Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(2), 173–184

УДК 517.9

Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений

Анатолий В. Жибер*
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
Чернышевского 112, Уфа, 450077,
Россия

Ольга С. Костригина†
Уфимский государственный авиационный технический университет,
К. Маркса 12, Уфа, 450000,
Россия

Получена 18.12.2009, окончательный вариант 25.01.2010, принята к печати 10.03.2010

В работе описаны все n-компонентные нелинейные гиперболические системы уравнений с полным набором x- и y-интегралов первого порядка и двухкомпонентные системы уравнений с тремя интегралами первого порядка и одним — второго. Получены необходимые условия наличия у двухкомпонентных систем уравнений двух интегралов первого порядка и двух — второго.

Ключевые слова: характеристическая алгебра, интеграл, векторное поле, тензор Римана.

Введение

Для решения задачи классификации интегрируемых гиперболических систем уравнений

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \quad (u^i_{xy} = F^i,\ i = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

используется подход, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры.

Впервые понятие характеристической алгебры было введено в работе [1] для экспоненциальных систем уранений вида

$$u^i_{xy} = a_{i1}e^{u^1} + \ldots + a_{in}e^{u^n},\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Доказано, что характеристическая алгебра системы (2) конечномерна тогда и только тогда, когда $A = (a_{ij})$ — матрица Картана простой алгебры Ли. Отметим также работу [2], в которой показано, что гиперболические уравнения вида

$$u^i_x = c^i_{jk}u^j v^k + c^i_k v^k, \quad v^k_y = d^k_{jl}u^j v^l + d^k_j u^j,$$
$$i = 1, 2, \dots, n,\ k = 1, 2, \dots, n$$

обладают не одной, а двумя характеристическими алгебрами и эти алгебры естественным образом "склеиваются" в единую алгебру на основе так называемых соотношений нулевой кривизны.

*zhiber@mail.ru
†kostrigina@mail.ru

В последнее время понятие характеристической алгебры было обобщено на дискретные модели и на этой основе проведена частичная классификация интегрируемых цепочек (см. [3, 4]).

Для определения характеристической алгебры системы уравнений (1) введем набор независимых переменных $u_1 = u_x,\ \bar{u}_1 = u_y,\ u_2 = u_{xx},\ \bar{u}_2 = u_{yy}, \ldots$ и обозначим через $\bar{D}(D)$ оператор полного дифференцирования по переменной y (x).

Определение 1. *Функция $W(u, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ называется x-интегралом порядка m системы (1), если $\bar{D}(W) = 0$. Аналогично, y-интеграл m-го порядка — это функция $\bar{W}(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, удовлетворяющая соотношению $D(\bar{W}) = 0$.*

X-интегралы $W^1,\ W^2, \ldots, W^k$ называются независимыми, если $D^i W^j$ функционально независимы. В статье [5] показано, что максимальное число независимых x-интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 2. *Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует полный набор независимых x- и y-интегралов.*

Обозначим через F пространство локально аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа переменных $\bar{u}_1, u, u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$. Оператор $\bar{D}$ на функциях из F действует по правилу: $\bar{D} = \bar{u}_2^i X_i + X_{n+1}$, где

$$
\begin{gathered}
X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^i},\ i = 1, 2, \ldots, n, \\
X_{n+1} = \bar{u}_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F^i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + D(F^i) \frac{\partial}{\partial u_2^i} + \ldots + D^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial u_k^i} + \ldots .
\end{gathered}
\tag{3}
$$

X-характеристическая алгебра уравнений (1) есть алгебра A, порожденная векторными полями $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Аналогично определяется y-характеристическая алгебра $\bar{A}$.

В статьях [1], [6] показано, что система $u_{xy}^i = F^i(u),\ i = 1, 2, \ldots, n$, обладает полным набором x-интегралов тогда и только тогда, когда характеристическая алгебра конечномерна. Этот результат обобщается на системы уравнений вида (1) и формулируется следующим образом (см. [7], [8]):

Теорема 1. *Система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, если и только если характеристические алгебры A и $\bar{A}$ конечномерны. При этом если n_k — число x-интегралов k-го порядка, $k = 1, 2, \ldots, m$, то*

$$\dim\, A = n + \sum_{i=1}^{m} i n_i. \tag{4}$$

В настоящей работе рассматриваются системы уравнений (1), обладающие интегралами первого и второго порядка.

1. Системы уравнений с интегралами первого порядка

В этом параграфе исследуются системы уравнений (1) с полным набором x- и y-интегралов первого порядка: $\omega^i(u, u_1),\ \bar{\omega}^i(u, \bar{u}_1),\ i = 1, 2, \ldots, n$. Из уравнений $\bar{D}(\omega^i) = 0,\ D(\bar{\omega}^i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, следует, что правая часть системы (1) имеет вид

$$F^i(u, u_1, \bar{u}_1) = -\Gamma_{kj}^i(u) u_1^k \bar{u}_1^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где $\Gamma_{kj}^i(u)$ — символы Кристоффеля. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Система уравнений (1), (5) обладает максимальным числом x- и y-интегралов первого порядка, если и только если, выполнены соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\Gamma^p_{kj} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^p_{ki} + \Gamma^q_{kj}\Gamma^p_{qi} - \Gamma^q_{ki}\Gamma^p_{qj} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\Gamma^p_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^p_{ik} + \Gamma^q_{jk}\Gamma^p_{iq} - \Gamma^q_{ik}\Gamma^p_{jq} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Так как для системы уравнений (1), (5) оператор X_{n+1} представим в виде

$$X_{n+1} = \bar{u}^i_1 Y_i,$$

где

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma^p_{ki}u^k_1\frac{\partial}{\partial u^p_1} + \ldots, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

то вместо x-характеристической алгебры A можно рассматривать алгебру B, порожденную образующими $Y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$.

