Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

На правах рукописи

Самсонов Алексей Сергеевич

Арифметические свойства элементов прямых произведений полей с неархимедовыми нормированиями

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
(физико-математические науки)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент,
Чирский Владимир Григорьевич

Москва - 2024

Оглавление

Введение.

В работе рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости для p-адических чисел, которые являются элементами поля с неархимедовой нормой, а также для g-адических и полиадических чисел, которые являются элементами колец с делителями нуля, прямых произведений полей p-адических чисел. Результат для элементов таких колец может как являться, так и не быть прямым следствием установленного факта для поля p-адических чисел. Кроме того, в сравнении с аналогичными вопросами для действительных и комплексных имеются существенные отличия уже при рассмотрении поля.

В 1935-ом году Курт Малер [24] опубликовал свою работу о трансцендентных p-адических числах, в которой сформулировал и доказал аналог теоремы Гельфонда — Шнайдера для p-адического случая. С некоторым обзором связанным с проблемами трансцендентности p-адических чисел можно ознакомиться в статье Адамса [11], которая вышла в 1966 году. Можно сказать, что вопросы трансцендентности и алгебраической независимости элементов из $\mathbb{C}_p$ над $\mathbb{Q}$ хорошо представлены в литературе. А соответствующие вопросы для элементов $\mathbb{C}_p$ над $\mathbb{Q}_p$ изучены меньше, результаты появлялись спорадически, то есть, от случая к случаю. Например, один из первых критериев трансцендентности был получен в 1975-ом году, Амис [12], стр. 74. Далее, Эскассут [22] определял и изучал порядки трансцендентности в $\mathbb{C}_p$ над $\mathbb{Q}_p$. По вопросу алгебраической независимости есть статья Ламперта [23], он использовал p-адические ряды вида $\sum a_k p^{r_k}$ и ответил на поставленные у Коблица [2], стр. 75 вопросы о степенях трансцендентности $\mathbb{C}_p$ над K и K над $\mathbb{Q}_p$ для некоторого K — промежуточного расширения полей. Позже, у Нишиоки [26], критерий алгебраической независимости на основе приближений дал более явные примеры алгебраически независимых элементов из $\mathbb{C}_p$ над K.

В диссертации сформулированы и доказаны некоторые теоремы, которые являются обобщениями и логическими продолжениями p-адических работ В.Г. Чирского и П. Бундшу [14], [15], [16]. В ходе работы была исследована алгебраическая структура рассматриваемых колец g-адических и полиадических чисел и учтены необходимые нюансы.

В теории трансцендентных чисел различают два типа результатов: качественные и количественные. Обычно к качественным результатам относят теоремы о трансцендентности и алгебраической независимости чисел, а также об иррациональности и линейной независимости. К количественным — оценки значений многочленов и линейных форм от чисел, оценки мер иррациональности, линейной независимости, трансцендентности и алгебраической независимости, например, см. [10]. В диссертационной работе получены результаты обоих типов.

Цели и задачи работы. Получение доказательств алгебраической независимости элементов прямых произведений p-адических полей как в конечном, так и в бесконечном случаях.

Методы исследования. В диссертации используются новые и специальные методы теории трансцендентных чисел.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Работа продолжает исследования алгебраической независимости p-адических чисел, важнейшим отличием является рассмотрение элементов прямых произведений p-адических полей.

Положения, выносимые на защиту.

1. Способы доказательства алгебраической независимости совокупности чисел для прямых произведений в конечном и бесконечном случаях и получения оценок снизу для значений многочленов от этих чисел.

2. Способы доказательства алгебраической независимости значений аналитических функций в рассматриваемых точках как в случае конечного, так и в случае бесконечного произведения.

3. Теорема о значениях некоторых гипергеометрических функций в рассматриваемых точках.

Практическая и теоретическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории трансцендентных чисел и диофантовых приближений.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры теории чисел и на следующих конференциях.

1. XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева. Тула, 18-22 мая 2021.

2. XVIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 23-26 сентября 2020.

3. XVII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула, 23-28 сентября 2019.

4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2016». Москва, 11-15 апреля 2016.

В главе 1 представлены определения и факты, которые можно считать общеизвестными.

В главе 2 раскрываются менее известные понятия и факты. Они связаны с p-адическими и g-адическими числами. Полиадические числа не упомянуты, поскольку они рассматриваются лишь в виде элементов из бесконечного произведения p-адических полей, но намного проще называть их одним словом, полиадическими.

В главе 3 представлены обозначения, определения, утверждения и замечания, которые относятся к работе с g-адическими числами. Следует отметить, что в источниках из списка литературы обозначения имеют различия, к тому же была необходимость продолжить обозначения на более общий случай и добавить новые. Поэтому некоторый материал был изложен в тех обозначениях, которые используются в работе. Попутно показано, что возможные разночтения отсутствуют. Также в главе 3 сформулированы и доказаны теоремы 3.1.24 и 3.1.25 об алгебраической независимости и теорема 3.1.26 об оценке многочлена, эти три теоремы опубликованы в статье [27].

В главе 4 рассматривается полиадический случай. Сформулированы теоремы 4.1.10 и 4.1.11, которые являются частными случаями теорем 3.1.24 и 3.1.25, а нужны для доказательства теорем 4.1.12 и 4.1.13. В свою очередь, сформулированы и доказаны теоремы 4.1.12 и 4.1.13 об алгебраической независимости, эти две теоремы опубликованы в статье [27].

В главе 5 сформулированы и доказаны теоремы 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5, 5.1.6, 5.1.7, 5.1.8, 5.1.9, 5.1.10, 5.1.12, всего 10, все об алгебраической независимости. Теоремы 5.1.2, 5.1.4, 5.1.6 и 5.1.8 опубликованы в статье [28]. Краткая схема доказательств выглядит следующим образом:

1) Т5.1.2 сведена к Т5.1.3, а Т5.1.4 сведена к Т5.1.5 — частному случаю Т5.1.3;

2) Т5.1.6 сведена к Т5.1.7, а Т5.1.8 сведена к Т5.1.9 — частному случаю Т5.1.7;

3) Т5.1.10=Т5.1.3, Т5.1.12=Т5.1.7, т.е. совпадают, но сформулированы в удобных обозначениях.

В главе 6 сформулирована и доказана теорема 6.1.1, которая получается использованием теоремы 5.1.6 и рядов из статьи [21], это опубликовано в статье [29].

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема (3.1.24). *Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*, \ i = 1, \dots, m, \ j = 0, 1, 2 \dots.$$

Пусть

1) для любого $i = 1, \dots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $i = 1, \dots, m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{i,0}, \dots, r_{i,j}$ и чисел $r_{l,k}$, где $l \neq i$, $l = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

3) не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Теорема (3.1.25). *Пусть $g = p_1 \dots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j}, \text{ где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g, \ i = 1, \dots, m, \ j = 0, 1, 2 \dots.$$

Пусть

1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) $\varphi(a_{i,j}) = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \dots, b_{i,j,n})$, для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и для любого n_0

существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (1)$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует возрастающая функция $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_j - c_k(j) \to +\infty, \text{ при } j \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству (1), выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Теорема (3.1.26). *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \ \alpha_i \in \Omega_g, \ a_{i,j} \in U_g, \ i = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $i = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $d \in \mathbb{N}$ существует $N_1 = N_1(d) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого целого $N \geqslant N_1$ не могут одновременно выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad D_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant 2d, \quad \sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| > 0;$$

3) $r_j = \max\{r_{1,j}, \ldots, r_{m,j}\}$, для любых натуральных чисел d и h существует $N_2 = N_2(d,h) \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство

$$r_{i,N+1} > h + dr_N$$

выполняется для любого $i = 1, \ldots, m$ и для любого натурального $N \geqslant N_2$;

Пусть многочлен $G = \psi(P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{Z}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \{0\}$, а при некотором $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, $\deg G = \deg P_{k_0}$ и любой коэффициент B_{k_0} многочлена P_{k_0} таков, что либо $B_{k_0} = 0$, либо $\operatorname{ord}_{p_{k_0}} B_{k_0} \leqslant h$. Тогда неравенство

$$|G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_g \geqslant g^{-h-dr_N}$$

выполняется при $N \geqslant \max(N_1, N_2)$.

Теорема (4.1.12)**.** *Пусть $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть

1) для любого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $i = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ и чисел $r_{l,k}$, где $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

3) не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

Теорема (4.1.13)**.** *Пусть $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

Пусть

1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) $a_{i,j} = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n}, \ldots)$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ и для любого n_0 существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{2}$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует возрастающая функция $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_j - c_k(j) \to +\infty, \text{ при } j \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству (2), выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

Теорема (5.1.2)**.** *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]], \ \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]] \backslash \widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \ \alpha_\mu \in \Omega_g, \ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*, \ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;

3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Теорема (5.1.4)**.** *Пусть $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]], \ \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]] \backslash \widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$*;*

3) не существует номеров k*,* k'*,* μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$*.*

Теорема (5.1.6)**.** *Пусть* $g = p_1 \ldots p_n$*, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$*.*

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$*;*

3) не существует номеров k*,* k'*,* μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* Ω_g*.*

Теорема (5.1.8)**.** *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$*, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$*;*

3) не существует номеров k, k', μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$.

Пусть $t = r - s > 0$. Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} (zt)^{tn}.$$

Для семейств действительных чисел $\overline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ и $\overline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ используем обозначение

$$\overline{a} \approx \overline{b},$$

если существует перестановка $i_1, \dots, i_m$ чисел $1, \dots, m$ такая, что $b_j - a_{i_j} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, m$. Также, используем обозначение $\overline{a} + c$ для семейства чисел $(a_1 + c, \dots, a_m + c)$.

Теорема (6.1.1). *Пусть* $t = 2k$, *а множество параметров* $S = (\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\alpha_i \notin \mathbb{Z},\ \beta_j \notin \mathbb{Z},\ \alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, t + s,\ j = 1, \dots, s.$$

Для всех общих делителей d *чисел* t, s *ни одно из соотношений* $\overline{\alpha} + \frac{1}{d} \approx \overline{\alpha}$ *или* $\overline{\beta} + \frac{1}{d} \approx \overline{\beta}$ *не может иметь места.*

Кроме того, не выполняются следующие условия:

1) если $s = 0$, *тогда существуют* $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$\overline{\alpha} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k-1}, -x_{k-1}\right),$$

2) если $s>0$, $s=2q$, тогда существуют $x_0,\dots,x_{k+s-1}\in\mathbb{C}$ такие, что любое

$$\overline{\alpha}+x_0\approx\left(0,-\frac{1}{2},x_1,-x_1,\dots,x_{k+q-1},-x_{k+q-1}\right),$$

$$\overline{\beta}+x_0\approx\left(x_{k+q},-x_{k+q},\dots,x_{k+s-1},-x_{k+s-1}\right),$$

или

$$\overline{\alpha}+x_0\approx\left(x_1,-x_1,\dots,x_{k+q},-x_{k+q}\right),$$

$$\overline{\beta}+x_0\approx\left(0,-\frac{1}{2},x_{k+q+1},-x_{k+q+1},\dots,x_{k+s-1},-x_{k+s-1}\right),$$

3) если $s>0$, $s=2q+1$, тогда существуют $x_0,\dots,x_{k+l-1}\in\mathbb{C}$ такие, что $x_0,\dots,x_{k+s-1}\in\mathbb{C}$ такие, что любое

$$\overline{\alpha}+x_0\approx\left(0,x_1,-x_1,\dots,x_{k+q-1},-x_{k+q-1}\right),$$

$$\overline{\beta}+x_0\approx\left(-\frac{1}{2},x_{k+q},-x_{k+q},\dots,x_{k+s-1},-x_{k+s-1}\right).$$

Пусть $f'(z),f''(z),\dots,f^{(r-1)}(z)$ — формальные производные вышеуказанного ряда $f(z)$,

$$\gamma_\mu=\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,\mu}g^{r_{j,\mu}},\ \gamma_\mu\in\Omega_g,\ a_{j,\mu}\in\mathbb{Z}_g^*,\ \mu=1,\dots,m.$$

Пусть

1) для любого $\mu=1,\dots,m$ положительные рациональные числа $r_{j,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j\to+\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu=1,\dots,m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{j+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1,r_{1,\mu},\dots,r_{j,\mu}$ и чисел $r_{j',\mu'}$ при любых j' и при $\mu'\neq\mu$;

3) не существует номеров j, j', μ таких, что разница $r_{j,\mu}-r_{j',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f^{(\lambda)}(\gamma_\mu)$, где параметры пробегают значения $\lambda=0,1,\dots,r-1$, $\mu=1,\dots,m$, представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

1. Основные понятия и определения

В этой главе затрагиваются вопросы, которые можно считать общеизвестными. Они изложены в соответствии с [2].

1.1 Алгебраическая независимость

Определение 1.1.1. *Пусть поле K — расширение поля F, будем называть $a \in K$ алгебраическим над F элементом K, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с коэффициентами из поля F такой, что $P(a) = 0$, в противном случае он называется трансцендентным над F элементом K.*

Определение 1.1.2. *Пусть поле K — расширение поля F, будем называть $a_1 \in K, \ldots, a_n \in K$ алгебраически зависимыми над F элементами K, если существует отличный от нуля многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из поля F такой, что $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$, в противном случае они называются алгебраически независимыми над F элементами K.*

Можно заметить, что трансцендентность — это алгебраическая независимость в случае $n = 1$. Поэтому, зачастую, этот случай отдельно не упоминается.

В кольцах с делителями нуля есть чересчур простые способы получить нуль, например $(a, 0) \times (0, b) = (0, 0)$. Поэтому следует сразу уточнить, что в работе используются понятия глобальная трансцендентность и глобальная алгебраическая независимость. Они более уместны при рассмотрении прямого произведения полей. Элементы называются глобально алгебраически независимыми, если условие алгебраической независимости выполняется для каждой компоненты. Более точные формулировки определений будут даны в соответствующих разделах.

1.2 Метрика, норма

Можно различными способами ввести понятие p-адического числа. Есть более алгебраический подход, который строит кольцо цепей гомоморфизмов. Есть аналитический подход: можно пополнить поле рациональных чисел по p-адической норме и получить поле p-адических чисел. Так или иначе, мы получим одни и те же числа, но всестороннее понимание изучаемых объектов дает больше возможностей для изучения и описания соотношений.

