



## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Теоретическая часть.....	4
1.1 Уравнение неразрывности .....	4
1.2 Уравнение движения в напряжениях .....	7
1.3 Уравнение Бернулли для реальной жидкости .....	8
1.4 Уравнение Навье-Стокса .....	14
1.5 Подходы к решению задач турбулентного движения жидкости.....	20
1.6 Уравнения движения турбулентных потоков.....	23
1.7 Модели турбулентности .....	29
2 Иллюстрация уравнения Бернулли на гидравлическом стенде .....	33
2.1 Описание гидравлического стенда .....	33
2.2 Порядок проведения экспериментов .....	36
2.3 Результаты и анализ экспериментальных данных по изучению уравнения Бернулли .....	37
3 Математическое моделирование стенда по изучению закона Бернулли .....	43
3.1 Математическая модель .....	43
3.2 Геометрия и граничные условия.....	44
3.3 Численное исследование течения в стенде по изучению закона Бернулли .....	46
4 Заключение .....	52
5 Список использованных источников .....	53

## **ВВЕДЕНИЕ**

Уравнение Бернулли имеет большое значение в гидравлике и технической гидродинамике: оно используется при расчётах трубопроводов, насосов, при решении вопросов, связанных с фильтрацией.

Целью выпускной квалификационной работы является совершенствование техники эксперимента по изучению закона Бернулли.

Для достижения указанной цели в работе поставлены и решены следующие задачи:

- Изучение основных законов гидродинамики;
- Построение энергетических графиков (пьезометрической и энергетической линии) по экспериментальным данным, полученным на стенде по изучению закона Бернулли;
- Разработка математической модели процессов гидродинамики в трубе Вентури гидродинамического стенда;
- Проведение численного исследования течения в стенде по изучению закона Бернулли;
- Анализ полученных расчетных и экспериментальных данных.

# 1 Основные уравнения гидродинамики

## 1.1 Уравнение неразрывности

Перенос различных величин, например, жидкости или газа, описывается уравнением неразрывности. Данная формула применяется к жидкой среде и описывает, как жидкость сохраняет массу при движении. Уравнение неразрывности отражает фундаментальный закон природы, если быть точнее – закон сохранения массы. Получим уравнение неразрывности [1]:

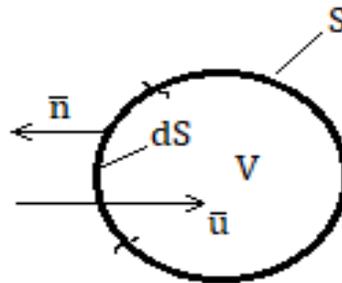


Рисунок 1 – Объем V, ограниченный поверхностью S

Представим фигуру объемом V, которая ограничена поверхностью S. Выделим элемент поверхности dS. Пусть  $\vec{n}$  – орт внешней нормали, а  $\vec{u}$  – вектор скорости. Через выделенный элемент dS в единицу времени внутрь объема проникает масса жидкости:

$$-\rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.1)$$

Отрицательное значение присутствует, потому что направления  $\vec{u}$  и  $\vec{n}$  являются противоположными. Масса, которая каждую секунду проникает в объем через всю поверхность:

$$- \iint \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.2)$$

Если посмотреть с другой стороны, жидкость, втекающая в объем, приводит к изменению её массы. При этом, поскольку выделенный объем является постоянным, изменение массы может происходить только за счет изменения ее плотности. Тогда, скорость изменения массовой составляющей можно представить:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV \quad (1.3)$$

либо с учетом того, что  $V = const$ , можно записать

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (1.4)$$

Очевидно, что изменение массы внутри объема должно быть равно массе, поступившей в него извне, т.е.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.5)$$

Применяя преобразование Гаусса-Остроградского

$$\iint_S n_x \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} dV$$

$$\iint_S n_y \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} dV \quad (1.6)$$

$$\iint_S n_z \vec{R} dS = \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} dV,$$

Извлекаем, что:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV \quad (1.7)$$

либо:

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right] dV = 0. \quad (1.8)$$

Равенство нулю интеграла возможно лишь при условии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) является уравнением неразрывности или же уравнением сохранения массы. Так как при выводе данного уравнения не производились ограничения, то данное уравнение справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движений сжимаемой и несжимаемой жидкости. Уравнение неразрывности относится к числу фундаментальных уравнений механики жидкости.

Рассмотрим частные случаи. При установившемся движении все производные по времени равны нулю, что следует из самого определения этого понятия, поэтому:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1.10)$$

Если движение установившееся и жидкость несжимаема, т.е.  $\rho = \text{const}$ , то:

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad (1.11)$$

Либо в проекциях на декартовы оси координат:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.12)$$

## 1.2 Уравнение движения в напряжениях

Получим наиболее общее уравнение, связывающее поверхностные и массовые силы – так называемое уравнение движения в напряжениях [2]. Уравнение движения для жидкой частицы, масса которой  $\rho dV$  и поверхность  $dS$ :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \rho \vec{F} dV + \vec{p}_n dS, \quad (1.13)$$

где  $\vec{F}$  – плотность распределения массовых сил,

$\vec{p}_n$  – тензор напряжений.

Для всего движущегося объема ( $V$ ), поверхность которого  $S$ , имеем

$$\iiint \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint \rho \vec{F} dV + \iint \vec{p}_n dS \quad (1.14)$$

Преобразуем поверхностный интеграл в правой части в объемный с учетом того, что тензор напряжений имеет вид:

$$\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z \quad (1.15)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – направляющие косинусы.

Используя уравнения (1.6), получаем

$$\iint_S \vec{p}_n dS = \iiint_V \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV \quad (1.16)$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем

$$\iiint_V \left[ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{F} - \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0 \quad (1.17)$$

Но так как  $dV \neq 0$ , а объем  $V$  выбран произвольно, то

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \quad (1.18)$$

Это и есть уравнение движения в напряжениях.

В проекциях на декартовы оси координат можем записать:

$$\frac{du_x}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{du_y}{dt} = Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (1.19)$$

$$\frac{du_z}{dt} = Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right)$$

где  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$  – нормальные напряжения сжатия,

$\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – касательные напряжения.

### 1.3 Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Идеальная жидкость – это идеализированная жидкость, в которой отсутствует свойство вязкости и внутреннее трение, то есть, между двумя соседними слоями нет касательных напряжений.

Уравнения движения идеальной жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях, положив в них все производные от  $\tau$  равными нулю и заменив нормальные напряжения давлениями, имея в виду, что  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ .

Таким образом, уравнения гидродинамики принимают вид:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt} \quad (1.20)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}$$

Данная система уравнений называется системой дифференциальных уравнений Эйлера для гидродинамики. Рассматриваемая система связывает физические величины такие, как давление и скорость в движущейся идеальной жидкости.

Получим из системы уравнений (1.20) уравнение Бернулли для идеальной жидкости. Для обеспечения математической строгости необходимо бы доказать, что вдоль линии тока проекции вектора скорости могут быть представлены не как частные, а как полные производные от соответствующих координат частицы. Но при таком выводе уравнения Бернулли утратил бы свою простоту.

Рассмотрим движение элементарной струйки малого сечения вдоль линии тока. Будем считать, что движение установившееся, а из массовых сил действует только сила тяжести. В этом случае уравнения Эйлера принимают вид:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt} \tag{1.21}$$

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}$$

Умножим первое уравнение системы на  $dx$ , второе на  $dy$ , третье на  $dz$  и сложим. В результате получим:

$$-g dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{\partial p}{\partial y} dy - \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz \tag{1.22}$$

Так как мы рассматриваем движение по линии тока, то при установившемся движении траектории частиц совпадают с линиями тока и имеют место следующие соотношения  $dx = u_x dt$ ,  $dy = u_y dt$ ,  $dz = u_z dt$ . В этом случае правая часть принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz &= \frac{du_x}{dt} u_x dt + \frac{du_y}{dt} u_y dt + \frac{du_z}{dt} u_z dt = \\ &= u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = d\left(\frac{u_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{u_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{u_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{u^2}{2}\right); \end{aligned} \quad (1.23)$$

Так как давление зависит только от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то выражение в левой части в скобках представляет полный дифференциал:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{\partial p}{\partial y} dy - \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp. \quad (1.24)$$

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) + g dz + \frac{1}{\rho} dp = 0$$

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) + dgz + d\frac{1}{\rho} p = 0 \quad (1.25)$$

$$d\left(\frac{u^2}{2} + gz + \frac{1}{\rho} p\right) = 0$$

Интегрируя его, получим

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{u^2}{2} = const. \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) является уравнением Бернулли. Данное уравнение выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости, т.е. сумма потенциальной и кинетической энергий при движении жидкости неизменна.

Удельная потенциальная энергия положения частицы относительно плоскости сравнения в поле сил земного тяготения:

$$E_{\text{пл}} = gz \quad (1.27)$$

Удельная потенциальная энергия давления:

$$E_{\text{д}} = gh_p = \frac{p_m}{\rho} \quad (1.28)$$

Частица, находящаяся под действием избыточного гидростатического давления  $p_m$  может подниматься на высоту  $h_p$ , т.е. она обладает потенциальной энергией  $gh_p$ .

Полная кинетическая энергия частицы жидкости массой  $m$ , движущейся со скоростью  $\omega$ , равна  $E_{\text{кн}} = \frac{m\omega^2}{2}$ , а удельная кинетическая энергия  $E_{\text{кн}} = \frac{u^2}{2}$ .

Разделив все члены уравнения (1.26) на ускорение свободного падения, получим уравнение Бернулли, все члены которого измеряются в единицах длины (м):

$$H_{\text{п}} = z + \frac{p}{g\rho} + \frac{u^2}{2g} = \text{const} \quad (1.29)$$

Первое слагаемое  $z$  представляет собой геометрический напор, т.е. высоту расположения данного сечения потока над некоторой плоскостью сравнения 2.

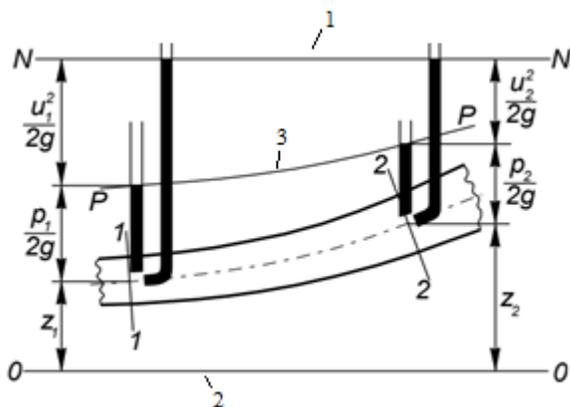
Второе слагаемое  $\frac{p}{g\rho}$  – пьезометрическая высота, соответствующий гидростатическому давлению  $p$  в рассматриваемой точке. Пьезометрическая высота – есть расстояние от центра тяжести живого сечения потока до уровня жидкости в пьезометре.

