, 1971.

[5] В.П.Казанцев, Е.Н.Шляхтич, Проводящий круг во внешнем электрическом поле, *Вестник КрасГУ. Физико-математические науки*, (2006), №1, 21–25.

Examples of the Solution of the Electrostatic Problem about a Conductive Ellipse in Applied Electric Fields

Vladimir P. Kazantsev
Evgeny N. Shlyahtich

A method of the general problem of electrostatics solution for conductive ellipse in applied electric fields is obtained in complex form in terms of characteristic multipole. Particular examples are considered. The expansion of the applied electric fields potentials in terms of Chebyshev polynomials is proved.

Keywords: characteristic multipole, conductive ellipse, complex potential, induced charge, surface charge density, proper electrostatic energy, interaction electrostatic energy, electrostatic, Chebyshev polynomials.