Некоторые моменты построения поля p-адических необходимо осветить более подробно, поскольку для формулировок теорем придется не только ввести новые определения и обозначения, но и обосновать корректность.

Определение 1.2.1. *Пусть X — непустое множество, а функция d определена на множестве всех упорядоченных пар (x, y) и принимает неотрицательные вещественные значения. Тогда d называется метрикой в том и только том случае, если она обладает следующими свойствами.*

1. $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $z \in X$.

Множество X с заданной на нем метрикой d называется метрическим пространством. Одно и то же множество X может допускать различные структуры метрического пространства.

Определение 1.2.2. *Пусть F — поле, тогда нормой называется отображение, обозначаемое через $\| \ \|$, поля F в множество неотрицательных вещественных чисел, которое обладает следующими свойствами.*

1. $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$.
2. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$.
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Будем говорить, что метрика d индуцирована нормой $\| \ \|$, если метрика d определяется соотношением $d(x, y) = \|x - y\|$. Легко проверить, что функция d, заданная этим соотношением, действительно будет метрикой.

Основной пример нормы на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ дает абсолютная величина $|x|$. Индуцированная метрика $d(x, y) = |x - y|$ совпадает с обычным расстоянием на числовой прямой.

Также введем понятия псевдонормы и неархимедовой псевдонормы.

Определение 1.2.3. *Пусть K — кольцо. Псевдонормой называется отображение, обозначаемое через $\| \ \|$, кольца K в множество неотрицательных вещественных чисел, которое обладает следующими свойствами.*

1. $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$.

2. $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

3. $\|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Если третье свойство выполняется в более сильной форме:

$$\|x \pm y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|),$$

то псевдонорма называется неархимедовой.

Как уже отмечалось, существует метрика, индуцированная абсолютной величиной, она является обычным расстоянием на числовой прямой. На вопрос о существовании других метрик на поле рациональных чисел отвечает теорема Островского, перед ее формулировкой надо упомянуть еще несколько фактов.

Определение 1.2.4. *Пусть* p *— некоторое простое число. Для произвольного ненулевого целого числа* a *положим*

$$\operatorname{ord}_p a = m,$$

где m *— кратность вхождения* p *в разложение* a *на простые сомножители, т.е. наибольшее целое неотрицательное число, для которого*

$$a \equiv 0 (\operatorname{mod} p^m).$$

Для произвольного ненулевого рационального числа $q = \frac{a}{b}$ *положим*

$$\operatorname{ord}_p q = \operatorname{ord}_p a - \operatorname{ord}_p b.$$

Функция $\operatorname{ord}_p q$ *называется порядком числа* q.

Построим на $\mathbb{Q}$ следующее отображение $|\ |_p$:

$$|q|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\operatorname{ord}_p q}}, \text{ если } x \neq 0; \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Утверждение 1.2.5. *Функция* $|\ |_p$ *является нормой на поле* $\mathbb{Q}$.

Стоит отметить, что $|\ |_p$ является неархимедовой нормой, поскольку

$$|x \pm y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p),$$

а пример архимедовой нормы дает абсолютная величина.

Для каждого метрического пространства (X, d) определено понятие последовательности Коши, она также называется фундаментальной последовательностью. Последовательность $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ элементов пространства X называется последовательностью Коши, если для всякого положительного числа ε найдется такой номер N, что $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ при любых $m > N$ и $n > N$.

По определению, две метрики на множестве X эквивалентны, если отвечающие им классы последовательностей Коши совпадают. Соответственно, две нормы эквивалентны, если они индуцируют эквивалентные метрики.

Утверждение 1.2.6. *Пусть $\rho \in (0, 1)$. Если в определении $| \ |_p$ подставить $\rho^{\mathrm{ord}_p x}$ вместо $(1/p)^{\mathrm{ord}_p x}$, тогда мы получим неархимедову норму, эквивалентную $| \ |_p$.*

Обычной абсолютной величине $| \ |$ также соответствует семейство эквивалентных ей архимедовых норм, а именно $| \ |^\alpha$, где $0 < \alpha \leqslant 1$.

Тривиальной нормой называется такая норма, что $\|0\| = 0$ и $\|x\| = 1$ для всех $x \neq 0$.

Теорема 1.2.7 (Островский, см. [2], с. 12)**.** *Каждая нетривиальная норма $\| \ \|$ на поле $\mathbb{Q}$ эквивалентна абсолютной величине или $| \ |_p$ для некоторого простого p.*

2. p-адические числа, g-адические числа

В этой главе затрагиваются менее известные понятия и факты. Изложение продолжает идти в соответствии с [2]. Ссылки на другие источники упоминаются отдельно.

2.1 Построение поля p-адических чисел

Пусть p — некоторое простое число. Пусть S — множество таких последовательностей $\{a_i\}$ рациональных чисел, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $|a_i - a_{i'}|_p < \varepsilon$ при $i,\ i' > N$. Две такие последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, называемые последовательностями Коши, считаются эквивалентными, если $|a_i - b_i|_p \to 0$ при $i \to \infty$. Множество $\mathbb{Q}_p$, по определению, есть множество классов эквивалентности этих последовательностей Коши.

Пусть $x \in \mathbb{Q}$. Обозначим через $\{x\}$ постоянную последовательность Коши, все члены которой равны x. Очевидно, $\{x\} \sim \{x'\}$ тогда и только тогда, когда $x = x'$. Класс $\{0\}$ обозначим просто через 0.

Определим норму $|\ |_p$ класса эквивалентности a как предел $\lim\limits_{i\to\infty} |a_i|_p$, где $\{a_i\}$ — некоторый представитель класса a. Этот предел существует.

1. Если $a = 0$, то $\lim\limits_{i\to\infty} |a_i|_p = 0$ по определению.

2. Если $a \neq 0$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого N существует $i_N > N$ с $|a_{i_N}|_p > \varepsilon$.

Действительно, если N выбрано настолько большим, что $|a_i - a_{i'}|_p < \varepsilon$ при $i,\ i' > N$, то $|a_i - a_{i_N}|_p < \varepsilon$ для всех $i > N$. Так как $|a_{i_N}|_p > \varepsilon$, то $|a_i|_p = |a_{i_N}|_p$ по принципу равнобедренного треугольника. Поэтому $|a_i|_p$ имеет постоянное значение $|a_{i_N}|_p$ при всех $i > N$, тогда предел $\lim\limits_{i\to\infty} |a_i|_p$ равен этому постоянному значению.

Следует отметить, что в отличие от процесса пополнения $\mathbb{Q}$ до $\mathbb{R}$, при пополнении до $\mathbb{Q}_p$ область возможных значений нормы не увеличивается, а остается прежней.

Пусть a и b — два класса эквивалентности рассматриваемых последовательностей Коши, а $\{a_i\} \in a$ и $\{b_i\} \in b$ — их произвольные представители. Определим $a \cdot b$ как класс эквивалентности последовательности Коши $\{a_i b_i\}$. Если $\{a_i'\} \in a$, $\{b_i'\} \in b$ — другие представители, то

$$|a_i' b_i' - a_i b_i|_p = |a_i'(b_i' - b_i) + b_i(a_i' - a_i)|_p \leqslant \max(|a_i'(b_i' - b_i)|_p,\ |b_i(a_i' - a_i)|_p).$$

При $i \to \infty$ выражение $|a'_i(b'_i - b_i)|_p$ стремится к $|a|_p \cdot \lim |b'_i - b_i|_p = 0$, а выражение $|b_i(a'_i - a_i)|_p$ стремится к $|b|_p \cdot \lim |a'_i - a_i|_p = 0$. Следовательно, $\{a'_i b'_i\} \sim \{a_i b_i\}$.

Подобным же образом можно определить сумму двух классов эквивалентности последовательностей Коши, выбрав по последовательности в каждом из этих классов, сложив их почленно, а затем показав, что класс суммы зависит только от классов слагаемых. Аналогично определяется обратный класс относительно сложения.

Определяя обратный класс относительно умножения, нужно соблюдать осторожность, ибо в последовательности Коши могут встретиться нулевые члены. Однако легко увидеть, что каждая последовательность Коши эквивалентна некоторой последовательности Коши без нулевых членов, например, достаточно заменить все $a_i = 0$ на $a'_i = p^i$. Значит, можно рассмотреть последовательность $\{1/a_i\}$, она будет последовательностью Коши, за исключением случая $|a_i|_p \to 0$, т.е. $\{a_i\} \sim \{0\}$. Более того, если $\{a_i\} \sim \{a'_i\}$ и среди a_i, a'_i нет нулей, то, как легко доказать, $\{1/a_i\} \sim \{1/a'_i\}$.

После этого нетрудно установить, что множество $\mathbb{Q}_p$ классов эквивалентности последовательностей Коши вместе с введенными на нем операциями сложения, умножения и нахождения обратных элементов является полем.

Поле $\mathbb{Q}$ можно отождествить с подполем в $\mathbb{Q}_p$, которое состоит из классов, содержащих постоянные последовательности Коши.

Наконец, можно доказать полноту поля $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\{a_j\}_{j=1,2,\ldots}$ — последовательность классов эквивалентности, являющаяся последовательностью Коши в $\mathbb{Q}_p$. Выберем в каждом члене a_j этой последовательности по представителю, т.е. по последовательности рациональных чисел $\{a_{ji}\}_{i=1,2,\ldots}$. Тогда, как легко показать, предел последовательности a_j равен классу эквивалентности последовательности $\{a_{jj}\}_{j=1,2,\ldots}$.

Таким образом можно построить $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, как множество классов эквивалентности последовательностей Коши.

2.2 Представление p-адических чисел в виде суммы ряда

Следующая теорема дает возможность воспринимать p-адические числа при помощи понятий более конкретных, чем класс эквивалентности последовательностей Коши. А именно, в виде сумм рядов, схожих с представлением чисел в p-ичной системе счисления.

Теорема 2.2.1 (см. [2], с. 24)**.** *Каждый класс эквивалентности a из $\mathbb{Q}_p$ с $|a|_p \leqslant$*

1 *содержит ровно одну последовательность Коши целых чисел* $\{a_i\}$, *обладающих следующими свойствами.*

1. $0 \leqslant a_i < p^i$ *при* $i = 1, 2, \ldots$.

2. $a_i \equiv a_{i+1} (\operatorname{mod} p^i)$ *при* $i = 1, 2, \ldots$.

Если же p-адическое число a не удовлетворяет неравенству $|a|_p \leqslant 1$, умножим a на подходящую степень p^m числа p. Тогда новое p-адическое число $a' = ap^m$ будет удовлетворять неравенству $|a'|_p \leqslant 1$. Выберем затем в соответствии с теоремой последовательность $\{a'_i\}$, представляющую a'. Тогда число $a = a'p^{-m}$ представляется последовательностью $\{a_i\}$ с $a_i = a'_i p^{-m}$.

Для удобства запишем теперь все числа a'_i последовательности, соответствующей a', в p-ичной системе счисления, т.е. положим

$$a'_i = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_{i-1} p^{i-1},$$

где коэффициенты b_j обозначают p-ичные знаки, т.е. целые числа из множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Сравнение $a'_i \equiv a'_{i+1} (\operatorname{mod} p^i)$ из теоремы эквивалентно тому, что все знаки числа

$$a'_{i+1} = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_{i-1} p^{i-1} + b_i p^i,$$

от b_0 до b_{i-1} включительно, совпадают с соответствующими знаками числа a'_i. Поэтому a' можно представлять себе интуитивно как число, имеющее бесконечную вправо p-ичную запись: всякий раз, переходя от a'_i к a'_{i+1}, мы добавляем в этой записи новый знак.

Теперь и наше исходное число a можно представлять себе как p-ичное число с конечным числом знаков направо от запятой (т.е. знаков, соответствующих отрицательным степеням p; в нашей записи они начинаются слева), но с бесконечным числом знаков при положительных степенях p:

$$a = \frac{b_0}{p^m} + \frac{b_1}{p^{m-1}} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{p} + b_m + b_{m+1} p + b_{m+2} p^2 + \ldots.$$

Пока что правую часть этого равенства следует понимать как сокращенную запись последовательности $\{a_i\}$, где $a_i = b_0 p^{-m} + \ldots + b_{i-1} p^{i-1-m}$, т.е. как удобный способ изображения всей последовательности $\{a_i\}$. Точный смысл этого равенства, которое называется p-адическим разложением числа a, мы покажем далее.

Пусть $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p |\ |a|_p \leqslant 1\}$. Это множество всех чисел из $\mathbb{Q}_p$, p-адическое разложение которых не содержит отрицательных степеней p. Элементы $\mathbb{Z}_p$ называются целыми p-адическими числами. Сумма, разность и произведение двух элементов из $\mathbb{Z}_p$ снова принадлежат $\mathbb{Z}_p$. Поэтому $\mathbb{Z}_p$ — подкольцо поля $\mathbb{Q}_p$.

Пусть a, $b \in \mathbb{Q}_p$. Мы пишем $a \equiv b (\operatorname{mod} p^n)$, если $|a-b|_p \leqslant p^{-n}$, или, эквивалентно, $(a-b)/p^n \in \mathbb{Z}_p$, т.е. если первый отличный от нуля знак в p-адическом разложении числа $a-b$ встречается не ранее, чем для p^n. В случае когда a и b лежат не только в $\mathbb{Q}_p$, но также и в $\mathbb{Z}$ (т.е. они целые рациональные), это определение согласуется с определением сравнения по модулю.

Обозначим U_p множество $\{x \in \mathbb{Z}_p |\ 1/x \in \mathbb{Z}_p\}$, или, эквивалентно, $\{x \in \mathbb{Z}_p |\ |x|_p = 1\}$. Целые p-адические числа из U_p, т.е. числа, имеющие ненулевой первый знак, называют иногда p-адическими единицами.

Пусть теперь $\{b_i\}_{i=-m}^{\infty}$ — произвольная последовательность целых p-адических чисел. Рассмотрим частичные суммы

$$S_N = \frac{b_{-m}}{p^m} + \frac{b_{-m+1}}{p^{m-1}} + \ldots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_N p^N.$$

Последовательность, состоящая из этих сумм, является последовательностью Коши: если $M > N$, то $|S_N - S_M|_p < 1/p^N$. Следовательно, она сходится к некоторому элементу из $\mathbb{Q}_p$. Как и в случае бесконечных рядов вещественных чисел, определим $\sum\limits_{i=-m}^{\infty} b_i p^i$ как предел последовательности частичных сумм в $\mathbb{Q}_p$.