Третье слагаемое  $\frac{u^2}{2g}$  называется скоростным напором потока. Данное выражение даёт ту высоту, с которой должно свободно упасть тело, чтобы, падая в пустоте приобрести скорость  $u$ . Скоростной напор определяется только линейной скоростью потока и не зависит от рода жидкости.

Таким образом, сумма трех слагаемых, входящих в уравнение Бернулли, является полным напором жидкости  $H_{\text{п}}$  в данном сечении.

Геометрический смысл уравнения Бернулли (рисунок 2) характеризует, что при установившемся движении жидкости, сумма трёх высот, или же напоров, геометрический, пьезометрической и обусловленной скоростным напором есть величина постоянная вдоль потока жидкости. Поэтому, линия полного напора параллельна плоскости сравнения.

Для горизонтального напорного потока справедливо положение: где больше скорость, там меньше давление и, наоборот, где больше давление, там меньше скорость.



1 – напорная линия; 2 – плоскость (линия отсчета); 3 – пьезометрическая линия, лежащая ниже напорной на величину скоростного напора в данном сечении

Рисунок 2 – Диаграмма уравнения Бернулли

Из рисунка видно, что с увеличением площади живого сечения скорость потока уменьшилась, что повлекло за собой уменьшение скоростного напора и увеличение пьезометрического.

Если объединить линией уровни жидкости в пьезометрах, то получим так называемую пьезометрическую линию, которая отстоит от линии сравнения на  $z + \frac{p}{g\rho}$  величину гидростатического напора.

Линия, которая проходит по уровням жидкости в трубках Пито, называется напорной линией или линией полной удельной энергии.

#### 1.4 Уравнение Бернулли для реальной жидкости

Из-за имеющейся в реальной жидкости свойства вязкости, происходят потери механической энергии потока, которая затрачивается на трение между слоями жидкости и об стенки канала. При этом происходит диссипация энергии, т.е. энергия, потерянная на трение, преобразуется в теплоту и идет на пополнение запаса внутренней энергии жидкости, а часть её отводится в виде тепла через стенки канала.

Реальная жидкость не сохраняет полную энергию:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{u_1^2}{2} \neq \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (1.30)$$

Уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_{1-2} \quad (1.31)$$

где  $h_{1-2}$  – потеря напора на участке 1-2.

Из-за неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока, наличием поперечных составляющих продольной скорости, влиянием центробежных сил, применение уравнения Бернулли затрудняется. Оно справедливо для установившихся плавно изменяющихся потоков, характеризующихся следующими особенностями:

1. Кривизна линий тока настолько мала, а радиусы закруглений настолько велики, чтобы центробежными силами можно пренебречь.

2. Гидродинамическое давление в живых сечениях распределяется по законам гидростатики, т.е. сумма  $z + \frac{p}{g\rho} = const$  для всех точек данного живого сечения.

В гидравлике расчеты обычно ведутся по средним скоростям. В этом случае уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{\alpha_1 \bar{u}_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{\alpha_2 \bar{u}_2^2}{2g} + h_{1-2}, \quad (1.32)$$

где  $\alpha$  – коэффициент Кориолиса, зависящий от неравномерности распределения скорости по живому сечению потока.

Для ламинарного течения  $\alpha = 2$ , для турбулентного  $\alpha = 1,05 \dots 1,1$ . Часто для упрощения расчетов принимают  $\alpha = 1$ .

Потери напора  $h_{тр}$  при движении жидкости складываются из потерь по длине  $h_l$  и потерь на местные сопротивления  $h_m$ , т. е.  $h_{тр} = h_l + h_m$ .

Из-за преодоления сил трениями между частицами жидкости появляются потери напора по длине, а также ограничивающими поток стенками и между различными слоями жидкости, движущимися с различной скоростью. Поэтому потери по длине существенно зависят от состояния поверхности русла и распределения скоростей в потоке.

Местные потери напора возникают только в отдельных местах потока там, где поток претерпевает местную деформацию, приводящую к изменению его скорости по величине и направлению.

## 1.5 Уравнение Навье-Стокса

Получим дифференциальные уравнения динамики вязкой жидкости, опираясь на следующие три гипотезы: линейности, однородности и изотропности [3].

Рассмотрим гипотезу линейности.

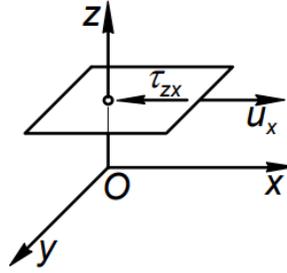


Рисунок 3 – Модель движущейся жидкости

Применяя закон Ньютона к жидкости, движущейся параллельно плоскости  $xOy$  (рисунок 3), получим

$$\tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad (1.33)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,

$\frac{\partial u_x}{\partial z}$  – поперечный градиент скорости.

Согласно теореме Гельмгольца, скорость угловой деформации относительно оси  $y$ :

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (1.34)$$

Так как движение происходит в плоскости  $xOy$ , то  $u_z = 0$  и

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (1.35)$$

и, следовательно, касательное напряжение:

$$\tau_{zx} = 2\mu\gamma_y \quad (1.36)$$

Соотношение (1.36) называется закон трения Стокса. Согласно закону, напряжения, возникающие в жидкости, в отличие от твердого тела, пропорциональны не величинам, а скоростям деформаций, и связаны с ними линейной зависимостью. При этом коэффициент пропорциональности остается неизменным и равным  $2\mu$ . Кроме того, согласно закону Стокса, касательные напряжения пропорциональны скоростям угловой деформации, а нормальные – скорости линейной деформации, т.е.  $\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}$ .

Таким образом,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (1.37)$$

Рассмотрим теперь нормальные напряжения, возникающие от сил вязкости. Согласно закону Стокса, их можно записать в виде так называемых девиаторов напряжения, имеющих вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Полные нормальные напряжения отличаются тем, что помимо записанных выше в любой, как в вязкой, так и в невязкой жидкости, действуют и статические давления.

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (1.39)$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Выполним следующую операцию: из утроенной величины  $p_{xx}$  вычтем сумму  $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ . Это дает:

$$\begin{aligned} 3p_{xx} - (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= -3p + 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \left[ -3p + 2\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = \\ &= 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2\mu \operatorname{div}(\vec{u}) \end{aligned} \quad (1.40)$$

откуда найдем:

$$p_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{u}) + \frac{(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})}{3} \quad (1.41)$$

В качестве статического давления в вязкой жидкости принимают среднее арифметическое, т.е.  $p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$ . И, следовательно,

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{u})$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{u}) \quad (1.42)$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}(\vec{u})$$

Для несжимаемой жидкости  $div \vec{u} = 0$ , и выражения упрощаются.

Гипотеза однородности предполагает, что вид линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций одинаков для всех точек пространства.

Гипотеза изотропности – вязкая жидкость предполагается изотропной, т.е. ее свойства в любом направлении одинаковы.

Уравнения движения вязкой жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях (1.19), выполнив некоторые преобразования.

Рассмотрим лишь одну проекцию этих уравнений (1.19)

$$\frac{du_x}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

Для упрощения задачи будем считать жидкость несжимаемой ( $div \vec{u} = 0$ ), тогда

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (1.43)$$

$$\text{Касательное напряжение } \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (1.44)$$

аналогично:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x}. \quad (1.45)$$

Суммируя (1.43), (1.44), (1.45) и группируя члены, получаем:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) \quad (1.46)$$

Третий член можно записать в виде:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div}(\vec{u}) \quad (1.47)$$

но жидкость несжимаема, и  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ . Таким образом получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (1.48)$$

Выражение в скобках – оператор Лапласа  $\nabla^2 \vec{u}$ ,  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ . Окончательное получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (1.49)$$

Аналогично можно расписать и две другие проекции. Полученная система уравнений движения вязкой жидкости и носит название системы уравнений Навье-Стокса.

В векторной форме можно записать:

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.50)$$

Уравнения Навье-Стокса отличаются от уравнений движения Эйлера членом  $(\nu \nabla^2 \vec{u})$ , учитывающим действие сил вязкого трения.

Три уравнения Навье-Стокса плюс уравнение неразрывности образуют замкнутую систему. Плотность и вязкость, в этом уравнении, считаются известными величинами, а

проекции массовых сил задаются условиями конкретной задачи. Целью гидродинамического расчета является нахождение полей скоростей и давлений.

Уравнения Навье-Стокса относятся к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных из их свойств – нелинейность, обусловленная наличием конвективных членов ускорения. До настоящего времени вследствие практически непреодолимых математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье-Стокса в их полном виде, т.е. при сохранении всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость.

### 1.6 Подходы к решению задач турбулентного движения жидкости

Ламинарный режим течения сохраняется при небольших числах Рейнольдса и с их увеличением переходит в турбулентный режим. Турбулентность является случайным процессом. Но не смотря на случайность, существуют характерные картины течения при рассеивании вихрей – турбулентные структуры (рисунок 4).

При турбулентности весь процесс разбивается на два больших этапа: возникновение турбулентных вихрей (например, от большой скорости потока) и рассеяние (вихри начинают уменьшаться, до того момента, пока не исчезнут).

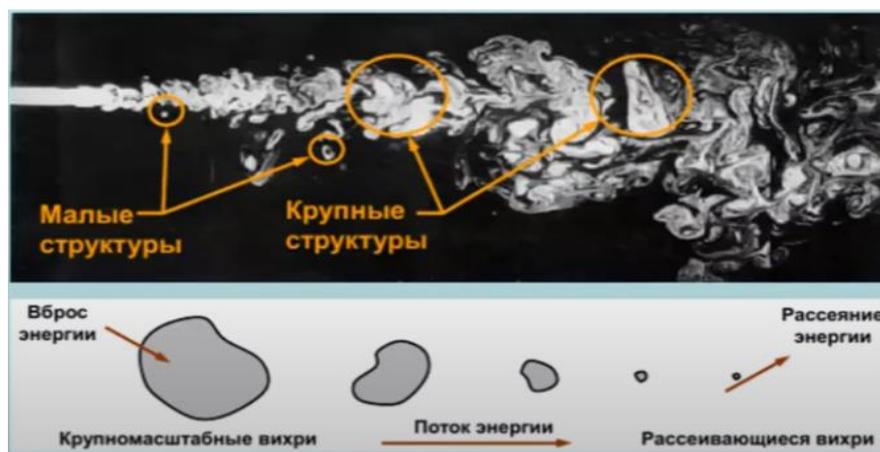


Рисунок 4 –Турбулентные структуры

На рисунке 5 представлено мгновенное распределение скорости при турбулентном течении. Можно заметить, что процесс образования завихрений и значение скоростей в каждой конкретной точке носит случайных характер. Данный процесс сложно смоделировать, поэтому предложен метод усреднения по времени распределения скорости.

