УДК 519.2

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РИСКА В РАМКАХ МОДЕЛИ ВОЗМУЩЕННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Есин Р. В.
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Кустицкая Т. А.
Сибирский федеральный университет

При принятии экономических или управленческих решений обычно не удается спрогнозировать результат каждого индивидуального решения с удовлетворительной точностью. Поэтому приходится признавать неопределенность последствий принятых решений, и, как следствие, для принятия рациональных решений использовать соответствующую теорию. Если индивидуум хочет принять решение на основании собственного отношения к риску, то для этого на множестве всевозможных вероятностных распределений необходимо построить некоторый вещественный функционал, на основе которого этот индивидуум будет принимать решение, и этот используемый им функционал должен быть согласован с его предпочтением. Обратной задачей будем считать построение меры риска, которая строится по каким-либо известным характеристикам предпочтения этого человека. Решим данную задачу в рамках меры возмущенной вероятности.

Рассмотрим вероятностное пространство ($\Omega, \mathcal{A}, P$), где Ω - множество элементарных исходов, $\mathcal{A}$ - σ-алгебра, заданная на Ω, а P - вероятностная мера, определенная на множествах из $\mathcal{A}$. ***Риском*** X на $(\Omega, \mathcal{A})$ называется произвольное измеримое отображение из Ω в $\mathbf{R}$ (т.е. случайная величина). Значения риска интерпретируются как доход или убыток, получаемый неким инвестором. Обозначим $\mathcal{X}$ совокупность всех рисков на $(\Omega, \mathcal{A})$.

Пусть на $\mathcal{X}$ заданы отношение предпочтения $\preceq$ и отношение порядка $\leq$. Предпочтение $\preceq$ называется согласованным с отношением порядка $\leq$, если из того, что $X \leq Y$ следует, что $X \preceq Y$.

Мерой риска называется произвольный функционал $\rho : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$. Говорят, что ρ представляет отношение предпочтения на $\mathcal{X}$: $\rho(X) \leq \rho(Y), \text{ if } Y \preceq X, \quad X, Y \in \mathcal{X}$.

Индивидуум, характеризуемый отношением предпочтения $\preceq$ не приемлет риск, если для произвольного риска $\Delta: E\Delta = 0$ и для произвольного $a \in \mathbb{R}$ имеет место $a + \Delta \prec a$. Неприятие риска можно истолковать следующим образом: если к детерминированной величине a прибавить некоторую невырожденную случайную величину Δ с нулевым средним, то результат $a + \Delta$ менее предпочтителен для индивидуума, чем a. При регулярном отношении предпочтения это означает, что найдется $c > 0$ такое, что $a + \Delta \sim a - c$.

В работе Арцнера, Делбаена, Эбера и Хифа были аксиоматически определены когерентные меры риска. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$. Множество элементарных исходов будем считать конечным ($|\Omega| = n$). Пространство всех рисков $\mathcal{X}$ будет изоморфно $\mathbf{R}^n$. Перенумеровав элементы Ω некоторым произвольным образом, будем отождествлять случайные величины $X \in \mathcal{X}$ с векторами $X = (x^1, \ldots, x^n)$ из $\mathbb{R}^n$. Значение случайной величины X трактуется как доход.

Введем на $\mathcal{X}$ порядок обычным образом: $X = (x^1, \ldots, x^n) \leq Y = (y^1, \ldots, y^n)$, если $x^i \leq y^i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Кроме того считаем, что на $\mathcal{X}$ задано отношение предпочтения $\preceq$.

Если произвольный функционал $\rho(X)$ на множестве $\mathcal{X}$, $\rho : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ —

когерентная мера риска, то f — супермодулярная функция, связанная с ρ соотношением $f(X) = -\rho(X)$ для произвольного $X \in \mathcal{X}$. Такие супермодулярные функционалы будем называть когерентными мерами риска. Они будут обладать следующими свойствами:

Монотонность:$\forall X, Y \in \mathcal{X},\ X \leq Y\ \ f(X) \leq f(Y)$;

Супераддитивность: $f(X+Y) \geq f(X) + f(Y)\ \ \forall X, Y \in \mathcal{X}$;

Положительная однородность: $f(\lambda X) = \lambda f(X),\ \ \forall \lambda \geq 0,\ X \in \mathcal{X}$;

Инвариантность относительно сдвига: $f(X + aI) = \rho(X) + a,\ \ a \in \mathbf{R},\ X \in \mathcal{X}$.

