УДК 517.9

# О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ МНОГОМЕРНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ДАННЫМИ КОШИ

**Романенко Г.В.**
**научные руководители – д-р физ.-мат. наук Белов Ю.Я.,**
**канд. физ.-мат. наук Фроленков И.В.**
***Сибирский федеральный университет***

Один из способов исследования обратных задач для уравнений или систем заключается в сведении обратной задачи к прямой, используя условия переопределения (некоторая дополнительная информация о решении). Вследствие этого получаем вспомогательную прямую задачу для неклассического нагруженного (содержащего следы неизвестных функций и их производных) уравнения или системы нагруженных уравнений. Необходимо знать, при каких условиях эти вспомогательные задачи разрешимы, а также знать свойства их решений.

Рассмотрим данный подход на примере следующей задачи. В полосе $G_{[0,T]}=\{(t,x,z)\,|\,0\le t\le T,(x,z)\in E_2\}$ обратную задачу для системы параболических уравнений

$$u_t(t,x,z)=u_{xx}+u_{zz}+u+v+\lambda(t)\,f_1(t,x,z),$$
$$v_t(t,x,z)=v_{xx}+v_{zz}+u+v+f_2(t,x,z),$$
$$u(0,x,z)=u_0(x,z),\qquad v(0,x,z)=v_0(x,z),\qquad (x,z)\in E_2.$$

Наряду с функциями $u(t,x,z)$, $v(t,x,z)$ определению подлежит функция $\lambda(t)$.

Используя условия переопределения $u(t,\alpha,\beta)=\psi(t)$ ($\alpha,\beta-$некоторые фиксированные постоянные), выразим неизвестный коэффициент $\lambda(t)$ через известные функции и следы неизвестных функций, а также их производных. Таким образом, мы приведем обратную задачу к вспомогательной прямой следующего вида

$$u_t(t,x,z)=u_{xx}+u_{zz}+u+v+\frac{\psi'(t)-u_{xx}(t,\alpha,\beta)-u_{zz}(t,\alpha,\beta)-\psi(t)-v(t,\alpha,\beta)}{f_1(t,\alpha,\beta)}\,f_1(t,x,z),$$
$$v_t(t,x,z)=v_{xx}+v_{zz}+u+v+f_2(t,x,z),$$
$$u(0,x,z)=u_0(x,z),\qquad v(0,x,z)=v_0(x,z),\qquad (x,z)\in E_2.$$

Настоящая работа является обобщением ранее исследованной задачи для системы одномерных параболических нагруженных уравнений, рассмотренной в работе [1]. Подобный подход к исследованию задач Коши для двумерных нагруженных уравнений рассматривался в [2]. Другой подход к исследованию многомерных систем для параболических уравнений представлен в [3].

**Постановка задачи.**

В пространстве $E_n$ переменных $x_1,\dots,x_n$, выберем $r_i$ различных точек $\alpha^i_{k_i}$, $(k_i=\overline{1,r_i})$ по каждой переменной $x_i$ $(i=\overline{1,n})$.

Рассмотрим теперь в полосе $G_{[0,T]}=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,x\in E_n\}$задачу Коши для системы нагруженных неклассических параболических уравнений

$$u_t(t,x)=a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}+b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}+f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),$$

$$v_t(t,x)=a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\sum_{i=1}^{n}v_{x_ix_i}+b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}+f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v),\qquad(1)$$

$$u(0,x)=u_0(x),\qquad v(0,x)=v_0(x),\qquad x\in E_n.\qquad(2)$$

Здесь

$$\overline{\varphi}_u(t)=\left(u(t,\alpha^1_{k_1},...,\alpha^n_{k_n}),D^s_x u(t,\alpha^1_{k_1},...,\alpha^n_{k_n})\right),\qquad \overline{\varphi}_v(t)=\left(v(t,\alpha^1_{k_1},...,\alpha^n_{k_n}),D^s_x v(t,\alpha^1_{k_1},...,\alpha^n_{k_n})\right),$$

$$s=(s_1,...,s_n),\quad s_i=0,1,...,\tilde{p}_i;\quad k_i=1,...r_i,\qquad i=\overline{1,n}.$$

$$D^s_x\zeta(x)=D^{(s_1,...,s_n)}_{(x_1,...,x_n)}\zeta(x)=\frac{\partial^{|s|}\zeta(x_1,...,x_n)}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}...\partial x_n^{s_n}},$$

