УДК 517.55

О множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решения тетраномиального алгебраического уравнения

Ирина А. Антипова*
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского, 26, Красноярск, 660074,
Россия

Татьяна В. Зыкова†
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского, 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 18.05.2010, окончательный вариант 25.06.2010, принята к печати 10.07.2010

В работе дано детальное описание множества сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решения тетраномиального алгебраического уравнения.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, интеграл Меллина-Барнса.

Введение

В самом общем виде объект нашего исследования (многомерный интеграл Меллина-Барнса) выглядит так:

$$\Phi_\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^N} \frac{\prod\limits_j \Gamma\left(\langle A_j, z\rangle + c_j\right)}{\prod\limits_k \Gamma\left(\langle B_k, z\rangle + d_k\right)} x_1^{-z_1} \cdots x_N^{-z_N}\, dz, \tag{1}$$

здесь $A_j, B_k \in \mathbb{R}^N$, $c_j, d_k \in \mathbb{R}$, $dz = dz_1 \cdots dz_N$. Вектор $\gamma \in \mathbb{R}^N$, участвующий в определении множества интегрирования, выбран так, чтобы оно не пересекало полюсы гамма-функций Эйлера в числителе.

Области сходимости интегралов Меллина-Барнса (1) являются *секториальными*: они определяются лишь условиями на аргументы параметров $x_1, \ldots, x_N$, причем если область сходимости непустая, то преобразование Меллина интеграла (1) равняется его подынтегральному выражению, деленному на $(2\pi i)^N$ (см. [1]). Секториальные области рассматриваются в множестве $\mathfrak{S} = \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^N$, которое представляет собой область наложения над комплексным тором $\mathbb{T}^N = \left(\mathbb{C}\backslash\{0\}\right)^N$, то есть

$$x_\nu^{-z_\nu} = \exp\left\{-z_\nu \log x_\nu\right\}, \quad \arg x_\nu \in \mathbb{R}.$$

Далее обозначим через $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ вектор $\left(\arg x_1, \ldots, \arg x_N\right)$. Тогда каждая точка $x = (r, \theta) \in \mathfrak{S}$ $\left(r \in \mathbb{R}_+^N, \theta \in \mathbb{R}^N\right)$ проектируется в точку $\left(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_N e^{i\theta_N}\right) \in \mathbb{T}^N$.

*antipova@akadem.ru
†zykovatv@mail.ru

Интегралы Меллина-Барнса явились четвертым подходом к изучению гипергеометрических функций: первые два реализованы Гауссом как решения гипергеометрических дифференциальных уравнений и как суммы гипергеометрических рядов. Третий подход основан на интегральном представлении Эйлера, обобщающем бета-функцию (см. [2]).

Проблема сходимости данных интегралов рассматривается на протяжении последнего столетия. Шаги к решению данной актуальной проблемы в многомерном случае были сделаны Х.Меллином [3], Р.Бушманом и Х.Сриваставой [4], А.К.Цихом и др. ([5], [6]). Часть (максимальной) области сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения, первоначально была указана Х. Меллином (см. [3]). В работе И.А.Антиповой [1] найдена истинная (максимальная) область сходимости таких интегралов. Тем не менее, остается открытым вопрос об описании множества сходимости, то есть вопрос о том, в каких граничных точках области сходимости интеграл останется сходящимся.

Область сходимости многомерного интеграла Меллина-Барнса (1) в самом общем случае была найдена в работе Л.Нильсон, М.Пассаре, А.К.Циха [7] (см. также [8]).

Настоящая статья посвящена исследованию множества сходимости интеграла гипергеометрического типа:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^2}\frac{\frac{\mu}{n}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}-\frac{p}{n}z_1-\frac{q}{n}z_2\right)\Gamma\left(z_1\right)\Gamma\left(z_2\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}+\frac{n-p}{n}z_1+\frac{n-q}{n}z_2+1\right)}x_1^{-z_1}x_2^{-z_2}dz_1dz_2, \tag{2}$$

где $n > q > p \geqslant 1$, $\mu > 0$, интегрирование ведется по мнимому (вертикальному) подпространству $\gamma + i\mathbb{R}^2$, вектор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$ фиксирован и выбирается из симплекса

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^2 : u_1 > 0,\ u_2 > 0,\ pu_1 + qu_2 < \mu\right\}. \tag{3}$$

Из результата Меллина (см. [3]) следует, что этот интеграл представляет μ–ю степень ветви решения $y(x)$ ($y(0) = 1$) тетраномиального алгебраического уравнения

$$y^n + x_2y^q + x_1y^p - 1 = 0, \quad n > q > p \geqslant 1.$$

Известно, что интеграл (2), зависящий от параметра $x = (x_1, x_2)$, сходится в секториальной области S_Θ (см. [1] или [7]) с основанием

$$\Theta = \left\{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : |\theta_1| < \frac{\pi p}{n}, |\theta_2| < \frac{\pi q}{n}, |p\theta_2 - q\theta_1| < \pi p\right\}. \tag{4}$$

Иначе говоря, $S_\Theta = \{x \in \mathfrak{S} : \theta \in \Theta\} = Arg^{-1}(\Theta)$, где отображение

$$Arg : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \to (\arg x_1, \arg x_2).$$

