Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
/А. К. Цих
«____» ______ 2024.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО РАЗБИЕНИЯ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Руководитель	доцент, кандидат физико-математических наук	А. П. Ляпин
Выпускник		В. А. Успенский
Нормоконтролер		Т. Н. Шипина

Красноярск 2024

АННОТАЦИЯ

Целью исследования является получение формул для вычисления функций векторного разбиения с весом специальных видов.

Задачи исследования:

1. Изучить необходимые сведения из теории функций векторного разбиения с весом, разностных уравнений, производящих функций, в частности, изучить метод Эйлера для решения задач суммирования функций.

2. Применить метод Эйлера для получения выражения для вычисления функции векторного разбиения с весом.

3. Решить вопрос существования решений соответствующих разностных уравнений, связанных с методом Эйлера.

В процессе решения первой задачи были установлены тесные взаимосвязи между функциями векторного разбиения с весом, производящими функциями, разностными уравнениями. Показана их применимость к задачам перечислительного комбинаторного анализа и задачам суммирования функций.

В результате решения второй задачи были получены формулы для вычисления функций векторного разбиения с весом специальных видов через значения соответствующих дискретных первообразных. Приведены примеры.

Результатом решения третьей задачи является доказательство справедливости применения метода Эйлера для решения рассматриваемых задач суммирования.

Ключевые слова: функция векторного разбиения с весом, разностное уравнение, дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница.

ABSTRACT

The aim of the research is to obtain formulas for calculating vector partition functions with weight of special types.

Research objectives:

1. Study the necessary information from the theory of vector partition functions with weight, difference equations, generating functions, in particular, to study the Euler method for solving problems of summation of functions.

2. Apply the Euler's method to obtain an expression for calculating the vector partition function with weight.

3. Solve the problem of the existence of solutions to the corresponding difference equations associated with the Euler's method.

In the process of solving the first problem, close relationships were established between vector partition functions with weight, generating functions, and difference equations. Their applicability to problems of enumerative combinatorial analysis and problems of summation of functions, is shown.

As a result of solving the second problem, formulas were obtained for calculating vector partition functions with weight of special types through the values of the corresponding discrete primitive functions.

The result of solving the third problem is a proof of the validity of the application of the Euler's method to solve the considered summation problems.

Keywords: vector partition function with weight, difference equation, discrete analogue of the Newton-Leibniz formula.

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуются задачи суммирования функций $g(t_1, \dots, t_n)$ многих переменных в целых неотрицательных точках $(t_1, \dots, t_n)$ целочисленной решетки, которые являются решениями некоторого класса линейных диофантовых уравнений и их систем.

Представленная магистерская диссертация имеет своей целью рассмотрение определенного вида сумм и применение к ним метода Эйлера, разрешение вопроса о существовании и единственности решений соответствующих разностных уравнений, связанных с применением метода.

Первая глава посвящена описанию основных используемых определений и обозначений. В начале вводятся необходимые обозначения, чтобы определить понятие функции векторного разбиения с весом (см. [14], [15], [17]), а именно: множество V векторов $a^j = (a_1^j, \dots, a_m^j)$, $j = 1, \dots, n$, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

размерности $m \times n$, составленная из вектор-столбцов, заостренный конус (тот, который не содержит прямых)

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = t_1 a^1 + \dots + t_n a^n, t \in \mathbb{R}^n_{\geq}\},$$

однако будет подразумеваться решеточный конус

$$K = \{x \in \mathbb{Z}^m \mid x = t_1 a^1 + \dots + t_n a^n, t \in \mathbb{Z}^n_{\geq}\}.$$

Определение 1.1. Пусть задана функция $g : \mathbb{Z}^n_{\geq} \to \mathbb{C}$ и точка x из решеточного конуса K. Сумму вида

$$P_A(x; g) = \sum_{At = x, t \in Z^n_{\geq}} g(t)$$

будем называть функцией векторного разбиения с весом $g(t)$.

После основного определения даются краткие теоритические сведения о методе Эйлера для функций одной переменной (см., например, [1]) и вводятся операторы проекции и сдвига.

Оператор проекции π_i, $i = 1, \ldots, n$ действует на заданную функцию многих переменных $g(t_1, \ldots, t_n)$ следующим образом:

$$\pi_i g(t) = g(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n),$$

для заданной функции нескольких перменных $g(t_1, \ldots, t_n)$ оператор сдвига δ_i, $i = 1, \ldots, n$ увеличивает значение аргумента t_i на единицу, т. е.

$$\delta_i g(t) = g(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + 1, t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

Приводятся некоторые свойства функции векторного разбиения с весом, свойства операторов проекции и сдвига. Демонстрируется тесная связь функции векторного разбиения с весом с производящими функциями, разностными уравнениями, следовательно, задачами Коши.

Завершается глава формулировкой теоремы из статей [4], [6] о существовании и единственности решения задачи Коши.

Во второй главе приведены результаты применения метода Эйлера к сумме

$$S(x) = \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k = a_1 \ldots a_n x} g(t_1, \ldots, t_n),$$

где $a_i \neq 1, i = 1, \ldots, n$ – неотрицательные целые попарно взаимно простые числа, x – неотрицательное целое число.

Случай, когда все a_i равны единице, рассматривался, например, в [14].

Представленная выше сумма является частным видом общего определения функции векторного разбиения с весом.

Формулировка теоремы требует некоторых дополнительных сведений, приведем их.

Введем в рассмотрение полиномиальный разностный оператор, заданный следующей формулой:

$$W(\delta) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\delta_j^{a_j} - \delta_i^{a_i}),$$

затем представим понятие дискретной первообразной.

Определение 2.1. Функцию $f(t_1, \ldots, t_n)$ будем называть дискретной первообразной для заданной функции $g(t_1, \ldots, t_n)$, если она удовлетворяет следующему разностному уравнению:

$$W(\delta) f(t_1, \ldots, t_n) = g(t_1, \ldots, t_n).$$

Определение 2.2. Оператор

$$W_{NL}(\delta, \pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\delta_j^{a_j} \pi_i - \delta_i^{a_i} \pi_j)$$

будем называть дискретным аналогом оператора Ньютона-Лейбница.

Результат применения метода Эйлера к рассматриваемой сумме выражается в представленной ниже теореме.

Теорема 2.1. Пусть заданы попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 1$, целое неотрицательное x. Пусть задана функция $g(t_1, \ldots, t_n)$. Если функция $f = f(t_1, \ldots, t_n)$ является дискретной первообразной для функции $g(t_1, \ldots, t_n)$, т. е.

$$W(\delta) f(t_1, \ldots, t_n) = g(t_1, \ldots, t_n),$$

то

$$S(x) = \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k = a_1 \ldots a_n x} g(t_1, \ldots, t_n) = W_{NL}(\delta, \pi) f(a_1 x, a_2 x, \ldots, a_n x).$$

В связи с выбором метода Эйлера разрешается вопрос о существовании решения соответствующего разностного уравнения.

Пусть задан полиномиальный разностный оператор $P(\delta) = \sum\limits_{|\alpha| \le m} c_\alpha \delta^\alpha$, α – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $c_m \neq 0$, m – порядок $P(\delta)$, где оператор δ в степени α действует следующим образом: $\delta^\alpha f(t) = f(t + \alpha)$.