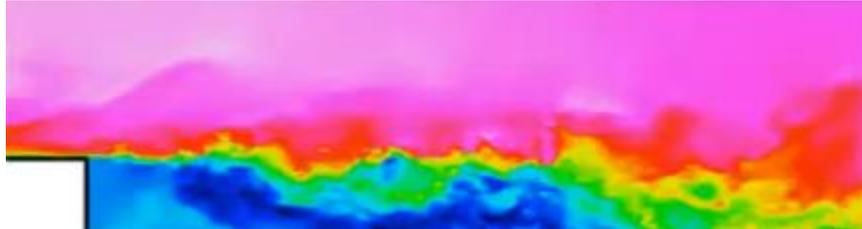


Рисунок 5 – Мгновенное распределение скорости

На рисунке 6 представлено усредненное во времени распределения скорости. В большинстве задач достаточно определить усредненную во времени скорость и интенсивность турбулентных флуктуаций.

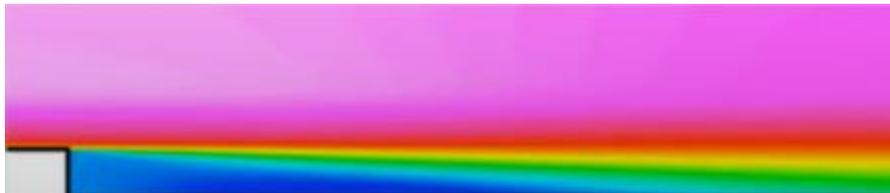


Рисунок 6 – Усредненное во времени распределение скорости

Мгновенные значения скорости турбулентного потока можно представить в виде суммы осредненного значения скорости по времени и мгновенного изменения скорости относительно осредненной скорости (пульсационная скорость):

$$U = \bar{U} + u' \quad (1.51)$$

Графического представление (1.51):

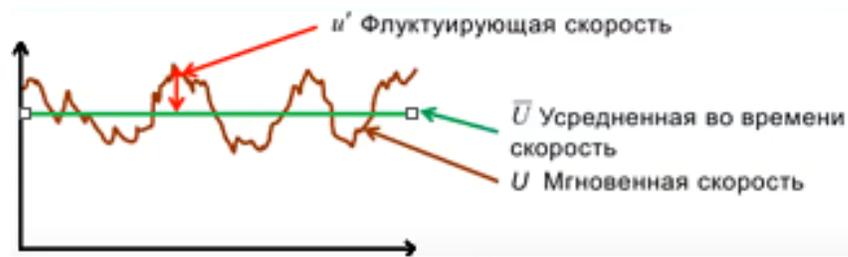


Рисунок 8 – Мгновенная скорость турбулентного потока

Энергия турбулентности  $k$  – это полусумма трех пульсационных компонентов скорости

$$k = 0,5 (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (1.52)$$

При моделировании турбулентности используются различные подходы:

1. Прямое численное решение (DNS).

Предполагается учет каждой флуктуации в потоке. Для этого сетка должна быть очень подробной, а шаг по времени очень маленьким. Этот метод позволяет исследовать только течения с низкими числами Рейнольдса и только с применением суперкомпьютеров.

2. Осреднение по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS).

Уравнения решаются относительно усредненного во времени потока и величины турбулентных флуктуаций.

3. Модель крупных вихрей (LES).

Как и в DNS, расчет производится на большом количестве временных шагов. Однако разрешаются только крупные вихри. Сетка может быть грубее, а шаги по времени больше чем в DNS, так как мелкомасштабные движения жидкости представляются моделью подсеточного масштаба.

При моделировании турбулентного течения в главе 3 будет использован RANS подход, так как он получил широкое применение при решении инженерных задач.

## 1.7. Уравнения движения турбулентных потоков

Уравнения гидродинамики вязкой жидкости можно преобразовать так, чтобы они оказались справедливыми для осредненных по времени турбулентных потоков. Это преобразование, предложенное Рейнольдсом, возможно путем замены мгновенных значений скоростей и напряжений гидродинамических сил, входящих в исходные уравнения Навье – Стокса, осредненными и пульсационными их значениями в турбулентном потоке и последующего осреднения полученных уравнений по времени.

Рассмотрим уравнение гидродинамики вязкой жидкости в проекции на ось X, развернув его левую часть:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (1.53)$$

Сумму трех слагаемых, входящих в левую часть этого уравнения для упрощения дальнейших выкладок, можно преобразовать следующим образом

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z u_x) \quad (1.54)$$

Справедливость такого преобразования станет очевидной, если учесть, что согласно уравнению неразрывности:

$$u_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.55)$$

Уравнение (1.54) справедливо при турбулентном движении для мгновенных значений скоростей и напряжений:

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x,$$

$$\begin{aligned}
u_y &= \bar{u}_y + u'_y, \\
u_z &= \bar{u}_z + u'_z, \\
p_{xx} &= \bar{p}_{xx} + p'_{xx}, \\
\tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} + \tau'_{xy}, \\
\tau_{zx} &= \bar{\tau}_{zx} + \tau'_{zx}.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Чтобы произвести операцию осреднения левой и правой частей уравнения (1.53) по времени рассмотрим способ осреднения по некоторому временному интервалу. Условие [4] для произвольной пульсирующей величины  $f(x, y, z, t)$  запишется в виде

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, y, z, t) dt \tag{1.57}$$

При этом период осреднения  $T$  предполагается таким, что осреднение по времени приводит к величине, уже не изменяющейся при повторном осреднении, т.е:

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f} \tag{1.58}$$

Если в результате осреднения уравнения (1.57), проведенного в данной точке в различные моменты времени, будут получаться одни и те же значения  $f$ , осреднённое движение может рассматриваться как стационарное, и само турбулентное движения называется квазистационарным.

Предположение (1.58) равносильно равенству нулю осредненных значений пульсаций, величины  $\bar{f}' = 0$ . Для квазистационарного турбулентного движения  $\bar{f}$  будет функцией только координат. Поэтому при наличии еще одной пульсирующей функции  $f_1$  осредненное по времени произведение, можно записать в виде:

$$\overline{ff_1} = \bar{f} \bar{f}_1 \quad (1.59)$$

По сколько при подстановке  $\bar{f}f_1$  в (1.57) величина  $\bar{f}$  может быть вынесена за знак интеграла.

Среднее значение производной некоторой функции по координате равно производной от среднего значения этой функции по той же координате, так как операции дифференцирования по координате и интегрирование по времени независимы:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad (1.60)$$

Этот вывод распространяется и на производную по времени:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \quad (1.61)$$

Теперь, учитывая (1.54), (1.60), (1.61), произведем операцию осреднения левой и правой частей уравнения (1.53):

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u_x u_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u_y u_x}) + \frac{\partial u_x}{\partial z} (\overline{u_z u_x}) = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (1.62)$$

Рассмотрим входящие в уравнения (1.62) осредненные значения произведений проекций скорости и напряжений.

Используя формулы осреднения [4], а также выражения для напряжений получим:

$$\overline{u_x u_x} = \overline{(\bar{u}_x + u_x')( \bar{u}_x + u_x' )} = \bar{u}_x \bar{u}_x + 2\bar{u}_x \overline{u_x'} + \overline{u_x' u_x'} =$$

$$\overline{u_x u_x} + 2\overline{u_x u_x'} + \overline{u_x' u_x'} \quad (1.63)$$

Учитывая, что  $\overline{f'} = 0$ ,

$$\overline{u_x u_x} = \overline{u_x u_x} + \overline{u_x' u_x'}. \quad (1.64)$$

Аналогично:

$$\overline{u_x u_y} = \overline{u_x u_y} + \overline{u_x' u_y'}. \quad (1.65)$$

$$\overline{u_x u_z} = \overline{u_x u_z} + \overline{u_x' u_z'}. \quad (1.66)$$

$$\overline{p'_{xx}} = \overline{\tau'_{yx}} = \overline{\tau'_{zx}} = 0. \quad (1.67)$$

Подставим эти выражения в уравнение (1.62):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u_x u_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u_x u_y}) + \frac{\partial u_x}{\partial z} (\overline{u_x u_z}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u_x' u_x'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u_x' u_y'}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u_x' u_z'}) = F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{p_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Учитывая, что осредненное турбулентное течение должно удовлетворять условию неразрывности:

$$\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z} = 0 \quad (1.69)$$

После перестановки трех слагаемых из левой части в правую и объединения производных получим:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = X + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \rho \overline{(u_x' u_x')}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yx} - \overline{(u_x' u_y')}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zx} - \overline{(u_x' u_z')}) \right] \quad (1.70)$$

Уравнение (1.70) показывает, что в определенном турбулентном потоке к обычным вязкостным напряжениям гидродинамических сил добавляются напряжения, зависящие от пульсаций скорости. Этими слагаемыми являются турбулентные напряжения, которые, в свою очередь, отсутствуют, если поток ламинарный. Физическая причина возникновения данных напряжений зависит от обмена количества движения между различными участками турбулентного потока, вызванным перемешиванием частиц – перенос количества движения вызывает дополнительное подтормаживание или ускорение отдельных масс жидкости, т.е. появление турбулентных напряжений.

Аналогично могут быть преобразованы уравнения гидродинамики вязкой жидкости в проекциях на оси Y и Z.

Полная совокупность турбулентных нормальных и касательных напряжений образует симметричную матрицу турбулентных напряжений:

$$\begin{pmatrix} -\overline{\rho u_x' u_x'} - \overline{\rho u_y' u_x'} - \overline{\rho u_z' u_x'} \\ -\overline{\rho u_y' u_x'} - \overline{\rho u_y' u_y'} - \overline{\rho u_z' u_y'} \\ -\overline{\rho u_z' u_x'} - \overline{\rho u_y' u_z'} - \overline{\rho u_z' u_z'} \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

Таким образом, в уравнениях движения появилось шесть новых неизвестных величин турбулентных напряжений, для вычисления которых необходимо установить связь между пульсационными и осредненными скоростями в турбулентном потоке. Эту связь устанавливают модели турбулентности. Модели полуэмпирические, так как для

получения с их помощью конкретных числовых значений необходимо знать некоторые величины, определяемые на основании экспериментов.

Для простейшего случая плоскопараллельного турбулентного потока, текущего вдоль оси X, можно записать:

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{\rho u_y' u_x'} = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \tau_n, \quad (1.72)$$

где  $\tau_n$  – турбулентное напряжение.

Полное касательное напряжение на площадке параллельной оси X, состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое соответствует вязкостным касательным напряжениям, определяемым по гипотезе Ньютона, а второе турбулентным напряжениям.

Если представить, используя предложения Буссинеска, турбулентные напряжения по аналогии с формулой Ньютона в виде:

$$\tau_n = -\overline{\rho u_y' u_x'} = \rho \nu_T \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (1.73)$$

Т.е с учетом (1.72) можно записать:

$$\tau_n = \rho(\nu + \nu_T) \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (1.74)$$

То величину  $\nu_T$ , можно рассматривать как кинематическую «турбулентную вязкость», вызванную поперечным макро-переносом количества движения конечных объемов жидкости. Если для случая движения в трубе предположить, что величина  $\nu_T$  постоянна по сечению и определить её по измеренному сопротивлению трубы, то окажется, что она в тысячу раз превосходит величину молекулярной вязкости  $\nu$ . Однако, как показывают измерения, турбулентная вязкость  $\nu_T$  – не постоянна, она меняется от

очень малых значений вблизи стенки до некоторого максимума, примерно, на половине радиуса трубы, а затем вновь достигает минимума на её оси.