Образ множества при отображении Arg далее будем называть угловой проекцией этого множества. Заметим, что неравенства (4) задают внутренность шестиугольника в случае, когда $n < 2q$ (рис. 1). Если $n \geqslant 2q$, то неравенства (4) определяют внутренность четырехугольника с вершинами в точках

$$\left(\frac{\pi p}{n}, \frac{\pi q}{n}\right), \left(\frac{\pi p}{n}, -\frac{\pi q}{n}\right), \left(-\frac{\pi p}{n}, -\frac{\pi q}{n}\right), \left(-\frac{\pi p}{n}, \frac{\pi q}{n}\right).$$

Введем множество, состоящее из четырех граничных точек области Θ :

$$\mathcal{K} = \left\{\left(\frac{\pi p}{n}, \frac{\pi q}{n}\right), \left(\frac{\pi p}{n}, \pi\left(\frac{q}{n} - 1\right)\right), \left(-\frac{\pi p}{n}, -\frac{\pi q}{n}\right), \left(-\frac{\pi p}{n}, \pi\left(1 - \frac{q}{n}\right)\right)\right\}.$$

На рис. 1 это выколотые вершины шестиугольника.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Для любого $\gamma \in U$ интеграл (2) сходится на множестве:*

а) $Arg^{-1}\left(\bar{\Theta}\backslash\mathcal{K}\right)$ *при* $n \leqslant 2q$;

б) $Arg^{-1}\left(\bar{\Theta}\backslash\left\{\left(\frac{\pi p}{n}, \frac{\pi q}{n}\right), \left(-\frac{\pi p}{n}, -\frac{\pi q}{n}\right)\right\}\right)$ *при* $n > 2q$.

Доказательство теоремы 1 приведено в пункте 2. В пункте 1 идея нашего исследования проиллюстрирована для случая одномерного интеграла, представляющего решение триномиального уравнения $y^n + xy^p - 1 = 0$, $n > p \geqslant 1$.

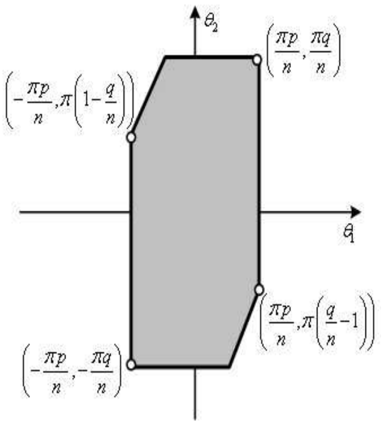

Рис. 1. Угловая проекция множества сходимости интеграла (2) при при $n < 2q$

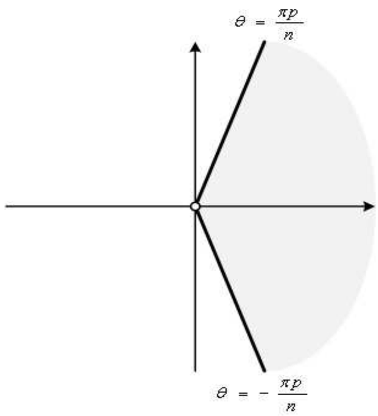

Рис. 2. Множество сходимости интеграла (6)

1. Множество сходимости интеграла с одним параметром

Некоторые случаи сходимости одномерных интегралов Меллина-Барнса

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}}\frac{\prod\limits_{j}\Gamma\left(A_j z + c_j\right)}{\prod\limits_{k}\Gamma\left(B_k z + d_k\right)}x^{-z}dz \tag{5}$$

приведены в книге Г.Бейтмена, А.Эрдейи [9, гл. 1.19]. В интеграле (5) предполагается, что $\gamma \in \mathbb{R}$, числа $A_j, B_k \in \mathbb{R}$, путь интегрирования представляет собой параллельную мнимой оси прямую, некоторые отрезки которой могут быть заменены дугами для обхода полюсов подынтегральной функции. Ключевую роль в классификации множеств сходимости интегралов вида (5) играют числовые параметры

$$\alpha = \sum_j |A_j| - \sum_k |B_k|,$$

$$\Delta = \sum_j A_j - \sum_k B_k.$$

В случае, когда $\alpha > 0$, область сходимости интеграла представляет собой сектор, заданный неравенством

$$|\theta| < \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Если $\alpha = 0$, то либо множество сходимости вырождается в луч $x > 0$, что соответствует условию $\theta = 0$, либо интеграл может расходиться. Исследуемый нами интеграл (2) имеет непустую область сходимости, поэтому может быть назван многомерным аналогом первого случая, когда $\alpha > 0$. Как заявлено в теореме 1, к области сходимости интеграла (2) присоединяются почти все точки, угловые проекции которых лежат на границе шестиугольника (или прямоугольника) сходимости. В одномерной ситуации к области сходимости — сектору $|\theta| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$ — присоединяются оба граничных луча

$$\theta = \pm\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Рассмотрим интеграл Меллина-Барнса с одним параметром x:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{\mu}{n}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}-\frac{p}{n}z\right)\Gamma\left(z\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}+\frac{n-p}{n}z+1\right)}x^{-z}dz. \tag{6}$$