Введем на множестве $\mathbb{Z}^n$ отношение порядка следующим образом:

$$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, \ldots, n.$$

Для $x, y \in \mathbb{Z}^n$ $x \ngeq y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $x_i < y_i$.

Обозначим за $X_{0,\beta}$ множество $t \in \mathbb{Z}^n_+$, где $t \ngeq \beta$ и сформулируем задачу:

$$P(\delta)f(t) = g(t), t \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{1}$$

$$f(t) = \varphi(t), t \in X_{0,\beta}, \tag{2}$$

где φ – заданная функция.

Определение 1.3. Фундаментальным решением задачи (1)-(2) называется решение P_β уравнения $P(\delta)P_\beta(t) = \delta_0(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $P_\beta(t) = 0$ для $t \in X_{0,\beta}$. Функция $\delta_0(t)$ (символ Кронекера) задана как

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} .$$

Следствие 2.1. Пусть заданы попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 1$, целое неотрицательное x. Пусть также заданы функции $g = g(t_1, \ldots, t_n)$ и функция начальных данных $\varphi = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$. Положим, что функция $f = f(t_1, \ldots, t_n)$ задана как

$$f(t) = \sum_{y \geq 0, y \ngeq \beta} \varphi(y) \sum_{v \nleq y} c_v P_\beta(t + v - y) + \sum_{y \geq 0} g(y) P_\beta(t - y),$$

где P_β – фундаментальное решение, соответствующее мультииндексу β.

Верно, что

$$S(x) = \sum_{\sum_{k=1}^n a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k = a_1 \ldots a_n x} g(t_1, \ldots, t_n) = W_{NL}(\delta, \pi) f(a_1 x, a_2 x, \ldots, a_n x).$$

Приведено замечание относительно выбора мультииндекса β.

В третьей главе рассматривается некоторое обобщение суммы из предущей главы. Рассматривается сумма

$$S(x) = \sum_{\substack{a_2^{(1)}\ldots a_{k_1}^{(1)}t_1^{(1)}+\cdots+a_1^{(1)}\ldots a_{k_1-1}^{(1)}t_{k_1}^{(1)}=a_1^{(1)}\ldots a_{k_1}^{(1)}x_1 \\ \cdots \\ a_2^{(m)}\ldots a_{k_m}^{(m)}t_1^{(m)}+\cdots+a_1^{(m)}\ldots a_{k_m-1}^{(m)}t_{k_m}^{(m)}=a_1^{(m)}\ldots a_{k_m}^{(m)}x_m}} g(t^{(1)},\ldots,t^{(m)}).$$

Коэффициенты $a_i^{(j)} \neq 1$, $i = 1,\ldots,k_j$, $j = 1,\ldots,m$ в каждой отдельной строчке под знаком суммы являются неотрицательными попарно взаимно простыми числами, а $t^{(j)} = (t_1^{(j)},\ldots,t_{k_j}^{(j)})$, $j = 1,\ldots,m$.

Уточним вид операторов $W(\delta)$ и W_{NL} в новой постановке задачи.

Оператор $\delta_i^{(j)}$ действует на функцию $g(t^{(1)},\ldots,t^{(m)})$, где $t^{(i)} = (t_1^{(i)},\ldots t_{k_i}^{(i)})$ следующим образом:

$$\delta_i^{(j)} g = g(t^{(1)},\ldots,t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}+1, t_{i+1}^{(j)},\ldots,t^{(m)}).$$

Аналогично действует оператор $\pi_i^{(j)}$.

Оператор $W(\delta)$ принимает следующий вид:

$$W(\delta) = \prod_{1\le i<j\le k_1}\left(\left(\delta_j^{(1)}\right)^{a_j^{(1)}} - \left(\delta_i^{(1)}\right)^{a_i^{(1)}}\right)\cdots\prod_{1\le i<j\le k_m}\left(\left(\delta_j^{(m)}\right)^{a_j^{(m)}} - \left(\delta_i^{(m)}\right)^{a_i^{(m)}}\right).$$

Оператор W_{NL} принимает форму в соответствии со следующим определением.

Определение 3.1. Оператор

$$W_{NL}(\delta,\pi) = \prod_{1\le s\le m}\prod_{1\le i<j\le k_s}\left(\left(\delta_j^{(s)}\right)^{a_j^{(s)}}\pi_i - \left(\delta_i^{(s)}\right)^{a_i^{(s)}}\pi_j\right)$$

будем называть дискретным аналогом оператора Ньютона-Лейбница.

Далее в главе приведена теорема, позволяющая вычислить искомую сумму, и решен вопрос о существовании и единственности решения, связанный с применением метода Эйлера.

Теорема 3.1. Для каждого фиксированного $j = 1,\ldots,m$ зададим попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1^{(j)},\ldots,a_{k_j}^{(j)} \neq 1$ и целые неотрицательные x_i, $i = 1,\ldots,m$. Пусть задана функция $g = g(t^{(1)},\ldots,t^{(m)})$, где $t^{(i)} = (t_1^{(i)},\ldots,t_{k_i}^{(i)})$. Если функция $f(t^{(1)},\ldots,t^{(m)})$ является дискретной первообразной для функции g, т.е.

$$W(\delta)f(t) = g(t),$$

то

$$S(x) = W_{NL}(\delta,\pi)\ f(t_1^{(1)},\ldots,t_{k_1}^{(1)},\ldots,t_1^{(m)},\ldots,t_{k_m}^{(m)})\Big|_{t_i^{(j)}=a_i^{(j)}x_j, i=1\ldots k_j, j=1\ldots m}.$$

Следствие 3.1. Для каждого фиксированного $j = 1,\ldots,m$ зададим попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1^{(j)},\ldots,a_{k_j}^{(j)} \neq 1$ и целые неотрицательные x_i, $i = 1,\ldots,m$. Пусть задана функция $g = g(t^{(1)},\ldots,t^{(m)})$, где $t^{(i)} = (t_1^{(i)},\ldots,t_{k_i}^{(i)})$, и функция начальных данных $\varphi(t) = \varphi(t^{(1)},\ldots,t^{(m)})$. Пусть функция $f = f(t^{(1)},\ldots,t^{(m)})$ задана как

$$f(t) = \sum_{y\geq 0, y\ngeq\beta} \varphi(y) \sum_{v\nleq y} c_v P_\beta(t+v-y) + \sum_{y\geq 0} g(y) P_\beta(t-y),$$

где P_β – фундаментальное решение, соответствующее мультииндексу β. Верно, что

$$S(x) = W_{NL}(\delta,\pi)\ f(t_1^{(1)},\ldots,t_{k_1}^{(1)},\ldots,t_1^{(m)},\ldots,t_{k_m}^{(m)})\Big|_{t_i^{(j)}=a_i^{(j)}x_j, i=1\ldots k_j, j=1\ldots m}.$$

Далее приводится замечание о выборе мультииндекса β.

Четвёртая глава демонстрирует возможности рассмотренных теорем для решения практических примеров.

1 Предварительные сведения

В этой главе представлены некоторые теоретические сведения из теории функций векторного разбиения с весом, производящих функций и разностных уравнений (см. [8], [14], [15], [17]), даны основные обозначения и определения, приведены некоторые известные результаты, описан метод Эйлера в случае функции одной переменной [1].