## 1.8 Модели турбулентности

Рассмотрим модели турбулентности:

1. Модель Спаларта–Аллараса – это модель с одним уравнением. Это низкозатратная модель RANS, включающая уравнение переноса относительно преобразований вихревой вязкости. Данный вид модели разработан специально для аэрокосмических задач, включая стеснённое течение.

Модель имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{\nu} u_i) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu + S_{\tilde{\nu}} \quad (1.75)$$

где  $G_\nu$  – представляет генерацию турбулентной вязкости;

$Y_\nu$  – представляет разрушение турбулентной вязкости, происходящее в пристеночной области из-за блокирования стены и вязкого демпфирования;

$\tilde{\nu}$  – молекулярная кинематическая вязкость;

$\sigma_{\tilde{\nu}}$  – турбулентное число Прандтля, определенные для  $\tilde{\nu}$  – const;

$C_{b2}$  – константа.

### 2. Стандартная $k - \varepsilon$ модель (SKE)

Модель Стандартная  $k - \varepsilon$  (SKE) состоит из двух уравнений. Модели турбулентности с двумя уравнениями позволяют определять турбулентность по длине и времени, решая два отдельных транспортных уравнения. Данная модель включает транспортные уравнения для турбулентной кинетической энергии  $k$  и её скорости диссипации  $\varepsilon$ .

Поскольку стандартная модель  $k - \varepsilon$  имеет два уравнения, то она принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i k)}{\partial x_i} = -\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \varepsilon)}{\partial x_i} = C_{1\varepsilon} P_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \end{cases}, \quad (1.76)$$

где  $\overline{u_i' u_j'}$  – тензор напряжений Рейнольдса;

$\varepsilon \sim k^{\frac{3}{2}}/L_1$  – скорость диссипации;

$\mu_t = \rho \cdot C_\mu \cdot L_t \cdot \sqrt{k} = \rho \cdot C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}$  – вихревая вязкость, выраженная как результирующая турбулентная вязкость;

$\sigma_\varepsilon, \sigma_k$  – турбулентные числа Прандтля, определённые для  $\varepsilon$  и  $k$  соответственно;

$P_k$  – масштаб турбулентной скорости =  $-\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ ;

$C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_\mu$  – константы -  $C_{1\varepsilon} = 1,44, C_{2\varepsilon} = 1,92, C_\mu = 0,09$ .

Уравнение кинетической энергии  $k$  используется для определения масштаба турбулентной скорости, т.е. скорости выделения или порождения турбулентности  $P_k$ :

$$P_k = -\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \quad (1.77)$$

Порождение турбулентности фактически характеризует скорость перехода кинетической энергии из основного течения к турбулентным флуктуациям.  $P_k$  – произведение турбулентного напряжения и скорости деформации, физический смысл которого – это мощность, затрачиваемая основным потоком на вихреобразование.

Скорость диссипации  $\varepsilon$  характеризует вязкую диссипацию кинетической энергии в тепловую. Физически кинетическая энергия турбулентности  $k$  выделяется от градиентов основного течения и рассеивается под влиянием вязкости.

Стандартная  $k - \varepsilon$  модель с двумя уравнениями, разрешаемых относительно  $k$  и  $\varepsilon$ . Подходят только для полностью турбулентных течений.

Существует две модификации стандартной  $k - \varepsilon$  модели: RNG  $k - \varepsilon$  модель и RKE  $k - \varepsilon$  модель.

## 2. Стандартная $k - \omega$ модель (SKW)

Модель с двумя уравнениями, разрешаемыми относительно  $k$  и  $\omega$  (удельная скорость диссипации). Лучше работает со стеснёнными течениями и низким числом Рейнольдса.

Данная модель имеет математический вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i k)}{\partial x_i} = P_k - \rho \beta^* f_{\beta^*} k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \omega)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta f_{\beta} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_w} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \end{cases} \quad (1.78)$$

где  $\omega \sim (\varepsilon/k)$  – удельная скорость диссипации;

$\mu_t = \alpha^* \rho k / \omega$  – вихревая вязкость;

$\alpha^*$  – коэффициент, корректирующий вихревую вязкость с учетом низких чисел Рейнольдса;

$\sigma_k, \sigma_w$  – турбулентные числа Прандтля, определенные для  $k$  и  $\omega$ ;

$\beta^*, f_{\beta^*}$  – функции диссипации  $k$ ;

$\beta, f_{\beta}$  – функции диссипации  $\omega$ ;

$\alpha$  – коэффициент, корректирующий масштаб турбулентной скорости ( $\alpha = 0,52$ );

Существует модификация  $k - \omega$  модели, называемая комбинированная SST  $k - \omega$  модель.

Модель SST  $k - \omega$  использует переходную функцию (рисунок 9) для перехода от стандартной модели  $k - \omega$  вблизи стенки к модели  $k - \varepsilon$  для высоких чисел Рейнольдса во внешней части пограничного слоя. Модель SST  $k - \omega$  точно определяет точку отрыва и размеры отрывной области под воздействием обратных градиентов давления.

Основной идеей SST  $k - \omega$  является сочетание стандартной модели  $k - \omega$  в пристеночной области и стандартной модели  $k - \varepsilon$  во внешнем течении.

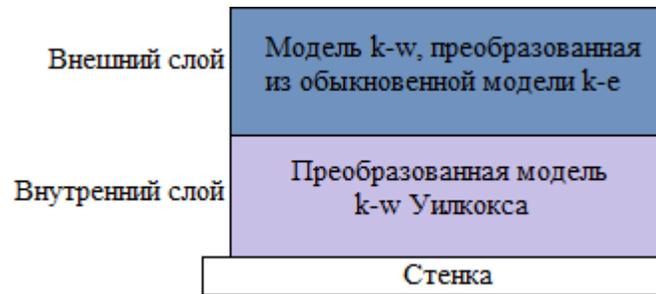


Рисунок 9 – Графическое представление переходной функции модели SST  $k - \omega$

## 2 Иллюстрация уравнения Бернулли на гидравлическом стенде

### 2.1 Описание гидравлического стенда

Эксперименты по изучению уравнения Бернулли проводились на гидравлическом стенде ТМЖ2М, который предназначен для проведения лабораторных работ по курсу «Механика жидкости и газа» в системе высшего и среднего профессионального образования.

Стенд обеспечивает возможность наглядной демонстрации гидродинамических явлений, измерения гидродинамических параметров и знакомства с методами и средствами измерения этих параметров.

Внешний вид стенда представлен на рисунке 10. Стенд выполнен в напольном исполнении.

В состав стенда входят:

- стол 1;
- щит пьезометров 2;
- коллектор 3;
- ротаметры 4;
- напорная магистраль 5 с встроенной диафрагмой 6;
- бак 7 с насосом 8 и помпой 9;
- делительная воронка 10;
- комплект исследуемых моделей МЗ.

Стол представляет собой сварную раму, на которой закреплена столешница. К боковым сторонам рамы привернуты опорные стойки со стяжкой, которые снимаются при транспортировании.

На поверхности стола закреплены два ротаметра (Р1 и Р2), верхние фланцы которых с помощью трубопроводов подведены к напорной магистрали. Нижние фланцы ротаметров через трубопроводную арматуру (вентили В1 и В2) соединены с насосом (Н1).

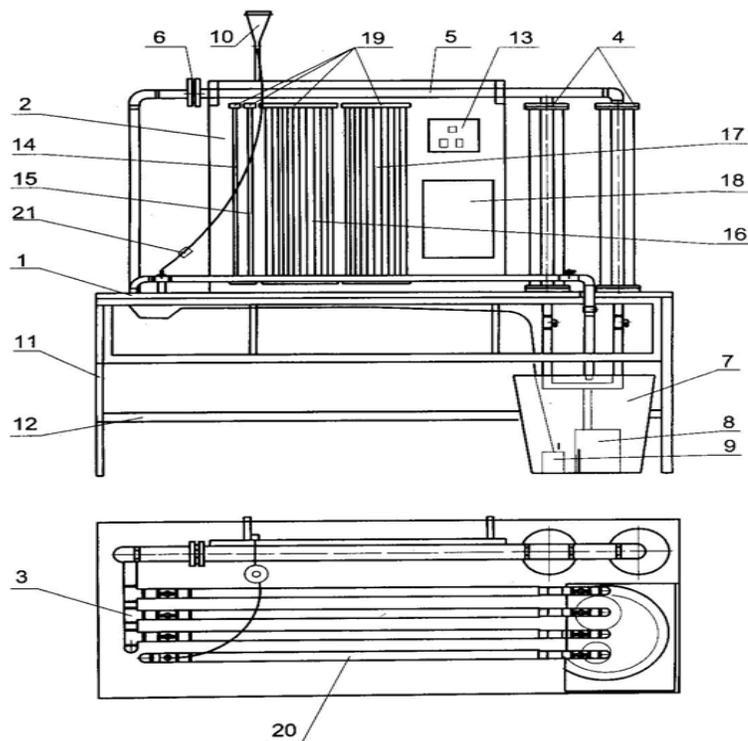
В напорную магистраль вмонтирована мерная диафрагма, контрольные точки которой с помощью гибких трубок соединены с пьезометрическими трубками щита пьезометров.

Напорная магистраль подведена к коллектору.

Щит пьезометров установлен вертикально на задних стойках стола.

На щите пьезометров расположены панель управления, четыре группы пьезометров, штатив с делительной воронкой и панель для информации. На панели управления размещены клавиши включения сети, насоса Н1 и помпы Н2.

Каждая из четырех групп пьезометров состоит из прозрачных пьезометрических трубок, верхние концы которых объединены между собой общими коллекторами. В коллекторах выведены гибкие сливные трубки с зажимами для выравнивания давлений в пьезометрах.



1 – стол; 2 – щит пьезометров; 3 – коллектор; 4 – ротаметры; 5 – напорная магистраль; 6 – диафрагма; 7 – бак; 8 – насос; 9 – помпа; 10 – делительная воронка; 11 – опорный стойки; 12 – стяжка; 13 – панель управления; 14-17 – группа пьезометров; 18 – панель информации; 19 – коллекторы;

Рисунок 10 – Графическое представление стенда ТМЖ2М

Нижние концы пьезометрических трубок каждой группы пьезометров соединены с соответствующими штуцерами диафрагмы и штуцерами исследуемых модулей М1 – М4 и М5 - М7. Но в данной работе рассматриваем только модуль М3.

Модуль М3 «Диаграмма Бернулли» представляет собой круглую трубу с участком «трубы Вентури», имеющую ряд отверстий, снабженных штуцерами для отбора давлений в исследуемых точках.

Выпускной коллектор жестко закреплен на столешнице. В него вмонтированы три вентиля В8 - В10, к которым через резьбовые втулки с помощью накидных гаек подсоединяются исследуемые модули.