Здесь $n > p \geqslant 1$, $\mu > 0$, множество интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}$ представляет собой мнимое подпространство $i\mathbb{R}$ в пространстве $\mathbb{C}$ переменной z, сдвинутое на $\gamma \in \left(0, \dfrac{\mu}{p}\right)$. В данном случае $\alpha = \dfrac{2p}{n}$, $\Delta = 0$, поэтому интеграл абсолютно сходится в секторе $|\theta| < \dfrac{\pi p}{n}$ (рис. 2). В этой секториальной области интеграл (6) представляет μ–ю степень ветви решения $y(x)$ ($y(0) = 1$) алгебраического уравнения

$$y^n + xy^p - 1 = 0.$$

Покажем, что сходимость будет и на лучах $\theta = \pm\dfrac{\pi p}{n}$.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$F(z) = \frac{\frac{\mu}{n}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}-\frac{p}{n}z\right)\Gamma\left(z\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}+\frac{n-p}{n}z+1\right)},$$

$$z = u + iv \quad (u, v \in \mathbb{R}), \quad x = re^{i\theta} \quad (r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}).$$

Заметим, что для любого фиксированного $u \in \mathbb{R}$ при $|v| \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство $|v|^{u-\frac{1}{2}} \sim (|v|+1)^{u-\frac{1}{2}}$. Поэтому, с учетом формулы Стирлинга

$$\Gamma(u+iv) \sim \sqrt{2\pi}|v|^{u-\frac{1}{2}}e^{-\pi|v|/2}, \quad |v| \to \infty,$$

для гамма-функции справедлива оценка

$$C_1\left(|v|+1\right)^{u-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|v|} \leqslant |\Gamma(u+iv)| \leqslant C_2\left(|v|+1\right)^{u-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|v|}, \tag{7}$$

где $u \in K \subset \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$, $v \in \mathbb{R}$, а константы C_1 и C_2 зависят только от выбора компакта K. Таким образом, для подынтегрального выражения в (6) имеет место оценка вида

$$\left|F(z)x^{-z}\right| \leqslant \text{const}\ \frac{\left(\left|\frac{p}{n}v\right|+1\right)^{-\frac{p}{n}u+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}\left(|v|+1\right)^{u-\frac{1}{2}}}{\left(\left|\frac{n-p}{n}v\right|+1\right)^{\frac{n-p}{n}u+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}}\exp\left\{v\theta - \frac{\pi p}{n}|v|\right\}. \tag{8}$$

При условии $\theta = \pm\dfrac{\pi p}{n}$ показатель экспоненты в (8) либо отрицательный, либо равен нулю. В первом случае сходимость интеграла (6) гарантирована убыванием экспоненты

$\exp\left\{\upsilon\theta - \frac{\pi p}{n}|\upsilon|\right\}$. Во втором случае сходимость интеграла обеспечивает степенной множитель

$$\frac{\left(\left|\frac{p}{n}\upsilon\right|+1\right)^{-\frac{p}{n}u+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}\left(|\upsilon|+1\right)^{u-\frac{1}{2}}}{\left(\left|\frac{n-p}{n}\upsilon\right|+1\right)^{\frac{n-p}{n}u+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}},$$

который при $|\upsilon|\to\infty$ имеет порядок малости $-\dfrac{3}{2}$ для любого фиксированного $u\in\mathbb{R}$.

2. Доказательство теоремы 1

Схема доказательства теоремы 1 намечена в рассуждениях пункта 1. Реализуем ее в деталях. Введем несколько обозначений:

$$u_\nu = \Re z_\nu, \quad \upsilon_\nu = \Im z_\nu, \quad \nu = 1,2,$$

$$F(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}-\frac{p}{n}z_1-\frac{q}{n}z_2\right)\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}+\frac{n-p}{n}z_1+\frac{n-q}{n}z_2+1\right)}.$$

Тогда интеграл Меллина-Барнса (2) примет вид

$$y^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^2} F(z)x^{-z}\frac{\mu}{n}\,dz, \tag{9}$$

где $x^{-z} = x_1^{-z_1}x_2^{-z_2}$, $dz = dz_1dz_2$.

Используя (7), оценим модуль подынтегрального выражения в (9) при $|\upsilon|\to\infty:$

$$\left|F(z)x^{-z}\right| \leqslant \text{const}\ \frac{\left(|\upsilon_1|+1\right)^{u_1-\frac{1}{2}}\left(|\upsilon_2|+1\right)^{u_2-\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{p}{n}\upsilon_1+\frac{q}{n}\upsilon_2\right|+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(\left|\frac{n-p}{n}\upsilon_1+\frac{n-q}{n}\upsilon_2\right|+1\right)^{\frac{n-p}{n}u_1+\frac{n-q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left\{\langle\upsilon,\theta\rangle - \frac{\pi}{2}\left(|\upsilon_1|+|\upsilon_2|+\left|\frac{p}{n}\upsilon_1+\frac{q}{n}\upsilon_2\right|-\left|\frac{n-p}{n}\upsilon_1+\frac{n-q}{n}\upsilon_2\right|\right)\right\}. \tag{10}$$

Замечание 1. Из неравенства (7) будет также следовать аналогичная оценка снизу для абсолютной величины подынтегрального выражения (9). Этот факт нам понадобится далее для доказательства расходимости интеграла (9) в отдельных точках.

