

Некоторые предпосылки определения полезности в гиббсовских моделях событийного рынка

Радина Нурртиневна

Гильманова

Институт математики
Сибирский федеральный университет
Красноярск
radagilmanova@mail.ru

Аннотация. На основе понятий классической функции полезности рассматривается эвентологический подход к построению математических моделей рынка, в рамках которого предлагается новое понятие мультипликативно-усеченного гиббсовского эвентологического распределения (Э-распределения). Эти новые вероятностные распределения представляют собой обобщенные гиббсовские Э-распределения, удовлетворяющие дополнительным ограничениям, которые накладываются на небольшой набор вероятностей рыночных событий.

Ключевые слова. Полезность, потребитель, функция полезности, кривые безразличия, мультипликативно-усеченные гиббсовские эвентологические распределения, Э-распределения.

1 Введение

Полтора десятилетия назад Россия вступила в рыночные отношения. Многие люди не знали, да и не знают, как себя вести в новой обстановке экономических отношений. Перед обществом, как и перед отдельным человеком, всегда стоит задача выбора направлений и способов использования ресурсов в различных целях. Целью данной работы является раскрытие темы касающейся полезности и рационального поведения потребителя в условиях рынка. Теория потребительского выбора изучает поведение потребителя на рынке. Потребитель характеризуется своими предпочтениями и доходом, который он готов потратить на приобретение товаров, а рынок – наборами товаров (потребительскими наборами) и ценами единиц товаров.

2 Полезность

Понятие полезности (пользы) появилось впервые в работах английского философа Иеремии Бентама: «... стремиться к удовольствию и избегать страдания составляет его (человека) единственную

задачу... Польза есть понятие отвлечённое. Оно выражает свойство или способность какого-нибудь предмета предохранить от какого-нибудь зла или доставить какое-нибудь благо»

Полезность выражает степень удовлетворения, получаемого субъектом от потребления товара или выполнения какого-либо действия. Полезность включает важный психологический компонент, потому что люди достигают полезности, получая вещи, приносящие им удовлетворение, и отказываясь от вещей, доставляющих неприятности.

3 Функция полезности

Припишем каждому потребительскому набору, принадлежащему пространству товаров, некоторую количественную оценку данного набора со стороны потребителя. Таким образом, на пространстве товаров мы зададим функцию полезности потребителя.

Определение 1. Функция полезности – функция, показывающая убывание предельной полезности блага (MU) с ростом его количества (Q):

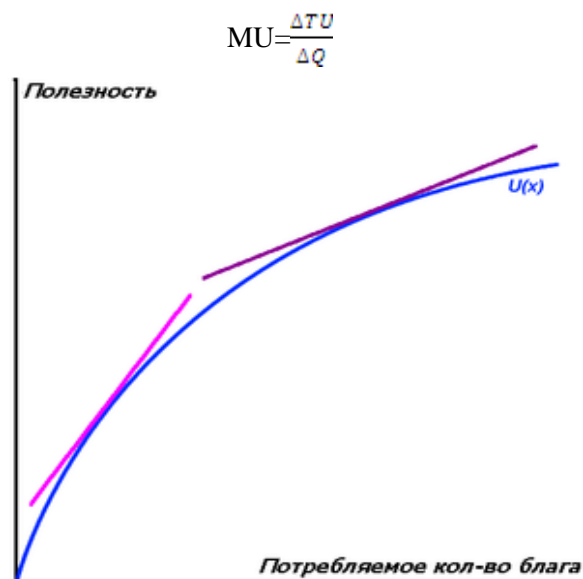


Рис. 1 График функции полезности

Определение 2. *Функция полезности* – экономическая модель для определения предпочтений экономических субъектов.

Основоположным условием функции полезности является рациональное поведение потребителя, выражающееся в выборе из многочисленных альтернатив именно тех, которые выводят его на более высокий уровень полезности. В микроэкономике концепт функции полезности служит для объяснения потребителей и производителей, в то время как в макроэкономике им пользуются для изображения предпочтений государственных интересов. Первая производная функции полезности для изображения предпочтений государственных интересов. Первая производная функции полезности по количеству определённого блага $\frac{\partial u}{\partial c_i}$ называется *предельной полезностью* этого блага. Предельная полезность выражает, сколько дополнительной полезности приносит дополнительная единица блага i . Предельная полезность, равная 0, означает достижение насыщенности.