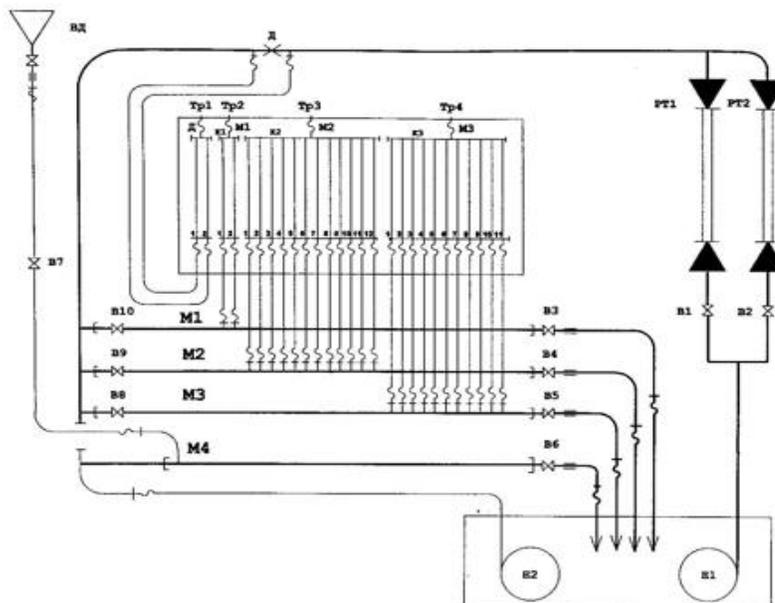


Рисунок 11 – Схема подключения модулей к коллектору

Выходы модулей М1 - М7 с помощью накидных гаек через резьбовые втулки соединены с выпускными вентилями В3 - В6, к которым подведены сливные шланги. Выпускные вентили В3 - В5 закреплены на столешнице и имеют возможность легко демонтироваться для быстрой замены исследуемых модулей.

Модули М1 - М7 представляют собой прозрачные трубки, выполненные из оргстекла. На входе и выходе каждого модуля установлены резиновые уплотнительные кольца.

## **2.2. Порядок проведения экспериментов**

Работа проводится на модуле М3 «Диаграмма Бернулли». Для выполнения необходимо:

- Включить насос Н1 на панели управления;
- Установить необходимый расход с помощью вентиля В2, В1 и выходного вентиля модуля В5.

Наблюдая за столбиком воды в пьезометрических трубках убедиться, что достигнут установившийся режим течения и произвести измерения:

- Расход воды по ротаметрам;
- Показания пьезометров.

По результатам измерений следует вычислить скорость в каждом  $i$ -том сечении трубы Вентури, а затем скоростной напор. На чертежах нанести:

- Профили трубы Вентури;
- Пьезометрические напоры для каждого  $i$ -го сечения, откладывая их по оси;
- Вычертить пьезометрическую линию;
- Скоростные напоры, суммируя их с ординатами пьезометрической линии в соответствующих сечениях;
- Провести напорную линию;

Геометрическая характеристика модуля М3 представлена на рисунке 12.

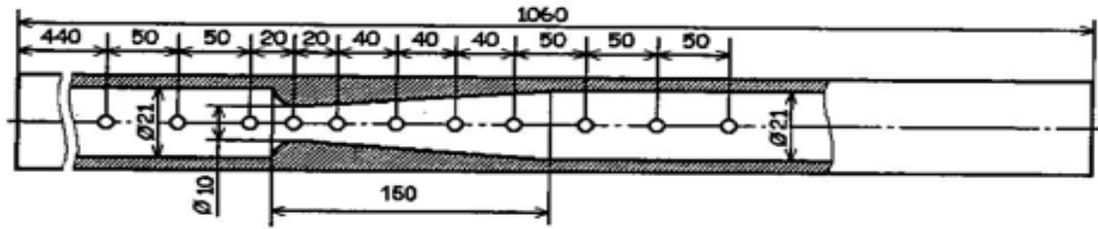


Рисунок 12 – Геометрическая характеристика модуля М3

### 2.3. Результаты и анализ экспериментальных данных по изучению уравнения Бернулли

Было проведено пять опытов при различных объёмных расходах воды –  $0,2323 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$ ;  $0,3304 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$ ;  $0,41 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$ ;  $0,5562 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$ ;  $0,7 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$ .

Результаты экспериментов и вычислений представлены в таблицах 1 – 5.

Таблица 1 – Напоры полученные при  $Q_1 = 0,2323 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}} = 64,52 \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$

№ п/п	Наименование величин	Обозначения, формулы	Сечение канала						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	Площадь сечения канала, $\text{см}^2$	$\omega$	3,46	0,78	1,02	1,60	2,32	3,16	3,46
2.	Средняя скорость, $\text{см/с}$	$U = \frac{Q}{\omega}$	18,63	82,19	62,8	40,08	27,7	20,38	18,63
3.	Пьезометрический напор, $\text{см}$	$H_{\text{п}} = \frac{p}{\rho g}$	9,1	5	6,6	7,95	8,2	8,8	8,8
4.	Скоростной напор, $\text{см}$	$H_{\text{к}} = \frac{U^2}{2g}$	0,17	3,44	2,01	0,82	0,39	0,21	0,17
5.	Полный напор, $\text{см}$	$H = \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$	9,27	8,44	8,61	8,77	8,59	8,97	8,97

По полученным напорам были построены пьезометрическая и напорная линия для каждого расхода, рисунки 13 – 17.

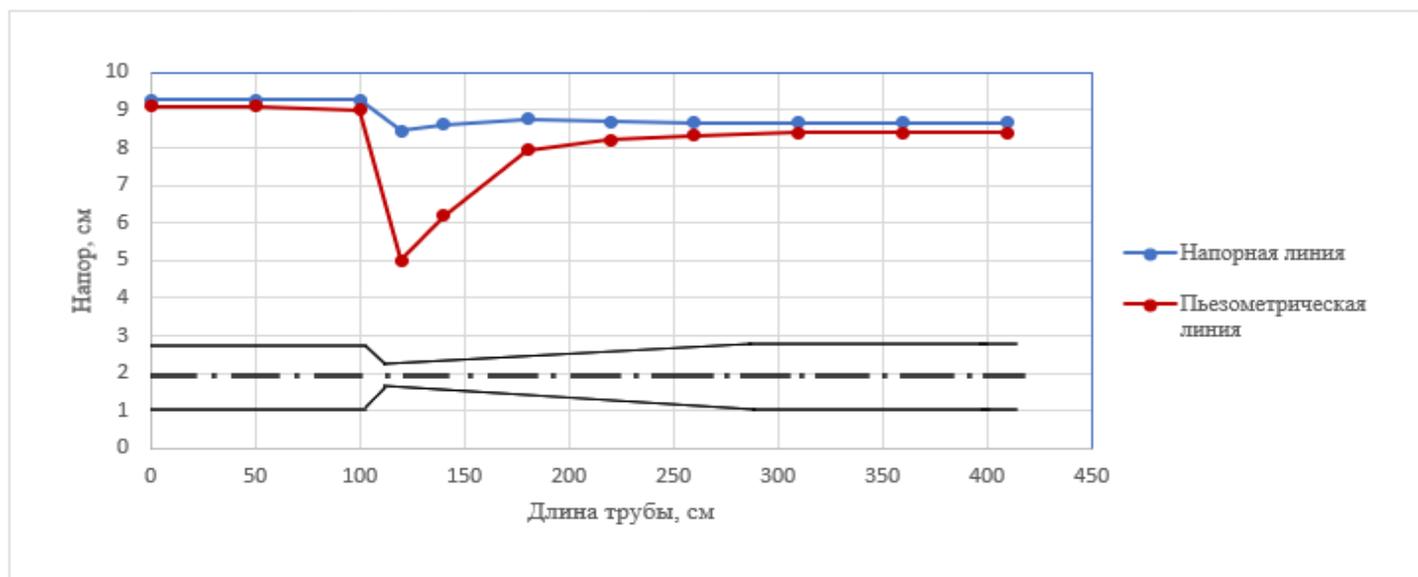


Рисунок 13 – Пьезометрическая и напорная линии при  $Q_1 = 0,2323 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$

Результаты экспериментов и вычислений представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Напоры полученные при  $Q_2 = 0,3304 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}} = 91,77 \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$

№ п/п	Наименование величин	Обозначения формулы	Сечение канала						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	Площадь сечения канала, $\text{см}^2$	$\omega$	3,46	0,78	1,02	1,60	2,32	3,16	3,46
2.	Средняя скорость, $\text{см/с}$	$U = \frac{Q}{\omega}$	26,5	116,9	89,3	57	39,51	28,97	26,5
3.	Пьезометрический напор, $\text{см}$	$H_{\text{п}} = \frac{p}{\rho g}$	27	19	22	25	25,4	26	25
4.	Скоростной напор, $\text{см}$	$H_{\text{к}} = \frac{U^2}{2g}$	0,359	6,973	4,071	1,658	0,797	0,429	0,359
5.	Полный напор, $\text{см}$	$H = \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$	27,35	25,97	26,8	26,65	26,42	26,10	25,35

По полученным напорам были построены пьезометрическая и напорная линия для каждого расхода (рисунок 14):

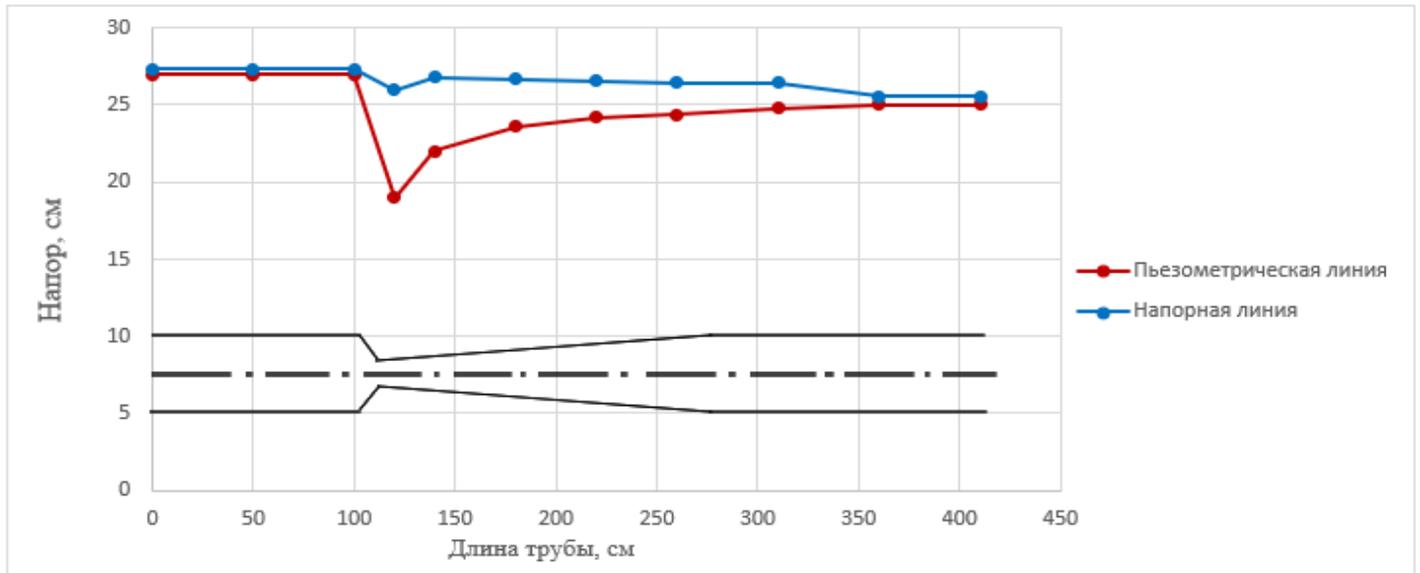


Рисунок 14 – Пьезометрическая и напорная линии при  $Q_2 = 0,3304 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$