Если система уравнений (1), (5) обладает полным набором $x-$интегралов первого порядка, то согласно теореме 1 $\dim B = n$, что в свою очередь эквивалентно равенствам

$$[Y_i, Y_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Последнее выполняется тогда и только тогда, когда (см., например, [2], [9])

$$[D, [Y_i, Y_j]] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Так как D и $\bar{D}$ коммутируют и в данном случае $\bar{D} = \bar{u}^i_1 Y_i$, то

$$[D, \bar{D}] = [D, \bar{u}^i_1 Y_i] = \bar{u}^p_1 DY_p - \Gamma^p_{kj}u^k_1\bar{u}^j_1 Y_p - \bar{u}^p_1 Y_p D = 0.$$

Отсюда следует, что

$$[D, Y_i] = \Gamma^p_{ki}u^k_1 Y_p, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Отметим, что оператор D имеет вид

$$D = u^i_1\frac{\partial}{\partial u^i} + u^i_2\frac{\partial}{\partial u^i_1} + \ldots.$$

Далее, используя тождество Якоби и формулу (10), находим

$$\begin{gathered}
[D, [Y_i, Y_j]] = -[Y_j, [D, Y_i]] + [Y_i, [D, Y_j]] = \\
= -Y_j(\Gamma^p_{ki}u^k_1)Y_p - \Gamma^p_{ki}u^k_1[Y_j, Y_p] + Y_i(\Gamma^p_{kj}u^k_1)Y_p + \Gamma^p_{kj}u^k_1[Y_i, Y_p] = \\
= \left(Y_i(\Gamma^p_{kj}u^k_1) - Y_j(\Gamma^p_{ki}u^k_1)\right)Y_p + \Gamma^p_{kj}u^k_1[Y_i, Y_p] - \Gamma^p_{ki}u^k_1[Y_j, Y_p] = \\
= \left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma^p_{ki}u^k_1\frac{\partial}{\partial u^p_1}\right)\Gamma^p_{kj}u^k_1 - \left(\frac{\partial}{\partial u^j} - \Gamma^p_{kj}u^k_1\frac{\partial}{\partial u^p_1}\right)\Gamma^p_{ki}u^k_1\right\}Y_p + \\
+ \Gamma^p_{kj}u^k_1[Y_i, Y_p] - \Gamma^p_{ki}u^k_1[Y_j, Y_p] = \\
= \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\Gamma^p_{kj} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^p_{ki} + \Gamma^q_{kj}\Gamma^p_{qi} - \Gamma^q_{ki}\Gamma^p_{qj}\right)u^k_1 Y_p + \Gamma^p_{kj}u^k_1[Y_i, Y_p] - \Gamma^p_{ki}u^k_1[Y_j, Y_p].
\end{gathered}$$

То есть

$$[D, [Y_i, Y_j]] = \tilde{R}^p_{kij}u^k_1 Y_p + \Gamma^p_{kj}u^k_1[Y_i, Y_p] - \Gamma^p_{ki}u^k_1[Y_j, Y_p], \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где

$$\tilde{R}^p_{kij} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma^p_{kj} - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma^p_{ki} + \Gamma^q_{kj} \Gamma^p_{qi} - \Gamma^q_{ki} \Gamma^p_{qj} \right)$$

— сопряженный тензор Римана. Равенства (8) согласно (9), (11) эквивалентны уравнениям $\tilde{R}^p_{kij} = 0$.

Аналогично, рассматривая y-характеристическую алгебру, можно показать справедливость соотношений (7), что означает равенство нулю тензора Римана ($R^p_{kij} = 0$). □

Отметим, что x-интегралы системы (1), (5) задаются формулами $\omega^i(u, u_1) = A^i_s(u) u^s_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где функции $A^i_s(u)$ — решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^k} A^i_s(u) - \Gamma^j_{sk} A^i_j(u) = 0.$$

Условие совместности последней системы уравнений записывается так: $\tilde{R}^i_{pqj} = 0$.

2. Двухкомпонентные системы уравнений с тремя интегралами первого порядка и одним — второго

В работе [7] показано, что любая невырожденная система уравнений (1) при $n = 2$ с интегралами

$$\omega^1(u, u_1),\ \omega^2(u, u_1, u_2),\ \bar{\omega}^1(u, \bar{u}_1),\ \bar{\omega}^2(u, \bar{u}_1) \tag{12}$$

точечной заменой приводится к одному из следующих видов:

$$u^i_{xy} = -\Gamma^i_{kj}(u) u^k_1 \bar{u}^j_1,\ i = 1, 2 \tag{13}$$

или

$$u^1_{xy} = u^1_1 \bar{u}^2_1,\ u^2_{xy} = \bar{r}(u^1, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1) u^1_1. \tag{14}$$

Здесь рассматривается задача классификации систем уравнений (13) и (14) с интегралами (12).