Введем n-мерную целочисленную решетку как

$$\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

Обозначим символом $\mathbb{Z}_{\geq}$ неотрицательную часть множества $\mathbb{Z}$, тогда неотрицательную часть n-мерной целочисленной решетки запишем в следующем виде:

$$\mathbb{Z}^n_{\geq} = \mathbb{Z}_{\geq} \times \mathbb{Z}_{\geq} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\geq}.$$

Аналогичные обозначения примем для множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Введем целочисленные векторы $a^j = (a^j_1, a^j_2, \dots, a^j_m)$, где $j = 1, 2, \dots, n$, и составим матрицу $A = (a^j_i)_{m\times n}$. Столбцы матрицы A составлены из вектор-стобцов $(a^j)^\top = (a^j_1, a^j_2, \dots, a^j_m)^\top$, $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть множество

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = t_1 a^1 + \cdots + t_n a^n, t \in \mathbb{R}^n_{\geq}\}$$

является заостренным конусом (тот, который не содержит никакой прямой линии), тогда обозначим тем же символом следующий решеточный конус, который будем подразумевать всюду далее в работе:

$$K = \{x \in \mathbb{Z}^m \mid x = t_1 a^1 + \cdots + t_n a^n, t \in \mathbb{Z}^n_{\geq}\}.$$

Определим понятие функции векторного разбиения с весом.

Определение 1.1. Пусть задана функция $g : \mathbb{Z}^n_{\geq} \to \mathbb{C}$ и точка x из решеточного конуса K. Сумму вида

$$P_A(x; g) = \sum_{At=x, t\in\mathbb{Z}^n_{\geq}} g(t) \tag{3}$$

будем называть функцией векторного разбиения с весом $g(t)$.

Если положить в (3) $g(t) \equiv 1$, то получим определение функции векторного разбиения (см. [17]). В этом случае значение функции будет равняться числу неотрицательных решений соответствующего диофантового уравнения в целых неотрицательных числах.

Функции векторного разбиения с весом встречаются в различных задачах перечислительной комбинаторики и связаны с другими классическими объектами комбинаторного анализа, а именно: производящими функциями и разностными уравнениями.

Предложение 1.1. Пусть задана производящая функция $\Phi(\xi) = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^n_{\geq}} g(t)\xi^t$ для $g\colon \mathbb{Z}^n_{\geq} \to \mathbb{C}$, тогда для производящей функции

$$R_A(z;g) = \sum_{x \in K} P_A(x;g) z^x$$

верно, что $R_A(z;g) = \Phi(z^A)$, $z^A = (z^{a^1}, \ldots, z^{a^n})$.

Доказательство предложения. Так как

$$\Phi(z^A) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n_{\geq}} g(t) \left(z^A\right)^t = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n_{\geq}} g(t) \left(z_1^{a_1^1} \ldots z_m^{a_m^1}\right)^{t_1} \ldots \left(z_1^{a_1^n} \ldots z_m^{a_m^n}\right)^{t_n},$$

то положим $\sum\limits_{i=1}^{n} a_k^i t_i = x_k$, где $k = 1, \ldots, m$, тогда

$$\Phi(z^A) = \sum_{x \in K} \left(\sum_{t\colon\, At=x, t \in \mathbb{Z}^n_{\geq}} g(t) \right) z^x = \sum_{x \in K} P_A(x;g) z^x = R_A(z;g).$$

Пример 1.1. Зададим весовую функцию следующим образом:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Z}^n_{\geq} \\ 0, & t \notin \mathbb{Z}^n_{\geq} \end{cases},$$

тогда

$$\Phi(\xi) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n_{\geq}} \xi^t = \frac{1}{(1-\xi_1)\ldots(1-\xi_n)}.$$

Заключаем, что
$$R_A(z;1) = \frac{1}{(1-z^{a^1})\dots(1-z^{a^n})}.$$

Предложение 1.2. Пусть $g(t)$ обозначает количество решеточных путей на целочисленной решетке, тогда $P_A(x;g)$ совпадает с числом обобщенных решеточных путей на целочисленной решетке с шагами из множества целочисленных векторов $a^j = (a_1^j, a_2^j, \dots, a_m^j)$, где $j = 1, 2, \dots, n$. Производящая функция функции $P_A(x;g)$ представляется в следующем виде:

$$F(z) = \sum_{x \in K} P_A(x;g) z^x = \frac{1}{1 - z^{a^1} - z^{a^2} - \dots - z^{a^n}}.$$

Функции векторного разбиения и разностные уравнения предоставляют широкий инструментарий для решения различных задач теории конечных разностей, например, для задач суммирования функций.

Пусть задана функция одной дискретной переменной $g(t)$. Задача суммирования функции (см. [1]), не теряя общности, ставится следующим образом: найти сумму
$$S(x) = g(0) + g(1) + \dots + g(x) = \sum_{t=0}^{x} g(t).$$

Классическое решение данной задачи предполагает использование метода Эйлера. Эйлер показал, что $S(x)$ может быть представлена как

$$S(x) = f(x+1) - f(0),$$

где $f(t)$ – дискретная первообразная функции $g(t)$.

Определение 1.2. Функцию $f(t)$ будем называть дискретной первообразной для функции $g(t)$, если она удовлетворяет разностному уравнению:

$$f(t+1) - f(t) = g(t).$$

Последнее уравнение часто записывают с использованием оператора сдвига δ и тождественного оператора I. Оператор сдвига δ действует на функцию одной дискретной переменной следующим образом:

$$\delta g(t) = g(t+1).$$

И разностное уравнение запишется как

$$(\delta - I)f(t) = g(t).$$

Сумму $S(x)$ иногда записывают с использованием оператора проекции. Оператор проекции π действует на функцию одной дискретной переменной следующим образом:

$$\pi g(t) = g(0).$$

И $S(x)$ может быть переписана в следующем виде:

$$S(x) = (\delta - \pi)f(t)|_{t=x}.$$

Множество новейших научных работ посвящено задачам суммирования (см., например, [13], [14], [15]), так и множество более ранних работ (см., например, [12], [16]).

В следующих главах рассматриваются суммы от многих переменных, к которым применяется подход Эйлера. В связи с этим введем многомерные варианты операторов проекции и сдвига.

Оператор проекции π_i действует на заданную функцию многих переменных $g(t_1, \ldots, t_n)$ следующим образом:

$$\pi_i g(t) = g(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n), i = 1, \ldots, n,$$

для заданной функции нескольких перменных $g(t_1, \ldots, t_n)$ оператор сдвига δ_i увеличивает значение аргумента t_i на единицу, т.е.

$$\delta_i g(t) = g(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i + 1, t_{i+1}, \ldots, t_n), i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что в случае одной переменной требуется находить дискретную первообразную функцию, т. е. решение разностного уравнения. По этой причине рассмотрим способ решения разностного уравнения, однако нас будут интересовать только уравнения с полиномиальными разностными операторами.

Пусть задан полиномиальный разностный оператор $P(\delta) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} c_{\alpha}$, α – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $c_m \neq 0$, m – порядок $P(\delta)$, где оператор δ в степени α действует следующим образом: $\delta^{\alpha} f(t) = f(t+\alpha)$.