Из вида оценки (10) следует, что сходимость интеграла (9) контролируют показатель экспоненты

$$\upsilon_1\theta_1+\upsilon_2\theta_2-\frac{\pi}{2}\left(|\upsilon_1|+|\upsilon_2|+\left|\frac{p}{n}\upsilon_1+\frac{q}{n}\upsilon_2\right|-\left|\frac{n-p}{n}\upsilon_1+\frac{n-q}{n}\upsilon_2\right|\right) \tag{11}$$

и степенной множитель

$$\frac{\left(|\upsilon_1|+1\right)^{u_1-\frac{1}{2}}\left(|\upsilon_2|+1\right)^{u_2-\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{p}{n}\upsilon_1+\frac{q}{n}\upsilon_2\right|+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(\left|\frac{n-p}{n}\upsilon_1+\frac{n-q}{n}\upsilon_2\right|+1\right)^{\frac{n-p}{n}u_1+\frac{n-q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}}. \tag{12}$$

Если при фиксированном $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$ показатель экспоненты (11), зависящий от $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2)\in\mathbb{R}^2$, есть величина отрицательная, то экспонента быстро убывает и никакой степенной множитель не может нарушить сходимость интеграла. Эта ситуация будет иметь место при $\theta\in\Theta$. Напротив, неограниченное возрастание показателя экспоненты (11) для какого-либо направления $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ говорит о том, что для выбранного $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ интеграл будет расходиться, так как степенной множитель не сможет погасить рост экспоненциального множителя.

Исследуем поведение показателя экспоненты (11) и степенного множителя (12) в случае, когда $\theta \in \partial\Theta$. Рассмотрим случай, когда область Θ есть внутренность шестиугольника (рис. 1). Это соответствует условию $n < 2q$ (пункт a) в формулировке теоремы 1).

Шестиугольнику $\bar{\Theta}$ сопоставим его двойственный веер $\bar{\Theta}^*$ (его также называют двойственным коническим полиэдром (см. [10])), который представляет собой разбиение $\mathbb{R}^2$ на секторы, соприкасающихся по их граничным лучам. Лучи a_i $(i = 1, \ldots, 6)$ — это внешние нормали к сторонам $\bar{\Theta}$, причем каждая пара соседних лучей a_i, a_j определяет сектор $\sigma(a_i, a_j)$ (рис. 3, 4).

Вершины шестиугольника $\bar{\Theta}$ обозначим A, B, C, D, E, F, соответственно стороны этого шестиугольника будем обозначать $[AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FA]$. Для фиксированного $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ из относительной внутренности отрезка $[AB]$ показатель экспоненты (11) принимает всегда отрицательные значения, за исключением луча

$$\upsilon_1 = -\frac{q}{p}\upsilon_2, \ \upsilon_2 > 0, \tag{13}$$

на котором он тождественно равен нулю. Отметим, что луч (13) совпадает с одномерным конусом a_2 двойственного веера $\bar{\Theta}^*$. В точке B показатель экспоненты (11) принимает отрицательные значения на всех направлениях $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2) \in \mathbb{R}^2$, за исключением уже двух лучей: луча (13) и луча $\upsilon_1 = 0, \upsilon_2 > 0$, который есть одномерный конус a_3 двойственного веера. В точке A показатель экспоненты (11) будет отрицательным для всех $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2) \in \mathbb{R}^2$, за исключением направлений, принадлежащих двумерному конусу $\sigma(a_1, a_2)$.

Аналогичным образом, фиксируя $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ из относительных внутренностей отрезков $[BC], [CD], [DE], [EF], [FA]$, можно убедиться, что показатель экспоненты (11) обращается в нуль только на направлениях $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ из лучей a_3, a_4, a_5, a_6 и a_1 соответственно.

Для вершины E показатель экспоненты (11) принимает нулевые значения на двух лучах, направления которых соответствуют одномерным конусам a_5, a_6. Для остальных направлений $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$ показатель экспоненты (11) отрицательный. Для вершин C, D, F

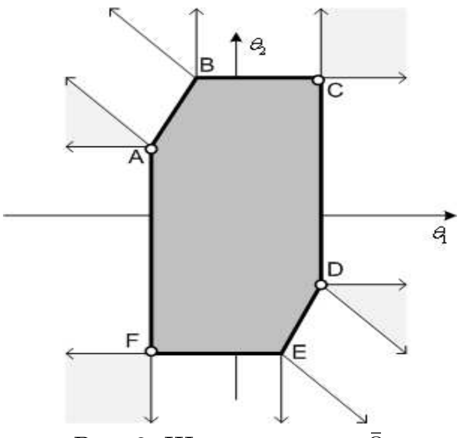

Рис. 3. Шестиугольник $\bar{\Theta}$

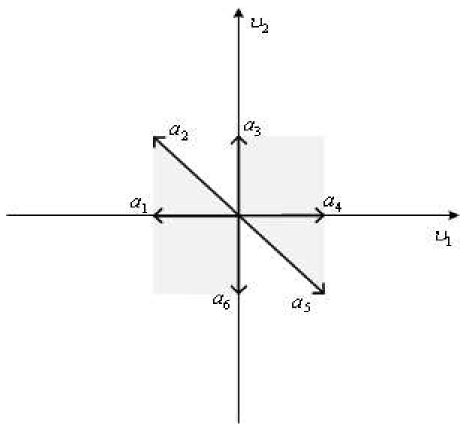

Рис. 4. Двойственный веер $\bar{\Theta}^*$

величина (11), подобно ситуации с точкой A, зануляется на двумерных конусах $\sigma(a_3, a_4)$, $\sigma(a_4, a_5)$, $\sigma(a_6, a_1)$ соответственно.