Лемма 1. *Невырожденных систем уравнений* (13) *с интегралами* (12) *не существует.*

Доказательство. Система уравнений (13) точечным преобразованием сводится к виду

$$u^1_{xy} = -\Gamma^1_{1j}(u) u^1_1 \bar{u}^j_1, \quad u^2_{xy} = -\Gamma^2_{kj}(u) u^k_1 \bar{u}^j_1. \tag{15}$$

Так как система (15) обладает двумя $y-$интегралами первого порядка, то согласно теореме 2 (см. (7)) имеем

$$R^1_{112} = \frac{\partial}{\partial u^1} \Gamma^1_{21} - \frac{\partial}{\partial u^2} \Gamma^1_{11} = 0,$$

откуда находим

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial}{\partial u^1} f(u), \quad \Gamma^1_{21} = \frac{\partial}{\partial u^2} f(u).$$

При этом $f_{u^2} \neq 0$, иначе система уравнений (13) вырожденная. С учетом последних соотношений система (15) запишется следующим образом:

$$u^1_{xy} = -\bar{u}^1_1 D(f), \quad u^2_{xy} = -\Gamma^2_{kj}(u) u^k_1 \bar{u}^j_1.$$

Последняя система точечной заменой $v^1 = u^1,\ v^2 = -f(u)$ сводится к виду

$$v^1_{xy} = \bar{v}^1_1 v^2_1,\ \ v^2_{xy} = A(v, v_1)\bar{v}^1_1 + B(v, v_1)\bar{v}^2_1. \tag{16}$$

Если система уравнений (16) имеет x-интегралы первого и второго порядка, то размерность x-характеристической алгебры равна 5.

Обозначим

$$\tilde{X}_1 = [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial v^1} + v^2_1\frac{\partial}{\partial v^1_1} + A\frac{\partial}{\partial v^2_1} + \ldots,\quad \tilde{X}_2 = [X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial v^2} + B\frac{\partial}{\partial v^2_1} + \ldots,$$

где операторы $X_i,\ i = 1, 2, 3$ определены по формулам (3).

Если $\omega^1_{v^2_1} \neq 0$, то от набора переменных $v^1, v^2, v^1_1, v^2_1, v^1_2, v^2_2, \ldots$ перейдем к переменным $v^1, v^2, v^1_1, \omega^1, \omega^2, \omega^1_1, \ldots$. Тогда операторы $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$ в новых переменных примут вид

$$\tilde{\tilde{X}}_1 = \frac{\partial}{\partial v^1} + v^2_1\frac{\partial}{\partial v^1_1},\ \tilde{\tilde{X}}_2 = \frac{\partial}{\partial v^2},$$

а значит, размерность x-характеристической алгебры системы уравнений (16) равна 4, что невозможно в силу теоремы 1.

Если $\omega^1_{v^2_1} = 0$, то из соотношения

$$\bar{D}\omega^1 = \omega^1_{v^1}\bar{v}^1_1 + \omega^1_{v^2}\bar{v}^2_1 + \omega^1_{v^1_1}\bar{v}^1_1 v^2_1 = 0$$

находим, что $\omega^1_{v^1} = \omega^1_{v^2} = \omega^1_{v^1_1} = 0$.

Следовательно, система уравнений (13) не может обладать набором интегралов (12). □

Лемма 2. *Система уравнений (14) обладает интегралами вида (12) тогда и только тогда, когда функция $\bar{r}$ является решением следующего уравнения:*

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1} + \bar{u}^2_1\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{u}^1_1} + \bar{r}\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{u}^2_1} + \bar{u}^1_1\frac{P'(u^1)}{2} + P(u^1)\bar{u}^2_1 = 0. \tag{17}$$

При этом

$$\omega^1 = e^{-u^2}u^1_1,\ \omega^2 = u^2_2 - u^2_1\frac{D\omega^1}{\omega} - \frac{\left(u^2_1\right)^2}{2} + \frac{1}{2}P(u^1)e^{2u^2}(\omega^1)^2, \tag{18}$$

а y-интегралы $\bar{\omega}^1$ и $\bar{\omega}^2$ определяются из уравнений в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \bar{u}^2_1\frac{\partial}{\partial\bar{u}^1_1} + \bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{u}^2_1}\right)\bar{\omega} = 0,\ \frac{\partial}{\partial u^2}\bar{\omega} = 0. \tag{19}$$

Доказательство. X-интеграл первого порядка находим из первого уравнения системы (14)

$$\omega^1 = e^{-u^2}u^1_1, \tag{20}$$

откуда следует, что

$$u^1_1 = \omega^1 e^{u^2},\ \ u^1_2 = \omega^1_1 e^{u^2} + \omega^1 e^{u^2}u^2_1. \tag{21}$$

Интеграл второго порядка имеет следующую структуру (см. [5]):

$$\omega^2(u, u_1, u_2) = \varphi(u^1, u^2, \omega^1, u^2_1)\omega^1_1 + \psi(u^1, u^2, \omega^1, u^2_1)u^2_2 + h(u^1, u^2, \omega^1, u^2_1).$$