Предположим, что β удовлетворяет следующим условиям:

$$|\beta| = m, c_{\beta} \neq 0. \tag{4}$$

Введем на множестве $\mathbb{Z}^n$ отношение порядка следующим образом:

$$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, \dots, n.$$

Для $x, y \in \mathbb{Z}^n$ $x \ngeq y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $x_i < y_i$.

Обозначим за $X_{0,\beta}$ множество $t \in \mathbb{Z}^n_+$, где $t \ngeq \beta$ и сформулируем задачу:

$$P(\delta) f(t) = g(t), t \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{5}$$

$$f(t) = \varphi(t), t \in X_{0,\beta}, \tag{6}$$

где φ – заданная функция.

Теорема 1.1 [4]. Пусть коэффициенты полиномиального разностного оператора $P(\delta) = \sum\limits_{|\alpha|\ \leq m} c_{\alpha}\delta^{\alpha}$ удовлетворяют условию (4) и неравенству

$$|c_{\beta}| > \sum_{|\alpha|=m, \alpha\neq\beta} |c_{\alpha}|,$$

тогда задача (5)-(6) имеет единственное решение.

Определение 1.3. Фундаментальным решением задачи (5), (6) называется решение P_{β} уравнения $P(\delta)P_{\beta}(t) = \delta_0(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $P_{\beta}(t) = 0$ для $t \in X_{0,\beta}$. Функция $\delta_0(t)$ (символ Кронекера) задана как

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}.$$

Последняя теорема будет использована нами в доказательствах существования решения в связи с применением метода Эйлера, выводах следствий.

2 Задача суммирования для случая линейного диофантового уравнения

Рассмотрим следующую задачу: найти сумму значений заданной функции $g(t)$ в неотрицательных целочисленных точках, являющимися решениями линейного уравнения

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \cdots + a_nt_n = x,$$

где a_i, t_i, $i = 1, \ldots, n$, x – неотрицательные целые числа.

В такой формулировке задача является трудоемкой, поэтому в представленной работе рассмотрен частный случай данной задачи.

В настоящем разделе исследуется задача нахождения суммы значений функции от нескольких переменных $g(t_1, \ldots, t_n)$ в неотрицательных целых точках $(t_1, \ldots, t_n)$ целочисленной решетки, которые являются решениями линейного уравнения вида:

$$a_2 \ldots a_nt_1 + a_1a_3 \ldots a_nt_2 + \cdots + a_1 \ldots [k] \ldots a_nt_k + \cdots + a_1 \ldots a_{n-1}t_n = a_1 \ldots a_nx,$$

где t_i, $i = 1, \ldots, n$ – неотрицательные целые числа, x – неотрицательное целое число, $a_i \neq 1$ – неотрицательные целые попарно взаимно простые числа.

Для того, чтобы сформулировать теорему, введем ряд дополнительных определений и обозначений.

Рассмотрим полиномиальный разностный оператор, заданный следующей формулой:

$$W(\delta) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\delta_j^{a_j} - \delta_i^{a_i}),$$

затем представим понятие дискретной первообразной для нашего случая.

Определение 2.1. Функцию $f(t_1, \ldots, t_n)$ будем называть дискретной первообразной для заданной функции $g(t_1, \ldots, t_n)$, если $f(t_1, \ldots, t_n)$ удовлетворяет следующему разностному уравнению:

$$W(\delta)f(t_1, \ldots, t_n) = g(t_1, \ldots, t_n).$$

Также нам потребуется дискретный аналог оператора Ньютона-Лейбница.

Определение 2.2. Оператор

$$W_{NL}(\delta,\pi)=\prod_{1\le i<j\le n}(\delta_j^{a_j}\pi_i-\delta_i^{a_i}\pi_j)$$

будем называть дискретным аналогом оператора Ньютона-Лейбница. Оператор W_{NL} может быть записан следующим образом:

$$W_{NL}=\begin{vmatrix}\pi_1^{n-1} & \dots & \delta_1^{a_1(n-2)}\pi_1 & \delta_1^{a_1(n-1)}\\ \pi_2^{n-1} & \dots & \delta_2^{a_2(n-2)}\pi_2 & \delta_2^{a_2(n-1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \pi_n^{n-1} & \dots & \delta_n^{a_n(n-2)}\pi_n & \delta_n^{a_n(n-1)}\end{vmatrix}.$$

Сформулируем теорему и следствие.

Теорема 2.1. Пусть заданы попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1,a_2,\dots,a_n\neq 1$, целое неотрицательное x. Пусть задана функция $g(t_1,\dots,t_n)$. Если функция $f=f(t_1,\dots,t_n)$ является дискретной первообразной для функции $g(t_1,\dots,t_n)$, т. е.

$$W(\delta)f(t_1,\dots,t_n)=g(t_1,\dots,t_n),$$

то

$$S(x)=\sum_{\sum_{k=1}^n a_1\dots[k]\dots a_n t_k=a_1\dots a_n x} g(t_1,\dots,t_n)=W_{NL}(\delta,\pi)f(a_1x,a_2x,\dots,a_nx).$$

Следствие 2.1. Пусть заданы попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1,a_2,\dots,a_n\neq 1$, целое неотрицательное x. Пусть также заданы функции $g=g(t_1,\dots,t_n)$ и функция начальных данных $\varphi=\varphi(t_1,\dots,t_n)$. Положим, что функция $f=f(t_1,\dots,t_n)$ задана как

$$f(t)=\sum_{y\ge 0,y\ngeq\beta}\varphi(y)\sum_{v\nleq y}c_vP_\beta(t+v-y)+\sum_{y\ge 0}g(y)P_\beta(t-y),$$

где P_β – фундаментальное решение, соответствующее мультииндексу β.

Верно, что

$$S(x) = \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k = a_1 \ldots a_n x} g(t_1, \ldots, t_n) = W_{NL}(\delta, \pi) f(a_1 x, a_2 x, \ldots, a_n x).$$

Замечание 2.1. В следствии 2.1 мультииндекс β выбирается определенным образом. В разложении $W(\delta)$ в сумму выбирается моном наибольшей степени. Такой моном существуют и единственен ввиду вида $W(\delta)$. Затем мультииндекс β формируется по правилу: первая координата равна степени δ_1 этого выделенного монома, вторая координата β соответствует степени δ_2 и т. д.

Замечание 2.2. Случай, когда все a_i равны единице, рассматривался, например, в [14].

Пример 2.1. Для $W(\delta) = (\delta_3^2 - \delta_1^5)(\delta_3^2 - \delta_2^3)(\delta_2^3 - \delta_1^5)$ мультииндекс $\beta = (10, 3, 0)$.

Доказательство теоремы. Построим доказательство теоремы, следуя [14].

Во-первых, рассмотрим сумму $s_q(x)$ вида

$$s_q(x) = \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k = a_1 \ldots a_n x} q_1^{t_1} \ldots q_n^{t_n}.$$

Однако, такой ее вид будет неудобен и в связи с этим, перепишем сумму в ином виде, а именно:

$$s_q(x) = \sum_{|t|=x} q_1^{a_1 t_1} \ldots q_n^{a_n t_n}.$$

Найдем выражение для вычисления $s_q(x)$. Для этого рассмотрим $H(z; q)$:

$$H(z; q) = \frac{1}{(1 - q_1^{a_1} z)} \frac{1}{(1 - q_2^{a_2} z)} \cdots \frac{1}{(1 - q_n^{a_n} z)}.$$

Нетрудно заметить, что $H(z; q)$ можно представить в следующем виде:

$$H(z; q) = \sum_{|t|=x} s_q(x) z^x.$$

Так, $s_q(x)$ может быть найдена по известной формуле Коши [9]:

$$s_q(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{H(z;q)dz}{z^{x+1}},$$

где $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = \varepsilon\}$.

