Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(3), 407–410

УДК 517.55

Вычисление радиуса сходимости ряда из гармонических многочленов в $\mathbb{R}^3$

Ольга В. Ходос*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.04.2010, окончательный вариант 25.05.2010, принята к печати 10.06.2010

В явном виде получена формула, позволяющая вычислять радиус сходимости ряда по однородным гармоническим многочленам в трехмерном случае.

Ключевые слова: гармонические функции, однородные многочлены, формула Коши-Адамара.

Классическая формула Коши-Адамара позволяет вычислять радиус сходимости степенного ряда по его коэффициентам. Для голоморфных функций многих комплексных переменных ее аналоги хорошо известны (см., например, [1, §3]). Для гармонических функций многих переменных естественно вместо разложения в степенной ряд рассматривать разложение функций в ряд по однородным гармоническим многочленам (см., например, [2, гл. 11]). В работе автора [3] получена формула, позволяющая вычислять радиус сходимости такого ряда, зная коэффициенты разложения функции в ряд Тейлора (т.е. зная значения производных функции в начале координат) в $\mathbb{R}^n$. В данной заметке в трехмерном случае коэффициенты в аналоге формулы Коши-Адамара вычислены явно.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ сферическую систему координат $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$, $z = r^2\sin\psi$.

Рассмотрим ортогональную систему сферических функций в $\mathbb{R}^3$ (см. [4, дополнение 2, часть 2, §3])

$$\begin{aligned} &Y_k^{-l} = P_k^{(l)}(\cos\psi)\cdot\cos l\varphi, \\ &Y_k^{l} = P_k^{(l)}(\cos\psi)\cdot\sin l\varphi, \qquad l = 1,\dots,k, \\ &Y_k^0 = P_k(\cos\psi), \end{aligned} \tag{1}$$

где $P_k(t) = \dfrac{1}{2^k\cdot k!}\dfrac{d^k\left(t^2-1\right)^k}{d\,t^k}$ — многочлены Лежандра, $P_k^{(l)}(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{l}{2}}\dfrac{d^l P_k(t)}{dx^l}$ — присоединенные функции Лежандра.

Система (1) состоит из $2k+1$ функций с нормами

$$\|Y_k^l\|^2 = \int\limits_{S_1}\left(Y_k^l\right)^2\,d\sigma = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(Y_k^l(\varphi,\psi)\right)^2\cdot\sin\psi\,d\varphi\,d\psi = \frac{2}{2k+1}\cdot\pi\cdot\varepsilon_l\cdot\frac{(k+l)!}{(k-l)!},$$

где $\varepsilon_0 = 2$, а $\varepsilon_k = 1$ при $k > 0$.

В работе [3] получено следующее утверждение. Приведем его в трехмерном случае.

Пусть B_R — шар в $\mathbb{R}^3$ радиуса R с центром в нуле, а $S_R = \partial B_R$.

*khodos@lan.krasu.ru

Как известно (см., например, [2, гл. 11]), всякая функция $F(r,\varphi,\psi)$, гармоническая в B_R, представима в B_R рядом

$$F(r,\varphi,\psi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}a_{k,l}r^kY_k^l(\varphi,\psi),$$

абсолютно сходящимся в B_R и равномерно сходящимся внутри B_R.

Коэффициенты Тейлора функции F имеют вид $c_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}=\dfrac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\cdot\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}F}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}(0)$.

Обозначим сужение монома $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$ на сферу S_1 через $\theta^\alpha=\theta_1^{\alpha_1}\theta_2^{\alpha_2}\theta_3^{\alpha_3}$, тогда, с одной стороны,

$$\theta^\alpha=x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}=\cos^{\alpha_1}\varphi\cdot\sin^{\alpha_2}\varphi\cdot\sin^{\alpha_1+\alpha_2}\psi\cdot\cos^{\alpha_3}\psi,$$

с другой стороны,

$$\theta^\alpha=\sum_{|k|\leqslant\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}d_{\alpha,k,l}Y_k^l,$$

$$d_{\alpha,k,l}=\frac{1}{\|Y_k^l\|}\int_{S_1}\theta^\alpha\,Y_k^l(\varphi,\psi)\,d\sigma(\varphi,\psi)=\frac{1}{\|Y_k^l\|}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\theta^\alpha\,Y_k^l(\varphi,\psi)\sin\psi\,d\varphi\,d\psi.$$

Теорема 1 ([3]). *Для того чтобы функция $F(r,\varphi,\psi)$ была гармонической в B_R, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\max_{|l|\leqslant k}\sqrt[k]{\left|\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k}c_\alpha\,d_{\alpha,k,l}\right|}\leqslant\frac{1}{R}. \tag{2}$$

Вычислим коэффициенты $d_{\alpha,k,l}$.

