В. М. Мисяков

О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевых групп

В монографии [1] сформулированы проблемы 17 (Пирс): "Вычислить радикал кольца эндоморфизмов p-группы (сепарабельной p-группы)" и 18 б): "Описать радикал кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы G. Верно ли для неё равенство $J(E(G)) = H'(G) \bigcap F(G)$?". Здесь под радикалом кольца эндоморфизмов абелевой группы понимается радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы, а под его вычислением подразумевается описание его элементов в терминах их действия на группе. Ниже в теореме 1 даётся решение проблемы 17, а в следствии 4 показывается описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения, что частично решает проблему 18 б).

Предложение 1. *Пусть G — редуцированная p-группа и $\alpha \in E(G)$. Для того, чтобы $\alpha \in Aut(G)$ необходимо и достаточно выполнения равенств* $\ker \alpha \bigcap G[p] = 0$ *и* $\alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$ *для любого порядкового числа σ.*

Пусть G — сепарабельная p-группа. Рассмотрим идеал $H(G) = \{\alpha \in E(G) \mid \forall\, 0 \neq x \in G[p]$ следует, что $h_p(x) < h_p(\alpha x)\}$ и множество $S_p(G) = \{\alpha \in E(G) \mid \forall x \in G[p],\ \forall \beta \in E(G)$ и $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x),\ n \in N$, последовательность $\{y_n\}_{n \in N}$ сходится$\}$. Здесь сходимость последовательности $\{y_n\}_{n \in N}$ рассматривается в p-адической топологии группы G.

Теорема 1. *Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы G имеет вид $J(E(G)) = S_p(G) \cap H(G)$.*

Пусть G — редуцированная группа без кручения. Рассмотрим идеал $H'(G) = \{\varphi \in E(G) \,|\, \forall p \in \mathbb{P}(G), \forall x \in G, h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\varphi(x)\} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}(G)} pE(G)$ и множество $TF(G) = \{\alpha \in E(G) \,|\, \forall x \in G, \forall \beta \in E(G)$ и $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x),\ n \in N$, последовательность $\{y_n\}_{n \in N}$ сходится$\}$. Сходимость последовательности $\{y_n\}_{n \in N}$ рассматривается здесь относительно Z-адической топологии группы G.

Предложение 2. *Пусть G — редуцированная группа без кручения, тогда $H'(G) \cap TF(G) \subseteq J(E(G))$.*

Теорема 3. *Пусть редуцированная группа G удовлетворяет одному из следующих условий: 1) G — однородная вполне транзитивная группа; 2) $r_p(G) \leq 1$ для всякого простого числа p, тогда $J(E(G)) = H'(G) \cap TF(G)$.*

Следствие 4. *Пусть редуцированная группа без кручения G является или однородной алгебраически компактной, или однородной сепарабельной группой. Тогда $J(E(G)) = H'(G) \cap TF(G)$.*

Литература

1. П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев, Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов, ТГУ, Томск, 2002.