Для нахождения интеграла воспользуемся вычетами (см., например, [7], [9], [10]). Подынтегральная функция $H(z;q)\frac{1}{z^{x+1}}$ имеет особые точки в точках: $z = 0$, бесконечно удаленной точке $z = \infty$, точках $z = \frac{1}{q_k^{a_k}}, k = 1, 2, \ldots, n$. Возьмем следующий контур интегрирования Γ:

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}\colon |z| < \min_{1\le k\le n}\frac{1}{q_k^{a_k}} \right\}.$$

Внутрь контура интегрирования попадает лишь одна особая точка $z = 0$. Применяя к нашему случаю теорему о полной сумме вычетов, приходим к следующему выражению для нахождения вычета в точке $z = 0$:

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{H(z;q)}{z^{x+1}} = -\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{H(z;q)}{z^{x+1}} - \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{q_k^{a_k}}}\frac{H(z;q)}{z^{x+1}}.$$

Вычет $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty}\frac{H(z;q)}{z^{x+1}}$ равен нулю, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{H(z;q)}{z^{x+1}} = -\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{q_k^{a_k}}}\frac{H(z;q)}{z^{x+1}}.$$

Найдем вычет в точке $z = \frac{1}{q_k^{a_k}}$. Эта точка для подынтегральной функции есть полюс первого порядка, а тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{q_k^{a_k}}}\frac{H(z;q)}{z^{x+1}} = \left.\frac{\frac{1}{(1-q_1^{a_1}z)(1-q_2^{a_2}z)\ldots[k]\ldots(1-q_n^{a_n}z)z^{x+1}}}{-q_k^{a_k}}\right|_{z=\frac{1}{q_k^{a_k}}} =$$

$$= \frac{-1}{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{n}\left(1-\frac{q_i^{a_i}}{q_k^{a_k}}\right)\frac{q_k^{a_k}}{q_k^{a_k(x+1)}}} = \frac{-1}{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{n}\left(1-\frac{q_i^{a_i}}{q_k^{a_k}}\right)\frac{1}{q_k^{a_k x}}} = \frac{-q_k^{a_k x}}{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{n}\frac{q_k^{a_k}-q_i^{a_i}}{q_k^{a_k}}}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{q_k^{a_k}}} \frac{H(z;q)}{z^{x+1}} = \frac{-q_k^{a_k x}}{q_k^{-a_k(n-1)} \prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} (q_k^{a_k} - q_i^{a_i})} = \frac{-q_k^{a_k(x+n-1)}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} (q_k^{a_k} - q_i^{a_i})}.$$

Итак,

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{q_k^{a_k}}} \frac{H(z;q)}{z^{x+1}} = \frac{-q_k^{a_k(x+n-1)}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} (q_k^{a_k} - q_i^{a_i})}.$$

Искомая сумма $s_q(x)$ может быть найдена как

$$s_q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{H(z;q)dz}{z^{x+1}} = \operatorname*{res}_{z=0} \frac{H(z;q)}{z^{x+1}} = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=\frac{1}{q_k^{a_k}}} \frac{H(z;q)}{z^{x+1}}.$$

Введем $W[k]$ следующим образом:

$$W(\delta[k]) = W[k] = \prod_{1\leq i<j\leq n, i,j\neq k} (\delta_j^{a_j} - \delta_i^{a_i}),$$

Предложение 2.1. Верно следующее утверждение:

$$W(\delta) = (-1)^{n-k} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (\delta_k^{a_k} - \delta_i^{a_i}) W[k]. \tag{7}$$

Доказательство предложения. Следует из вида $W(\delta)$, равно как и вида $W[k]$ – оба имеют вид определителя Вандермонда.

Перейдем непосредственно к подсчету искомой суммы.

$$S(x) = \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k = a_1 \ldots a_n x} g(t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k a_1 \ldots a_n x} W(\delta) f(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k a_1 \ldots a_n x} W(\delta) \delta^t f(0) =$$
$$= \sum_{\sum_{k=1}^{n} a_1 \ldots [k] \ldots a_n t_k a_1 \ldots a_n x} \delta_1^{t_1} \ldots \delta_n^{t_n} W(\delta) f(0) = \sum_{|t|=x} \delta_1^{a_1 t_1} \ldots \delta_n^{a_n t_n} W(\delta) f(0).$$

Из определения суммы $s_q(x)$ и формулы для ее вычисления получим следующую формулу для вычисления $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^{a_k(x+n-1)}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} (\delta_k^{a_k} - \delta_i^{a_i})} W(\delta) f(0).$$

Введем следующее обозначение:

$$W_{NL}(\delta[k], \pi[k]) = \begin{vmatrix} \pi_1^{n-1} & \dots & \delta_1^{a_1(n-2)}\pi_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_{k-1}^{n-1} & \dots & \delta_{k-1}^{a_{k-1}(n-2)}\pi_{k-1} \\ \pi_{k+1}^{n-1} & \dots & \delta_{k+1}^{a_{k+1}(n-2)}\pi_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_n^{n-1} & \dots & \delta_n^{a_n(n-2)}\pi_n \end{vmatrix}.$$

Расспишем $W(\delta)$ по формуле (7) и подставим в предыдущее равенство:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^{a_k(x+n-1)}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} (\delta_k^{a_k} - \delta_i^{a_i})} (-1)^{n-k} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} (\delta_k^{a_k} - \delta_i^{a_i}) W[k] f(0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \delta_k^{a_k(x+n-1)} W[k] f(0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \delta_k^{a_k(n-1)} W[k] \delta_k^{a_k x} f(0).$$

Рассмотрим отдельно $W[k]\delta_k^{a_k x} f(0)$:

$$W[k]\delta_k^{a_k x} f(0) = \prod_{1\leq i<j\leq n, i,j\neq k} (\delta_j^{a_j} - \delta_i^{a_i}) \delta_k^{a_k x} f(0) =$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n, i,j\neq k} (\delta_j^{a_j}\pi_i - \delta_i^{a_i}\pi_j) \pi_1\pi_2\dots[k]\dots\pi_n f(a_1x, a_2x, \dots, a_nx) =$$

$$= W_{NL}(\delta[k], \pi[k]) f(a_1x, a_2x, \dots, a_nx).$$

Подставим найденное выражение в $S(x)$, тогда

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \delta_k^{a_k(x+n-1)} W[k] f(0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \delta_k^{a_k(n-1)} W_{NL}(\delta[k], \pi[k]) f(a_1 x, a_2 x, \dots, a_n x).$$

Воспользуемся видом $W_{NL}(\delta, \pi)$ и получим искомую формулу:

$$S(x) = W_{NL}(\delta, \pi) f(a_1 x, a_2 x, \dots, a_n x).$$

Получим следствие теоремы 2.1. Заметим, что в теореме фактически предполагается известной дискретная первообразная функция $f(t_1, \dots, t_n)$ для заданной изначально функции $g(t_1, \dots, t_n)$. В этой связи возникает вопрос о нахождении какой-либо дискретной первообразной функции.