Требует детального исследования поведение интеграла (9) в окрестностях направлений $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$, на которых происходит зануление показателя экспоненты (11). Рассмотрим наклонные стороны $[AB]$ и $[DE]$ шестиугольника $\overline{\Theta}$. Проведем рассуждения для стороны

$[AB]$ (для стороны $[DE]$ рассуждения аналогичны). Зафиксируем точку $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (AB)$ (либо $\theta \in [ED)$). Координаты фиксированной точки θ удовлетворяют условиям: $-\dfrac{\pi p}{n} < \theta_1 \leqslant \dfrac{\pi p(q-n)}{nq}$, $\theta_2 = \pi + \dfrac{q}{p}\theta_1$. Рассмотрим одностороннюю секториальную окрестность луча a_2 (см. (13)), заданную неравенствами $p\upsilon_1 + q\upsilon_2 > 0$, $\dfrac{n-p}{n}\upsilon_1 + \dfrac{n-q}{n}\upsilon_2 < 0$. В этой окрестности показатель экспоненты (11) примет вид

$$\frac{\theta_1}{p}\left(p\upsilon_1 + q\upsilon_2\right).$$

С учетом оценки (10) исследование интеграла (9), при фиксированном θ, сводится к исследованию сходимости следующего интеграла:

$$\mathrm{const} \iint\limits_{\substack{p\upsilon_1+q\upsilon_2>0,\\ \frac{n-p}{n}\upsilon_1+\frac{n-q}{n}\upsilon_2<0}} \frac{(-\upsilon_1+1)^{u_1-\frac{1}{2}}\,(\upsilon_2+1)^{u_2-\frac{1}{2}}\,\left(\frac{p}{n}\upsilon_1+\frac{q}{n}\upsilon_2+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{n-p}{n}\upsilon_1-\frac{n-q}{n}\upsilon_2+1\right)^{\frac{n-p}{n}u_1+\frac{n-q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\theta_1}{p}\left(p\upsilon_1+q\upsilon_2\right)\right\}d\upsilon_1 d\upsilon_2. \tag{14}$$

В интеграле (14) сделаем замену переменных:

$$p\upsilon_1 + q\upsilon_2 = t,$$

$$\frac{n-p}{n}\upsilon_1 + \frac{n-q}{n}\upsilon_2 = -s,$$

в результате которой он примет вид

$$\mathrm{const}\iint\limits_{s,t>0}\left(\frac{qs}{q-p}+\frac{(n-q)}{(q-p)}\frac{t}{n}+1\right)^{u_1-\frac{1}{2}}\left(\frac{ps}{q-p}+\frac{(n-p)}{(q-p)}\frac{t}{n}+1\right)^{u_2-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{t}{n}+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}(s+1)^{-\frac{n-p}{n}u_1-\frac{n-q}{n}u_2-\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\theta_1}{p}t\right)dsdt. \tag{15}$$

Для более компактной записи (15) введем ряд обозначений:

$$K(s,t) = \frac{q}{q-p}s + \frac{n-q}{n(q-p)}t + 1, \quad M(s) = s+1,$$

$$L(s,t) = \frac{p}{q-p}s + \frac{n-p}{n(q-p)}t + 1,$$

$$\zeta = u_1 - \frac{1}{2}, \quad \xi = u_2 - \frac{1}{2},$$

$$\varkappa = \frac{n-p}{n}u_1 + \frac{n-q}{n}u_2 + \frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}, \quad \delta = -\frac{p}{n}u_1 - \frac{q}{n}u_2 + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}.$$

Далее запишем интеграл (15) в виде повторного

$$\int\limits_0^\infty I(t)\left(\frac{t}{n}+1\right)^{\delta}\exp\left(\frac{\theta_1}{p}t\right)dt, \tag{16}$$

где

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{K^\zeta(s,t)L^\xi(s,t)}{M^\varkappa(s)}ds. \tag{17}$$

Лемма 1. *Интеграл (15) сходится.*

Доказательство леммы 1. Показатели $\zeta, \xi, \varkappa, \delta$ удовлетворяют условию

$$\zeta + \xi + \delta - \varkappa = -2.$$

В силу условия (3) имеем $pu_1 + qu_2 < \mu$, поэтому $\delta = -\frac{1}{n}(pu_1 + qu_2 - \mu) - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$. Следовательно, показатели $\xi, \zeta, \varkappa$ в интеграле (17) удовлетворяют условию:

$$\zeta + \xi - \varkappa = -2 - \delta < -\frac{3}{2},$$

откуда видно, что этот интеграл сходится.

Покажем, что $I(t)$ может иметь не более, чем степенной рост по t. Откуда, ввиду наличия в интеграле (16) множителя $\exp\left(\frac{\theta_1}{p}t\right)$ с отрицательным коэффициентом $\frac{\theta_1}{p}$, будет следовать сходимость этого интеграла, а следовательно, и интеграла (15).