где $s=(s_1,...,s_n)$ – мультииндекс, $s_i\ge 0,$ – целые, $(i=\overline{1,n}),\quad |s|=s_1+...+s_n.$

Здесь и далее выберем и зафиксируем константы $p_i\ge\max\{2,\tilde{p}_i\},\quad i=\overline{1,n}.$

**Определение 1.** Через $Z^{p_1,...,p_n}_{x_1,...,x_n}([0,t^*])$ обозначим множество функций $u(t,x)$, $v(t,x)$, определенных в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу $C^{1,p_1,...,p_n}_{t,x_1,...,x_n}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,p_1,...,p_n}_{t,x_1,...,x_n}(G_{[0,t^*]})=\left\{\psi(t,x)\left|\frac{\partial\psi}{\partial t},D^s_x\psi\in C(G_{[0,t^*]}),\quad s=(s_1,...,s_n),\quad s_i=0,1,...,p_i,\quad i=\overline{1,n}\right.\right\},$$

ограниченных при $(t,x)\in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в систему (1)

$$\sum_{\substack{s=(s_1,...,s_n),\\ s_i=0,1,...,p_i,\\ i=\overline{1,n}}}\left(\left|D^s_x u(t,x)\right|+\left|D^s_x v(t,x)\right|\right)\le C.$$

**Определение 2.** Под классическим решением задачи (1), (2) в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать пару функций $\{u(t,x),\ \ v(t,x)\}\in Z^{p_1,...,p_n}_{x_1,...,x_n}([0,t^*])$, удовлетворяющую (1), (2) в $G_{[0,t^*]}$.

Здесь $0<t^*\le T$ – некоторая фиксированная постоянная. Если $t^*$ зависит от входных данных и $t^*\le T$, то пара функций $\{u(t,x),\ v(t,x)\}$ является решением задачи (1), (2) в малом временном интервале (или просто решением «в малом»). Если $t^*$ фиксировано и $t^*=T$ при любом наборе входных данных, удовлетворяющих достаточным условиям разрешимости, то пара функций $\{u(t,x),\ v(t,x)\}$ является решением задачи (1), (2) во всем временном интервале («глобальная разрешимость»).

**Основной результат.**

Предположим, что выполняются следующие условия.

**Условие 1.** Функции $a_1, a_2, b_1, b_2$ действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов и функции $a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),\ a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))$ удовлетворяют условиям $a_1\ge a_0>0,\quad a_2\ge a_0>0,$ $a_0-const$. Пусть $\forall t_1\in(0,T],\ \forall t\in(0,t_1]$ справедлива следующая оценка

$$\left|a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|+\left|a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|+\left|b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|+\left|b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|\le P_{\gamma_1}(S(t)).$$

**Условие 2.** Функции $u_0(x), v_0(x)$ действительнозначные и имеют все непрерывные производные входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему

$$\sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_i=\underline{0},1,\dots,p_i,\\ i=1,n}}\left(\left|D_x^s u_0(x)\right|+\left|D_x^s v_0(x)\right|\right)\le C.$$