Определение 3. Значение, которое принимает функция полезности на конкретном наборе товаров, называют *полезностью данного набора*.

Определение 4. *Предельной полезностью n -го вида товара* (- marginal utility (англ.)) называют дополнительную полезность, которую получит потребитель от потребления каждой дополнительной единицы товара данного вида

Теорема 1 (Дебре): Для стандартных предпочтений потребителя всегда можно построить функцию полезности.

3.1 Свойства функции полезности.

Функция полезности потребителя обладает следующими свойствами:

1. С увеличением потребления какого либо товара значение функции полезности потребителя возрастает:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = MU_i(x) \geq 0$$

2. С увеличением потребления какого либо товара предельная полезность данного вида товара убывает (закон Госсена):

$$\frac{\partial MU_i(x)}{\partial x_i} \leq 0$$

3. Если с увеличением потребления i -го вида товара увеличивается потребление i -го товара, то предельная полезность i -го вида товара увеличивается :

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} MU_i \geq 0$$

Замечание: данное свойство имеет место лишь в том случае, когда товары являются взаимозаменяемыми.

3.2 Основные виды функций полезности

1. Функция полезности для совершенных товаров-заменителей:

Данное семейство функций полезности описывает предпочтения потребителя соответствующие полностью взаимозаменяемым товарам, т. е. ситуации, когда уменьшение потребления, какого либо вида товара может быть компенсировано потреблением дополнительных единиц любого другого товара. Коэффициенты представляют собой пропорции, в которых один товар может быть заменен другим.

Пример: рассмотрим пространство товаров, включающее в себя два вида товара:
- количество карандашей синего цвета,
- количество карандашей красного цвета.
Очевидно, что эти товары являются полностью взаимозаменяемыми. Функция полезности потребителя показывает, что в наборе товаров каждые 2 единицы синих карандашей могут быть заменены 3 единицами красных (и наоборот) без изменения полезности набора для данного потребителя.

2. Функция полезности с полным дополнением благ (функция полезности Леонтьева):
Данное семейство функций полезности описывает предпочтения потребителя соответствующие полностью взаимодополняемым товарам, т. е. ситуации, когда потребителю важно приобретать товары в определенной пропорции. Коэффициенты представляют собой пропорции, в которых потребителю важно приобретать товары.

Пример: рассмотрим пространство товаров, включающее в себя два вида товара:
- количество левых ботинок.
- количество правых ботинок.
Очевидно, что полезность набора товара для потребителя будет изменяться лишь в том случае, когда количество левых ботинок будет соответствовать количеству правых. Функция полезности потребителя в данном случае имеет вид:

3. Неоклассическая функция полезности (функция полезности Кобба-Дугласа):

Данное семейство функций полезности описывает предпочтения потребителя, обладающие свойством выпуклости, т. е. ситуацию, когда потребителю важно включать в набор какое-то количество единиц каждого товара. При этом уменьшение потребления какого-либо товара может быть скомпенсировано за счет увеличения потребления других товаров. Здесь величины представляют весовые коэффициенты, описывающие предпочтения потребителя между различными видами товаров, представляет собой масштабирующий множитель.

Пример: рассмотрим пространство товаров, включающее в себя два вида товара:
- количество минут мобильной связи,
- количество мегабайт потребляемого трафика сети Интернет.

Очевидно, что потребителю необходимо как наличие мобильной связи, так и наличие доступа в Интернет. Функция полезности потребителя в данном случае соответствует ситуации, когда эти товары одинаково важны для потребителя.

4 Кривые безразличия

Определение 5. Множество наборов товаров, обеспечивающих потребителю заданный уровень полезности (являющихся одинаково полезными для потребителя) называют *кривой безразличия*.

Пусть на пространстве товаров задана функция полезности и - выбранный потребителем уровень полезности, тогда кривой безразличия уровня называют множество наборов товаров

Очевидно, что семейство кривых безразличия представляет собой семейство линий уровня для функции полезности потребителя. Для простоты будем предполагать, что в распоряжении потребителя имеются два вида товара:

- количество единиц первого товара,
- количество единиц второго товара.

