Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
/В.В. Шайдуров
«_____» ________ 2024г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 – Математика и компьютерные науки

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «СРЕДНЕГО ПОЛЯ» И ПОДХОДЫ К ЕЁ РЕШЕНИЮ

Руководитель доцент, кандидат физико-математических наук В.С. Петракова

Выпускник В.В. Барабаш

Нормоконтролер Т.Н. Шипина

Красноярск 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ... 3
1 Постановка задачи Курно-Бертрана в терминах «среднего поля» ... 6
1.1 Обзор литературы ... 6
1.2 Прямая задача ... 7
1.3 Сопряженная задача ... 8
2 Конечно-разностный метод решения задачи Курно-Бертрана ... 10
2.1 Описание подхода ... 10
2.2 Вычислительные эксперименты ... 15
3 Применение PINN для решения задачи «среднего поля» ... 18
3.1 Описание подхода ... 18
3.2 Описание подхода с использованием адаптивных параметров в функции активации (ABU-PINN) ... 19
3.2.1 Построение ABU-PINN ... 20
3.3 Конфигурация нейросети для решения задач ... 23
3.4 Описание алгоритма обучения ... 24
3.5. Постановка тестовых задач ... 28
3.5.1 Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка ... 28
3.5.2 Система уравнений «среднего поля» ... 29
3.6 Вычислительные эксперименты ... 30
Заключение ... 36
Список использованных источников ... 37

ВВЕДЕНИЕ

Модели «среднего поля», предложенные в работах [1,2], позволяют описывать конкурентное поведение большого числа малых игроков, избегая решения громоздких систем уравнений. Под «малым» здесь понимается игрок, изменение стратегии поведения которого не влияет на систему, т.е. значение имеет только вся масса игроков. Теория «среднего поля» рассматривает такие системы в непрерывном пределе – в случае бесконечного числа игроков, что приводит к тому, что каждый игрок реагирует на статистическое распределение состояний других игроков. Эволюция такого распределения в каждый момент времени определяется уравнением Колмогорова-Фоккера-Планка (КФП), а оптимальность выбранной игроком стратегии обуславливается принципом оптимальности Беллмана. Таким образом, в пределе стратегическое (конкурентное) поведение большого числа игроков можно описать связанной парой уравнений в частных производных – уравнением КФП и уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ), а «однородность» игроков приводит к тому, что модели «среднего поля» широко используются при описании рыночных моделей экономики [3]. Следовательно, стоит вопрос о поиске эффективных методов решений для таких задач.

Целью настоящей работы является оценка и сравнение двух методов решения модели «среднего поля»: метода конечно-разностной аппроксимации и нейросетевого подхода.

Для достижения заявленной цели были поставлены следующие **задачи.**

1. Провести анализ конечно-разностного подхода к решению классической постановки задачи «среднего поля».

2. Разработать методологию применения PINN (Physics-informed neural networks) для решения задачи «среднего поля».

Актуальность исследования заключается в малой исследованности области методов решения задач «среднего поля» и существенными ограничениями на параметры модели для обеспечения существования и единственности решения таких задач. Здесь необходимо отметить, что методы, предлагаемые для решения классических постановок задач «среднего поля», в основном, являются конечно-разностными схемами, напрямую аппроксимирующие полученную систему дифференциальных уравнений. Обзор таких методов приведен в работах [3,4]. Проблема здесь заключается в ограничениях, накладываемых на модель, для обеспечения существования и единственности решения такой задачи. Так, в работах основоположников теории [1,5] указано, что для единственности решения необходимо, чтобы моделируемый период времени был достаточно короткий или функционал, определяющий поведение системы, был выпуклым относительно управляющего воздействия. В работах [6,7] приведены контрпримеры, подтверждающие, что при невыполнении указанных условий, решение задачи может быть неединственным или не существовать. Однако, при моделировании реальных систем такие ограничения являются критическими. Для преодоления указанных трудностей в работах [11,12] был предложен подход к решению задач «среднего поля», заключающийся в переходе от непрерывной постановки к конечно-разностной (дискретной) с наследованием основных свойств системы. Методы решения полученной дискретной задачи менее ограниченны, но всё еще требуют не выпуклости функционала, но монотонности производных относительно управляющей переменной, что тоже не всегда может быть обеспечено при решении реальных задач.

Использование нейросетевого подхода кажется интересным, предложенный в [15], поскольку такой метод не предполагает никаких ограничений на функцию и приближает решение системы в заданных точках коллокации, минимизируя функционал потерь по всей области. Недостатком такого подхода является невозможность контроля точности решения, но его преимуществом является возможность качественной оценки поведения системы. Для уменьшения таких недостатков используются усовершенствования, предложенные в работе [16], которые улучшают приближение к решению и стабилизируют обучение модели.

Предметом исследования здесь является постановка задачи «среднего поля» для задачи Курно-Бертрана и PINN для решения классической постановки.