Учитывая (21), имеем

$$\bar{D}(\omega^2) = \bar{D}(\varphi)\omega_1^1 + \bar{D}(\psi)u_2^2 + \psi\left(\bar{r}(\omega_1^1 e^{u^2} + \omega^1 e^{u^2} u_1^2) + u_1^1 D(r)\right) + \bar{D}(h) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты в последнем уравнении при старших производных, получаем систему

$$\bar{D}(\varphi) + \psi\bar{r}e^{u^2} = 0, \quad \bar{D}(\psi) = 0,$$

или

$$\varphi_{u^1}\bar{u}_1^1 + \varphi_{u^2}\bar{u}_1^2 + \varphi_{u_1^2}\bar{r}\omega^1 e^{u^2} + \psi\bar{r}e^{u^2} = 0, \quad \psi_{u^1}\bar{u}_1^1 + \psi_{u^2}\bar{u}_1^2 + \psi_{u_1^2}\bar{r}\omega^1 e^{u^2} = 0.$$

Возможны два случая. Если функция $\bar{r}$ является линейной по переменным $\bar{u}_1^1$, $\bar{u}_1^2$, то система (14) сводится к виду

$$u_{xy}^1 = \bar{u}_1^1 u_1^2, \quad u_{xy}^2 = (\alpha(u^1)\bar{u}_1^1 + \beta(u^1)\bar{u}_1^2)u_1^1. \tag{22}$$

Последняя система уравнений, согласно лемме 1, не может обладать интегралами вида (12). Во втором случае справедливы соотношения

$$\varphi_{u_1^2}\omega^1 + \psi = 0, \quad \varphi_{u^1} = 0, \ \varphi_{u^2} = 0, \quad \psi_{u^1} = 0, \quad \psi_{u^2} = 0, \quad \psi_{u_1^2} = 0,$$

откуда

$$\varphi = -\frac{\Phi(\omega^1)}{\omega^1}u_1^2 + H(\omega^1), \ \psi = \Phi(\omega^1).$$

Следовательно, в качестве интеграла второго порядка можно взять интеграл вида

$$\omega^2 = -\frac{u_1^2}{\omega^1}\omega_1^1 + u_2^2 + h(u^1, u^2, \omega^1, u_1^2). \tag{23}$$

Для интеграла (23) имеем

$$-\bar{r}u_1^1\frac{\omega_1^1}{\omega^1} + D(\bar{r}u_1^1) + \bar{D}(h) = 0,$$

или, в силу (21),

$$\bar{r}_{u^1}u_1^1 + \bar{r}_{\bar{u}_1^1}u_1^1\bar{u}_1^2 + \bar{r}_{\bar{u}_1^2}\bar{r}u_1^1 + \bar{r}u_1^2 + \frac{e^{-u^2}}{\omega^1}(h_{u^1}\bar{u}_1^1 + h_{u^2}\bar{u}_1^2 + h_{u_1^2}\bar{r}u_1^1) = 0. \tag{24}$$

Дифференцируя последнее соотношение по переменной u_1^2, получаем

$$\bar{r} + \frac{e^{-u^2}}{\omega^1}(h_{u^1u_1^2}\bar{u}_1^1 + h_{u^2u_1^2}\bar{u}_1^2 + h_{u_1^2u_1^2}\bar{r}u_1^1) = 0.$$

Если $\omega^1 + e^{-u^2}h_{u_1^2u_1^2}u_1^1 \neq 0$, то мы приходим к системе (22). В противном случае имеем

$$h_{u^1u_1^2} = 0, \ h_{u^2u_1^2} = 0, \ \omega^1 + e^{-u^2}h_{u_1^2u_1^2}u_1^1 = 0, \tag{25}$$

откуда из первых двух уравнений следует

$$h(u^1, u^2, \omega^1, u_1^2) = Q(u_1^2, \omega^1) + R(u^1, u^2, \omega^1).$$

Подстановка последней формулы в третье равенство системы (25) дает

$$1+\frac{e^{-u^2}}{\omega^1}Q_{u_1^2u_1^2}u_1^1=0.$$

Учитывая первое соотношение (21), находим $Q_{u_1^2u_1^2}=-1$, следовательно,

$$Q(u_1^2,\omega^1)=-\frac{(u_1^2)^2}{2}+p(\omega^1)u_1^2+q(\omega^1),$$

и

$$h(u^1,u^2,\omega^1,u_1^2)=R(u^1,u^2,\omega^1)-\frac{(u_1^2)^2}{2}+p(\omega^1)u_1^2+q(\omega^1). \tag{26}$$

Из формул (24) и (26) получаем

$$\bar r_{u^1}+\bar r_{\bar u_1^1}\bar u_1^2+\bar r_{\bar u_1^2}\bar r+\left(\frac{e^{-u^2}}{\omega^1}\right)^2(R_{u^1}\bar u_1^1+R_{u^2}\bar u_1^2)+\frac{e^{-u^2}}{\omega^1}\bar r p(\omega^1)=0, \tag{27}$$

откуда следует, что при $p(\omega^1)\neq 0$ система уравнений (14) сводится к системе (22). Таким образом, $p(\omega^1)=0$. Далее, поочередно дифференцируя соотношение (27) по переменным ω^1 и u^2, приходим к системе уравнений

$$-2R_{u^1}+\omega^1R_{u^1\omega^1}=0,\quad -2R_{u^2}+\omega^1R_{u^2\omega^1}=0,\quad -2R_{u^1}+R_{u^1u^2}=0,\quad -2R_{u^2}+R_{u^2u^2}=0.$$

Решение полученной системы определяется по формуле

$$R(u^1,u^2,\omega^1)=\frac{P(u^1)}{2}e^{2u^2}(\omega^1)^2+S(\omega^1). \tag{28}$$

Воспользовавшись формулами (27) и (28), видим, что фунция $\bar r$ удовлетворяет уравнению (17). Интеграл второго порядка (18) получается из формул (23), (26) и (28).