Более общим образом, если $\{c_i\}$ — произвольная последовательность p-адических чисел и $|c_i|_p \to 0$ при $i \to \infty$, то последовательность сумм $S_N = c_1 + c_2 + \ldots + c_N$ сходится к пределу, который обозначается через $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$. В самом деле, $|S_M - S_N|_p = |c_{N+1} + c_{N+2} + \ldots + c_M|_p \leqslant \max(|c_{N+1}|_p, |c_{N+2}|_p, \ldots, |c_M|_p)$, а потому $|S_M - S_N|_p \to 0$ при $N \to \infty$. Отсюда видно, что проверять сходимость бесконечных p-адических рядов проще, чем бесконечных рядов вещественных чисел. Ряд сходится в поле $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда последовательность его членов стремится к нулю.

Таким образом, бесконечный ряд

$$\frac{b_0}{p^m} + \frac{b_1}{p^{m-1}} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{p} + b_m + b_{m+1} p + b_{m+2} p^2 + \ldots,$$

здесь $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, в определении p-адического разложения сходится. А значит, это выражение можно истолковать содержательно, как сумму бесконечного ряда.

2.3 Построение поля $\mathbb{C}_p$

Поле $\mathbb{C}_p$, оно же обозначается Ω_p, это аналог комплексных чисел для поля $\mathbb{Q}_p$ рациональных p-адических чисел. Сначала мы построим алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{Q}}_p$, но в отличие от аналогичного случая с комплексными числами, оказывается, что $\overline{\mathbb{Q}}_p$ не полно. К счастью, пополнение $\overline{\mathbb{Q}}_p$ алгебраически замкнуто, что позволяет завершить конструкцию.

$\overline{\mathbb{Q}}_p$ является объединением конечных расширений поля $\mathbb{Q}_p$. Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 2.3.1 (см. [2], с. 93)**.** *Пусть V — конечномерное векторное пространство над локально компактным полем F. Тогда все нормы на V эквивалентны. Более того, если $V = K$ — некоторое поле. Тогда существует не более одного продолжения нормы $\| \ \|$ заданной на F, до нормы $\| \ \|_K$ на K (т.е. такой, что $\|a\|_K = \|a\|$ для $a \in F$).*

Теорема 2.3.2 (см. [2], с. 97)**.** *Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Тогда на K существует некоторая норма, продолжающая норму $| \ |_p$ с $\mathbb{Q}_p$.*

Эти две теоремы позволяют однозначно продолжить норму $| \ |_p$ с $\mathbb{Q}_p$ на $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Теорема 2.3.3 (см. [2], с. 112)**.** *$\overline{\mathbb{Q}}_p$ не полно.*

Обозначим Ω_p — пополнение $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Норму продолжим по непрерывности.

Наконец, следующая теорема завершает построение.

Теорема 2.3.4 (см. [2], с. 114)**.** *Поле Ω_p алгебраически замкнуто.*

2.4 g-адические числа

Само собой разумеется, что наряду с представлением чисел p-ичной записью, можно взять в основу систему счисления с любым другим основанием g. В кольце $\mathbb{Q}_g$ есть псевдонорма, которая по аналогии со случаем p-адических чисел определяется через делимость на степень числа g. Она обозначается $| \ |_g$.

Следует отметить, что различать p-адические числа от p^2-адических чисел не имеет смысла, с тем же успехом можно различать системы счисления с основаниями 10 и 100. Более того, разумным решением будет рассмотреть g-адические числа, где $g = p_1 p_2 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема 2.4.1 (см. [25], с. 54)**.** *Пусть* $g_1 = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$*,* $g_2 = p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n}$*, где числа* $k_1, \ldots, k_n$ *и* $l_1, \ldots, l_n$ *положительные и целые. Тогда* $\mathbb{Q}_{g_1} = \mathbb{Q}_{g_2}$*.*

Доказательство. Несложно найти такие положительные константы c_1 и c_2, что $c_1|a|_{g_1} \leqslant |a|_{g_2} \leqslant c_2|a|_{g_1}$ для любого $a \in \mathbb{Q}$. Следовательно, псевдонормы $|\ |_{g_1}$ и $|\ |_{g_2}$ эквивалентны, они определяют одни и те же фундаментальные последовательности, а пополнения $\mathbb{Q}$ по этим псевдонормам совпадают.

Теорема 2.4.2 (см. [25], с. 59)**.** $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \mathbb{Q}_{p_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$.

Очевидно, что $\mathbb{Q}_g$ — кольцо с делителями нуля.

3. Алгебраическая независимость в случае конечного произведения

Используются следующие обозначения.

1. p — простое число, $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел.

2. $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел.

3. $|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p x}$ — p-адическая норма; если $x = 0$, считаем, что $\operatorname{ord}_p x = \infty$.

4. $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме.

5. $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма, $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме.

6. Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$.

Другие необходимые обозначения введены как определения.

По аналогии со случаем p-адических чисел, мы хотим построить некое кольцо Ω_g, которое будет расширением кольца $\mathbb{Q}_g$. Поскольку $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, имеет смысл рассмотреть множество $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$. С одной стороны, в подобном расширении уравнения типа $(1,0)x = (0,1)$ не имеют решений. С другой стороны, оно уже является прямой суммой полей, каждое из которых алгебраически замкнуто и полно. Поэтому кольцо Ω_g будет расширением кольца $\mathbb{Q}_g$ изоморфным $\Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

Определение 3.1.1. *Пусть $\omega_p(x) = g^{-\operatorname{ord}_p x}$ — норма, эквивалентная p-адической.*

Согласно [2], с. 12, это действительно так (см. также [1]).

Утверждение 3.1.2. *Пусть $B_1, \dots, B_n$ — нормированные пространства, с неархимедовыми нормами $\mu_1, \dots, \mu_n$ соответственно, тогда*

$$\mu(b_1, \dots, b_n) = \max(\mu_1(b_1), \dots, \mu_n(b_n))$$

является неархимедовой псевднонормой пространства $B_1 \oplus \dots \oplus B_n$.

Замечание 3.1.3. *Более правильно писать $\mu((b_1, \dots, b_n))$, однако здесь и далее мы будем опускать излишние скобки в тех случаях, когда это не вызывает разночтений.*

Для доказательства утверждения 3.1.2 проверим свойства неархимедовой псевдонормы.

1. $\mu(b_1, \ldots, b_n) = 0 \Leftrightarrow \max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)) = 0 \Leftrightarrow$
$$\mu_1(b_1) = 0, \ldots, \mu_n(b_n) = 0 \Leftrightarrow b_1 = 0, \ldots, b_n = 0 \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) = 0;$$

2. $\mu((b_1, \ldots, b_1)(c_1, \ldots, c_n)) = \mu(b_1c_1, \ldots, b_nc_n) =$
$$\max(\mu_1(b_1c_1), \ldots, \mu_n(b_nc_n)) = \max(\mu_1(b_1)\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(b_n)\mu_n(c_n)) \leqslant$$
$$\max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)) \max(\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(c_n)) = \mu(b_1, \ldots, b_n)\mu(c_1, \ldots, c_n);$$

3. $\mu((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = \mu(b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) =$
$$\max(\mu_1(b_1 + c_1), \ldots, \mu_n(b_n + c_n)) \leqslant \max(\max(\mu_1(b_1), \mu_1(c_1)), \ldots, \max(\mu_n(b_n), \mu_n(c_n))) =$$
$$\max(\mu_1(b_1), \mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(b_n), \mu_n(c_n)) =$$
$$\max(\max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)), \max(\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(c_n))) = \max(\mu(b_1, \ldots, b_n), \mu(c_1, \ldots, c_n)).$$

Определение 3.1.4. *Пусть ω_g — псевдонорма на пространстве $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, заданная следующим соотношением:*
$$\omega_g(b_1, \ldots, b_n) = \max(\omega_{p_1}(b_1), \ldots, \omega_{p_n}(b_n)).$$

Это определение корректно в силу утверждения 3.1.2.

Определение 3.1.5. *Обозначим $\varphi: \ \mathbb{Q}_g \to \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — прямой изоморфизм колец, а $\psi: \ \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n} \to \mathbb{Q}_g$ — обратный.*

Замечание 3.1.6. *Описание изоморфизма $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ см. в [25], с. 59.*

Рассмотрим $\mathbb{Q}_g$ и $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — пространства с псевдонормами $|\ |_g$ и ω_g соответственно.

Утверждение 3.1.7. *Изоморфизмы φ и ψ сохраняют псевдонормы.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{Q}_g$, $\varphi(a) = (b_1, \ldots, b_n)$, проверим $|a|_g = \omega_g(b_1, \ldots, b_n)$. При $a = 0$ равенство очевидно. При $a \neq 0$ имеет место представление: $a = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k g^k$, где a_k — g-адические цифры, $a_m \neq 0$. Заметим, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ и различных простых чисел p и q, число $q^k \in \mathbb{Z}_p$, $\omega_p(q^k) = 1$. Тогда $b_i = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k p_1^k \ldots p_n^k = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_{i,k} p_i^k$, где $c_{i,k} \in \mathbb{Z}_{p_i}$. Следовательно $\omega_{p_i}(b_i) \leqslant g^{-m}$, а поскольку a_m не может делиться одновременно на каждое из чисел p_1,…,p_n, то хотя бы в одном из случаев достигается равенство. Значит $\max(\omega_{p_1}(b_1), \ldots, \omega_{p_n}(b_n)) = g^{-m} = |a|_g$.

Утверждение 3.1.8. *Множество $\Omega_{p_1}\oplus\ldots\oplus\Omega_{p_n}$ — кольцо, которое содержит кольцо $\mathbb{Q}_{p_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Q}_{p_n}$ в качестве подкольца. Более того, поскольку можно продолжить нормы ω_{p_1},…,ω_{p_n}, неархимедова псевдонорма $\omega_g(b_1,\ldots,b_n)=\max(\omega_{p_1}(b_1),\ldots,\omega_{p_n}(b_n))$ тоже имеет продолжение на $\Omega_{p_1}\oplus\ldots\oplus\Omega_{p_n}$.*

Содержание этого утверждения очевидно.

Замечание 3.1.9. *Пространство $\mathbb{Q}_g$ представляется множеством $\{\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)\}$, где $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ пробегает множество $\mathbb{Q}_{p_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Q}_{p_n}$, а в силу утверждения 3.1.7 это множество наследует не только алгебраическую структуру, но и псевдонорму от $\mathbb{Q}_{p_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Q}_{p_n}$.*

Теперь мы построим пространство Ω_g. В силу предыдущего замечания, мы можем дополнить множество $\mathbb{Q}_g$ недостающими элементами и обозначить их $\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, где $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1}\oplus\ldots\oplus\Omega_{p_n}$. Более того, продолжение изоморфизма ψ, которое мы построим, будет отображать элементы $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ в $\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, поэтому совпадение обозначений не приведет к конфликту.

Определение 3.1.10. *Пусть $\Omega_g=\{\psi(\beta_1,\ldots,\beta_n)\}$, где $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1}\oplus\ldots\oplus\Omega_{p_n}$. Алгебраическую структуру и псевдонорму заимствуем из кольца $\Omega_{p_1}\oplus\ldots\oplus\Omega_{p_n}$.*

Утверждение 3.1.11. *Справедливы следующие заключения.*

1. *Кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца, неархимедова псевдонорма на кольце Ω_g продолжает g-адическую псевдонорму кольца $\mathbb{Q}_g$.*
2. *Существует продолжение изоморфизма $\psi:\ \Omega_{p_1}\oplus\ldots\oplus\Omega_{p_n}\to\Omega_g$ и продолжение обратного изоморфизма $\varphi:\ \Omega_g\to\Omega_{p_1}\oplus\ldots\oplus\Omega_{p_n}$.*
3. *Продолженные изоморфизмы по-прежнему будут сохранять псевдонормы.*

Доказательство.

1. В силу замечания 3.1.9 и определения 3.1.10, очевидно, что кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца, неархимедова псевдонорма на кольце Ω_g продолжает g-адическую псевдонорму кольца $\mathbb{Q}_g$.

2. Продолжение изоморфизма ψ определим следующим образом: пусть ψ отображает элемент $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в $\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Такое отображение будет изоморфизмом в силу определения 3.1.10. Изоморфизм φ продолжим, как обратный к ψ.

3. В силу предыдущего пункта и определения 3.1.10, продолженные изоморфизмы по-прежнему будут сохранять псевдонормы.

Определение 3.1.12. *Пусть число* $\alpha = \psi(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \Omega_g$. *Тогда обозначим* $\operatorname{ord}_g \alpha = \min(\operatorname{ord}_{p_1} \beta_1, \ldots, \operatorname{ord}_{p_n} \beta_n)$.

Замечание 3.1.13. *Справедливо следующее соотношение*

$$|\alpha|_g = \omega_g(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \max(\omega_{p_1}(\beta_1), \ldots, \omega_{p_n}(\beta_n)) = g^{-\min(\operatorname{ord}_{p_1} \beta_1, \ldots, \operatorname{ord}_{p_n} \beta_n)} = g^{-\operatorname{ord}_g \alpha}.$$

Определение 3.1.14. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Обозначим* $m^r \in \Omega_g$ *— число* $\psi(m^r, \ldots, m^r) \in \Omega_g$.

Это обозначение корректно, числа $m^r \in \mathbb{Q}_g$ совпадают с числами $\psi(m^r, \ldots, m^r)$.

Замечание 3.1.15. *Если* $\alpha \in \Omega_g$, *то* $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, *где* $\beta_k \in \Omega_{p_k}$. *Аналогично, если* $\alpha \in \mathbb{Q}_g$, *то* $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$. *Если* $\alpha \in \mathbb{Z}_g$, *то* $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$.

Замечание 3.1.16. *Любой многочлен* $G \in \mathbb{Q}_g[x]$ *можно представить в виде*

$$G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n),\ \text{где}\ P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = \psi(P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \ldots, P_n(\beta_n), \ldots),\ \text{где}\ \alpha \in \Omega_g,\ \alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Аналогично, если $G \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m]$, *то* $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \ldots, x_m]$.