Домножим числитель и знаменатель в подынтегральном выражении (17) на произведение функций

$$K^{\zeta'}(s,t)L^{\xi'}(s,t)$$

с неотрицательными степенями ζ', ξ' так, чтобы в полученном выражении

$$\frac{K^{\zeta+\zeta'}(s,t)L^{\xi+\xi'}(s,t)}{K^{\zeta'}(s,t)L^{\xi'}(s,t)M^\varkappa(s)}$$

показатели $\zeta + \zeta'$ и $\xi + \xi'$ были целыми и положительными.

Ввиду неотрицательности ζ' и ξ' последнее выражение допускает оценку:

$$\frac{K^{\zeta+\zeta'}(s,t)L^{\xi+\xi'}(s,t)}{K^{\zeta'}(s,t)L^{\xi'}(s,t)M^\varkappa(s)} \leqslant \frac{K^{\zeta+\zeta'}(s,t)\cdot L^{\xi+\xi'}(s,t)}{\left(\frac{q}{q-p}s+1\right)^{\zeta'}\left(\frac{p}{q-p}s+1\right)^{\xi'}(s+1)^\varkappa}. \tag{18}$$

Числитель в (18) есть полином по переменной s с полиномиальными коэффициентами по переменной t. Если правую часть (18) представить в виде суммы дробей, разделив почленно на знаменатель, то степень по s (то есть разность степеней числителя и знаменателя) каждой дроби будет $\zeta + \xi - \varkappa < -\frac{3}{2}$. Следовательно, при интегрировании в ((17)) каждое слагаемое будет сходящимся интегралом по переменной s. Получаем, что $|I(t)| \leqslant R(t)$, где $R(t)$ — некоторый полином. $\square$

Итак, интеграл (15) сходится ввиду леммы 1, что, очевидно, влечет сходимость интеграла (14). Аналог интеграла (14) можно рассмотреть для другой односторонней секториальной окрестности направления a_2, заданной неравенствами: $pv_1 + qv_2 < 0$, $v_2 > 0$. Он также будет сходящимся. Таким образом, доказана сходимость интеграла (9) для всех $\theta \in (AB)$ (аналогично для $\theta \in (DE)$). Чтобы констатировать сходимость интеграла (9) в точке B (соответственно в точке E), необходимо исследовать эту точку в составе стороны $[BC]([EF])$, так как показатель экспоненты (11) в этой точке обращается в нуль на двух лучах a_2 и a_3 (a_5 и a_6).

Далее рассмотрим сторону $[BC]$ (для $[FE]$ рассуждения будут аналогичны). Зафиксируем $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in [BC)$. Координаты фиксированной точки θ удовлетворяют условиям: $\dfrac{\pi p(q-n)}{nq} \leqslant \theta_1 < \dfrac{\pi p}{n}$, $\theta_2 = \dfrac{\pi q}{n}$. Рассмотрим одностороннюю секториальную окрестность луча a_3, заданную неравенствами $\upsilon_1 > 0$, $\upsilon_2 > 0$. В данной окрестности показатель экспоненты (11) имеет вид

$$\upsilon_1 \left(\theta_1 - \frac{\pi p}{n}\right).$$

С учетом оценки (10) исследование интеграла (9), при фиксированном $\theta \in [BC)$, сводится к исследованию сходимости интеграла:

$$\text{const} \iint\limits_{\upsilon_1,\upsilon_2>0} \frac{(\upsilon_1+1)^{u_1-\frac{1}{2}}\,(\upsilon_2+1)^{u_2-\frac{1}{2}}\,\left(\frac{p}{n}\upsilon_1+\frac{q}{n}\upsilon_2+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{n-p}{n}\upsilon_1+\frac{n-q}{n}\upsilon_2+1\right)^{\frac{n-p}{n}u_1+\frac{n-q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left\{\upsilon_1\left(\theta_1-\frac{\pi p}{n}\right)\right\} d\upsilon_1 d\upsilon_2. \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$\upsilon_1 = t,\ \upsilon_2 = s,$$

$$K(s,t) = \frac{p}{n}t + \frac{q}{n}s + 1, \quad M(s) = s+1,$$

$$L(s,t) = \frac{n-p}{n}t + \frac{n-q}{n}s + 1,$$

$$\zeta = u_1 - \frac{1}{2}, \quad \xi = u_2 - \frac{1}{2},$$

$$\delta = -\frac{p}{n}u_1 - \frac{q}{n}u_2 + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}, \quad \varkappa = \frac{n-p}{n}u_1 + \frac{n-q}{n}u_2 + \frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}.$$

Запишем интеграл (19) в виде повторного

$$\int\limits_0^\infty I(t)(t+1)^\zeta \exp\left(t\left(\theta_1 - \frac{\pi p}{n}\right)\right) dt, \tag{20}$$

где

$$I(t) = \int\limits_0^\infty \frac{K^\delta(s,t)M^\xi(s)}{L^\varkappa(s,t)} ds. \tag{21}$$

Лемма 2. *Интеграл (19) сходится.*

Доказательство леммы 2. Обоснуем сходимость интеграла (21) и покажем, что $I(t)$ может иметь не более чем степенной рост по переменной t.

В данном случае также выполняется, что $\zeta + \xi + \delta - \varkappa = -2$. Поэтому

$$\delta + \xi - \varkappa = -2 - \zeta = -2 - u_1 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - u_1 < -\frac{3}{2},$$

так как в силу условия (3) $u_1 > 0$. Следовательно интеграл (21) сходится.