И, наконец, из равенства $D\bar\omega(u,\bar u_1)=0$ получаем уравнения (19). □

3. Двухкомпонентные системы уравнений с двумя интегралами первого порядка и двумя — второго

В этом параграфе будут приведены условия, при которых система уравнений (1) при $n=2$ обладает интегралами

$$\omega^1(u,u_1),\ \omega^2(u,u_1,u_2),\ \bar\omega^1(u,\bar u_1),\ \bar\omega^2(u,\bar u_1,\bar u_2). \tag{29}$$

Верно утверждение:

Лемма 3. *Система уравнений* (1) *при* $n=2$ *с полным набором интегралов* (29) *приводится к одной из следующих:*

$$u_{xy}^i=A_i(u,u_1)\bar A_i(u,\bar u_1)+\Phi_{kj}^i(u)u_1^k\bar u_1^j,\ i=1,2, \tag{30}$$

$$\begin{cases} u_{xy}^1=B_1(u,u_1)\bar B_1(u,\bar u_1)+\Psi_{kj}^1(u)u_1^k\bar u_1^j\\ u_{xy}^2=\bar u_1^k\alpha_k(u)B_2(u,u_1)+u_1^k\beta_k(u)\bar B_2(u,\bar u_1)+\Psi_{kj}^2(u)u_1^k\bar u_1^j,\end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} u_{xy}^1=\bar u_1^k\gamma_k^1(u)C_1(u,u_1)+u_1^k\delta_k^1(u)\bar C_1(u,\bar u_1)+\Sigma_{kj}^1(u)u_1^k\bar u_1^j\\ u_{xy}^2=\bar u_1^k\gamma_k^2(u)C_2(u,u_1)+u_1^k\delta_k^2(u)\bar C_2(u,\bar u_1)+\Sigma_{kj}^2(u)u_1^k\bar u_1^j.\end{cases} \tag{32}$$

Доказательство. Если $\omega^1_{u^2_1} \neq 0$, то от набора переменных $u^1, u^2, u^1_1, u^2_1, u^1_2, u^2_2, \dots$ перейдем к переменным $u^1, u^2, u^1_1, \omega^1, \omega^2, \omega^1_1, \dots$ и интеграл второго порядка запишем в виде (см. [5])

$$\omega^2(u, u_1, u_2) = \alpha(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1)u^1_2 + \beta(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1)\omega^1_1 + \gamma(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1),\ \alpha(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1) \neq 0.$$

Имеем $\bar{D}\omega^2 = \bar{D}(\alpha)u^1_2 + \alpha D(F^1) + \bar{D}(\beta)\omega^1_1 + \bar{D}(\gamma) = 0$. Выписывая слагаемые при старших производных в последнем равенстве, получаем $\bar{D}(\alpha)u^1_2 + \alpha(F^1_{u^1_1}u^1_2 + F^1_{\omega^1}\omega^1_1) + \bar{D}\beta\omega^1_1 = 0$, или $\bar{D}(\alpha) + \alpha F^1_{u^1_1} = 0$, $\bar{D}(\beta) + \alpha F^1_{\omega^1} = 0$. Последнюю систему перепишем следующим образом:

$$\alpha_{u^1}\bar{u}^1_1 + \alpha_{u^2}\bar{u}^2_1 + \alpha_{u^1_1}F^1 + \alpha F^1_{u^1_1} = 0, \qquad \beta_{u^1}\bar{u}^1_1 + \beta_{u^2}\bar{u}^2_1 + \beta_{u^1_1}F^1 + \alpha F^1_{\omega^1} = 0. \tag{33}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (33):

$$(\alpha F^1)_{u^1_1} + \alpha_{u^1}\bar{u}^1_1 + \alpha_{u^2}\bar{u}^2_1 = 0.$$

Полагая $\alpha = h_{u^1_1}$, $h_{u^1_1} \neq 0$, $h = h(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1)$, приходим к уравнению

$$h_{u^1_1}F^1 + h_{u^1}\bar{u}^1_1 + h_{u^2}\bar{u}^2_1 = G(u, \bar{u}_1, \omega^1),$$

откуда следует

$$F^1 = \frac{1}{h_{u^1_1}}(G(u, \bar{u}_1, \omega^1) - h_{u^1}\bar{u}^1_1 - h_{u^2}\bar{u}^2_1).$$

Подставляя функцию F^1 во второе уравнение системы (33), получаем

$$G_{\omega^1} + G\eta(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1) + \bar{u}^1_1\mu(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1) + \bar{u}^2_1\epsilon(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1) = 0, \tag{34}$$

где

$$\eta(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1) = \frac{\beta_{u^1_1} - h_{u^1_1\omega^1}}{h_{u^1_1}}, \quad \mu(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1) = \beta_{u^1} - h_{u^1\omega^1} - \frac{h_{u^1}(\beta_{u^1_1} + h_{u^1_1\omega^1})}{h_{u^1_1}},$$
$$\epsilon(u^1, u^2, u^1_1, \omega^1) = \beta_{u^2} - h_{u^2\omega^1} - \frac{h_{u^2}(\beta_{u^1_1} + h_{u^1_1\omega^1})}{h_{u^1_1}}.$$