Определение 3.1.17. *Обозначим* $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$. *Обозначим* $U_g := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ |\beta_k|_{p_k} = 1\}$.

Определение 3.1.18. *Обозначим* $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \beta_k \neq 0\}$.

Определение 3.1.19. *Обозначим* $0_k := \{G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] : P_k \equiv 0\}$. *Обозначим* $\widehat{0} := \bigcup\limits_{k=1}^{n} 0_k$.

Определение 3.1.20. *Пусть* $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$ *элементом* Ω_g, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 3.1.21. *Пусть* $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$ *элементами* Ω_g, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Лемма 3.1.22. *Пусть*

1) числа r_k *и* s_k, *где* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *являются неотрицательными и рациональными,* $r_0, r_1, r_2, \ldots$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *последовательность;*

2) существует бесконечное множество номеров j *таких, что число* r_{j+1} *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_0, \ldots, r_j$ *и чисел* s_k*;*

3) числа r'_k *такие, что разность* $r'_k - r_k$ *является неотрицательным целым числом, аналогично для* $s'_k - s_k$*;*

4) неубывающая последовательность t_k *является упорядоченной* r'_k.

Тогда существует бесконечное множество номеров j *таких, что число* t_{j+1} *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, t_0, \ldots, t_j$ *и чисел* s'_k.

Замечание 3.1.23. *Последовательность* r'_k *стремится к* $+\infty$, *поэтому неубывающая последовательность* t_k *существует, а четвертый пункт условия является корректным.*

Доказательство. Предположим противное, тогда множество подходящих номеров конечно. Пусть номер n_0 последний из таких, что число t_{n_0} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0-1}$ и чисел s'_k. Если нет ни одного подходящего номера, пусть $n_0 = 0$. Число t_{n_0+1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k. Получается, что t_{n_0+2} как линейная комбинация с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0+1}$ и чисел s'_k является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k. Таким образом, каждое следующее число в последовательности t_m, при $m > n_0$, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k.

Рассмотрим числа $t_0, \ldots, t_{n_0}$ как элементы последовательности r'_k, среди них есть элемент r'_{k_0} с самым большим индексом. Поскольку t_k, очевидно, стремится к $+\infty$, существует номер $n_1 > n_0$ такой, что любое из чисел t_m, при $m > n_1$, больше любого из $r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_0}$. Это означает, что для номеров $m > n_1$ в последовательности t_m не встречаются числа $r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_0}$, но любое число $t_m = r'_{k_1}$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_0}$ и чисел s'_k, поскольку $m > n_1 > n_0$, причем $k_1 > k_0$, поскольку $m > n_1$. Значит, номер k_1 такой, что число r'_{k_1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_1-1}$ и чисел s'_k. Соответственно, номера, не являющиеся таковыми, можно искать при $m \leqslant n_1$, всего их может быть не более чем n_1. Но противоречие в том, что в силу второго и третьего пунктов из условий леммы существует бесконечное множество номеров j таких, что число r'_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, \ldots, r'_j$ и чисел s'_k.

Теорема 3.1.24. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2 \ldots .$$

Пусть

1) для любого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $i = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ и чисел $r_{l,k}$, где $l \neq i,\ l = 1, \ldots, m,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

3) не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Предположим противное, тогда числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число α_1 не является глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g. Пусть $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, существуют $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ такие, что $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) = 0$. Значит, числа $\beta_{i,k}$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_k}$ элементы Ω_{p_k}. Но

$a_{i,j} = \psi(b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n})$, откуда

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} g^{r_{i,j}}, \text{ где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку $a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*$, воспользуемся тем, что $(p_k/g) \in \mathbb{Z}_{p_k}$, и освободим коэффициенты от целых степеней p_k:

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} g^{r'_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Воспользуемся леммой 3.1.22 для каждого $i = 1, \ldots, m$ и получим

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} g^{t_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом, для каждого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров j таких, что число $t_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{i,0}, \ldots, t_{i,j}$ и чисел $t_{l,k'}$, где $l \neq i,\ l = 1, \ldots, m$, $k' = 0, 1, 2, \ldots$

Переобозначим $p_k = p$, $\beta_{i,k} = \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{t_{i,j}}$, $b_{i,j} \in U_p$. Числа β_i являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$ элементами Ω_p, а $P(x_1, \ldots, x_m)$ является отличным от нуля многочленом с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ наименьшей степени по совокупности переменных таким, что $P(\beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = P((x_1 - \beta_1) + \beta_1, \ldots, (x_m - \beta_m) + \beta_m) =$$
$$= P(\beta_1, \ldots, \beta_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)),$$

обозначим $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $i = 1, \ldots, m$.

Поскольку степень многочлена $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m)$ по совокупности переменных ниже, чем степень $P(x_1, \ldots, x_m)$, в силу определения последнего, $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0$. Обозначим $c_i = \operatorname{ord}_p C_i$. Без ограничения общности $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_m$.

Рассмотрим C_i как суммы одночленов, $C_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_{i,j} g^{s_{i,j}}$, где $A_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$, а числа $s_{i,j}$ представляют собой линейные комбинации чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Можно считать, что никакие два из чисел $s_{i,j}$ не могут отличаться на целое число, иначе слагаемые можно объединить по общей степени. Также числа $A_{i,j}$ можно считать свободными от степеней p, иначе можно воспользоваться тем, что $(p/g) \in \mathbb{Z}_p$. Для каждого i среди чисел $s_{i,j}$ можно выбрать минимальное, поскольку существует лишь конечное множество линейных комбинаций чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами, не превосходящих любое наперед заданное число. Не умаляя общности, пусть числа $s_{i,0}$ будут этими минимальными. Поскольку $\operatorname{ord}_p A_{i,j} g^{s_{i,j}} = s_{i,j}$, то $c_i = \operatorname{ord}_p C_i = \operatorname{ord}_p A_{i,0} g^{s_{i,0}} = s_{i,0}$, следовательно, числа c_i представляют собой линейные комбинации конечного набора из чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Для каждой пары $i, i' = 1, \ldots, m$ обозначим через $N_{i,i'}$ наибольший из номеров j' таких, что число $t_{i',j'}$ входит в вышеупомянутую линейную комбинацию для c_i с положительным коэффициентом. Положим $N_0 = \max_{i,i'=1,\ldots,m} N_{i,i'}$.

Для любой совокупности натуральных чисел n_i, $i = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\underline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j} g^{t_{i,j}},\ \overline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j} g^{t_{i,j}}.$$

Тогда

$$P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}).$$

Для $i = 1$ существует бесконечное множество чисел j таких, что число $t_{1,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,0}, \ldots, t_{1,j}$ и чисел $t_{l,k'}$, где $l \neq i,\ l = 1, \ldots, m,\ k' = 0, 1, 2, \ldots$ Из этого бесконечного множества выберем число $j = n_1$ так, чтобы выполнялись неравенства $n_1 > N_0$ и $t_{1,n_1+1} > c_1$.

Поскольку, по условию теоремы, при любом $i = 1, \ldots, m$ последовательность $t_{i,j}$, возрастая, стремится к $+\infty$ при $j \to +\infty$, можно выбрать числа $n_2, \ldots, n_m$ так, чтобы имели место неравенства

$$c_1 + t_{1,n_1+1} < c_2 + t_{1,n_2+1} < \ldots < c_m + t_{m,n_m+1}.$$

Поскольку $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_m$, то $t_{1,n_1+1} < t_{2,n_2+1} < \ldots < t_{m,n_m+1}$.

Коэффициенты многочлена $P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m))$ можно выразить в виде многочленов с целыми рациональными коэффициентами от чисел $\beta_1, \ldots, \beta_m$ и коэффициентов многочлена $P(x_1, \ldots, x_m)$. Если степень многочлена P по совокупности переменных $\deg P \geqslant 2$, то $\deg P = \deg P^*$, в остальных случаях многочлен P^* равен тождественно нулю. Таким образом, $\operatorname{ord}_p P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}) \geqslant 2 \operatorname{ord}_p(-\overline{B}_{1,n_1}) = 2t_{1,n_1+1}$.

Заметим, что $\operatorname{ord}_p(-\sum\limits_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i}) = c_1 + t_{1,n_1+1} < 2t_{1,n_1+1}$. Таким образом,

$$\operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = \operatorname{ord}_p(-\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m})) = c_1 + t_{1,n_1+1}.$$

С другой стороны, очевидно, что $t_{1,n_1+1} = \operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) - c_1$ представляет собой линейную комбинацию с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,0}, \ldots, t_{1,n_1}, \ldots, t_{m,0}, \ldots, t_{m,n_m}$, что противоречит выбору n_1.

Теорема 3.1.25. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j}, \text{ где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

Пусть

1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) $\varphi(a_{i,j}) = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n})$, для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и для любого n_0 существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{3}$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует возрастающая функция $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_j - c_k(j) \to +\infty, \text{ при } j \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству (3), выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, из предположения противного получается, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) = 0,$$

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} g^{r_j}, \text{ где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Переобозначим $p_k = p$, $\beta_{i,k} = \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{r_j}$, $b_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$. Числа β_i являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$ элементами Ω_p, а $P(x_1, \ldots, x_m)$ является отличным от нуля многочленом с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ наименьшей степени по совокупности переменных таким, что $P(\beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$.

Также адаптируем остальные условия теоремы:

1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) для любого n_0 существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m} := \det(b_{i,n_l})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1} & \ldots & b_{1,n_m} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1} & \ldots & b_{m,n_m} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{4}$$

3) существует возрастающая функция $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_j - c(j) \to +\infty, \text{ при } j \to \infty, \tag{5}$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству (4), выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_p \delta_{n_1,\ldots,n_m} \leqslant c(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Аналогичным образом продолжим доказательство.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = P((x_1 - \beta_1) + \beta_1, \ldots, (x_m - \beta_m) + \beta_m) =$$

$$= P(\beta_1, \ldots, \beta_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)),$$

обозначим $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Поскольку степень многочлена $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m)$ по совокупности переменных ниже, чем степень $P(x_1, \ldots, x_m)$, в силу определения последнего, $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0$. Обозначим $c_0 = \min\limits_i \operatorname{ord}_p C_i$.

Для любой совокупности натуральных чисел n_i, $i = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\underline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j} g^{r_j}, \; \overline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j} g^{r_j}.$$

Тогда

$$P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}).$$

В силу определения $\overline{B}_{i,n_i}$ получаем

$$-\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} = -\sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j} g^{r_j} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} g^{r_j} (-\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j}) = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} d_j g^{r_j},$$

где использовано обозначение

$$d_j = -\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j}.$$

Пусть числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяют неравенству (4). Среди чисел $d_{n_1}, \ldots, d_{n_m}$ есть отличные от нуля, иначе система уравнений $\sum\limits_{i=1}^{m} C_i b_{i,j} = 0$, $j = n_1, \ldots, n_m$ имеет нетривиальное (поскольку $C_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$) решение $C_1, \ldots, C_m$, что противоречит неравенству (4).

Рассмотрим при произвольных $N_0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству (4), равенства

$$d_j = -\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j}, \; j = n_1, \ldots, n_m,$$

как систему линейных уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_m$. Применяя к ней правило Крамера, получаем, что числа $C_1\delta, \ldots, C_m\delta$ являются линейными комбинациями чисел $d_{n_1}, \ldots, d_{n_m}$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$. Значит, для любого $i = 1, \ldots, m$ справедливо неравенство:

$$\min_j \operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant \operatorname{ord}_p C_i \delta.$$

С другой стороны, поскольку $\operatorname{ord}_p \delta_{n_1, \ldots, n_m} \leqslant c(n_1)$, получаем

$$\min_i (\operatorname{ord}_p C_i \delta) = c_0 + \operatorname{ord}_p \delta \leqslant c_0 + c(n_1).$$

Это значит, что среди чисел $\operatorname{ord}_p d_{n_j}$ есть хотя бы одно такое, что

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant c_0 + c(n_1).$$

Из соотношения (5) следует, что существует натуральное число N_0 такое, что при $n_1 \geqslant N_0$ выполняется неравенство $c_0 + c(n_1) < r_{n_1}$. Значит,

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant c_0 + c(n_1) < r_{n_1} \leqslant r_{n_j}.$$

Откуда получаем неравенство

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} + r_{n_j} < 2r_{n_j}.$$

Поскольку $\operatorname{ord}_p d_l \geqslant 0$, $r_l \to \infty$, величина $\operatorname{ord}_p d_l + r_l \to \infty$, при $l \to \infty$. Следовательно, для любого натурального числа n_j среди чисел $\operatorname{ord}_p d_l + r_l$ при $l \geqslant n_j$ существует наименьшее. Более того, если для l значение $\operatorname{ord}_p d_l + r_l$ минимальное, то

$$\operatorname{ord}_p d_l + r_l \leqslant \operatorname{ord}_p d_{n_j} + r_{n_j} < 2r_{n_j} \leqslant 2r_l.$$

Значит, существует достаточно большое l такое, что некоторое число $l+1$ — наибольшее из конечного числа номеров, при котором достигается вышеупомянутое наименьшее значение для $\operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1}$. Тогда

$$\operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1} < 2r_{l+1}.$$

Рассмотрим равенство

$$P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}) =$$

$$= -\sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}),$$

при выбранном значении l. Остаток $P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m})$ либо равен нулю, либо состоит из слагаемых, порядки которых не меньше, чем $2r_{l+1}$ (как и в предыдущей теореме). Поэтому

$$\operatorname{ord}_p P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}) \geqslant 2r_{l+1}.$$

Первый член ряда

$$\sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j}$$

имеет наименьший порядок ввиду выбора l. Следовательно,

$$\mathrm{ord}_p \sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j} = r_{l+1} + \mathrm{ord}_p d_{l+1}.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\mathrm{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = \mathrm{ord}_p(-\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m})) = \mathrm{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1}.$$

Левая часть этого равенства представляет собой линейную комбинацию с неотрицательными целыми коэффициентами чисел $r_0, \ldots, r_l$, а $\mathrm{ord}_p d_{l+1}$ представляет собой линейную комбинацию чисел $1, r_0, \ldots, r_l$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Таким образом, число r_{l+1} представляет собой сумму линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_l$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа вопреки условиям теоремы.