Функция $I(t)$ имеет не более чем степенной рост по переменной t. Это доказывается так же, как в лемме 1 после следующих преобразований и оценки:

$$\frac{K^{\delta+\delta'}(s,t)M^{\xi+\xi'}(s)}{K^{\delta'}(s,t)M^{\xi'}(s)L^\varkappa(s,t)} =$$

$$= \frac{K^{\delta+\delta'}(s,t)M^{\xi+\xi'}(s)}{\left(\frac{p}{n}t+\frac{q}{n}s+1\right)^{\delta'}(s+1)^{\xi'}\left(\frac{n-p}{n}t+\frac{n-q}{n}s+1\right)^{\varkappa}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K^{\delta+\delta'}(s,t)M^{\xi+\xi'}(s)}{\left(\frac{q}{n}s+1\right)^{\delta'}(s+1)^{\xi'}\left(\frac{n-q}{n}s+1\right)^{\varkappa}},$$

здесь числитель и знаменатель подынтегрального выражения (21) домножили на выражение $K^{\delta'}(s,t)M^{\xi'}(s)$ с неотрицательными степенями δ', ξ'.

Ввиду наличия в интеграле (20) множителя $\exp\left(t\left(\theta_1-\dfrac{\pi p}{n}\right)\right)$ с отрицательным коэффициентом $\left(\theta_1-\dfrac{\pi p}{n}\right)$, этот интеграл будет сходиться, а следовательно, будет сходиться и интеграл (19). $\square$

Аналогичным образом можно рассмотреть одностороннюю секториальную окрестность луча a_3, заданную неравенствами: $\upsilon_2 > 0$, $\upsilon_1 < 0$, при этом соответствующий интеграл вида (19) будет сходящимся. Таким образом, доказана сходимость интеграла (9) для всех $\theta \in [BC)$. Теперь мы вправе утверждать, что в точке B интеграл (9) сходится.

Далее рассмотрим стороны шестиугольника $[CD]$ и $[AF]$. Проведем рассуждения для стороны $[CD]$. Зафиксируем $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (CD)$. Координаты фиксированной точки θ удовлетворяют условиям: $\theta_1 = \dfrac{\pi p}{n}$, $\pi\left(\dfrac{q}{n}-1\right) < \theta_2 < \dfrac{\pi q}{n}$. Рассмотрим одностороннюю окрестность луча a_4, заданную неравенствами: $\upsilon_1 > 0$, $\upsilon_2 > 0$. В этой окрестности показатель экспоненты (11) примет вид

$$\upsilon_2\left(\theta_2-\frac{\pi q}{n}\right).$$

Как и в предыдущих двух случаях, задача сводится к исследованию сходимости интеграла:

$$\mathrm{const} \iint\limits_{\upsilon_1,\upsilon_2>0} \frac{(\upsilon_1+1)^{u_1-\frac{1}{2}}(\upsilon_2+1)^{u_2-\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{n}\upsilon_1+\frac{q}{n}\upsilon_2+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{n-p}{n}\upsilon_1+\frac{n-q}{n}\upsilon_2+1\right)^{\frac{n-p}{n}u_1+\frac{n-q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left\{\upsilon_2\left(\theta_2-\frac{\pi q}{n}\right)\right\} d\upsilon_1 d\upsilon_2. \tag{22}$$

Сходимость интеграла (22), а также его аналога для односторонней окрестности $\upsilon_1 > 0$, $\upsilon_2 < 0$, можно доказать так же, как сходимость интеграла (19). Таким образом, сходимость интеграла (9) доказана для всех $\theta \in (CD)$.

Вершины A, C, D, F нельзя присоединить к множеству сходимости интеграла (9). Действительно, в этих точках зануление показателя экспоненты (11) происходит по всем направлениям $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$, принадлежащим двумерным конусам $\sigma(a_1, a_2)$, $\sigma(a_3, a_4)$, $\sigma(a_4, a_5)$, $\sigma(a_6, a_1)$. В силу неравенства (10) и замечания 1 задача сводится к исследованию двойных интегралов по этим конусам. Эти интегралы расходятся, так как степенной множитель (12) имеет суммарную степень по переменным υ_1, υ_2, равную -2. Например, для точки $A = \left(-\dfrac{\pi p}{n}, \pi\left(1-\dfrac{q}{n}\right)\right)$ мы имеем двойной интеграл по конусу $\sigma(a_1, a_2)$ от дроби

$$\frac{(-\upsilon_1+1)^{u_1-\frac{1}{2}}(\upsilon_2+1)^{u_2-\frac{1}{2}}\left(-\frac{p}{n}\upsilon_1-\frac{q}{n}\upsilon_2+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{n-p}{n}\upsilon_1-\frac{n-q}{n}\upsilon_2+1\right)^{\frac{n-p}{n}u_1+\frac{n-q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}}.$$

Таким образом, завершено доказательство нашей теоремы для случая, когда $n < 2q$.