Дифференцируя соотношение (34) по переменной u^1_1, приходим к уравнению

$$G\eta_{u^1_1} + \bar{u}^1_1\mu_{u^1_1} + \bar{u}^2_1\epsilon_{u^1_1} = 0.$$

Если $\eta_{u^1_1} \neq 0$, то

$$G = -\bar{u}^1_1\frac{\mu_{u^1_1}}{\eta_{u^1_1}} - \bar{u}^2_1\frac{\epsilon_{u^1_1}}{\eta_{u^1_1}},$$

и, следовательно,

$$F^1 = \bar{u}^1_1\tilde{p}(u, u_1) + \bar{u}^2_1\tilde{q}(u, u_1), \tag{35}$$

где

$$\tilde{p} = -\frac{\mu_{u^1_1}}{\eta_{u^1_1}} - \frac{h_{u^1}}{h_{u^1_1}}, \quad \tilde{q} = -\frac{\epsilon_{u^1_1}}{\eta_{u^1_1}} - \frac{h_{u^2}}{h_{u^1_1}}.$$

При $\eta_{u^1_1} = 0$ имеем $\mu_{u^1_1} = \epsilon_{u^1_1} = 0$ и

$$G_{\omega^1} + G\eta(u^1, u^2, \omega^1) + \bar{u}^1_1\mu(u^1, u^2, \omega^1) + \bar{u}^2_1\epsilon(u^1, u^2, \omega^1) = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$G = H(u^1, u^2, \omega^1)\bar{H}(u^1, u^2, \bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2) + \bar{u}_1^1 r(u^1, u^2, \omega^1) + \bar{u}_1^2 s(u^1, u^2, \omega^1).$$

Полагая

$$\frac{H}{h_{u_1^1}} = A,\ \bar{H} = \bar{A},\ \frac{r - h_{u^1}}{h_{u_1^1}} = p,\ \frac{s - h_{u^2}}{h_{u_1^1}} = q,$$

находим

$$F^1 = A(u, u_1)\bar{A}(u, \bar{u}_1) + \bar{u}_1^1 p(u, u_1) + \bar{u}_1^2 q(u, u_1). \tag{36}$$

При этом формула (35) — частный случай (36).

Если $\omega^1_{u_1^2} = 0$, то, воспользовавшись соотношением $\bar{D}\omega^1 = 0$, легко показать, что F^1 имеет вид (35). По другой характеристике аналогичным способом получаем

$$F^1 = K(u, u_1)\bar{K}(u, \bar{u}_1) + u_1^1 \bar{p}(u, \bar{u}_1) + u_1^2 \bar{q}(u, \bar{u}_1). \tag{37}$$

Если $\bar{A},\ \bar{u}_1^1,\ \bar{u}_1^2$ линейно независимы, то существует набор функций $A_i(u)$ и постоянных $b_i,\ c_i,\ i = 1, 2, 3$ таких, что

$$D = \begin{vmatrix} A_1(u) & b_1 & c_1 \\ A_2(u) & b_2 & c_2 \\ A_3(u) & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

и

$$AA_i(u) + pb_i + qc_i = KQ_i(u) + \sigma_i(u)u_1^1 + \tau_i(u)u_1^2,\ i = 1, 2, 3.$$

Откуда находим

$$A = \frac{\begin{vmatrix} KQ_1 + \sigma_1 u_1^1 + \tau_1 u_1^2 & b_1 & c_1 \\ KQ_2 + \sigma_2 u_1^1 + \tau_2 u_1^2 & b_2 & c_2 \\ KQ_3 + \sigma_3 u_1^1 + \tau_3 u_1^2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D},$$

и функция A представима в виде

$$A = \varphi(u)K(u, u_1) + \psi(u)u_1^1 + \chi(u)u_1^2. \tag{38}$$

Если $\varphi(u) = 0$ и $K,\ u_1^1,\ u_1^2$ линейно зависимы, то равенства (36), (37) можно записать следующим образом:

$$F^1 = (\psi(u)u_1^1 + \chi(u)u_1^2)\bar{A}(u, \bar{u}_1) + \bar{u}_1^1 p(u, u_1) + \bar{u}_1^2 q(u, u_1), \quad F^1 = u_1^1 \hat{p}(u, \bar{u}_1) + u_1^2 \hat{q}(u, \bar{u}_1),$$

откуда вид функции F^1 таков:

$$F^1 = \alpha_i(u)u_1^i \hat{A}(u, \bar{u}_1) + \Gamma^1_{ij} u_1^i \bar{u}_1^j. \tag{39}$$

В случае, если $\varphi(u) = 0$ и $K,\ u_1^1,\ u_1^2$ линейно независимы, получаем, что $\bar{K},\ \bar{u}_1^1,\ \bar{u}_1^2$ линейно зависимы и уравнения (36), (37) принимают вид

$$F^1 = (\psi(u)u_1^1 + \chi(u)u_1^2)\bar{A}(u, \bar{u}_1) + \bar{u}_1^1 p(u, u_1) + \bar{u}_1^2 q(u, u_1),$$
$$F^1 = (\tilde{\psi}(u)\bar{u}_1^1 + \tilde{\chi}(u)\bar{u}_1^2)K(u, u_1) + u_1^1 \bar{p}(u, \bar{u}_1) + u_1^2 \bar{q}(u, \bar{u}_1),$$