Теорема 3.1.26. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}},\ \alpha_i \in \Omega_g,\ a_{i,j} \in U_g,\ i = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $i = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $d \in \mathbb{N}$ существует $N_1 = N_1(d) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого целого $N \geqslant N_1$ не могут одновременно выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad D_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant 2d, \quad \sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| > 0;$$

3) $r_j = \max\{r_{1,j}, \ldots, r_{m,j}\}$, для любых натуральных чисел d и h существует $N_2 = N_2(d,h) \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство

$$r_{i,N+1} > h + dr_N$$

выполняется для любого $i = 1, \ldots, m$ и для любого натурального $N \geqslant N_2$;

Пусть многочлен $G = \psi(P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{Z}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \{0\}$, а при некотором $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, $\deg G = \deg P_{k_0}$ и любой коэффициент B_{k_0} многочлена P_{k_0} таков, что либо $B_{k_0} = 0$, либо $\mathrm{ord}_{p_{k_0}} B_{k_0} \leqslant h$. Тогда неравенство

$$|G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_g \geqslant g^{-h-dr_N}$$

выполняется при $N \geqslant \max(N_1, N_2)$.

Доказательство. Сведем рассуждение к p-адическому случаю. Известно, что $G = \psi(P_1, \ldots, P_n)$, $\alpha_i = \psi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$, для каждого $i = 1, \ldots, m$. Достаточно показать, что для $k = k_0$ справедливо неравенство:

$$\operatorname{ord}_{p_k} P_k(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{m,k}) \leqslant h + dr_N.$$

Тогда $\operatorname{ord}_g G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \min\limits_k \operatorname{ord}_{p_k} P_k(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{m,k}) \leqslant h + dr_N$, а это и надо доказать.

Переобозначим многочлен и соответствующие компоненты, далее будем рассматривать условия теоремы в следующем контексте:

a) $P = P_{k_0}$, $p = p_{k_0}$, $P \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_m] \backslash \{0\}$, $\deg P = d$;

b) любой ненулевой коэффициент B этого многочлена таков, что $\operatorname{ord}_p B \leqslant h$;

c) $\beta_i = \alpha_{i,k_0}$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{r_{i,j}},\ \beta_i \in \Omega_p,\ b_{i,j} \in U_p,\ i = 1, \ldots, m.$

Тогда достаточно доказать, что

$$\operatorname{ord}_p P(\beta_1, \ldots, \beta_m) \leqslant h + dr_N \quad \text{или} \quad |P(\beta_1, \ldots, \beta_m)|_p \geqslant p^{-h-dr_N}.$$

Проверим, что в случае $d = 0$ теорема справедлива. Действительно, если $P = B$, тогда $|P|_p = |B|_p = p^{-\operatorname{ord}_p B} \geqslant p^{-h}$. Далее будем считать, что $d > 0$.

Мы воспользуемся следующими леммами.

Лемма 3.1.27. *Пусть p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, числа $R_1, \ldots, R_m \in \mathbb{Q}$ различны, а p-адическая норма любого из чисел $B_1, \ldots, B_m \in \Omega_p$ равна единице, тогда*

$$|B_1 g^{R_1} + \ldots + B_m g^{R_m}|_p = p^{-\min\limits_i R_i}.$$

Лемма 3.1.28. *Для любого $N \geqslant N_1 = N_1(d)$ выполнено неравенство:*

$$|P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})|_p \geqslant p^{-h-dr_N},$$

где $\beta_{i,N} = \sum\limits_{j=0}^{N} b_{i,j} g^{r_{i,j}}$.

Доказательство. Любой отличный от нуля многочлен от m переменных представляет из себя сумму одночленов. Для удобства будем считать одночлены каждого многочлена упорядоченными следующим образом. Одночлен $x_1^{j_1} \ldots x_m^{j_m}$ будет идти раньше одночлена $x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}$, если $j_1 + \ldots + j_m > l_1 + \ldots + l_m$, а в случае равенства, если существует $s \in \{0, \ldots, m-2\}$ такое, что $j_1 = l_1, \ldots, j_s = l_s$, $j_{s+1} > l_{s+1}$.

Попробуем подставить числа $x_i = \beta_{i,N}$ в многочлен, для любого $l_i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ мы получим

$$\beta_{i,N}^{l_i} = \left(\sum_{j=0}^{N} b_{i,j} g^{r_{i,j}} \right)^{l_i},$$

а это число представляет из себя сумму членов вида:

$$B g^{l_{i,N} r_{i,N} + \ldots + l_{i,0} r_{i,0}},$$

где $B \in \mathbb{Z}_p$, $l_{i,N}, \ldots, l_{i,0} \in \mathbb{N}_0$, $l_{i,N} + \ldots + l_{i,0} = l_i$. Таким образом, при подстановке $(x_1, \ldots, x_m) \to (\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})$ каждый одночлен $x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}$ будет представлен суммой членов вида:

$$C g^{\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} l_{i,j} r_{i,j}}, \tag{6}$$

где $C \in \mathbb{Z}_p$ и $\sum\limits_{j=0}^{N} l_{i,j} = l_i$. Многочлен P является суммой одночленов, таким образом, $P(\beta_{i,N}, \ldots, \beta_{m,N})$ будет представлен суммой членов вида (6), а поскольку $\deg P = d$, значит $\sum\limits_{j=0}^{N} \sum\limits_{i=1}^{m} l_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{m} l_i \leqslant d$.

Пусть $B_0 x_1^{d_1} \ldots x_m^{d_m}$, где $B_0 \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$, $d_1 + \ldots + d_m = d \in \mathbb{N}$, первый одночлен в представлении P. Разумеется, мы используем ранее упомянутый порядок одночленов. При подстановке $(x_1, \ldots, x_m) \to (\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})$ этот одночлен станет суммой, которая содержит выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$, где $\widetilde{B_0} \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$, $\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} = \operatorname{ord}_p B_0$. Попробуем привести подобные члены в сумме $P(\beta_{i,N}, \ldots, \beta_{m,N})$ по соответствующим степеням g и покажем, что выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ не может взаимно уничтожиться с другими членами суммы. Действительно, поскольку они имеют вид $C g^{\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} l_{i,j} r_{i,j}}$, где $C \in \mathbb{Z}_p$, $\sum\limits_{j=0}^{N} l_{i,j} = l_i$, значит, при приведении подобных членов порядки коэффициентов будут целыми числами. Тогда, если выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ взаимно уничтожится с другими членами суммы, значит, есть хотя бы один член вида $C g^{\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} l_{i,j} r_{i,j}}$ такой, что выражение

$$\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} + \sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N} - \operatorname{ord}_p C - \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} l_{i,j} r_{i,j}$$

является целым числом, откуда

$$\sum_{i=1}^{m} D_{i,N} r_{i,N} + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z},$$

где, для $i = 1, \ldots, m$, мы полагаем $D_{i,N} := d_i - l_{i,N}$ и $D_{i,j} := -l_{i,j}$, для $j = 0, \ldots, N-1$. Но это противоречит условию теоремы, поскольку

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{m} l_{i,j} \leqslant 2d$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| = \sum_{i=1}^{m} |d_i - l_{i,N}| > 0.$$

Последняя сумма обнуляется только если $l_{i,N} = d_i$, $i = 1, \ldots, m$, а это может произойти только в том случае, если мы рассмотрели выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ дважды.

Поскольку $\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} = \operatorname{ord}_p B_0 \leqslant h$, используя лемму 3.1.27 и тот факт, что выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ не может взаимно уничтожиться с другими членами суммы $P(\beta_{i,N}, \ldots, \beta_{m,N})$, получаем

$$|P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})|_p \geqslant p^{-\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} - \sum\limits_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}} \geqslant p^{-h-dr_N},$$

лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы.

Заметим, что

$$P(\beta_1, \ldots, \beta_m) - P(\beta_{i,N}, \ldots, \beta_{m,N}) =$$
$$\sum_{i=1}^{m} \left(P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{i-1,N}, \beta_i, \ldots, \beta_m) - P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{i,N}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m) \right).$$

Здесь $|P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{i-1,N}, \beta_i, \ldots, \beta_m) - P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{i,N}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_m)|_p \leqslant |\beta_i - \beta_{i,N}|_p$, поскольку все числа β_i и $\beta_{i,N}$ имеют p-адическую норму меньше единицы, $\deg P = d > 0$, а коэффициенты многочлена лежат в $\mathbb{Z}_p$. Более того:

$$|\beta_i - \beta_{i,N}|_p = p^{-r_{i,N+1}} < p^{-h-dr_N},$$

последнее неравенство в силу условия 3 выполняется при $N \geqslant N_2$. Таким образом

$$|P(\beta_1, \ldots, \beta_m) - P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})|_p < p^{-h-dr_N}.$$

Используя это неравенство и лемму 3.1.28, получим:

$$|P(\beta_1, \ldots, \beta_m)|_p \geqslant p^{-h-dr_N}$$

для любого $N \geqslant \max(N_1, N_2)$, что и требовалось доказать.

4. Алгебраическая независимость в случае бесконечного произведения

Используются следующие обозначения.

1. p — простое число, все простые числа пронумерованы: $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \ldots$.

2. $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod\limits_p \mathbb{Z}_p$ — кольцо целых полиадических чисел.

3. $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме.

4. Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$.

5. $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца K, например, $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1, \ldots, x_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над кольцом K.

Определение 4.1.1. *Обозначим* $\widehat{\mathbb{Q}} = \prod\limits_p \mathbb{Q}_p$, $\widehat{\Omega} = \prod\limits_p \Omega_p$.

Замечание 4.1.2. $\widehat{\mathbb{Q}}$ *и* $\widehat{\Omega}$ *— кольца. Если* $\alpha \in \widehat{\Omega}$, *то*

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots),\ \text{где } \beta_k \in \Omega_{p_k}.$$

Аналогично, если $\alpha \in \widehat{\mathbb{Q}}$, *то* $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$. *Если* $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}$, *то* $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$.

Замечание 4.1.3. *Любой многочлен* $G \in \widehat{\mathbb{Q}}[x]$ *можно представить в виде*

$$G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots),\ \text{где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = (P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \ldots, P_n(\beta_n), \ldots),\ \text{где } \alpha \in \widehat{\Omega},\ \alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots).$$

Аналогично, если $G \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m]$, *то* $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \ldots, x_m]$.

В силу соотношений $\Omega_p \supset \mathbb{Q}_p \supset \mathbb{Z}_p$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.1.4. *Кольцо* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *содержит в себе кольцо* $\widehat{\mathbb{Z}}$ *в качестве подкольца, а кольцо* $\widehat{\Omega}$ *содержит в себе кольцо* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *в качестве подкольца.*

Определение 4.1.5. *Обозначим* $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$.

Определение 4.1.6. *Обозначим* $\widehat{\mathbb{Z}}^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Z}} : \forall k \in \mathbb{N},\ \beta_k \neq 0\}$.

Определение 4.1.7. *Обозначим* $0_k := \{G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] : P_k \equiv 0\}$. *Обозначим* $\widehat{0} := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} 0_k$.

Определение 4.1.8. *Пусть* $\alpha \in \widehat{\Omega}$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементом* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 4.1.9. *Пусть* $\alpha_i \in \widehat{\Omega}$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n}, \ldots)$, $i = 1, \ldots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементами* $\widehat{\Omega}$, *если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Переформулируем теоремы 3.1.24 и 3.1.25 для случая $g = p$.

Теорема 4.1.10. *Пусть* p *— простое число,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} p^{r_{i,j}},\ \text{где } a_{i,j} \in U_p,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пусть

1) для любого $i = 1, \ldots, m$ *неотрицательные рациональные числа* $r_{i,j}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $i = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* j *таких, что число* $r_{i,j+1}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ *и чисел* $r_{l,k}$, *где* $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда числа α_i *представляют собой алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_p$ *элементы* Ω_p.

Теорема 4.1.11. *Пусть* p *— простое число,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} p^{r_j},\ \text{где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_p,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2 \ldots .$$

Пусть

1) неотрицательные рациональные числа r_j *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого n_0 существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m} := \det(a_{i,n_l})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} a_{1,n_1} & \ldots & a_{1,n_m} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m,n_1} & \ldots & a_{m,n_m} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (7)$$

3) существует возрастающая функция $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_j - c(j) \to +\infty, \text{ при } j \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству (7), выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_p \delta_{n_1,\ldots,n_m} \leqslant c(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Тогда числа α_i представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы Ω_p.

Сформулируем и докажем теоремы для элементов $\widehat{\Omega}$.

Теорема 4.1.12. *Пусть $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть

1) для любого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $i = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ и чисел $r_{l,k}$, где $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

3) не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

Доказательство. Предположим противное, тогда числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементами $\widehat{\Omega}$ при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число α_1 не является глобально трансцендентным над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементом $\widehat{\Omega}$. Пусть $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n}, \ldots)$, существуют $k \in \mathbb{N}$ и $G = (P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ такие, что $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) = 0$. Значит, числа $\beta_{i,k}$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_k}$ элементы Ω_{p_k}. Но $a_{i,j} = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n}, \ldots)$, откуда

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} p_k^{r_{i,j}}, \text{ где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку $a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$, освобождая коэффициенты от степеней p_k, получим

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} p_k^{r'_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Воспользуемся леммой 3.1.22 для каждого $i = 1, \ldots, m$ и получим

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} p_k^{t_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом, для каждого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров j таких, что число $t_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{i,0}, \ldots, t_{i,j}$ и чисел $t_{l,k}$, где $l \neq i,\ l = 1, \ldots, m,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, по теореме 4.1.10 числа $\beta_{i,k}$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_k}$ элементы Ω_{p_k}.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 4.1.13. *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, $g \in \widehat{\mathbb{Z}}$,

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j}, \text{ где } a_{i,j} \in \widehat{\mathbb{Z}},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

Пусть

1) неотрицательные рациональные числа r_j *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*

2) $a_{i,j} = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n}, \ldots)$, *для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *и для любого* n_0 *существуют* *натуральные числа* $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ *такие, что* $n_1 > n_0$ *и*

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{8}$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$ *существует возрастающая функция* $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$r_j - c_k(j) \to +\infty, \ \textit{при } j \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$*, удовлетворяющих неравенству (8), выполняется неравенство*

$$\operatorname{ord}_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j *число* r_{j+1} *не является суммой линейной комбинации чисел* $r_0, \ldots, r_j$ *с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.*

Тогда числа α_i *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве теоремы 4.1.12, из предположения противного получается, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$:

$$P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) = 0,$$

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} p_k^{r_j}, \ \text{где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots .$$

По теореме 4.1.11 числа $\beta_{i,k}$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_k}$ элементы Ω_{p_k}.