5 Построение функции полезности

Функция полезности должна быть построена с учетом всех тех объективных и субъективных условий, которые влияют на предпочтение потребителя. Например, полезность денег оценивается не только их покупательской

способностью. Так, с большой степенью уверенности можно утверждать, что полезность десяти заработанных долларов больше, чем те же десяти долларов найденных случайно на улице. Для наркомана "полезность" набора товаров тем выше, чем больше в нем содержится героина, а для нормального человека - наоборот. При построении функции полезности все эти нюансы, связанные с понятием полезности, учитываются тем обстоятельством, что эта функция строится сугубо на основе отношения предпочтения, то есть каждому отношению предпочтения соответствует своя функция полезности.

6 Мультипликативно-усеченные гиббсовские распределения в математических моделях событийного рынка

Обобщенные гиббсовские \mathcal{E} -распределения возникают в эвентологическом расширении \mathcal{H} -теоремы Больцмана [2]. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ - эвентологическое пространство; $X \subseteq \mathcal{F}$ - конечное множество событий; $V: 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ - неотрицательная, ограниченная аддитивная сет-функция на 2^X , которая интерпретируется как функция стоимости наступления множества событий $X \subseteq \mathcal{X}$ и вычисляется по формуле $V(X) = \sum_{x \in X} V(x)$; $u^\downarrow, u^\uparrow: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ - классические

функции полезности стоимостей наступления множеств событий спроса и предложения соответственно, которые отражают структуры зависимостей этих рыночных событий; $U^\downarrow, U^\uparrow: 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ - эвентологические сет-функции полезности частного вида, которые определяются классическими функциями полезности по следующим формулам:

$$U^\downarrow(X) = u^\downarrow(V(X)), U^\uparrow(X) = u^\uparrow(V(X)), X \subseteq \mathcal{X}.$$

Эвентологические сет-функции полезности, вообще говоря, не обязаны быть сет-аддитивными, т.е., для произвольной структуры зависимостей множества

рыночных событий $U\left(\sum_{x \in X} V(x)\right) \neq \sum_{x \in X} U(V(x))$, а

для множеств событий, независимых в совокупности эти функции сет-аддитивны:

$$U\left(\sum_{x \in X} V(x)\right) = \sum_{x \in X} U(V(x)).$$

Введенные таким образом сет-функции полезности приводят к формулам для обобщенных гиббсовских \mathcal{E} -распределений:

$p(X) = \frac{1}{Z} \exp\{\alpha U(V(X))\}$, $X \subseteq X$, где под U понимается одна из сет-функций U^\downarrow, U^\uparrow , под α понимается один из коэффициентов $\alpha^\downarrow < 0, \alpha^\uparrow > 0$, а под \mathcal{E} -распределением p понимается либо \mathcal{E} -распределение спроса: p^\downarrow , либо \mathcal{E} -распределение предложения: p^\uparrow .

Теорема 1 (эвентологическое расширение Н-теоремы Больцмана о максимуме энтропии обобщенных гиббсовских \mathcal{E} -распределений). Пусть \mathcal{E} -распределение $p(X)$ на 2^X обеспечивает среднее значение эвентологической полезности на заданном уровне: $\langle U \rangle = \sum_{X \subseteq X} p(X) U(X)$. Тогда максимум энтропии $H = - \sum_{X \subseteq X} p(X) \ln p(X)$ таких \mathcal{E} -распределений достигается на \mathcal{E} -распределении вида: $p(X) = \frac{1}{Z} \exp\{\alpha U(X)\}$, которые называются обобщенными гиббсовскими \mathcal{E} -распределениями. При этом, если $\alpha = \alpha^\downarrow < 0$, то $U = U^\downarrow$ - это сет-функция полезности спроса, а если $\alpha = \alpha^\uparrow > 0$, то $U = U^\uparrow$ - это сет-функция полезности предложения; аналогично $p = p^\downarrow$ - это гиббсовское \mathcal{E} -распределение спроса, а $p = p^\uparrow$ - это противоположное гиббсовское \mathcal{E} -распределение предложения.

Кроме эвентологического расширения Н-теоремы Больцмана [2] известна также следующая теорема о максимуме энтропии \mathcal{E} -распределений [3], удовлетворяющих дополнительным ограничениям на небольшой набор вероятностей рыночных событий.