Лемма 1. *Справедлива формула ($\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k$)*

$$d_{\alpha,k,0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{S_1}\theta^\alpha\cdot Y_k^{(0)}(\varphi,\psi)\,d\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\theta^\alpha\cdot P_k(\cos\psi)\cdot\sin\psi\,d\psi= \tag{3}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot(\alpha_1-1)!!\cdot(\alpha_2-1)!!\cdot\sum\limits_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^s\cdot\dfrac{2^{2-s}}{(k-2s)!\cdot s!}\cdot\dfrac{(2k-\alpha_1-\alpha_2-2s-1)!!}{(2k-2s+1)},\\ \quad\textit{если } \alpha_1,\ \alpha_2 \textit{ четные},\\ 0,\qquad \textit{иначе}.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\theta^\alpha\cdot P_k(\cos\psi)\cdot\sin\psi\,d\psi$. Поскольку $\theta^\alpha=x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}=\cos^{\alpha_1}\varphi\cdot\sin^{\alpha_2}\varphi\cdot\sin^{\alpha_1+\alpha_2}\psi\cdot\cos^{\alpha_3}\psi$, то

$$\int_0^{2\pi}\cos^{\alpha_1}\varphi\cdot\sin^{\alpha_2}\varphi\,d\varphi=\begin{cases}2\cdot B\left(\frac{\alpha_2+1}{2};\frac{\alpha_1+1}{2}\right), & \text{если } \alpha_1,\alpha_2 \text{ четные},\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда α_1, α_2 четные.

Так как $P_k(\cos\psi) = \dfrac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \sum\limits_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^s \cdot \dfrac{(2k-2s)!}{(k-2s)!} \cdot C_k^s \cdot \cos^{k-2s}\psi$, то

$$\int\limits_0^\pi P_k(\cos\psi) \cdot \sin^{\alpha_1+\alpha_2+1}\psi \cdot \cos^{\alpha_3}\psi \, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^s \cdot \frac{(2k-2s)!}{(k-2s)!} \cdot C_k^s \cdot \int\limits_0^\pi \sin^{\alpha_1+\alpha_2+1}\psi \cdot \cos^{\alpha_3+k-2s}\psi \, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^s \cdot \frac{(2k-2s)!}{(k-2s)!} \cdot C_k^s \cdot B\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+2}{2}; \frac{\alpha_3+k-2s+1}{2}\right).$$

Таким образом, интеграл (3) примет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\pi \theta^\alpha \cdot P_k(\cos\psi) \cdot \sin\psi \, d\psi =$$

$$= \frac{B\left(\frac{\alpha_2+1}{2}; \frac{\alpha_1+1}{2}\right)}{2^{k-1} \cdot k!} \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s)! C_k^s}{(k-2s)!} \cdot B\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+2}{2}; \frac{\alpha_3+k-2s+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2^{k-2} \cdot k!} \cdot (\alpha_1-1)!! \cdot (\alpha_2-1)!! \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s)! C_k^s}{(k-2s)!} \cdot \frac{(\alpha_3+k-2s-1)!!}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k-2s+1)!!}.$$

Последнее выражение можно упростить.
Заметим, что

$$(2k-2s+1)!! = \frac{(2k-2s+1)!}{(2k-2s)!!} = \frac{(2k-2s+1)!}{2^{k-s} \cdot (k-s)!},$$

$$\frac{\pi}{2^{k-2} \cdot k!} \cdot \frac{(2k-2s)!}{(k-2s)!} \cdot C_k^s \cdot \frac{2^{k-s} \cdot (k-s)!}{(2k-2s+1)!} =$$

$$= \frac{\pi}{2^{k-2} \cdot k!} \cdot \frac{(2k-2s)!}{(k-2s)!} \cdot \frac{k!}{s! \cdot (k-s)!} \cdot \frac{2^{k-s} \cdot (k-s)!}{(2k-2s+1)!} = \frac{2^{2-s} \cdot \pi}{(k-2s)! \cdot s! \cdot (2k-2s+1)}.$$