Полученное противоречие завершает доказательство.

5. Алгебраическая независимость значений функций

Лемма 5.1.1. *Пусть*

1) числа r_k и s_k, где $k = 1, 2, \ldots$ являются неотрицательными и рациональными, $r_1, r_2, \ldots$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ последовательность;

2) существует бесконечное множество номеров j таких, что число r_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_1, \ldots, r_j$ и чисел s_k;

3) числа r'_k такие, что разность $r'_k - r_k$ является неотрицательным целым числом, аналогично для $s'_k - s_k$;

4) неубывающая последовательность t_k, где $k = 1, 2, \ldots$ является упорядоченной r'_k.

Тогда существует бесконечное множество номеров j таких, что число t_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_1, \ldots, t_j$ и чисел s'_k.

Доказательство. Это лемма 3.1.22, только все индексы увеличены на 1.

Теорема 5.1.2. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]],\ \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]] \backslash \widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;

3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Предположим противное, тогда числа $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_m)$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число $f(\alpha_1)$ не является глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\alpha_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \ldots, \alpha_{\mu,n})$, $f(\alpha_\mu) = (f_1(\alpha_{\mu,1}), \ldots, f_n(\alpha_{\mu,n}))$, существуют $t \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant t \leqslant n$, и $G = (G_1, \ldots, G_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ такие, что $G_t(f_t(\alpha_{1,t}), \ldots, f_t(\alpha_{m,t})) = 0$. Значит, числа $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}. Пусть

$$a_{k,\mu} = (a_{k,\mu,1}, \ldots, a_{k,\mu,n}),$$

тогда

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu,t} g^{r_{k,\mu}}, \text{ где } a_{k,\mu,t} \in \mathbb{Z}_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*$, воспользуемся тем, что $p_t = (p_t/g)g$, $(p_t/g) \in U_{p_t}$, и освободим коэффициенты от целых степеней p_t,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{r'_{k,\mu}}, \text{ где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Воспользуемся леммой 5.1.1 и упорядочим числа $r'_{k,\mu}$ отдельно для каждого $\mu = 1, \ldots, m$, получим

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}}, \text{ где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом, значит, для каждого $\mu = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$. Таким образом, доказательство сводится к следующему p-адическому случаю.

Теорема 5.1.3. *Пусть*

$$f_t(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_{j,t} \neq 0$ *хотя бы для одного* $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $t_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}.

Доказательство будет проведено позднее, в более удобных обозначениях.

Теорема 5.1.4. *Пусть $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]] \backslash \widehat{0},$$

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$;

3) не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой глобально алгебраически независимые над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементы $\widehat{\Omega}$.

Доказательство. Аналогично тому, что было у теоремы 5.1.2, тем не менее, есть некоторые отличия, которые полезно представить в явном виде. Предположим противное, тогда числа $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_m)$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементами $\widehat{\Omega}$ при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число $f(\alpha_1)$ не является глобально трансцендентным над $\widehat{\mathbb{Q}}$ элементом $\widehat{\Omega}$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n, \ldots)$, $\alpha_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \ldots, \alpha_{\mu,n}, \ldots)$, $f(\alpha_\mu) = (f_1(\alpha_{\mu,1}), \ldots, f_n(\alpha_{\mu,n}), \ldots)$, существуют $t \in \mathbb{N}$ и $G = (G_1, \ldots, G_n, \ldots) \in \widehat{\mathbb{Q}}[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ такие, что $G_t(f_t(\alpha_{1,t}), \ldots, f_t(\alpha_{m,t})) = 0$. Значит, числа $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}. Пусть $a_{k,\mu} = (a_{k,\mu,1}, \ldots, a_{k,\mu,n}, \ldots)$, тогда

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu,t} p_t^{r_{k,\mu}},\ \text{где } a_{k,\mu,t} \in \mathbb{Z}_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*$, освободим коэффициенты от целых степеней p_t,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{r'_{k,\mu}},\ \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Воспользуемся леммой 5.1.1 и упорядочим числа $r'_{k,\mu}$ отдельно для каждого $\mu = 1, \ldots, m$, получим

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}},\ \text{где } a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Поскольку не существует номеров k, k', μ таких, что разница $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ является целым числом, значит, для каждого $\mu = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и при $\mu' \neq \mu$. Таким образом, доказательство сводится к p-адическому случаю, который можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.1.5. *Пусть*

$$f_t(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_{j,t} \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $t_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_t(\alpha_{\mu,t})$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}.

Доказательство. Это теорема 5.1.3, при $g = p_t$.

Теорема 5.1.6. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_g,\ a_{k,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \dots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$*;*

3) не существует номеров k, k', μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* Ω_g.

Доказательство. Повторяя ход рассуждений, использовавшихся для теоремы 5.1.2, предположим существование алгебраической зависимости

$$G_t(f_{1,t}(\alpha_{1,t}), \dots, f_{1,t}(\alpha_{m,t}); \dots; f_{l,t}(\alpha_{1,t}), \dots, f_{l,t}(\alpha_{m,t})) = 0,$$

и сведем к следующему p-адическому случаю.

Теорема 5.1.7. *Пусть*

$$f_{\lambda,t}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda = 1, \dots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} g^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \dots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *положительные рациональные числа* $t_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \dots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $t_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, t_{1,\mu}, \dots, t_{k,\mu}$ *и чисел* $t_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и* $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_{\lambda,t}(\alpha_{\mu,t})$, *где индексы пробегают значения* $\lambda = 1, \dots, l$, $\mu = 1, \dots, m$, *представляют собой алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_{p_t}$ *элементы* Ω_{p_t}.

Доказательство будет проведено позднее, в более удобных обозначениях.

Теорема 5.1.8. *Пусть* $g = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$, *функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \widehat{\mathbb{Z}}[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются глобально алгебраически независимыми над $\widehat{\mathbb{Q}}$.

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \widehat{\Omega},\ a_{k,\mu} \in \widehat{\mathbb{Z}}^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких, что число* $r_{k+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ *и чисел* $r_{k',\mu'}$ *при любых* k' *и при* $\mu' \neq \mu$*;*

3) не существует номеров k, k', μ *таких, что разница* $r_{k,\mu} - r_{k',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ *представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\widehat{\mathbb{Q}}$ *элементы* $\widehat{\Omega}$.

Доказательство. Повторяя ход рассуждений, использовавшихся для теорем 5.1.4 и 5.1.6, учитывая отличия, сведем к p-адическому случаю, который можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.1.9. *Пусть*

$$f_{\lambda,t}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda,t} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_{\mu,t} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{k,\mu,t} p_t^{t_{k,\mu}},\ \alpha_{\mu,t} \in \Omega_{p_t},\ a'_{k,\mu,t} \in U_{p_t},\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $t_{k,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $k \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* k *таких,* *что число $t_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,\mu}, \ldots, t_{k,\mu}$ и чисел $t_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.*

Тогда элементы $f_{\lambda,t}(\alpha_{\mu,t})$, где индексы пробегают значения $\lambda = 1, \ldots, l$, $\mu = 1, \ldots, m$, представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_{p_t}$ элементы Ω_{p_t}.

Доказательство. Это теорема 5.1.7, при $g = p_t$.

Сформулируем в удобных обозначениях теоремы 5.1.3 и 5.1.7, которые осталось доказать.

Теорема 5.1.10. *Пусть $g = p_1, \ldots, p_\nu$ — произведение различных простых чисел, $\nu \geqslant 1$, простое число p является одним из членов этого произведения,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_j \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_p,\ a_{k,\mu} \in U_p,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f(\alpha_\mu)$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы Ω_p.

Замечание 5.1.11. *Условие $c_j \neq 0$ подразумевает, что степенной ряд $f(z)$, рассматриваемый как функция, отличается от константы. Положительность $r_{k,\mu}$ обеспечивает сходимость при вычислении значений $f(\alpha_\mu)$.*

Теорема 5.1.12. *Пусть $g = p_1, \ldots, p_\nu$ — произведение различных простых чисел, $\nu \geqslant 1$, простое число p является одним из членов этого произведения, функции*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, l,$$

являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ \alpha_\mu \in \Omega_p,\ a_{k,\mu} \in U_p,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ положительные рациональные числа $r_{k,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров k таких, что число $r_{k+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{k,\mu}$ и чисел $r_{k',\mu'}$ при любых k' и $\mu' \neq \mu$.

Тогда элементы $f_\lambda(\alpha_\mu)$ представляют собой алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_p$ элементы Ω_p.

Лемма 5.1.13. *Пусть L является расширением некоторого поля K. Степенные ряды $f_1, \ldots, f_l \in K[[z]]$ являются алгебраически независимыми над L, тогда и только тогда, когда они являются алгебраически независимыми над K.*

Доказательство этого факта, по сути, но в частном случае, приведено у Шидловского [10], лемма 2 на 91 с. Очевидно, что из алгебраической независимости над L, следует алгебраическая независимость над K, остается показать, что при наличии алгебраической зависимости $P(f_1, \ldots, f_l) = 0$, над L, существует многочлен P^* с коэффициентами из K такой, что $P^*(f_1, \ldots, f_l) = 0$. Для этого, считая коэффициенты многочлена P неопределенными переменными, вычисляя и приравнивая к нулю коэффициенты перед степенями z, составим систему из счетного числа линейных однородных уравнений с коэффициентами из поля K. Из этой системы можно выбрать минимальную линейно независимую подсистему, и она имеет нетривиальное решение, в силу существования P. Поскольку система однородная, то можно выбрать решение из поля K, так мы получим коэффициенты многочлена P^*.

Лемма 5.1.14. *Пусть степенной ряд*

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

такой, что $d_j \neq 0$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k},\ \alpha \in \Omega_p,\ a_k \in U_p.$$

Пусть

1) положительные рациональные числа r_k образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $k \to +\infty$ последовательность;

2) существует бесконечное множество номеров k таких, что число r_{k+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_1, \ldots, r_k$.

Тогда из $\varphi'(\alpha) \neq 0$ следует $\varphi(\alpha) \neq 0$.

Замечание 5.1.15. *Есть некоторые очевидные соображения, но на них стоит обратить внимание, поскольку они неоднократно будут использоваться. Можно вычислить формальную производную*

$$\varphi^{(i)}(z) = \sum_{j=i}^{\infty} j \ldots (j-i+1) d_j z^{j-i}.$$

Поскольку

$$\left| \frac{j!}{i!(j-i)!} d_j \alpha^{j-i} \right|_p = \left| \binom{j}{i} d_j \alpha^{j-i} \right|_p \leqslant |\alpha|_p^{j-i}$$

и $|\alpha|_p < 1$, значит

$$\operatorname{ord}_p \frac{\varphi^{(i)}(\alpha)}{i!} > 0,$$

это помогает увидеть сходимость рядов там, где она может быть не сразу очевидна.

Доказательство. Предположим противное, пусть $\varphi'(\alpha) \neq 0$, но $\varphi(\alpha) = 0$. Положим

$$\alpha^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k g^{r_k}.$$

Тогда $\operatorname{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) = r_{n+1}$, поскольку $\varphi(\alpha) = 0$, получим

$$\varphi(\alpha^{(n)}) = \varphi(\alpha + (\alpha^{(n)} - \alpha)) = \varphi'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(\alpha^{(n)} - \alpha)^2 + \ldots$$

Для достаточно больших n

$$\operatorname{ord}_p \varphi(\alpha^{(n)}) = \operatorname{ord}_p(\varphi'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha)) = \operatorname{ord}_p \varphi'(\alpha) + r_{n+1}.$$

Из этого равенства мы и получим противоречие, представляя $\operatorname{ord}_p \varphi'(\alpha^{(n)})$, $\operatorname{ord}_p \varphi(\alpha)$, а значит и r_{n+1} в виде линейных комбинаций чисел $1, r_1, \ldots, r_n$.

Во-первых, число

$$\varphi'(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} j d_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k} \right)^{j-1}$$

отлично от нуля. Как конечная линейная комбинация, $\operatorname{ord}_p \varphi'(\alpha) = u + u_1 r_1 + \ldots + u_h r_h$, где $u, u_1, \ldots, u_h$ — неотрицательные целые числа. Значит, достаточно выбрать $n \geqslant h$.

Во-вторых, каждое слагаемое из

$$\varphi(\alpha^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k g^{r_k} \right)^j$$

имеет порядок, являющийся линейной комбинацией чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с неотрицательными коэффициентами.

Таким образом, для любого достаточно большого n, число r_{n+1} представляет собой линейную комбинацию чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с целыми коэффициентами, что противоречит условиям леммы.

Лемма 5.1.16. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

где $c_j \neq 0$ хотя бы для одного $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k},\ \alpha \in \Omega_p,\ a_k \in U_p.$$

Тогда $f'(\alpha) \neq 0$.

Доказательство. Пусть натуральное число q — минимальное из тех, что $f^{(q)}(\alpha) \neq 0$, в силу условий для f такое q должно существовать, в противном случае

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \ldots = f(\alpha).$$

Предположим, что $q > 1$, определим

$$\varphi(z) = f^{(q-1)}(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

значит, $\varphi(\alpha) = 0$ и $\varphi'(\alpha) \neq 0$, но это противоречит лемме 5.1.14. Таким образом, $q = 1$, $f'(\alpha) \neq 0$.

Замечание 5.1.17. *Мы показали, что при обращении в нуль всех производных в некоторой точке ряд состоит только из первого слагаемого — константы.*

Утверждение 5.1.18. *Пусть $f_1, \ldots, f_l$ имеют вид*

$$f_\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,\lambda} z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

и являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$,

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k},\ \alpha \in \Omega_p,\ a_k \in U_p.$$

Тогда $f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_l]$ — многочлен отличный от константы, определим $\varphi(z) = P(f_1(z), \dots, f_l(z))$. Тогда

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

и достаточно показать, что $\varphi(\alpha) \neq 0$. Очевидно, существует такое $q \in \mathbb{N}$, что $\varphi^{(q)}(\alpha) \neq 0$, поскольку $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \ldots = 0$ означало бы, что φ является константой, $\varphi(z) = d_0$,

$$P(f_1(z), \dots, f_l(z)) = d_0,$$

это противоречит алгебраической независимости $f_1, \dots, f_l$ над $\mathbb{Q}_p$.