В качестве **методов исследования** использовались вычислительные эксперименты, доказанные оценки сходимости разностных схем, а также инструменты по работе с нейросетями, предлагаемые в модуле TensorFlow языка Python.

Работа состоит их 3 глав, 38 страниц и содержит 8 рисунков и 8 таблиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенной работы были получены следующие результаты:

1. Реализован конечно-разностный метод для задачи Курно-Бертрана.

2. Установлено, что разностные методы применимы для решения ограниченного класса задач «среднего поля», поскольку накладывают существенные ограничения на используемые в постановке функции.

3. В свою очередь, PINN является более универсальным методом, однако для его использования требуется, во-первых, нормировка данных, поскольку полученное дискретное решение ограничено областью значений функции активации. Во-вторых, для корректной работы PINN требуется предварительное знание о структуре решения (периодичность, нелинейность, разрывность). В-третьих, для PINN не существует понятия аппроксимации решения, то есть при увеличении числа точек коллокации в вычислительной области, увеличение точности полученного решения относительно реального не гарантируется.

Полученные результаты могут быть использованы для разработки более сложного комплексного программного обеспечения для решения подобных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lasry, J.-M. Mean field games / J. M. Lasry, P. L. Lions. // Japanese journal of Mathematics. – 2007. – № 2. – Pp. 229–260.
2. Huang, M. Large population stochastic dynamic games: closed-loop mckean-vlasov systems and the nash certainty equivalence principle / M. Huang, R. P. Malhamé, P. E. Caines. // Commun. Inf. Syst. – 2006. – № 6. – Pp. 221–252.
3. Achdou, Y. Mean field games: numerical methods / Y. Achdou, I. Capuzzo-Dolcetta // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2010. – V. 48. – №. 3. – Pp. 1136 – 1162.
4. Achdou, Y. Mean field games and applications: Numerical aspects / Y. Achdou // Mean Field Games: Cetraro; Italy, 2019. – Pp. 249–307
5. Bensoussan, A. Mean field games and mean field type control theory. / A. Bensoussan // New York: Springer. – 2013. – V. 101. – Pp. 113.
6. Cirant, M. Existence and non-existence for time-dependent mean field games with strong aggregation / M. Cirant, D. Ghilli // Mathematische Annalen. – 2022. – V. 383. – №. 3. – Pp. 1285–1318.
7. Bardi, M. On non-uniqueness and uniqueness of solutions in finite-horizon mean field games / M. Bardi, M. Fischer // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. – 2019. – V. 25. – Pp. 44
8. Achdou, Y. Partial differential equation models in macroeconomics / Y. Achdou, J. Buera, J. M. Lasry, P. L. Lions, B. Moll. // Philos. Trans. R. Soc. Lond. A. – 2014. – № 372. – Art. 20130397.
9. Булатов, А. Экономика: учебник / А. Булатов – М.: Экономистъ, 2008. – 831с.
10. Ledvina, A. Dynamic Bertrand and Cournot competition: asymptotic and computational analysis of product differentiation / A. Ledvina, R. Sircar. // Risk Decis. Anal. – 2012. – V. 3. № 3. – Pp. 149–165.
11. Chan, P. Bertrand and Cournot mean field games / P. Chan, R. Sircar. // Appl. Math. Optim. – 2014. – № 71. – Pp. 1–37.

12.Graber, P. J. Existence and Uniqueness of Solutions for Bertrand and Cournot Mean Field Games / P. J. Graber, A. Bensoussan. // Appl. Math. Optim. – 2018. – № 77. – Pp. 47–71.
13.Shaydurov, V. The Euler–Lagrange Approximation of the Mean Field Game for the Planning Problem / V. Shaydurov, V. Kornienko, S. Zhang. // Lobachevskii J.Math. – 2020. – № 41. Pp. 2703–2714.
14.Shaydurov, V. A finite-difference solution of Mean Field problem with a predefined control resource. / V. Shaydurov, V. Kornienko. // AIP Conf. Proc. – 2020. – № 2302. – Art. 110004.
15.Raissi, M. Physics Informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problem involving nonlinear partial differential equations / M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis // Journal of Computational Physics. – 2018. – Pp. 687–707.
16.Huang, G. Learning Specialized Activation Function for Physics-Informed Neural Networks / G. Huang, H. Wang, L. Lu, S. Song // Article in Communications in Computational Physics. – 2023. – V. 34, № 4. – Pp. 869–906.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
/В.В. Шайдуров
«20» 06 2024г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 – Математика и компьютерные науки

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «СРЕДНЕГО ПОЛЯ» И ПОДХОДЫ К ЕЁ РЕШЕНИЮ

Руководитель 21.06.2024 доцент, кандидат физико-математических наук В.С. Петракова

Выпускник 21.06.2024 В.В. Барабаш

Нормоконтролер 21.06.2024 Т.Н. Шипина

Красноярск 2024