Существуют различные подходы для решения поставленной проблемы, но в настоящем разделе и работе вопрос решается с помощью рассмотрения соответствующей задачи Коши.

Задача Коши определялась ранее как разностное уравнение с начальными данными:

$$P(\delta) f(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{Z}_+^n,$$
$$f(t) = \varphi(t), \quad t \in \{t \in \mathbb{Z}_+^n : t \ngeq \beta\}.$$

В частном рассматриваемом случае роль полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ играет оператор $W(\delta)$, а роль правой части играет функция, значения которой мы суммируем.

Рассмотрим отдельно полиномиальный разностный оператор $W(\delta)$:

$$W(\delta) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\delta_j^{a_j} - \delta_i^{a_i}).$$

Выберем в разложении $W(\delta)$ в сумму моном наибольшей степени. Такой моном существуют и единственен ввиду вида $W(\delta)$. Сформируем мультииндекс β по правилу: первая координата равна степени δ_1 этого выделенного монома, вторая координата β соответствует степени δ_2 и т. д.

Заметим, что при данных условиях справедлива теорема 1.1. Таким образом, для заданной функции начальных данных дискретная первообразная существует и единственна. В целом же это означает справедливость применения подхода Эйлера для решения рассматриваемой задачи суммирования заданной функции $g(t)$.

В [3], [4], [6] показано, что, если для любой правой части и любой функции начальных данных решение существует и единственно, то его можно выразить в виде конечной суммы с использованием фундаментального решения. Так, существующее единственное решение может быть представлено в следующем виде:

$$f(t) = \sum_{y \geq 0, y \ngeq \beta} \varphi(y) \sum_{v \nleq y} c_v P_\beta(t+v-y) + \sum_{y \geq 0} g(y) P_\beta(t-y).$$

Следствие 2.1 получается подстановкой представленного выше выражения в формулу для суммы теоремы 2.1.

3 Задача суммирования для случая системы линейных диофантовых уравнений

В текущем разделе рассматривается некоторое обобщение суммы, рассматриваемой в предыдущей главе.

Рассмотрим обобщение на случай, когда условие задано в виде системы линейных уравнений рассматриваемого ранее вида, а именно, рассмотрим сумму следующего вида:

$$S(x) = \sum_{\substack{a_2^{(1)}\ldots a_{k_1}^{(1)} t_1^{(1)} + \cdots + a_1^{(1)} \ldots a_{k_1-1}^{(1)} t_{k_1}^{(1)} = a_1^{(1)} \ldots a_{k_1}^{(1)} x_1 \\ \cdots \\ a_2^{(m)}\ldots a_{k_m}^{(m)} t_1^{(m)} + \cdots + a_1^{(m)} \ldots a_{k_m-1}^{(m)} t_{k_m}^{(m)} = a_1^{(m)} \ldots a_{k_m}^{(m)} x_m}} g(t^{(1)}, \ldots, t^{(m)}). \tag{8}$$

Коэффициенты $a_i^{(j)} \neq 1$, $i = 1, \ldots, k_i$, $j = 1, \ldots, m$ в каждой отдельной строчке под знаком суммы являются неотрицательными попарно взаимно простыми числами, а $t^{(j)} = (t_1^{(j)}, \ldots, t_{k_j}^{(j)})$. Каждое отдельно взятое уравнение накладывает условие типа равенства на соответвующий набор переменных.

Задачи, сводящиеся к суммам данного вида, довольно часто встречаются в комбинаторном анализе в чистом или неявном виде. В этой связи существует некоторая необходимость в их изучении. В конце данного раздела будет приведена формула, позволяющая вычислить данную сумму.

Уточним вид операторов $W(\delta)$ и W_{NL} в новой постановке задачи.

Оператор $\delta_i^{(j)}$ действует на функцию $g(t^{(1)}, \ldots, t^{(m)})$, где $t^{(i)} = (t_1^{(i)}, \ldots t_{k_i}^{(i)})$ следующим образом:

$$\delta_i^{(j)} g = g(t^{(1)}, \ldots, t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)} + 1, t_{i+1}^{(j)}, \ldots, t^{(m)}).$$

Аналогично действует оператор $\pi_i^{(j)}$.

Введем $W(\delta)$ как

$$W(\delta) = \prod_{1 \le i < j \le k_1} \left(\left(\delta_j^{(1)}\right)^{a_j^{(1)}} - \left(\delta_i^{(1)}\right)^{a_i^{(1)}} \right) \cdots \prod_{1 \le i < j \le k_m} \left(\left(\delta_j^{(m)}\right)^{a_j^{(m)}} - \left(\delta_i^{(m)}\right)^{a_i^{(m)}} \right),$$

т. е.

$$W(\delta) = W(\delta^{(1)}) \dots W(\delta^{(m)}).$$

Аналогично введем дискретный оператор Ньютона-Лейбница W_{NL} для новой задачи.

Определение 3.1. Оператор

$$W_{NL}(\delta, \pi) = \prod_{1 \le s \le m} \prod_{1 \le i < j \le k_s} \left(\left(\delta_j^{(s)}\right)^{a_j^{(s)}} \pi_i - \left(\delta_i^{(s)}\right)^{a_i^{(s)}} \pi_j \right)$$

будем называть дискретным аналогом оператора Ньютона-Лейбница. Можно заметить, что он может быть записан в следующем виде:

$$W_{NL}(\delta, \pi) = W_{NL}(\delta^{(1)}, \pi^{(1)}) \dots W_{NL}(\delta^{(m)}, \pi^{(m)}).$$

Сформулируем теорему, выражающую сумму через конечный набор значений дискретной первообразной.

Теорема 3.1. Для каждого фиксированного $j = 1, \dots, m$ зададим попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)} \neq 1$ и целые неотрицательные x_i, $i = 1, \dots, m$. Пусть задана функция $g = g(t^{(1)}, \dots, t^{(m)})$, где $t^{(i)} = (t_1^{(i)}, \dots, t_{k_i}^{(i)})$. Если функция $f = f(t^{(1)}, \dots, t^{(m)})$ является дискретной первообразной для функции g, т. е.

$$W(\delta) f(t) = g(t),$$

то

$$S(x) = W_{NL}(\delta, \pi)\ f(t_1^{(1)}, \dots, t_{k_1}^{(1)}, \dots, t_1^{(m)}, \dots, t_{k_m}^{(m)})\Big|_{t_i^{(j)} = a_i^{(j)} x_j, i = 1 \dots k_j, j = 1 \dots m}.$$

Сформулируем соответствующее следствие, решающее вопрос о существовании решения.

Следствие 3.1. Для каждого фиксированного $j = 1, \dots, m$ зададим попарно взаимно простые целые неотрицательные числа $a_1^{(j)}, \dots, a_{k_j}^{(j)} \neq 1$ и целые неотрицательные x_i, $i = 1, \dots, m$. Пусть задана функция $g = g(t^{(1)}, \dots, t^{(m)})$, где $t^{(i)} = (t_1^{(i)}, \dots, t_{k_i}^{(i)})$, и функция начальных данных $\varphi(t) = \varphi(t^{(1)}, \dots, t^{(m)})$.