поэтому

$$F^1 = \bar{u}_1^k \gamma_k^1(u) C_1(u, u_1) + u_1^k \delta_k^1(u) \bar{C}_1(u, \bar{u}_1) + \Sigma^1_{kj}(u) u_1^k \bar{u}_1^j, \tag{40}$$

и формула (39) является частным случаем (40). Если $\varphi(u) \neq 0$, то равенство (38) запишем следующим образом:

$$K(u, u_1) = \eta(u)A(u, u_1) + \kappa(u)u_1^1 + \lambda(u)u_1^2. \tag{41}$$

Переобозначив $\eta A \leftrightarrow A,\ \kappa + \bar{p} \leftrightarrow \bar{p},\ \lambda + \bar{q} \leftrightarrow \bar{q}$, из формул (37), (41) получим

$$F^1 = A\bar{K} + u_1^1\bar{p}(u, \bar{u}_1) + u_1^2\bar{q}(u, \bar{u}_1).$$

Если A, u_1^1, u_1^2 линейно независимы, то существует набор $A_i, k_i, l_i,\ i = 1, 2, 3$ таких, что

$$D = \begin{vmatrix} A_1(u) & k_1 & l_1 \\ A_2(u) & k_2 & l_2 \\ A_3(u) & k_3 & l_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

и

$$A_i(u)\bar{K}k_i + \bar{q}l_i = A_i(u)\bar{A} + \bar{u}_1^1 p_i(u) + \bar{u}_1^2 q_i(u),\ i = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\bar{K}(u, \bar{u}_1) = \tilde{\eta}(u)\bar{A}(u, \bar{u}_1) + \tilde{\kappa}(u)\bar{u}_1^1 + \tilde{\lambda}(u)\bar{u}_1^2.$$

С учетом полученного равенства и формулы (41) уравнение (37) примет вид

$$F^1 = \nu(u)A_2(u, u_1)\bar{A}_2(u, \bar{u}_1) + u_1^1\bar{p}_1(u, \bar{u}_1) + u_1^2\bar{q}_1(u, \bar{u}_1). \tag{42}$$

Из уравнений (36), (42) получаем, что функция F^1 имеет структуру:

$$F^1 = A_1(u, u_1)\bar{A}_1(u, \bar{u}_1) + \Phi^1_{kj}(u)u_1^k\bar{u}_1^j. \tag{43}$$

Аналогично рассматриваются случаи, когда системы функций A, u_1^1, u_1^2 и $\bar{A}, \bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2$ линейно зависимы.

Таким образом, для системы (1) при $n = 2$ с интегралами (29) функция F^1 задается формулой либо (40), либо (43).

Аналогично, как и выше, получаем, что функция F^2 имеет ту же структуру, что и F^1:

$$F^2 = \bar{u}_1^k\gamma_k^2(u)C_2(u, u_1) + u_1^k\delta_k^2(u)\bar{C}_2(u, \bar{u}_1) + \Sigma^2_{kj}(u)u_1^k\bar{u}_1^j$$

либо

$$F^2 = B_1(u, u_1)\bar{B}_1(u, \bar{u}_1) + \Phi^2_{kj}(u)u_1^k\bar{u}_1^j.$$

Из последних соотношений, а также равенств (40), (43) следует доказательство леммы 3. □

Далее, на интегралы первого порядка мы накладываем условия

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial u_1^1}\left(\frac{\omega^1_{u_1^1}}{\omega^1_{u_1^2}}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u_1^2}\left(\frac{\omega^1_{u_1^1}}{\omega^1_{u_1^2}}\right)\right)^2 \neq 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^1}\left(\frac{\bar{\omega}^1_{\bar{u}_1^1}}{\bar{\omega}^1_{\bar{u}_1^2}}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^2}\left(\frac{\bar{\omega}^1_{\bar{u}_1^1}}{\bar{\omega}^1_{\bar{u}_1^2}}\right)\right)^2 \neq 0, \end{gathered} \tag{44}$$

которые означают, что интегралы ω^1 и $\bar{\omega}^1$ точечной заменой $u^1 = \varphi(p, q),\quad u^2 = \psi(p, q)$ не приводятся к виду $\omega^1 = W(p, q, p_1),\ \bar{\omega}^1 = \bar{W}(p, q, \bar{p}_1)$.

При выполнении условий (44) с использованием уравнений $\bar{D}\omega^1 = 0$, $D\bar{\omega}^1 = 0$ можно уточнить вид правых частей систем (30)–(32). А именно: системы (30), (31) сводятся к виду

$$\begin{cases} u^1_{xy} = A(u,u_1)\bar{A}(u,\bar{u}_1) + \tilde{\Phi}^1_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1 \\ u^2_{xy} = \mu(u)A(u,u_1)\bar{A}(u,\bar{u}_1) + \bar{u}^k_1\varphi_k(u)A(u,u_1) + u^k_1\psi_k(u)\bar{A}(u,\bar{u}_1) + \\ \qquad + \tilde{\Phi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \end{cases} \tag{45}$$