Результаты экспериментов и вычислений представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Напоры полученные при  $Q_3 = 0,41 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}} = 113,88 \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$

№ п/п	Наименование величин	Обозначения формулы	Сечение канала						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	Площадь сечения канала, $\text{см}^2$	$\omega$	3,46	0,78	1,02	1,60	2,32	3,16	3,46
2.	Средняя скорость, $\text{см/с}$	$U = \frac{Q}{\omega}$	32,89	145,0	110,8	70,74	49,03	35,97	32,89
3.	Пьезометрический напор, $\text{см}$	$H_{\text{п}} = \frac{p}{\rho g}$	42	29	34	37,6	38,9	39,4	39,3
4.	Скоростной напор, $\text{см}$	$H_{\text{к}} = \frac{U^2}{2g}$	0,55	10,73	6,26	2,55	1,22	0,66	0,55
5.	Полный напор, $\text{см}$	$H = \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$	42,55	39,73	40,26	40,15	40,12	40,06	39,85

По полученным напорам были построены пьезометрическая и напорная линия для каждого расхода (рисунок 15):

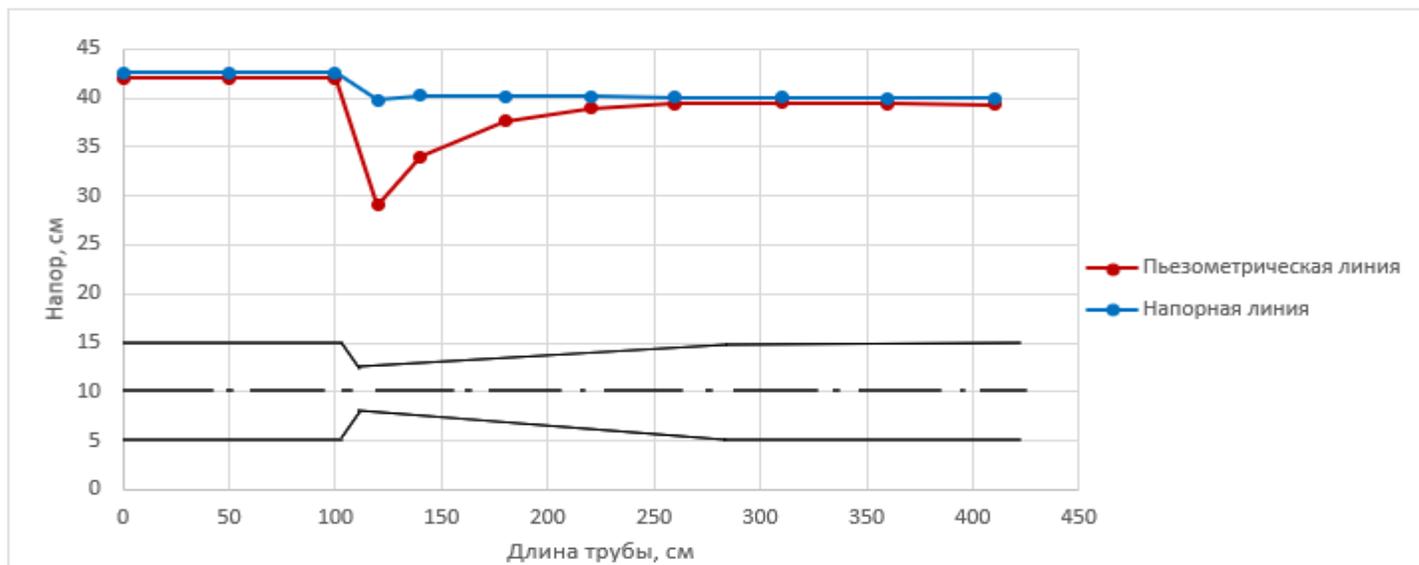


Рисунок 15 – Пьезометрическая и напорная линии при  $Q_3 = 0,41 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$

Таблица 4 – Напоры полученные при  $Q_4 = 0,5562 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}} = 154,5 \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$

№ п/п	Наименование величин	Обозначения, формулы	Сечение канала						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	Площадь сечения канала, $\text{см}^2$	$\omega$	3,46	0,78	1,02	1,60	2,32	3,16	3,46
2.	Средняя скорость, $\text{см/с}$	$U = \frac{Q}{\omega}$	44,6	196,8	150,3	95,9	66,5	48,8	44,6
3.	Пьезометрический напор, $\text{см}$	$H_{\text{п}} = \frac{p}{\rho g}$	51	29	36,6	43,4	44	44,3	45,3
4.	Скоростной напор, $\text{см}$	$H_{\text{к}} = \frac{U^2}{2g}$	1,016	19,763	11,539	5	4,01	3,51	1,016
5.	Полный напор, $\text{см}$	$H = \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$	52,01	46,76	48,09	48,04	48,01	47,81	46,31

По полученным напорам были построены пьезометрическая и напорная линия для каждого расхода (рисунок 16):

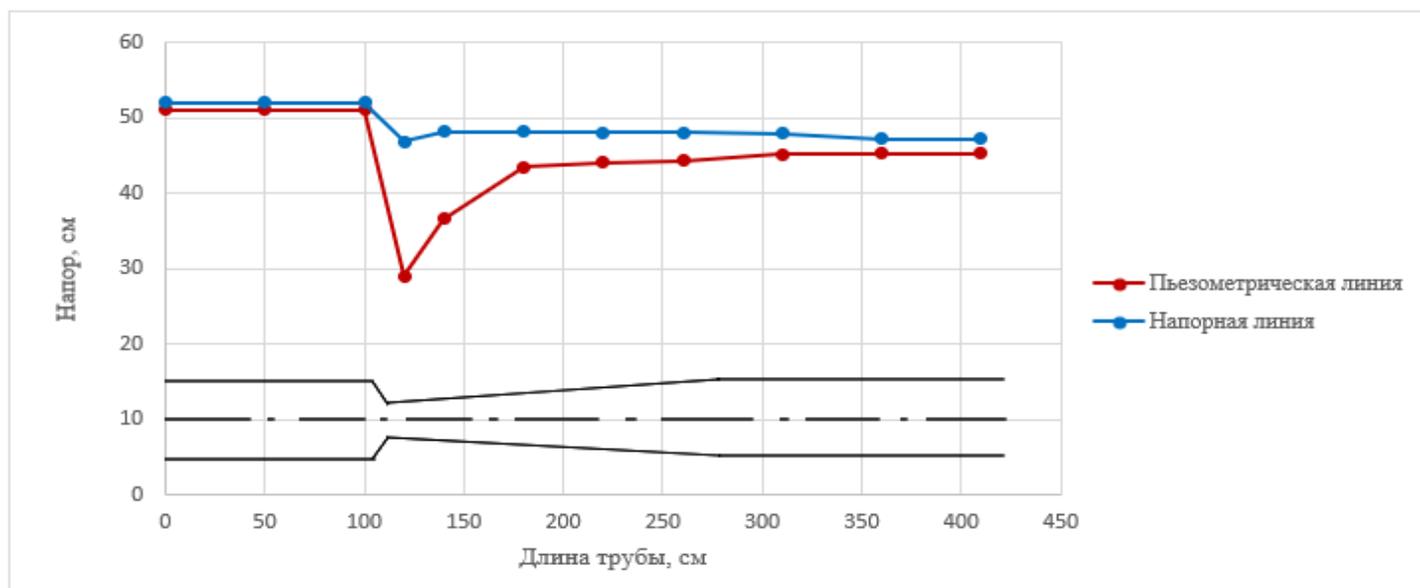


Рисунок 16 – Пьезометрическая и напорная линии при  $Q_4 = 0,5562 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$

Таблица 5 – Напоры полученные при  $Q_5 = 0,7 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}} = 194,4 \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$

№ п/п	Наименование величин	Обозначения, формулы	Сечение канала						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
1.	Площадь сечения канала, $\text{см}^2$	$\omega$	3,46	0,78	1,02	1,6	2,32	3,16	3,46
2.	Средняя скорость, $\text{см/с}$	$U = \frac{Q}{\omega}$	56,15	247,6	189,2	120,76	83,7	61,41	56,15
3.	Пьезометрический напор, $\text{см}$	$H_{\text{п}} = \frac{p}{\rho g}$	56,1	22,1	35	45	48,1	49,9	50
4.	Скоростной напор, $\text{см}$	$H_{\text{к}} = \frac{U^2}{2g}$	1,6	31,28	18,26	7,44	3,575	1,925	1,609
5.	Полный напор, $\text{см}$	$H = \frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$	57,7	53,38	53,26	52,44	51,67	51,64	51,6

По полученным напорам были построены пьезометрическая и напорная линия для каждого расхода (рисунок 17):

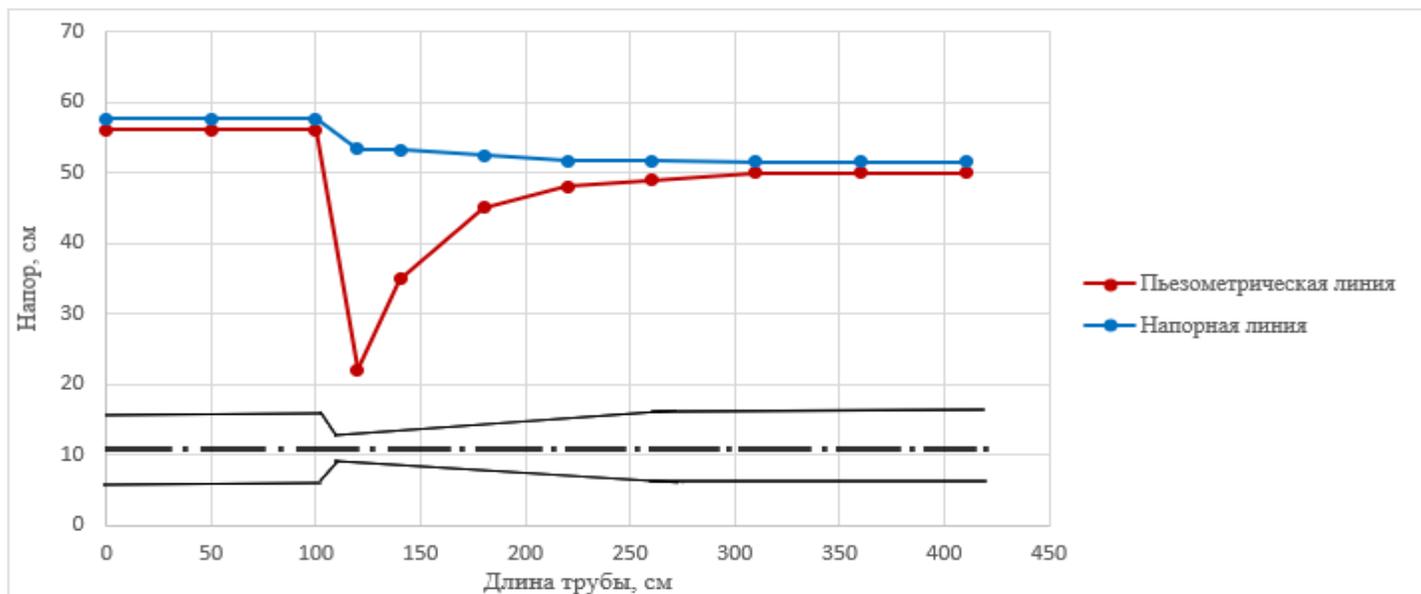


Рисунок 17 – Пьезометрическая и напорная линии при  $Q_5 = 0,7 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$