Теорема 2 (о максимуме энтропии мультипликативно-усеченных распределений) Среди \mathcal{E} -распределений множества событий X , в которых на подмножествах событий $X \subseteq X$ с мощностью, ограниченной сверху константой $n < |X|$ зафиксированы вероятности

$p_X^* = P\left(\bigcap_{x \in X} x\right)$, $|X| \leq n$, максимальную энтропию $H = - \sum_{X \subseteq X} p(X) \ln p(X)$ имеет \mathcal{E} -распределение вида: $p(X) = \prod_{\substack{Y \subseteq X \\ |Y| \leq n}} \tau^*(Y)$, где τ^* -

фиксированные мультиковариации, вычисляемые по формуле мультипликативного обращения Мёбиуса $\tau(X) = \prod_{Y \subseteq X} (p(Y))^{(-1)^{|X-Y|}}$.

Из этих двух теорем следует, что на мультипликативно-усеченных гиббсовских \mathcal{E} -распределениях достигается экстремум энтропии при объединенных ограничениях как на вероятности событий, так и на среднее значение эвентологической полезности множеств рыночных событий.

Теорема 3 (о максимуме энтропии мультипликативно-усеченных гиббсовских \mathcal{E} -распределений). Если существуют распределения $p(X)$, для которых $\langle U \rangle = \sum_{X \subseteq X} p(X) U(X)$ и

$p(X) = \prod_{\substack{Y \subseteq X \\ |Y| \leq n}} \tau^*(Y)$, тогда максимум их энтропии достигается на мультипликативно-усеченных гиббсовских \mathcal{E} -распределениях

$p(X) = \frac{1}{Z} \exp\{\alpha U(X)\}$, для которых сет-функция полезности U имеет аддитивно-усеченный вид: $U(X) = \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ |Y| \leq n}} v(Y)$, где $v(X) = \frac{1}{\alpha} \ln \tau(X)$.

Здесь v - сет-функция элементарной полезности подмножеств рыночных событий. Если $v(X) = 0$, это значит, что события большей мощности независимы в широком смысле [4], т.е. у этого подмножества товаров нет самостоятельной полезности, т.к. она может быть выражена через полезности его подмножеств.

В работе предложена новая формулировка \mathcal{E} -расширения Н-теоремы Больцмана, которая опирается на вновь введенное понятие эвентологической сет-функции полезности. Это позволило связать на основе понятия широкой зависимости событий [4] утверждения двух теорем об экстремальных свойствах энтропии \mathcal{E} -распределений. В результате сформулирована объединяющее утверждение (теорема 3), которая вводит новый класс \mathcal{E} -распределений: мультипликативно-усеченные гиббсовские и противоположные гиббсовские \mathcal{E} -распределения.

7 Вывод

Теория полезности напрямую связана с потребностями человека, поэтому ее появление понятно и оправдано. С развитием человечества

появляется все больше видов деятельности, а следовательно и потребностей. И теория объясняет, как человек удовлетворяет эти материальные и духовные потребности с максимальной выгодой для своего бюджета.

Предлагаемый класс Э-распределений предназначен для работы с реальной, довольно скудной рыночной статистикой, которая обычно допускает лишь оценку усеченного набора параметров: вероятностей рыночных событий и пересечений маломощных множеств этих событий. Полученный в работе результат еще раз подчеркивает значение понятия широкой зависимости событий, которое дает возможность строить целую совокупность оценочных моделей, упорядоченных по степени усеченности набора их параметров. Это позволяет подобрать модель, адекватную имеющейся статистике.

Литература

- [1] Математические модели в экономике / Модели потребительского выбора / <http://mylearn.ru/kurs/29/1399>.
- [2] Р. М. Нуреев, «Курс микроэкономики», издательство НОРМА, Москва, 2003.
- [3] Экономическая теория, под ред. В. И. Ведяпина и Г. П. Журавлевой, ИНФРА-М, 2005.
- [4] Христиановский В.В., Щербина В. П.. Функция полезности: теория и анализ. *Книга, 120, 2006*.
- [5] Горбунов В.К.. Математическая модель потребительского спроса. Теория и прикладной потенциал. *Изд. Экономика, 2004*.

Radina Nurrtinovna Gilmanova

Eventology function of utility in gibbsovsky's models event the market

Abstract. On the basis of concepts of classical function of utility it is considered eventology the approach to construction of mathematical market models in which frameworks the new concept multiplikativno-truncated gibbsovsky eventology distributions (E-distributions) is offered. These new likelihood distributions represent generalised gibbsovsky the E-distributions satisfying to additional restrictions which are imposed on a small set of probabilities of market events

Keywords. Utility, function, the consumer, utility function, indifference curves, E-distribution.