а система (32) —

$$\begin{cases} u^1_{xy} = \bar{u}^k_1\chi^1_k(u)B(u,u_1) + u^k_1\epsilon^1_k(u)\bar{B}(u,\bar{u}_1) + \tilde{\Psi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1 \\ u^2_{xy} = \lambda(u)B(u,u_1)\bar{B}(u,\bar{u}_1) + \bar{u}^k_1\chi^2_k(u)B(u,u_1) + u^k_1\epsilon^2_k(u)\bar{B}(u,\bar{u}_1) + \\ \qquad + \tilde{\Psi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1. \end{cases} \tag{46}$$

Справедливо утверждение:

Лемма 4. *Системы уравнений* (45), (46) *с полным набором интегралов* (29), *удовлетворяющих условию* (44), *точечными заменами сводятся к уравнениям*

$$u^i_{xy} = -\Gamma^i_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \quad i = 1,2. \tag{47}$$

Для системы (47) x-характеристическая алгебра Ли порождается операторами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_1}, \quad X_3 = \bar{u}^p_1 Y_p,$$

где

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma^p_{ki}u^k_1\frac{\partial}{\partial u^p_1} + \ldots, \quad i = 1,2.$$

Согласно теореме 1, если система уравнений (47) обладает x-интегралами вида (29), то $\dim A = 5$, что в свою очередь эквивалентно тому, что векторные поля Y_1, Y_2 и Y_3 ($Y_3 = [Y_1, Y_2]$) линейно независимые и

$$[Y_i, Y_3] = A_i(u,u_1,\bar{u}_1)Y_3. \tag{48}$$

Равенство (48) можно переписать в виде

$$[D,[Y_i,Y_3]] = A_i[D,Y_3] + D(A_i)Y_3. \tag{49}$$

Используя уравнение $[D,\bar{D}] = 0$, находим

$$\begin{aligned} &[D,Y_i] = \Gamma^p_{ki}u^k_1Y_p, \quad i = 1,2, \\ &[D,Y_3] = \tilde{R}^p_{k12}u^k_1Y_p + (\Gamma^1_{k1} + \Gamma^2_{k2})u^k_1Y_3. \end{aligned} \tag{50}$$

Теперь, учитывая соотношения (48) и (50), получаем, что равенство (49) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u^i}\tilde{R}^p_{k12} + \tilde{R}^q_{k12}\Gamma^q_{qi} - \tilde{R}^p_{q12}\Gamma^q_{ki} = A_i(u)\tilde{R}^p_{k12}, \\ &\tilde{R}^2_{k12} + \frac{\partial}{\partial u^1}(\Gamma^1_{k1} + \Gamma^2_{k2}) - \Gamma^q_{k1}(\Gamma^1_{q1} + \Gamma^2_{q2}) = \frac{\partial}{\partial u^k}A_1(u) - \Gamma^q_{k1}A_q(u), \\ &-\tilde{R}^1_{k12} + \frac{\partial}{\partial u^2}(\Gamma^1_{k1} + \Gamma^2_{k2}) - \Gamma^q_{k2}(\Gamma^1_{q1} + \Gamma^2_{q2}) = \frac{\partial}{\partial u^k}A_2(u) - \Gamma^q_{k2}A_q(u). \end{aligned}$$

Последние соотношения являются необходимыми условиями для существования x-интегралов (29) у системы уравнений (47). Аналогично получаются условия существования y-интегралов.

Работа поддержана грантами РФФИ № 08-01-00440-а, № 09-01-92431-КЭ-а.

Список литературы

[1] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана, Уфа, Препринт БФ АН СССР, 1981, 20 с.

[2] А.В. Жибер, Ф.Х. Мукминов, Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры, *Задачи математической физики и ассимптотика их решений*, Уфа, БНЦ УрО АН СССР, 1991, 14–32.

[3] I.T. Habibullin, Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations, *Symmetry IUntegrabillity Geom, Methods Appl.*, **1**(2005), papers 023, 9 pp.

[4] И.Т. Хабибуллин, А. Пекан, Характеристическая алгебра Ли и классификация полудискретных моделей, *Теоретическая и математическая физика*, **151**(2007), №3, 413–423.

[5] А.М. Гурьева, А.В. Жибер, О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений, *Вестник УГАТУ*, **6**(2005), № 2 (13), 26–33.

[6] А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат, Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем, *Теоретическая и математическая физика*, **51**(1982), № 1, 10–21.

[7] А.В. Жибер, О.С. Костригина, Точно интегрируемые модели волновых процессов, *Вестник УГАТУ*, **9**(2007), № 7 (25), 83–89.

[8] А.В. Жибер, О.С. Костригина, Интегрируемые двумерные динамические системы и характеристические алгебры Ли, *Труды ИМ УНЦ РАН*, (2007), вып. 5, 195–201.

[9] О.С. Костригина, Двухкомпонентные гиперболические системы уравнений экспоненциального типа с конечномерной характеристической алгеброй Ли, *Уфимский математический журнал*, **1**(2009), № 3, 57–64.

Characteristic Algebras of Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations

Anatoly V. Zhiber
Olga S. Kostrigina

We describe all n-component systems of nonlinear hyperbolic equations with a complete set of integrals of the first order and two-component systems of equations with three integrals of the first order and one integral of the second order. Necessary conditions for the existence of two integrals of the first order and two integral of second order for two-component systems of equations are obtained.

Keywords: characteristic algebra, integral, vector field, Riemann tensor.