**Условие 3.** Функции $f_1,\ f_2$ действительнозначные, определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. $\forall t_1\in(0,T]$, $\forall u(t,x)\in Z_{x_1,\dots,x_n}^{p_1,\dots,p_n}([0,t_1])$, $\forall v(t,x)\in Z_{x_1,\dots,x_n}^{p_1,\dots,p_n}([0,t_1])$ данные функции, как функции переменных $(t,x)\in G_{[0,t_1]}$, непрерывны и обладают непрерывными производными, входящими в следующее соотношение

$$\sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_i=\underline{0},1,\dots,p_i,\\ i=1,n}}\left(\left|D_x^s f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|+\left|D_x^s f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))\right|\right)\le P_{\gamma_2}(S(t)).$$

В условиях 1 и 3 под $\gamma_1,\gamma_2\ge 0$ понимаются некоторые фиксированные целые числа,

$$S(t)=\sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_n),\\ s_i=\underline{0},1,\dots,p_i,\\ i=1,n}}\left(\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in E_n}\left|D_x^s u(t,x)\right|+\sup_{0<\xi\le t}\sup_{x\in E_1}\left|D_x^s v(t,x)\right|\right),\qquad u(t,x),v(t,x)\in Z_{x_1,\dots,x_n}^{p_1,\dots,p_n}([0,t_1]),$$

$P_m(y)=\widetilde{C}(1+y+\cdots+y^m)$, $\widetilde{C}>1$ – постоянная, не зависящая от функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ и их производных.

Справедлива

**Теорема (существования)** Пусть выполняются условия 1 – 3.

a. Если **условия 1, 3** выполняются при $\gamma_1\ge 0$, $\gamma_2=\{0,1\}$, то классическое решение $\{u(t,x),\ v(t,x)\}$ задачи (1), (2) существует в классе $Z_{x_1,\dots,x_n}^{p_1,\dots,p_n}([0,T])$.
b. Если **условия 1, 3** выполняется при $\gamma_1\ge 0$, $\gamma_2>1$, то классическое решение $\{u(t,x),\ v(t,x)\}$ задачи (1), (2) существует в классе $Z_{x_1,\dots,x_n}^{p_1,\dots,p_n}([0,t^*])$.

Доказательство данной теоремы проводится с использованием метода расщепления на дифференциальном уровне (метод слабой аппроксимации [4]).

Рассмотрим на примере, приведенном выше, применение теоремы. Относительно входных данных предполагаем, что они имеют все непрерывные производные и удовлетворяют соотношениям:

$$f_1(t,\alpha,\beta) \geq \delta > 0, \qquad \delta - const,$$

$$|\psi'(t)| + |\psi(t)| + \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} u_0\right| + \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} v_0\right| + \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} f_1\right| + \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} f_2\right| \leq C, \qquad k_1, k_2 = 0,1,...,4.$$

В данном примере в прямой задаче

$$a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = 1, \quad b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = 0,$$

$$f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = u + v + \frac{\psi'(t) - u_{xx}(t,\alpha,\beta) - u_{zz}(t,\alpha,\beta) - \psi(t) + v(t,\alpha,\beta)}{f_1(t,\alpha,\beta)} f_1(t,x,z),$$

$$f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)) = u + v + f_2(t,x,z).$$

Условия 1 – 3 теоремы существования выполняются в силу необходимых ограничений на входные данные при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, следовательно, классическое решение $u(t,x,z)$, $v(t,x,z)$ прямой вспомогательной задачи существует в классе $Z^{2,2}_{x,z}([0,T])$.

## Список литературы:


1. И.В. Фроленков, Г.В. Романенко. О разрешимости специальных систем одномерных нагруженных параболических уравнений и систем составного типа с данными Коши // Сиб. журн. индустр. матем., 17:1 (2014), С.135–148.
2. И.В. Фроленков, Ю.Я. Белов. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши // Неклассические уравнения математической физики, сб. науч. статей, Отв. ред. А.И. Кожанов, Изд. Института мат., Новосибирск, 2012, С. 262-279.
3. G.V. Romanenko. A representation of solution of the identification problem of the coefficients at second order operator in the multi-dimensional parabolic equations system // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 7:1 (2014), 100–111
4. Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. - Utrecht: VSP, 2002. 211p.