Рассмотрим функцию $\varphi^{(q-1)}(z)$, которая не может быть константой, а благодаря лемме 5.1.14 можно утверждать, что $\varphi^{(q-1)}(\alpha) \neq 0$. Если $q = 1$, тогда $\varphi(\alpha) \neq 0$, что эквивалентно $P(f_1(\alpha), \dots, f_l(\alpha)) \neq 0$. Если $q > 1$, повторим рассуждение и рассмотрим отличную от константы функцию $\varphi^{(q-2)}(z)$, причем $\varphi^{(q-2)}(\alpha) \neq 0$, и так далее, пока не получится, что $\varphi(\alpha) \neq 0$, а это и требовалось доказать.

Замечание 5.1.19. *Следующие две леммы нужны для доказательства теоремы 5.1.10, они немного обобщают и повторяют то, что уже было сказано.*

Лемма 5.1.20. *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ удовлетворяют условиям теоремы 5.1.10. Для каждого $\mu = 1, \dots, m$, пусть*

$$\varphi_\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,\mu} z^j,$$

где все $d_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_m]]$, причем $d_{j,\mu} \neq 0$ хотя бы для одного $j = j(\mu) \in \mathbb{N}$. Тогда из $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$ следует $\varphi_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, тогда $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, но $\varphi_\mu(\alpha_\mu) = 0$ для некоторого $\mu \in \{1, \dots, m\}$. Определяя $\alpha_\mu^{(n)}$ как n-ю частичную сумму

$$\alpha_\mu^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},$$

ряда для α_μ в теореме 5.1.10, получаем

$$\varphi(\alpha_\mu^{(n)}) = \varphi'_\mu(\alpha_\mu)(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu) + \frac{\varphi''_\mu(\alpha_\mu)}{2!}(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu)^2 + \ldots$$

Поскольку $\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, значит порядок вхождения p в правую часть равенства равен $\mathrm{ord}_p(\varphi'_\mu(\alpha_\mu)(\alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu))$ для каждого достаточно большого $n \geqslant n_\mu$, значит

$$\mathrm{ord}_p\, \varphi_\mu(\alpha_\mu^{(n)}) = \mathrm{ord}_p\, \varphi'_\mu(\alpha_\mu) + r_{n+1,\mu}. \tag{9}$$

Для оценки $\operatorname{ord}_p \varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ заметим, что

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} j d_{j,\mu} \alpha_\mu^{j-1},$$

$$d_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m]].$$

Определение для $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ в теореме 5.1.10 дает понять, что $\varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ — это сумма произведений элемента из U_p и рациональной степени g, которая получается как конечная линейная комбинация с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и $r_{k,\mu}$, где $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \{1, \ldots, m\}$. Тут надо заметить, что избавиться от натуральных степеней p в коэффициентах действительно возможно, поскольку $p = (p/g)g$, где $p/g \in U_p$. Таким образом, $\operatorname{ord}_p \varphi'_\mu(\alpha_\mu)$ является некоторой линейной комбинацией, которую можно зафиксировать. Обозначим k_μ самый большой из таких первых индексов k, что $r_{k,v}$ появляется для некоторого $v \in \{1, \ldots, m\}$ с целым положительным коэффициентом в зафиксированной линейной комбинации.

Аналогичное рассмотрение и оценка значения $\operatorname{ord}_p \varphi_\mu(\alpha_\mu^{(n)})$ позволяет сказать, что это значение является конечной линейной комбинацией с целыми неотрицательным коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{n,\mu}$ и $r_{k,\mu'}$, где $\mu' \in \{1, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, m\}$. Учитывая равенство (9), получаем, что для каждого достаточно большого $n \geqslant \max\{n_\mu, k_\mu\}$ число $r_{n+1,\mu}$ является конечной линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{n,\mu}$ и некоторых $r_{k,\mu'}$, где $\mu' \neq \mu$. Но это противоречит предположению об элементах $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Лемма 5.1.21. *Для $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, соответствующих условиям леммы 5.1.20,*

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$$

для $\mu = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Для каждого $\mu = 1, \ldots, m$ существует минимальное $q_\mu \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi_\mu^{(q_\mu)}(\alpha_\mu) \neq 0$. Если $q_\mu = 1$, то утверждение доказано. При $q_\mu > 1$ рассмотрим функцию

$$\psi_\mu(z) = \varphi_\mu^{(q_\mu - 1)}(z) \in \mathbb{Z}_p[[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m]],$$

которая удовлетворяет условиям леммы 5.1.20. Если $\psi'_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, получается $\psi_\mu(\alpha_\mu) \neq 0$, значит, $\varphi_\mu^{(q_\mu - 1)}(\alpha_\mu) \neq 0$, что противоречит выбору q_μ, значит, $q_\mu = 1$.

Далее докажем теорему 5.1.10 индукцией по m**.** Начнем с $m = 1$, напишем $\alpha = \alpha_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, как в лемме 5.1.14. Положим $\gamma = f(\alpha)$, и пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ является многочленом минимальной степени таким, что $P(\gamma) = 0$, предполагая противное, а именно, что γ является алгебраическим над $\mathbb{Q}_p$. Как и в доказательстве леммы 5.1.14, пусть $\alpha^{(n)}$ обозначает n-ю частичную сумму ряда для α, положим $\gamma^{(n)} = f(\alpha^{(n)})$.

Далее мы должны исследовать разницу $\gamma^{(n)} - \gamma$. Очевидно,

$$\gamma^{(n)} - \gamma = f(\alpha^{(n)}) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\alpha^{(n)} - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\alpha^{(n)} - \alpha)^2 + \ldots,$$

где, как мы знаем благодаря лемме 5.1.16, $f'(\alpha) \neq 0$. Таким образом,

$$\mathrm{ord}_p(\gamma^{(n)} - \gamma) = \mathrm{ord}_p f'(\alpha) + \mathrm{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) \tag{10}$$

для любого достаточно большого n.

В силу выбора P,

$$P(\gamma^{(n)}) = P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma) + \frac{P''(\gamma)}{2!}(\gamma^{(n)} - \gamma)^2 + \ldots = P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma) + P^*(\gamma^{(n)} - \gamma), \tag{11}$$

где ряд $P^*(X) = \sum_{i=2}^{\infty}(P^{(i)}(\gamma)/i!)X^i \in \mathbb{C}_p[[X]]$ и $\mathrm{ord}_p(P^{(i)}(\gamma)/i!) \geqslant 0$. Для достаточно больших n порядок правой части равенства (11) равен $\mathrm{ord}_p(P'(\gamma)(\gamma^{(n)} - \gamma))$, учитывая равенство (10) и $P'(\gamma) \neq 0$, получается

$$\mathrm{ord}_p P(\gamma^{(n)}) = \mathrm{ord}_p P'(\gamma) + \mathrm{ord}_p f'(\alpha) + \mathrm{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) \tag{12}$$

для любого достаточно большого n.

Теперь получим желаемое противоречие из равенства (12). Как и в доказательстве леммы 5.1.14, существует такое $h \in \mathbb{N}$, что

$$\mathrm{ord}_p f'(\alpha) = u + u_1 r_1 + \ldots + u_h r_h, \mathrm{ord}_p P'(\gamma) = v + v_1 r_1 + \ldots + v_h r_h,$$

где $u, u_1, \ldots, u_h, v, v_1, \ldots, v_h \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что $\mathrm{ord}_p(\alpha^{(n)} - \alpha) = r_{n+1}$. Также посмотрим на $\mathrm{ord}_p P(\gamma^{(n)})$. Считая $e_0, \ldots, e_J \in \mathbb{Z}_p$ это коэффициентами P, получим

$$P(\gamma^{(n)}) = \sum_{i=0}^{J} e_i f(\alpha^{(n)})^i = \sum_{i=0}^{J} e_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k g^{r_k}\right)^j\right)^i.$$

Следовательно, $\mathrm{ord}_p P(\gamma^{(n)})$ является линейной комбинацией чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с неотрицательным целыми коэффициентами. Как можно заключить из равенства (12), для любого достаточно большого числа $n \geqslant h$, число r_{n+1} представляется линейной комбинацией чисел $1, r_1, \ldots, r_n$ с целыми коэффициентами, что противоречит условию теоремы 5.1.10.

Для осуществления шага индукции определим

$$\gamma_\mu = f(\alpha_\mu),\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Мы предполагаем, что $m > 1$, а элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$, но любые $m-1$ элементов являются алгебраически независимыми. Пусть $P \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_m]$ — это отличный от константы многочлен минимальной степени по совокупности переменных такой, что

$$P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = 0. \tag{13}$$

Согласно предположению индукции, P зависит от каждой переменной X_μ и

$$\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \neq 0,\ \mu = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

в силу минимальности P. Тогда из равенства (13)

$$P(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)(X_\mu - \gamma_\mu) + P^*(X_1 - \gamma_1, \ldots, X_m - \gamma_m), \tag{15}$$

где каждый моном полинома P^*, выраженный через $X_1 - \gamma_1, \ldots, X_m - \gamma_m$, имеет степень не ниже двух и коэффициент неотрицательного порядка.

Определим

$$\alpha_\mu^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}},\ A_\mu^{(n)} = \alpha_\mu^{(n)} - \alpha_\mu = -\sum_{k>n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}}, \tag{16}$$

и

$$\gamma_\mu^{(n)} = f(\alpha_\mu^{(n)}), \tag{17}$$

тогда

$$\gamma_\mu^{(n)} - \gamma_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n)})^i. \tag{18}$$

Для некоторых $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}_0$, значения которых мы планируем уточнить позже, можно заключить из (15) и (18), что

$$P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)}) = \sum_{\mu=1}^{m} f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) A_\mu^{(n_\mu)} +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n_\mu)})^i + P^*(\gamma_1^{(n_1)} - \gamma_1, \ldots, \gamma_m^{(n_m)} - \gamma_m). \tag{19}$$

Из (14) и леммы 5.1.16 получаем

$$B_\mu = f'(\alpha_\mu)\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) \neq 0,\ \mu = 1,\ldots,m,$$

и определяя $b_\mu = \operatorname{ord}_p B_\mu$, $\mu = 1,\ldots,m$, не умаляя общности, можно предположить, что

$$b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_m. \tag{20}$$

Поскольку

$$f'(\alpha_\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} jc_j\alpha_\mu^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} jc_j\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\mu}g^{r_{k,\mu}}\right)^{j-1},$$

p-адические порядки членов, которые не были взаимно уничтожены в правой части равенства, являются конечными линейными комбинациями с целыми неотрицательными коэффициентами чисел $1, r_{1,\mu}, r_{2,\mu}, \ldots$. Аналогично для членов в правой части равенства

$$\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \sum e_\mu(i_1,\ldots,i_m)f(\alpha_1)^{i_1}\ldots f(\alpha_m)^{i_m},\ e_\mu(\ldots) \in \mathbb{Z}_p,$$

где сумма распространяется на конечное число комбинаций $(i_1,\ldots,i_m) \in \mathbb{N}_0^m$ и имеет порядки, которые являются конечными линейными комбинациями с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и всех $r_{k,v}$, где $k \in \mathbb{N}$, $v = 1,\ldots,m$. Поэтому можно утверждать, что каждое b_μ является конечной линейной комбинацией с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и всех $r_{k,v}$. Для каждого $\mu = 1,\ldots,m$, можно зафиксировать подобную линейную комбинацию для b_μ и среди всех $k \in \mathbb{N}$ выбрать максимальное значение из таких, что хотя бы одно из чисел $r_{k,v}$ встречается хотя бы в одной из m упомянутых линейных комбинаций, пусть n_0 будет этим максимальным.

Теперь выберем $n_1 > n_0$ согласно следующим условиям:

$$r_{n_1+1,1} > b_1, \tag{21}$$

$$\begin{cases} r_{n_1+1,1} \text{ не является конечной линейной комбинацией с целыми} \\ \text{коэффициентами чисел } 1, r_{1,1},\ldots,r_{n_1,1}, \text{ и чисел } r_{k,\mu'}, \text{ где } \mu' \in \{2,\ldots,m\}. \end{cases} \tag{22}$$

Наконец, зафиксируем такие $n_2,\ldots,n_m \in \mathbb{N}_0$, что

$$b_1 + r_{n_1+1,1} < \ldots < b_m + r_{n_m+1,m}, \tag{23}$$

учитывая неравенство (20),

$$r_{n_1+1,1} < \ldots < r_{n_m+1,m}. \tag{24}$$

Поскольку $\operatorname{ord}_p A_\mu^{(n_\mu)} = r_{n_\mu+1,\mu}$, то для достаточно больших n_μ, учитывая равенства (16), предположения о последовательностях r и неравенство (23), можно получить

$$\operatorname{ord}_p \left(\sum_{\mu=1}^{m} f'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) A_\mu^{(n_\mu)} \right) = b_1 + r_{n_1+1,1}. \tag{25}$$

Остается изучить порядки второго и третьего выражений из правой части равенства (19). Понятно, что для любых $i \geqslant 2$, $\mu = 1, \ldots, m$ получается

$$\operatorname{ord}_p \left(\frac{\partial P}{\partial X_\mu}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \frac{f^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!} (A_\mu^{(n_\mu)})^i \right) \geqslant 2r_{n_i+1,1} > b_1 + r_{n_1+1,1},$$

в силу неравенств (21) и (24). Как уже отмечалось, степени мономов для выражения $P^*(\gamma_1^{(n_1)} - \gamma_1, \ldots, \gamma_m^{(n_m)} - \gamma_m)$ не ниже двух, значит, порядки не меньше, чем $2r_{n_1+1,1} > b_1 + r_{n_1+1,1}$. Тогда, вместе с напоминанием о равенстве (25), можно заключить, что $P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)})$ не обнуляется, поскольку

$$\operatorname{ord}_p P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)}) = b_1 + r_{n_1+1,1}. \tag{26}$$

С другой стороны, из равенств (16) и (17) видно, что

$$\gamma_\mu^{(n)} = f(\alpha_\mu^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,\mu} g^{r_{k,\mu}} \right)^j,$$

таким образом, можно вычислить $\operatorname{ord}_p P(\gamma_1^{(n_1)}, \ldots, \gamma_m^{(n_m)})$ как линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами чисел $1, r_{1,1}, \ldots, r_{n_1,1}, \ldots, r_{1,m}, \ldots, r_{n_m,m}$. Однако, учитывая равенство (26), получаем искомое противоречие с условиями $n_1 > n_0$ и (22). Теорема 5.1.10 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 5.1.12. Индукция по m. База индукции, при $m = 1$, уже была доказана в утверждении 5.1.18, теперь необходимо осуществить переход. Предположим, что $m > 1$, теорема уже доказана для каждого подмножества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m\}$, а требуется провести доказательство для $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Предположим противное, а именно, пусть $l \cdot m$ чисел $f_\lambda(\alpha_\mu)$, $\lambda = 1, \ldots, l$, $\mu = 1, \ldots, m$, являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$. Рассмотрим отличный от константы многочлен

$$P \in \mathbb{Z}_p[\underline{X}] = Z_p[X_{1,1}, \ldots, X_{1,m}; \ldots; X_{l,1}, \ldots, X_{l,m}] \tag{27}$$

такой, что

$$P(\underline{\gamma}) = P(\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,m}) = 0, \tag{28}$$

где $\gamma_{\lambda,\mu} = f_\lambda(\alpha_\mu)$. В силу предположения индукции, не может произойти такого, что для некоторого μ многочлен P не зависит от набора переменных $(X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu})$.