Из уравнения Бернулли следует, что при сужении потока скорость и, следовательно, кинетическая энергия  $u^2/(2g)$  увеличиваются, что в силу сохранения баланса вызывает уменьшение потенциальной энергии  $p/(\rho g)$ . Другими словами, увеличение скорости потока по течению приводит к уменьшению давления  $p$ , и наоборот. Однако на рисунках 8-12 наблюдается прогиб напорной линии, построенной по результатам экспериментальных данных. Предполагается, что это связано с неправильным измерением пьезометрического напора. Пьезометры расположены очень близко к внезапному сужению. Для уточнения предположения проведен численный эксперимент течения в модуле МЗ.

### 3 Математическое моделирование стенда по изучению закона Бернулли

#### 3.1 Математическая модель

Для стационарных условий математическая модель течения в трубе Вентури включает уравнения неразрывности и уравнения движения для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (1.8)$$

Для учёта турбулентности использовалась  $k - \varepsilon$  модель. Уравнения переноса кинетической энергии турбулентности  $k$  и её диссипации  $\varepsilon$  имеют вид:

$$\frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G - \rho \varepsilon, \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial(\rho u_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (1.82)$$

Где скорость генерации турбулентности  $G$  и тензор напряжений Рейнольдса определяются по соответствующим уравнениям:

$$G = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.83)$$

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho k \delta_{ij} \quad (1.84)$$

Турбулентная вязкость  $\mu_T$  определяется по формуле:

$$\mu_T = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon}. \quad (1.85)$$

Эмпирические константы имеют следующие значения:  $\sigma_k=1,0$ ;  $\sigma_\varepsilon=1,3$ ;  $C_1=1,44$ ;  $C_2=1,92$ ,  $C_\mu=0,09$ .

### 3.2 Геометрия и граничные условия

Для численного исследования с помощью программного продукта SolidWorks была построена модель трубы Вентури по размерам стенда по изучению закона Бернулли.

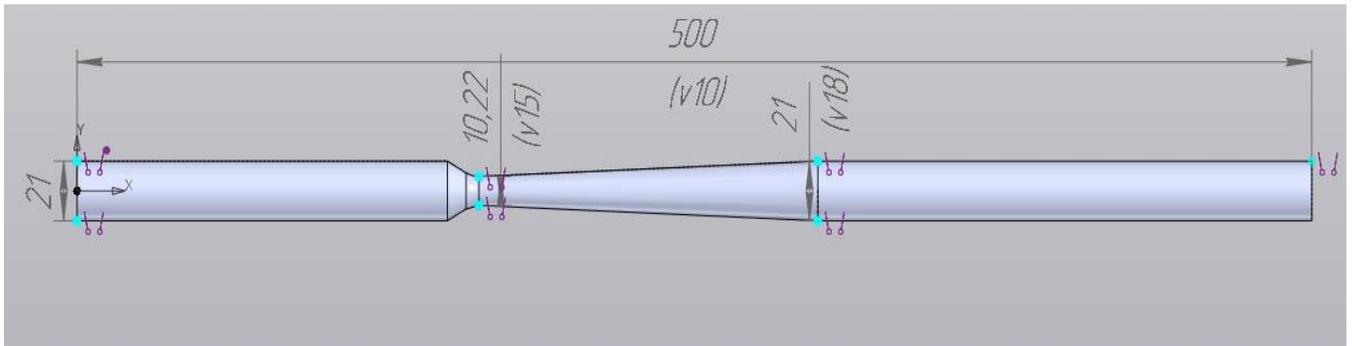


Рисунок 18 – Геометрическая модель рабочего участка

На рисунке 19 представлена расчётная сетка, которая состоит из тетраэдрических элементов, выполненная во встроенном редакторе сеток с количеством уровней – 7 и специального измельчения сетки на сужающемся участке для более подробного расчёта данной области трубы.

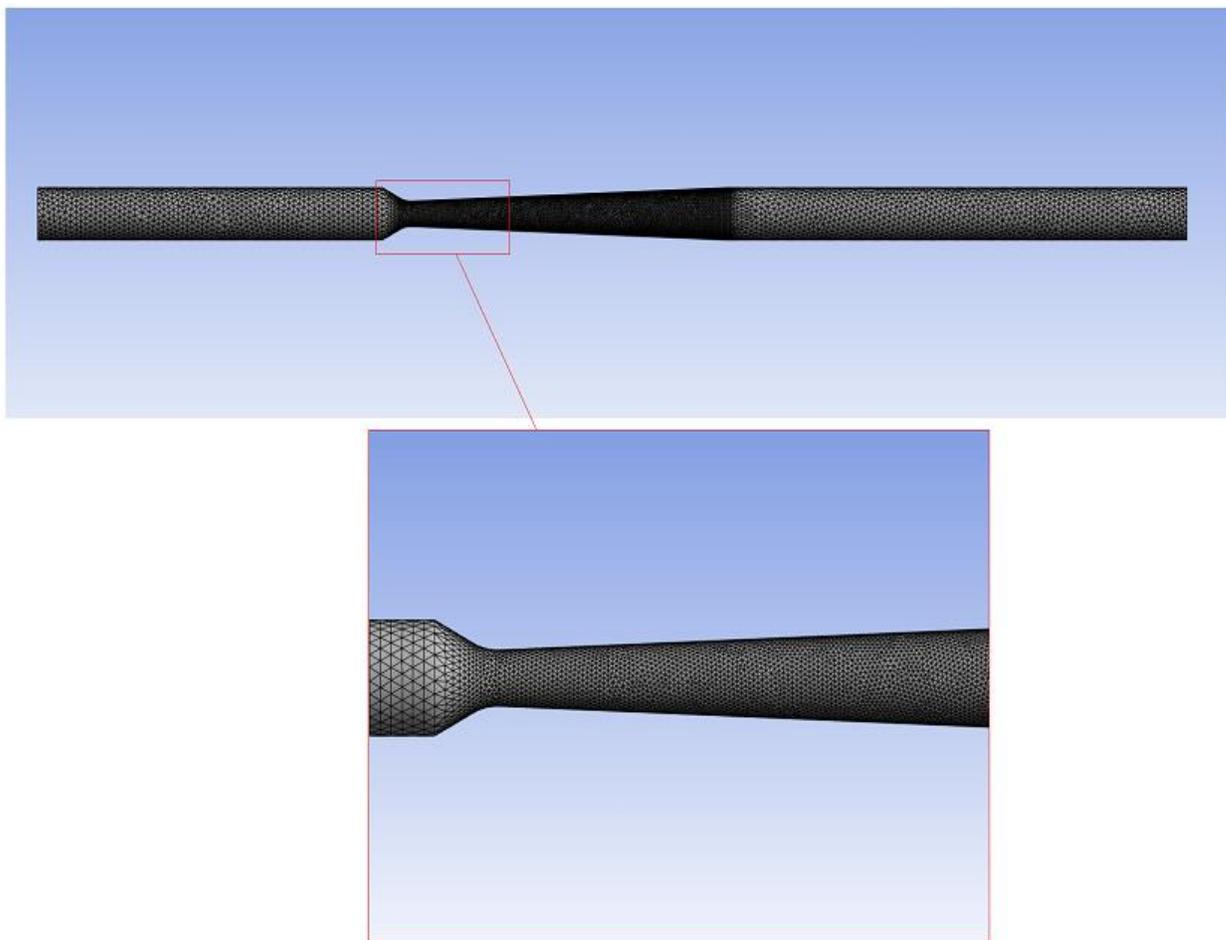


Рисунок 19 – Конечно–объёмная расчётная сетка рабочего участка

Для замыкания системы уравнений принимались граничные условия, представленные ниже. На входе в трубу Вентури задавалась скорость, интенсивность и масштаб турбулентности:

$$u_{\perp} = u_{\text{inlet}},$$

$$u_{\parallel} = 0,$$

$$I = I_{\text{inlet}},$$

$$L = L_{\text{inlet}},$$

(1.86)

На выходной границе при решении уравнений нулевые градиенты скорости, кинетической энергии турбулентности и её диссипации по горизонтальной координате создают так называемые «мягкие условия»:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0, \quad (1.87)$$

где  $n$  – вектор внешней нормали к расчётной области.

Также на выходе задавалось давление, определенное по показанию последнего пьезометра в экспериментальном стенде:

$$P = P_{\text{outlet}} \quad (1.88)$$

Нормальную и тангенциальную компоненты скорости на стенках полагаем равными нулю, что моделирует соответственно непротекание и отсутствие скольжения:

$$u_{\perp} = 0, \quad (1.89)$$

$$u_{\parallel} = 0. \quad (1.9)$$

Для определения турбулентных характеристик вблизи стенки используется метод пристеночных функций.

Расчёты проводились для воды при 25 °С.

### 3.3 Численное исследование течения в стенде по изучению закона Бернулли

Численное решение задачи проводилось при помощи программы ANSYS CFX. Данная программа предполагает решение поставленных задач методом контрольного объёма (Finite Volume Method, FVM).

Численные эксперименты проводились при объемных расходах:  $0,5562 \text{ м}^3/\text{ч}$ ;  $0,7 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Результаты расчетов представлены на рисунка 20 – 25.