Пусть функция $f = f(t^{(1)}, \ldots, t^{(m)})$ задана как

$$f(t) = \sum_{y \geq 0, y \ngeq \beta} \varphi(y) \sum_{v \nleq y} c_v P_\beta(t + v - y) + \sum_{y \geq 0} g(y) P_\beta(t - y),$$

где P_β – фундаментальное решение, соответствующее мультииндексу β. Верно, что

$$S(x) = W_{NL}(\delta, \pi)\ f(t_1^{(1)}, \ldots, t_{k_1}^{(1)}, \ldots, t_1^{(m)}, \ldots, t_{k_m}^{(m)})\Big|_{t_i^{(j)} = a_i^{(j)} x_j, i=1\ldots k_j, j=1\ldots m}.$$

Замечание 3.1. В следствии 3.1 мультииндекс β выбирается определенным образом. В разложении $W(\delta)$ в сумму выделяется моном максимальной степени. Такой моном существует и единственен ввиду вида $W(\delta)$. Координаты мультииндекса β соответствуют степеням $\delta_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, k_j$, $j = 1, \ldots, m$ в выделенном мономе.

Доказательство теоремы. Расспишем сумму $S(x)$, воспользовавашись предположением о том, что f удовлетворяет разностному уравнению

$$W(\delta) f(t) = g(t).$$

Для краткости введем множество T целочисленных неотрицательных решений системы под знаком суммы в (8).

Итак,

$$S(x) = \sum_{t \in T} W(\delta) f(t^{(1)}, \ldots, t^{(m)}) = \sum_{t \in T} W(\delta) \left(\delta^{(1)}\right)^{t^{(1)}} \ldots \left(\delta^{(m)}\right)^{t^{(m)}} f(0) =$$

$$= \sum_{t \in T} \left(\delta^{(1)}\right)^{t^{(1)}} \ldots \left(\delta^{(m)}\right)^{t^{(m)}} W(\delta) f(0) =$$

$$= \sum_{\substack{t_1^{(1)} + \cdots + t_{k_1}^{(1)} = x_1 \\ \cdots \\ t_1^{(m)} + \cdots + t_{k_m}^{(m)} = x_m}} \left(\delta^{(1)}\right)^{a^{(1)} t^{(1)}} \ldots \left(\delta^{(m)}\right)^{a^{(m)} t^{(m)}} W(\delta) f(0)$$

В последнем равенстве, воспользовавшись формулой для вычисления $s_q(x)$ из второй главы, получим следующее:

$$\sum_{k=1}^{k_1} \frac{\left(\delta_k^{(1)}\right)^{a_k^{(1)}(x_1+k_1-1)}}{\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{k_1}\left(\left(\delta_k^{(1)}\right)^{a_k^{(1)}}-\left(\delta_j^{(1)}\right)^{a_j^{(1)}}\right)} \cdots \sum_{k=1}^{k_m} \frac{\left(\delta_k^{(m)}\right)^{a_k^{(m)}(x_m+k_m-1)}}{\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{k_m}\left(\left(\delta_k^{(m)}\right)^{a_k^{(m)}}-\left(\delta_j^{(m)}\right)^{a_j^{(m)}}\right)} \circ$$

$$\circ\, Wf(0) = \sum_{s_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{s_m=1}^{k_m} \frac{\left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}(x_1+k_1-1)}}{\prod\limits_{j=1,j\neq s_1}^{k_1}\left(\left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}}-\left(\delta_j^{(1)}\right)^{a_j^{(1)}}\right)} \circ \cdots \circ$$

$$\circ \frac{\left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}(x_m+k_m-1)}}{\prod\limits_{j=1,j\neq s_m}^{k_m}\left(\left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}}-\left(\delta_j^{(m)}\right)^{a_j^{(m)}}\right)} Wf(0).$$

Воспользуемся тем, что $W(\delta) = W(\delta^{(1)}) \ldots W(\delta^{(m)})$.

$$\sum_{s_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{s_m=1}^{k_m} \frac{\left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}(x_1+k_1-1)}}{\prod\limits_{j=1,j\neq s_1}^{k_1}\left(\left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}}-\left(\delta_j^{(1)}\right)^{a_j^{(1)}}\right)} \circ \cdots \circ$$

$$\circ \frac{\left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}(x_m+k_m-1)}}{\prod\limits_{j=1,j\neq s_m}^{k_m}\left(\left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}}-\left(\delta_j^{(m)}\right)^{a_j^{(m)}}\right)} \circ (-1)^{k_1-s_1} \prod_{j=1,j\neq s_1}^{k_1}\left(\left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}}-\left(\delta_j^{(1)}\right)^{a_j^{(1)}}\right) \circ$$

$$\circ W(\delta^{(1)}[s_1]) \ldots (-1)^{k_m-s_m} \prod_{j=1,j\neq s_m}^{k_m}\left(\left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}}-\left(\delta_j^{(m)}\right)^{a_j^{(m)}}\right) W(\delta^{(m)}[s_m]) f(0) =$$

$$= \sum_{s_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{s_m=1}^{k_m} (-1)^{k_1-s_1} \ldots (-1)^{k_m-s_m} \left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}(k_1-1)} \ldots \left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}(k_m-1)} \circ$$

$$\circ\, W(\delta^{(1)}[s_1]) \ldots W(\delta^{(m)}[s_m]) \left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}x_1} \ldots \left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}x_m} f(0).$$

Как и в теореме 2.1, заметим, что

$$W(\delta^{(1)}[s_1])\dots W(\delta^{(m)}[s_m])\left(\delta_{s_1}^{(1)}\right)^{a_{s_1}^{(1)}x_1}\dots\left(\delta_{s_m}^{(m)}\right)^{a_{s_m}^{(m)}x_m}f(0)=$$
$$=W_{NL}(\delta^{(1)}[s_1],\pi^{(1)}[s_1])\dots W_{NL}(\delta^{(m)}[s_m],\pi^{(m)}[s_m])f(ax),$$

где $f(ax)=f(a_1^{(1)}x_1,\dots,a_{k_1}^{(1)}x_1,\dots,a_1^{(m)}x_m,\dots,a_{k_m}^{(m)}x_m)$.

Подставив получившееся выражение в предпоследнее равенство, мы получим искомое выражение для нашей суммы.

$$S(x)=W_{NL}(\delta,\pi)\ f(t_1^{(1)},\dots,t_{k_1}^{(1)},\dots,t_1^{(m)},\dots,t_{k_m}^{(m)})\Big|_{t_i^{(j)}=a_i^{(j)}x_j,i=1\dots k_j,j=1\dots m}.$$

Докажем следствие 3.1. Заметим, что в полученной формуле для суммы требуется, чтобы дискретная первообразная была известна. В нашем случае она является решением разностного уравнения

$$W(\delta)f(t)=g(t).$$

Как уже говорилось ранее, существуют различные подходы к поиску решения f. Воспользуемся теоремой 1.1, рассмотрев соответствующую задачу Коши при выбранной функции начальных данных:

$$W(\delta)f(t)=g(t),\quad t\in\mathbb{Z}_+^n,$$

$$f(t)=\varphi(t),\quad t\in\{t\in\mathbb{Z}_+^n:t\ngeq\beta\}.$$

Во втором уравнении функция $\varphi(t)$ является выбранной нами функцией начальных данных.