Подставим:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\pi \theta^\alpha \cdot P_k(\cos\psi) \cdot \sin\psi \, d\psi =$$

$$= \pi \cdot (\alpha_1-1)!! \cdot (\alpha_2-1)!! \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s \cdot 2^{2-s} (2k-\alpha_1-\alpha_2-2s-1)!!}{(k-2s)! \cdot s! \cdot (2n-2k+1)}$$

Очевидно, что во всех остальных случаях интеграл (3) равен 0. □

Аналогичным образом доказывается

Лемма 2. *Справедливы формулы* ($\|\alpha\| = k$, $0! = 1, (-1)! = 1$)

$$d_{\alpha,k,l} = \frac{1}{\|Y_k^l\|}\int\limits_{S_1}\theta^\alpha\cdot Y_k^l(\varphi,\psi)\,d\sigma = \sqrt{\frac{(k-l)!}{(k+l)!}\cdot\frac{2k+1}{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\sin(l\varphi)d\varphi\int\limits_0^{\pi}\theta^\alpha\cdot P_k^{(l)}(\cos\psi)\cdot\sin\psi\,d\psi =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{(k-l)!}{(k+l)!}\cdot\frac{\pi(2k+1)}{2}}\cdot\sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}(-1)^j\cdot C_l^{2j+1}\cdot(\alpha_1+l-2j-2)!!\cdot(\alpha_2+2j)!!\times \\ \qquad\times\sum\limits_{s=0}^{\left[\frac{k-l}{2}\right]}(-1)^s\cdot 2^{2-s}\cdot\dfrac{(2k-\alpha_1-\alpha_2-2s-l-1)!!}{(k-2s-l)!\cdot s!\cdot(2k-2s+1)}, \\ \quad \text{если } \alpha_1+l,\ \alpha_2 \text{ нечетные}, \\ 0, \qquad \text{иначе}; \end{cases} \tag{4}$$

$$d_{\alpha,k,-l} = \sqrt{\frac{(k+l)!}{(k-l)!}\cdot\frac{2k+1}{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\cos(l\varphi)d\varphi\int\limits_0^{\pi}\theta^\alpha\cdot P_k^{(l)}(\cos\psi)\cdot\sin\psi\,d\psi =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{(k+l)!}{(k-l)!}\cdot\frac{\pi(2k+1)}{2}}\cdot\sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^j\cdot C_l^{2j}\cdot(\alpha_1+l-2j-1)!!\cdot(\alpha_2+2j-1)!!\times \\ \qquad\times\sum\limits_{s=0}^{\left[\frac{k-l}{2}\right]}(-1)^s\cdot 2^{2-s}\cdot\dfrac{(2k-\alpha_1-\alpha_2-2s-l-1)!!}{(k-2s-l)!\cdot s!\cdot(2k-2s+1)}, \\ \quad \text{если } \alpha_1+l,\ \alpha_2 \text{ четные}, \\ 0, \qquad \text{иначе}. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, справедливо

Следствие 1. *Для того чтобы функция $F(r,\varphi,\psi)$ была гармонической в B_R, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (2), где коэффициенты $d_{\alpha,k,l}$ определяются формулами (3), (4), (5).*

Список литературы

[1] Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, т. 2, М., Наука, 1976.

[2] С.Л. Соболев, Введение в теорию кубатурных формул, М., Наука, 1974.

[3] О.В. Ходос, Об аналоге формулы Коши-Адамара для гармонических в шаре функций, *Журнал СФУ. Серия математика и физика*, **2**(2009), №4, 517–520.

[4] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Уравнения математической физики, М., Наука, 1966.

The Evaluation of Convergence Radius for Series by Harmonic Polynomials in $\mathbb{R}^3$

Ol'ga V.Khodos

It is obtained the explicit formula for convergence radius of series by homogeneous harmonic polynomials in $\mathbb{R}^3$.

Keywords: harmonic functions, homogeneous polynomials, Cauchy-Hadamard formula.