В работах Вонга и Янга была предложена мера риска, названная функционалом возмущенной вероятности

$$\Pi_g(X) = \int_{-\infty}^{0} [g(1 - F(x)) - 1]dx + \int_{0}^{\infty} g(1 - F(x))dx,$$

где $g : [0,1] \to [0,1], g(0) = 0, g(1) = 1$,$g(u)$ - неубывающая функция на $[0,1]$.

Введем количественную характеристику для измерения степени неприятия риска. Поскольку добавление случайной величины Δ к начальному капиталу a снижает предпочтительность результата, распределение $a + \Delta$ покидает класс эквивалентности, содержащий W_a . Однако, новый класс эквивалентности, в который попало распределение $a + h\Delta$, где $h = \|\Delta\|_\infty$ как и любой другой класс эквивалентности, содержит некоторое вырожденное распределение, например, W_{a-c}, где $c > 0$ можно истолковать, как плату, которую потребует индивидуум за добавление к своему капиталу случайной величины (риска).

Если начальный капитал индивидуума равен детерминированной величине a, то какова норма замещения рискового довеска $h\Delta$. Получаем $\Pi_g(a + h\Delta) = a + \Pi_g(h\Delta)$, $\Pi_g(a - c) = a - c$, поэтому условие принадлежности $a + h\Delta$ и $a - c$ к одному классу эквивалентности приводит к уравнению $a + \Pi_g(h\Delta) = a - c$, откуда $c = -h\Pi_g(\Delta)$. Индивидуум, предпочтения которого представляются функционалом возмущенной вероятности, не приемлет риск, если $\Pi_g(\Delta) < 0$ для произвольной невырожденной случайной величины с нулевым средним.

Пусть мы являемся финансовой компанией, которая занимается вложением денег в рисковые активы. К нам пришел инвестор, который хочет вложить деньги в инвестиционный проект в соответствии со своим отношением предпочтения. Так как мы работаем мерой возмущенной вероятности, нам необходимо решить несколько задач:

- Подобрать параметр функционала Π_g , в виде функции g причем должны выполняться условия $g(0) = 0, g(1) = 1$;
- В работе Вонга, были предложены несколько классов функции g со входным параметром r, но все gявляются выпуклыми вверх функциями. Для того чтобы функционал возмущенной вероятности учитывал неприятие риска, функция gдолжна удовлетворять условию: $g(x) \leq x, x \in [0,1]$;
- Выразить параметр rфункции gчерез неприятие риска;
- На основе отношения предпочтения инвестора и его уровня неприятия риска подобрать для него возмущающую функцию g и параметр функции r.

Для того чтобы определить уровень неприятия риска у инвестора и определить какой класс возмущающих функций наиболее точно описывает его отношение предпочтения проведем некоторый опрос. Предложим инвестору некоторую лотерею, где риск соответствует доходу:

W	w_1	w_2	w_3	$\dots$	w_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

$p_1 + \dots + p_n = 1$. И спросим, какова минимальная оплата, за которую инвестор согласится сыграть в такую лотерею? Узнав, мы получим количественную характеристику неприятия риска у инвестора c.Значение c будет являться решением уравнения $a + \Pi_g(h\Delta) = a - c$ и будет зависеть от g и Δ. Обозначим это значение через $c_g(\Delta)$: его можно трактовать как цену, которую индивидуум запрашивает за "подмешивание" к его изначальному капиталу a случайного возмущения в "направлении" Δ. Далее представим

W	w_1	w_2	w_3	$\dots$	w_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

в виде некоторой детерминированной величины a и некоторой невырожденной случайной величины Δ с нулевым средним. Для этого решим СЛАУ методом Гаусса, лотереи будем подбирать так, чтобы СЛАУ имела решение, причем $a > 0$:

$$\begin{cases} w_1 = a + \Delta_1 \\ w_2 = a + \Delta_2 \\ \dots \\ w_n = a + \Delta_n \\ 0 = p_1\Delta_1 + \dots + p_n\Delta_n \end{cases}$$

В результате получим

Δ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	$\dots$	Δ_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