Из соотношений (27) и (28) получается, что

$$P(\underline{X}) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})(X_{\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda,\mu}) + P^*(\underline{X} - \underline{\gamma}), \tag{29}$$

где каждый моном полинома P^* состоит из произведения разностей вида $X_{\lambda,\mu} - \gamma_{\lambda,\mu}$, имеет степень не меньше двух и коэффициент неотрицательного порядка.

Пусть $\alpha_\mu^{(n)}$ и $A_\mu^{(n)}$ определены согласно соотношениям (16), а $\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)} = f_\lambda(\alpha_\mu^{(n)})$. Перед тем, как подставить в соотношение (29) вместо переменных $X_{\lambda,\mu}$ значения $\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)}$, сделаем предварительные вычисления:

$$\gamma_{\lambda,\mu}^{(n)} - \gamma_{\lambda,\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_\lambda^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!}(A_\mu^{(n)})^i = f_\lambda'(\alpha_\mu)A_\mu^{(n)} + \sum_{i\geqslant 2} \dots \tag{30}$$

Считая, что n зависит от μ, будем записывать n_μ, из (29) и (30) получаем:

$$\begin{aligned} &P(\gamma_{1,1}^{(n_1)}, \dots, \gamma_{1,m}^{(n_m)}; \dots; \gamma_{l,1}^{(n_1)}, \dots, \gamma_{l,m}^{(n_m)}) = \\ &\quad = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{l} f_\lambda'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma}) A_\mu^{(n_\mu)} + \sum_{\mu} \sum_{\lambda} \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma}) \sum_{i\geqslant 2} \frac{f_\lambda^{(i)}(\alpha_\mu)}{i!}(A_\mu^{(n_\mu)})^i + \\ &\qquad + P^*(\gamma_{1,1}^{(n_1)} - \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,m}^{(n_m)} - \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{l,1}^{(n_1)} - \gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,m}^{(n_m)} - \gamma_{l,m}) \end{aligned} \tag{31}$$

Теперь докажем, что для каждого $\mu = 1, \dots, m$, сумма

$$B_\mu^* = \sum_{\lambda=1}^{l} f_\lambda'(\alpha_\mu) \frac{\partial P}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\underline{\gamma})$$

не обнуляется. Рассмотрим многочлен

$$Q_\mu(X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu}) = P(\gamma_{1,1}, \dots, X_{1,\mu}, \dots, \gamma_{1,m}; \dots; \gamma_{l,1}, \dots, X_{l,\mu}, \dots, \gamma_{l,m}), \tag{32}$$

тут, если посмотреть на равенство (28), $X_{\lambda,\mu}$ заменяет $\gamma_{\lambda,\mu}$ для каждого $\lambda = 1, \dots, l$. Покажем, что $Q_\mu(X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu}) \not\equiv 0$. В противном случае наличие решения $P(\underline{\gamma}) = 0$ говорит о том, что значения переменных $X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu}$ можно изменить любым образом и получить новое решение. Понятно, что существует такой набор значений $X_{1,\mu}, \dots, X_{l,\mu} \in \mathbb{Z}_p$, при котором $P(\underline{X}) \not\equiv 0$, иначе очевидно, что многочлен не зависит от остальных переменных, а это противоречит предположению индукции. С другой стороны, подставляя такой набор значений $X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu}$ в многочлен P, получим новый многочлен, который зависит лишь от оставшихся переменных и его существование противоречит предположению индукции. Значит, $Q_\mu(X_{1,\mu},\dots,X_{l,\mu})$ — отличный от константы многочлен с коэффициентами из

$$\mathbb{Z}_p[\gamma_{1,1},\dots,\gamma_{1,\mu-1},\gamma_{1,\mu+1},\dots,\gamma_{1,m};\dots;\gamma_{l,1},\dots,\gamma_{l,\mu-1},\gamma_{l,\mu+1},\dots,\gamma_{l,m}].$$

Поскольку функции $f_1,\dots,f_l$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$, в силу леммы 5.1.13, функции являются алгебраически независимыми над $\mathbb{C}_p$, значит, каждая функция

$$\varphi_\mu(z)=Q_\mu(f_1(z),\dots,f_l(z)),\ \mu=1,\dots,m \tag{33}$$

отлична от константы. Учитывая равенство (32), получаем:

$$\varphi'_\mu(\alpha_\mu)=\sum_{\lambda=1}^{l} f'_\lambda(\alpha_\mu)\frac{\partial Q_\mu}{\partial X_{\lambda,\mu}}(\gamma_{1,\mu},\dots,\gamma_{l,\mu})=B^*_\mu. \tag{34}$$

С другой стороны, функции $\varphi_\mu(z)$, заданные соотношением (33), представляются степенными рядами, как в лемме 5.1.20, значит, благодаря лемме 5.1.21, мы знаем, что $\varphi'_\mu(\alpha_\mu)\neq 0$, $\mu=1,\dots,m$, а в силу (34), $B^*_\mu\neq 0$.

Определим $b^*_\mu=\operatorname{ord}_p B^*_\mu$, не умаляя общности,

$$b^*_1\geqslant\dots\geqslant b^*_m.$$

Опять же, каждое из b^*_μ представляет конечную линейную комбинацию с целыми неотрицательными коэффициентами чисел 1 и $r_{k,v}$. При каждом $\mu=1,\dots,m$ зафиксируем линейную комбинацию для b^*_μ. Далее, используя b^*_μ вместо b_μ, повторим ход рассуждения для теоремы 5.1.10, выберем новые $n_1,\dots,n_m$, достаточно большие, чтобы

$$\operatorname{ord}_p\left(\sum_{\mu=1}^{m} B^*_\mu A^{(n_\mu)}_\mu\right)=b^*_1+r_{n_1+1,1}.$$

И так же, как при доказательстве теоремы 5.1.10, получаем противоречие. Учитывая способ выбора чисел n_μ и равенство (31), число $b^*_1+r_{n_1+1,1}$ представляем в виде недопустимой линейной комбинации, которая получается в результате вычисления порядка в левой части равенства.

6. Гипергеометрические F-ряды

Пусть $t = r - s > 0$. Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} (zt)^{tn}.$$

Для семейств действительных чисел $\overline{a} = (a_1, \dots, a_m)$ и $\overline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ используем обозначение

$$\overline{a} \approx \overline{b},$$

если существует перестановка $i_1, \dots, i_m$ чисел $1, \dots, m$ такая, что $b_j - a_{i_j} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, m$. Также используем обозначение $\overline{a} + c$ для семейства чисел $(a_1 + c, \dots, a_m + c)$.

Теорема 6.1.1. *Пусть $t = 2k$, а множество параметров $S = (\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\alpha_i \notin \mathbb{Z},\ \beta_j \notin \mathbb{Z},\ \alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, t+s,\ j = 1, \dots, s.$$

Для всех общих делителей d чисел t, s ни одно из соотношений $\overline{\alpha} + \frac{1}{d} \approx \overline{\alpha}$ или $\overline{\beta} + \frac{1}{d} \approx \overline{\beta}$ не может иметь места.

Кроме того, не выполняются следующие условия:

1) если $s = 0$, тогда существуют $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\overline{\alpha} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k-1}, -x_{k-1}\right),$$

2) если $s > 0$, $s = 2q$, тогда существуют $x_0, \dots, x_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ такие, что любое

$$\overline{\alpha} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}\right),$$

$$\overline{\beta} + x_0 \approx \left(x_{k+q}, -x_{k+q}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right),$$

или

$$\overline{\alpha} + x_0 \approx \left(x_1, -x_1, \dots, x_{k+q}, -x_{k+q}\right),$$

$$\overline{\beta} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_{k+q+1}, -x_{k+q+1}, \dots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right),$$

3) если $s > 0$, $s = 2q + 1$, тогда существуют $x_0, \dots, x_{k+l-1} \in \mathbb{C}$ такие, что $x_0, \dots, x_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ такие, что любое

$$\overline{\alpha} + x_0 \approx \left(0, x_1, -x_1, \dots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}\right),$$

$$\overline{\beta} + x_0 \approx \left(-\frac{1}{2}, x_{k+q}, -x_{k+q}, \ldots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right).$$

Пусть $f'(z), f''(z), \ldots, f^{(r-1)}(z)$ *— формальные производные вышеуказанного ряда* $f(z)$,

$$\gamma_\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,\mu} g^{r_{j,\mu}},\ \gamma_\mu \in \Omega_g,\ a_{j,\mu} \in \mathbb{Z}_g^*,\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Пусть

1) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *положительные рациональные числа* $r_{j,\mu}$ *образуют возрастающую и стремящуюся к* $+\infty$ *при* $j \to +\infty$ *последовательность;*

2) для любого $\mu = 1, \ldots, m$ *существует бесконечное множество номеров* j *таких, что число* $r_{j+1,\mu}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел* $1, r_{1,\mu}, \ldots, r_{j,\mu}$ *и чисел* $r_{j',\mu'}$ *при любых* j' *и при* $\mu' \neq \mu$*;*

3) не существует номеров j, j', μ *таких, что разница* $r_{j,\mu} - r_{j',\mu}$ *является целым числом.*

Тогда элементы $f^{(\lambda)}(\gamma_\mu)$*, где параметры пробегают значения* $\lambda = 0, 1, \ldots, r-1$, $\mu = 1, \ldots, m$*, представляют собой глобально алгебраически независимые над* $\mathbb{Q}_g$ *элементы* Ω_g.

Доказательство. Этот факт получается совмещением результатов из статьи [21] и теоремы 5.1.6.

Заключение.

Получены обобщения некоторых p-адических результатов из работ П. Бундшу и В.Г. Чирского [14], [15], [16] для элементов прямых произведений p-адических полей. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории трансцендентных чисел и диофантовых приближений.

Список литературы

[1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1985.

[2] Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1982.

[3] Чирский В. Г. Метод Зигеля-Шидловского в p-адической области. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005, Т. 11, №6, С. 221–230.

[4] Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, Т. 459, №6, С. 677–679.

[5] Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат., 2014, Т. 78, №6, С. 193–210.

[6] Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Моск. ун-та, Сер.1, мат., мех., 2015, №1, С. 59–61.

[7] Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышёвский сборник, 2015, Т. 16, вып. 1, С. 254–264.

[8] Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат., 2017, Т. 81, №2, С. 215–232.

[9] Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических f-рядов // Доклады академии наук, 2018, Т. 483, №3, С. 257–259.

[10] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

[11] Adams W. Transcendental numbers in the p-adic domain // Amer. J. Math., 1966, V. 88, P. 279–307.

[12] Amice Y. Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

[13] Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2004, V. XIII, №2, P. 241–260.

[14] Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math., 2002, V. 79, P. 345–352.

[15] Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm., 2004, V. 113, №4, P. 309–326.

[16] Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th., 2015, V. 5, iss. 1-2, P. 14–20.

[17] Chirskii V. G. Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // Russian Journ. of Math. Physics, 2013, V. 20, №2, P. 149–154.

[18] Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journ. of Math. Physics, 2017, V. 24, №2, P. 153–171.

[19] Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series // Doklady Mathematics, 2018, V. 98, №3, P. 589–591.

[20] Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journ. of Math. Physics, 2019, V. 26, №3, P. 286–305.

[21] Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journ. of Math. Physics, 2020, V. 27, №2, P. 175–184.

[22] Escassut A. Transcendence order over $\mathbb{Q}_p$ in $\mathbb{C}_p$ // J. Number Theory, 1983, V. 16, P. 395–402. (Correction) J. Number Theory, 1984, V. 19, P. 451.

[23] Lampert D. Algebraic p-adic expansions // J. Number Theory, 1986, V. 23, P. 279–284.

[24] Mahler K. Uber transzendente p-adische Zahlen // Compos. Math. 1935, V. 2, P. 259–275.

[25] Mahler K. p-adic numbers and their functions; second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[26] Nishioka K. p-adic transcendental numbers // Proc. Amer. Math. Soc., 1990, V. 108, P. 39–41.

Работы автора по теме диссертации

[27] Самсонов А.С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 227–242.

[28] Самсонов А.С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 236–256.

[29] Самсонов А.С. Об одном применении методов исследования алгебраической независимости гипергеометрических рядов и значений g-адических функций // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 528–535.

[30] Самсонов А.С. Об алгебраической независимости некоторых чисел над кольцом g-адических чисел // Материалы международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2016» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2016.

[31] Самсонов А.С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей // Материалы XVII международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной столетию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, 2019, с. 152–156.

[32] Самсонов А.С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей // Материалы XVIII международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, 2020, с. 212–215.

[33] Самсонов А.С. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II // Материалы XIX международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого, 2021, с. 174–177.