Выберем мультииндекс β так, что его координаты суть степени монома максимальной степени в разложении $W(\delta)$ в сумму. Такой моном существует и единственен ввиду вида $W(\delta)$. Координаты мультииндекса β соответствуют степеням $\delta_i^{(j)}$, $i=1,\dots,k_j$, $j=1,\dots,m$ в выделенном мономе.

Так, по теореме 1.1 решение существует и единственно, следовательно, представимо в виде:

$$f(t) = \sum_{y \geq 0, y \ngeq \beta} \varphi(y) \sum_{v \nleq y} c_v P_\beta(t + v - y) + \sum_{y \geq 0} g(y) P_\beta(t - y).$$

Подставив это выражение для решения в теорему 3.1, получим следствие 3.1.

Замечание 3.2. При всех $a_i^{(j)} = 1$ теорема 3.1 справедлива.

4 Примеры

Рассмотренные в предыдущих главах теоремы могут быть использованы для решения различных возникающих задач комбинаторики: нахождение числа решений диофантовых уравнений, числа способов разменять определенную сумму денег монетами разных достоинств, нахождение числа счастливых билетов (см. [2], [11]) и т. д.

Пример 4.1. Пусть требуется найти

$$\sum_{3t_1+2t_2=600} -4t_1 + 18t_2 + 23.$$

Видно, что здесь $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $x = 100$, $g(t) = -4t_1 + 18t_2 + 23$. Функцию f можно взять в виде $f = t_1^2 + 3t_2^2$. Тогда получим

$$S(100) = f(0, 3 * 100 + 3) - f(2 * 100 + 2, 0) = f(0, 303) - f(202, 0) = 234623.$$

Приведем примеры к замечанию 3.2. Многие задачи комбинаторики задаются в таком виде. Следующие два примера фактически решают задачу о числе счастливых билетов.

Пример 4.2. Найдем

$$S(x_1, x_2) = \sum_{\substack{t_1^{(1)}+t_2^{(1)}+t_3^{(1)}=x_1 \\ t_1^{(2)}+t_2^{(2)}+t_3^{(3)}=x_2}} 1.$$

Легко заметить, что функцию f можно взять в виде $f = \frac{1}{4}t_1^2 t_2 t_4^2 t_5$, тогда $S(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2+3x_1+2)(x_2^2+3x_2+2)}{4}$.

Пример 4.3. Билет называется счастливым, если сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех. Найдем, например, число билетов с суммой первых трех цифр равной 25. Составим следующую сумму:

$$P_{25} = \sum_{\substack{t_1^{(1)}+t_2^{(1)}+t_3^{(1)}=25 \\ t_1^{(2)}+t_2^{(2)}+t_3^{(3)}=25}} 1 - |A|\,. \tag{9}$$

В формуле (9) A – множество $(t_1^{(1)}, \ldots, t_3^{(2)})$, $t_1^{(1)}+t_2^{(1)}+t_3^{(1)} = t_1^{(2)}+t_2^{(2)}+t_3^{(3)} = 25$, но хотя бы одно $t_i^{(j)} \geq 10$.

Найдем мощность A, воспользовавшись известной формулой включения-исключения (см. [5], [8]):

$$|A| = \sum_{i=1}^{6} S(15, 25) - (6S(5, 25) + 9S(15, 15)) + 18S(5, 15) - 9S(5, 5),$$

где $S(x_1, x_2)$ вычисляются по формуле из Примера 4.2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе настоящей работы были рассмотрены сведения из теории функций векторного разбиения с весом, разностных уравнений, производящих функций, продемонстрированы некоторые их возможности для решения задач перечислительной комбинаторики.

Во второй главе с помощью метода Эйлера была получена формула для вычисления функции векторного разбиения с весом в случае условия типа равенства в форме специального вида линейного диофантового уравнения. Разрешен вопрос существования решения соответствующего разностного уравнения, связанный с применением метода Эйлера.

В третьей главе с помощью метода Эйлера была получена формула для вычисления функции векторного разбиения с весом в случае условия в форме системы рассматриваемых линейных диофантовых уравнений. Вопрос справедливости метода для решения задачи был разрешен.

В четвёртой главе приведены примеры, демонстрирующие применение теорем.

Результаты работы могут быть использованы для решения практических задач, например, задач комбинаторного анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : Гос. издательство физико-математической литературы, 1959. – 400 с.

2. Ландо, С. К. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо. – М.: МЦНМО, 2007. – 144 с.

3. Лейнартас, Е. К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений / Е. К. Лейнартас // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 335-340.

4. Лейнартас, Е. К. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов/ Е. К. Лейнартас, М. С. Рогозина // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 1. – С. 111-121.

5. Нефедов, В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – М.: МАИ, 1992. – 264 с.

6. Рогозина, М. С. О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора / М. С. Рогозина // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2014. – Т. 14, № 3. – С. 83-94.

7. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М.: Наука, 1989. – 480 с.

8. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 440 с.

9. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1: Функции одного переменного: Учебник / Б. В. Шабат. – М.: ЛЕНАНД, 2020. – 344 с.

10. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2: Функции нескольких переменных: Учебник / Б. В. Шабат. – М.: ЛЕНАНД, 2022. – 472 с.

11. Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – М.: Наука, 1986. – 580 с.

12. Brion, M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. – Vol. 10, Iss. 4. – P. 797-833.

13. Grigoriev, A. A. Summation of Functions and Polynomial Solutions to a Multidimensional Difference Equation / A. A. Grigoriev, E. K. Leinartas, A. P. Lyapin // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2023. – Vol. 16, Iss. 2. – P. 153-161.

14. Leinartas, E. K. The discrete analog of the Newton-Leibniz formula in the problem of summation over simplex lattice points / E. K. Leinartas, O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2019. – Vol. 12, Iss. 4. – P. 503-508.

15. Lyapin, A. P. Generating functions for vector partition functions and a basic recurrence relation / A. P. Lyapin, Chandragiri Sreelatha // Journal of Difference Equations and Applications. – 2019. – Vol. 25, Iss. 7. – P. 1052-1061.

16. Pukhlikov, A. V. The Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes / A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii // St. Petersburg Mathematical Journal. – 1993. – Vol. 4, Iss. 4. – P. 789-812.

17. Sturmfels, B. On Vector Partition Functions / B. Sturmfels // Journal of Combinatorial Theory, Series A. – 1995, Vol. 72, Iss. 2. – P. 302–309.

18. Leinartas E.K. On the Rationality of Multidimensional Recursive Series / E. K. Leinartas, A. P. Lyapin // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2009, Vol. 2, Iss. 4. – P. 449–455.

19. Akhtamova S.S. An approach to multidimensional generating series / S. S. Akhtamova, T. Cuchta, A. P. Lyapin // Mathematics – 2024, Vol. 12. – P. 143.

20. Lyapin A.P. Recurrence Relations For The Sections Of The Generating Series Of The Solution To The Multidimensional Difference Equation / A. P. Lyapin, S. S. Akhtamova // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki – 2021, Vol. 31. Iss. 3. – P. 414–423.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
А. Цих /А. К. Цих
«20» 06 2024.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО РАЗБИЕНИЯ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Руководитель 20.06.2024 доцент, кандидат физико-математических наук А. П. Ляпин

Выпускник 20.06.2024 В. А. Успенский

Нормоконтролер 20.06.2024. Т. Н. Шипина

Красноярск 2024