со средним 0 и сможем представить $W = a + \Delta$. Отсюда найдем значение $h = \|\Delta\|_\infty$.условие принадлежности $a + h\Delta$ и $a - c$ к одному классу эквивалентности приводит к уравнению $a + \Pi_g(h\Delta) = a - c$, откуда мы можем найти цену неприятия риска $c = -h\Pi_g(\Delta)$, а так же $\Pi_g(W) = a + \frac{-c}{h}$. Для того чтобы определить параметр r для класса квадратичных возмущающей функции g решим уравнение $r = \frac{\Pi_Q(\mathrm{W}) + \sum_{s=1}^{n}(\sum_{k=s}^{n} p_k w_{k,k-1})}{\sum_{s=2}^{n}((\sum_{k=s}^{n} p_k - \sum_{k=s}^{n} p_k^2) w_{k,k-1})}$, чтобы найти параметр r для остальных классов нам необходимо численно решить следующие уравнения относительно параметра r:

$$\Pi_R(\mathrm{W}) = w_{1,0} + w_{2,1}\frac{\sqrt{1 + r(p_2 + \dots + p_n)} - 1}{\sqrt{1 + r} - 1} + \dots + w_{n,n-1}\frac{\sqrt{1 + rp_n} - 1}{\sqrt{1 + r} - 1},$$

$$\Pi_E(\mathrm{W}) = w_{1,0} + w_{2,1}\frac{1 - e^{-r(p_2 + \dots + p_n)}}{1 - e^{-r}} + \dots + w_{n,n-1}\frac{1 - e^{-rp_n}}{1 - e^{-r}},$$

$$\Pi_L(\mathrm{W}) = w_{1,0} + w_{2,1}\frac{\ln(1 + r(p_2 + \dots + p_n))}{\ln(1 + r)} + \dots + w_{n,n-1}\frac{\ln(1 + rp_n)}{\ln(1 + r)},$$

$$\Pi_S(\mathrm{W}) = w_{1,0} + w_{2,1}(p_2 + \dots + p_n)^r + \dots + w_{n,n-1}{p_n}^r.$$

В итоге мы получим параметр r для каждого класса функций g. На последнем этапе нам необходимо определить какой класс возмущающих функций g наиболее точно описывает отношение предпочтения конкретного инвестора.Предложим инвестору на выбор две лотереи, где риск соответствует доходу:

$Y1$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n
P_1	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

$Z1$	z_1	z_2	z_3	$\dots$	z_n
P_2	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

И узнаем, участие в какой из них для него более предпочтительно. Для этой лотереи найдем значения:

$$d_1 = \Pi_Q(\mathrm{Y1}) - \Pi_Q(\mathrm{Z1}), d_2 = \Pi_R(\mathrm{Y1}) - \Pi_R(\mathrm{Z1}), d_3 = \Pi_E(\mathrm{Y1}) - \Pi_E(\mathrm{Z1}), d_4 = \Pi_L(\mathrm{Y1}) - \Pi_L(\mathrm{Z1}), d_5 = \Pi_S(\mathrm{Y1}) - \Pi_S(\mathrm{Z1})$$

Мы будем выбирать $Y1$ и$Z1$ таким образом, чтобы некоторые d_i были больше 0, что означает, что для инвестора, предпочтения которого описаны соответствующими функциями: $Y1$ будет предпочтительнее $Z1$, а другие d_i были меньше 0, в противном случае. Таким образом, если инвестор выберет $Y1$, то далее мы будем выбирать функцию g среди тех, для которых $d_i > 0$, иначе будем выбирать среди тех функций, для которых $d_i < 0$. Далее предложим инвестору на выбор другие две лотереи, где риск является соответствующим доходом:

$Y2$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n
P_3	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

$Z2$	z_1	z_2	z_3	$\dots$	z_n
P_4	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Поведя ту же самую процедуру, мы вновь на основе предпочтения инвестора определим какие функции наиболее точно описывают неприятие риска конкретного человека. Будем повторять этот алгоритм до тех пор, пока не определим одну единственную функцию, что в итоге даст нам необходимый класс возмущающих функций g. Зная класс возмущающих функций и параметр r, который мы получили на предыдущем шаге, мы можем предоставить инвестору конкретную функцию для вычисления меры возмущенной вероятности в соответствии с уровнем неприятия риска и отношением предпочтения конкретного индивида.

Выводы: В работе предложен метод решения обратной задачи теории риска, основанный на вычислении функционала, неприятия риска и на сравнении решений индивидуума с решениями, принимаемыми с использованием различных типов возмущающих функций. Изложенные методы для тестирования могут стать основой для создания процедуры подбора подходящего функционала возмущающей вероятности по индивидуальным предпочтениям. Это может быть более развернутое анкетирование, либо различные модели деловых игра, либо схема анализа ранее принятых инвестиционных решений.