Рассмотрим случай $n \geqslant 2q$. Как было отмечено, угловая проекция области сходимости S_Θ в такой ситуации есть внутренность четырехугольника (рис. 5, 6). Относительные

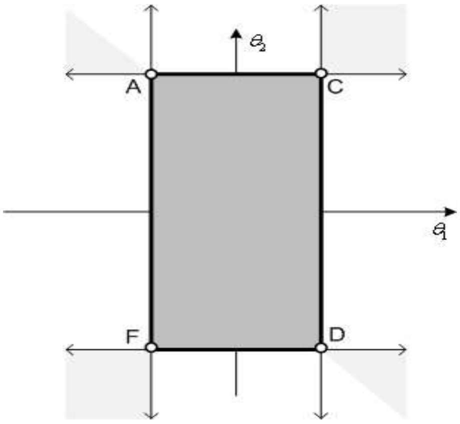

Рис. 5. Угловая проекция множества сходимости при $n = 2q$

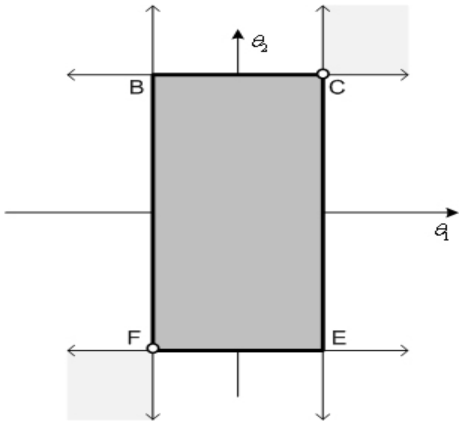

Рис. 6. Угловая проекция множества сходимости при $n > 2q$

внутренности сторон четырехугольника присоединяются к множеству сходимости интеграла (9). Этот факт доказывается так же, как в случае $n < 2q$. В точках C и F интеграл (9) расходится, как было показано выше. В точках A (рис. 5) зануление показателя экспоненты (11) происходит по всем направлениям $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$, принадлежащим двумерному конусу $\sigma(a_1, a_2)$ и одномерному конусу a_3. Для точки D это будут конусы $\sigma(a_4, a_5)$ и a_6. С учетом неравенства (10) и замечания 1 исследование интеграла (9) в точке A сводится к исследованию интеграла:

$$\mathrm{const} \iint\limits_{\substack{p\upsilon_1+q\upsilon_2<0,\\ \upsilon_2>0}} \frac{(-\upsilon_1+1)^{u_1-\frac{1}{2}}(\upsilon_2+1)^{u_2-\frac{1}{2}}\left(-\frac{p}{n}\upsilon_1-\frac{q}{n}\upsilon_2+1\right)^{-\frac{p}{n}u_1-\frac{q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{n-p}{n}\upsilon_1-\frac{n-q}{n}\upsilon_2+1\right)^{\frac{n-p}{n}u_1+\frac{n-q}{n}u_2+\frac{\mu}{n}+\frac{1}{2}}} d\upsilon_1 d\upsilon_2, \qquad (23)$$

здесь степенной множитель имеет суммарную степень по переменным υ_1, υ_2, равную -2. Этот факт влечет расходимость интеграла (23). Следовательно, точка A и (по аналогичной причине) точка D не входят в множество сходимости интеграла (9) в случае $n = 2q$. В случае $n > 2q$ в точках B и E (см. Рис. 6) интеграл (9) сходится. Здесь зануление показателя экспоненты (11) происходит по парам одномерных конусов a_1, a_3 и a_4, a_6 соответственно. Доказательство для точки B (E) можно провести, рассмотрев ее в составе двух сторон $[FB]$ и $[BC]$ ($[FE]$ и $[EC]$). $\square$

Первый автор поддержан грантами РФФИ (№ 08-01-00844) и Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы"(№ 2.1.1/4620).

Список литературы

[1] И.А.Антипова, Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений, *Матем. сб.*, **198**(2007), №4, 3-20.

[2] I.M.Gelfand, M.M.Kapranov, A.V.Zelevinsky, Generalized Euler integrals and A–hypergeometric functions, *Adv. in Math.*, **84**(1990), №2, 255–271.

[3] H.R.Mellin, Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma, *C.R. Acad. Sci., Paris Sér. I Math.,* **172**(1921), 658-661.

[4] R.Buschman, H.Srivastava, Convergence regions for some multiple Mellin-Barnes contour integrals representing generalized hypergeometric functions, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, **17**(1986), №5, 605-609.

[5] M.Passare, A.Tsikh, O.Zhdanov, A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin–Barnes integrals, *Aspects Math.*, **26**(1994), 233–241.

[6] О.Н.Жданов, А.К.Цих, Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов, *Сиб. матем. журн.*, **39**(1998), №2, 281–298.

[7] L.Nilsson, M.Passare, A.Tsikh, Hypergeometric series and integrals, в печати.

[8] L.Nilsson, Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions, Doctoral Thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

[9] Г.Бейтмен, А.Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, М., Наука, 1973.

[10] А.Г.Хованский, Многогранники Ньютона (разрешение особенностей), *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления),* М., ВИНИТИ, **22**(1985), 207-239.

On the Set of Convergence for Mellin-Barnes Integral Representing Solutions to the Tetranomial Algebraic Equation

Irina A. Antipova
Tatyana V. Zykova

In the present paper we give the detailed description of the set of convergence for Mellin-Barnes integral representing solutions to the tetranomial algebraic equation.

Keywords: algebraic equation, Mellin-Barnes integral.