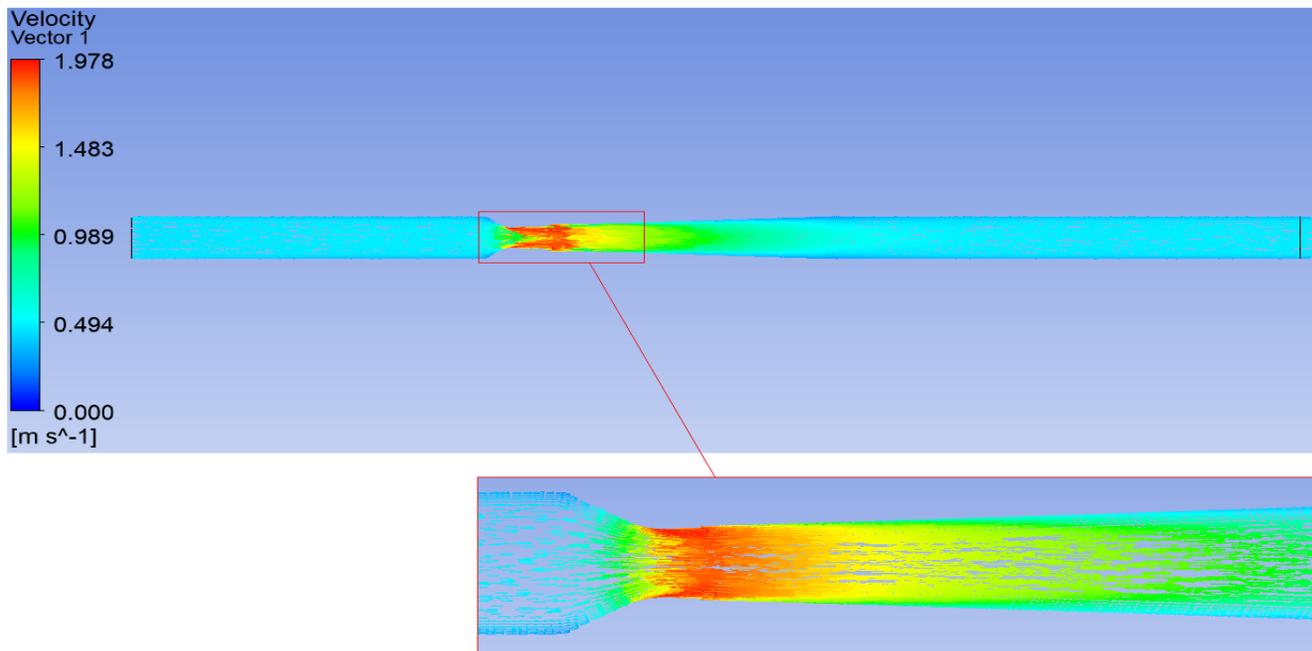


Рисунок 20 – Поле скоростей в трубе Вентури  
объемный расход –  $0,5562 \text{ м}^3/\text{ч}$ , давление на выходе –  $4582,4 \text{ Па}$

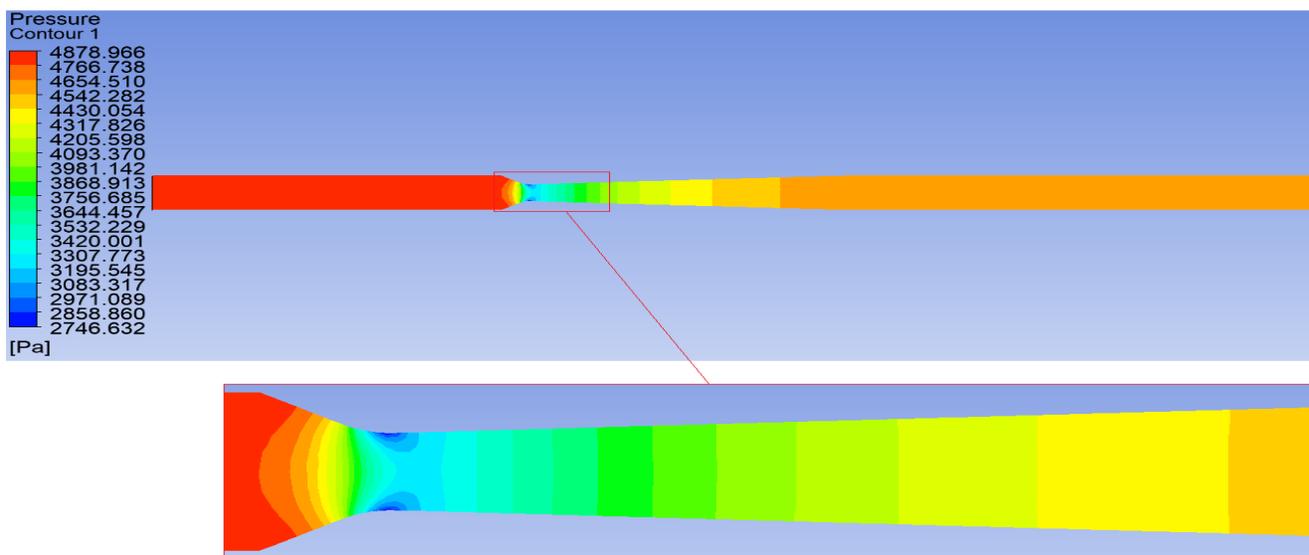


Рисунок 21 – Распределение давления в трубе Вентури  
объемный расход –  $0,5562 \text{ м}^3/\text{ч}$ , давление на выходе –  $4582,4 \text{ Па}$

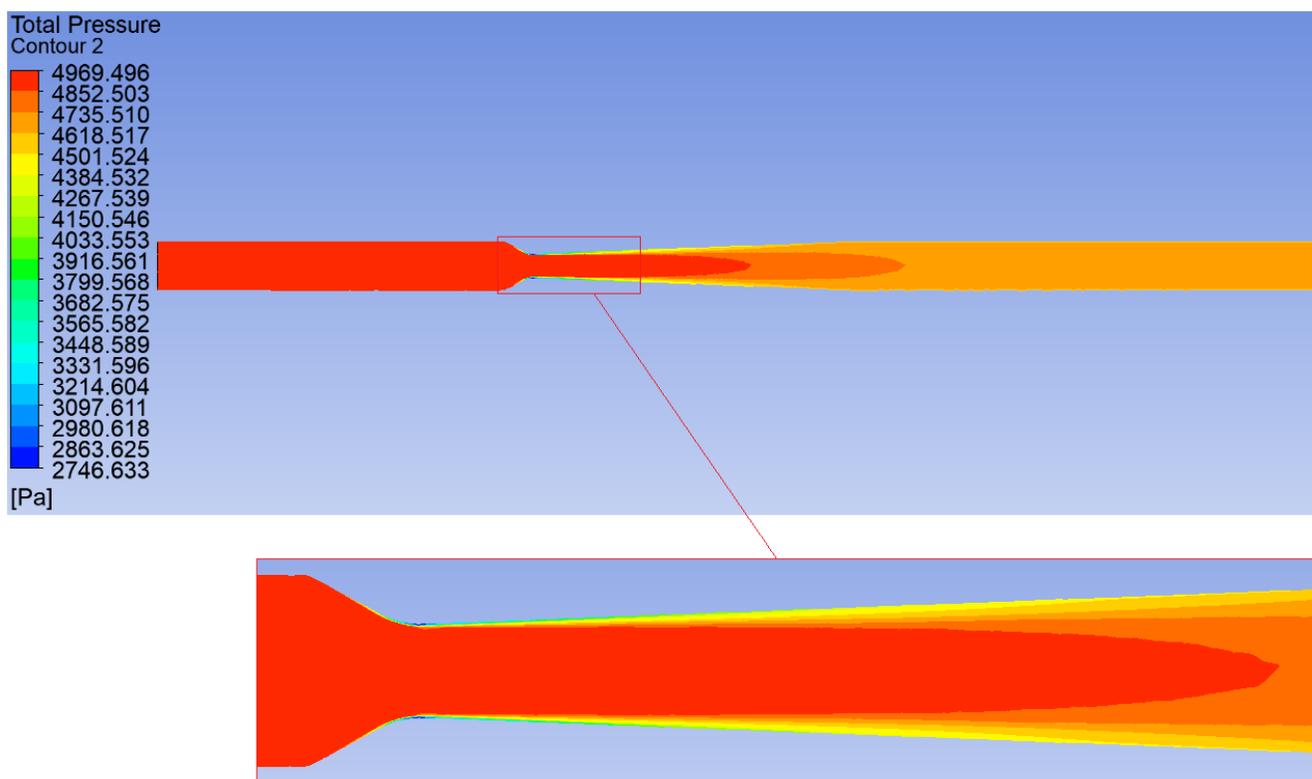


Рисунок 22 – Распределение полного давления в трубе Вентури  
объемный расход –  $0,5562 \text{ м}^3/\text{ч}$ , давление на выходе –  $4582,4 \text{ Па}$

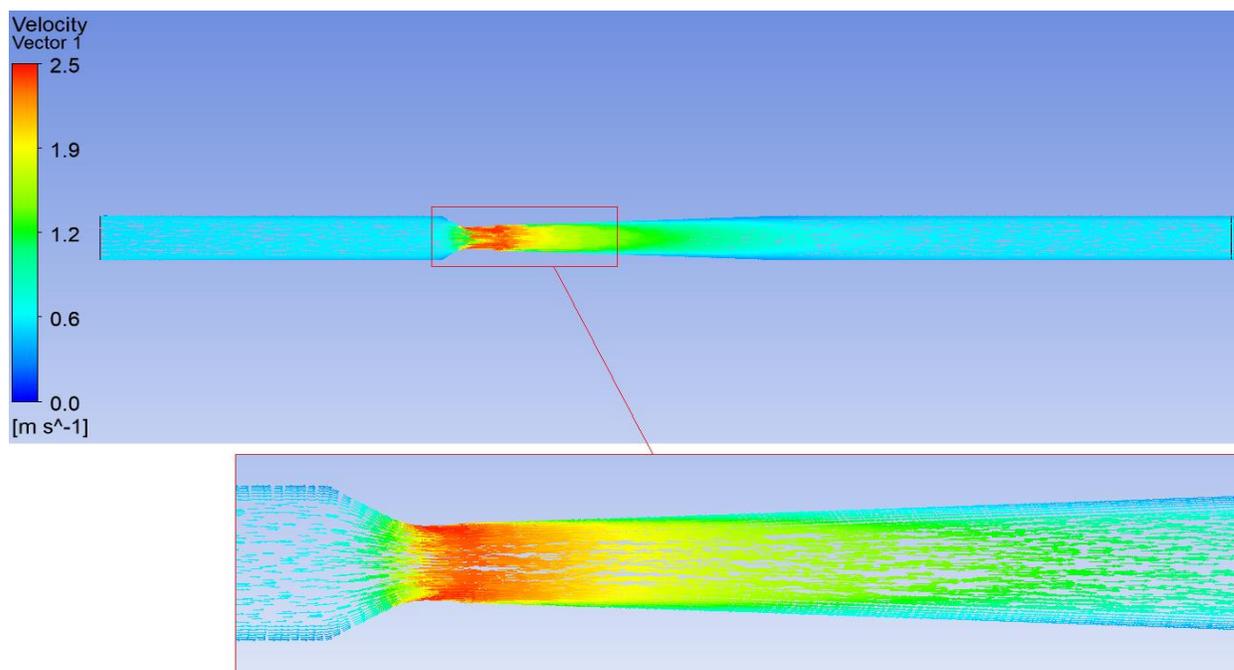


Рисунок 23 – Поле скоростей в трубе Вентури  
объемный расход –  $0,7 \text{ м}^3/\text{ч}$ , давление на выходе –  $4885,3 \text{ Па}$

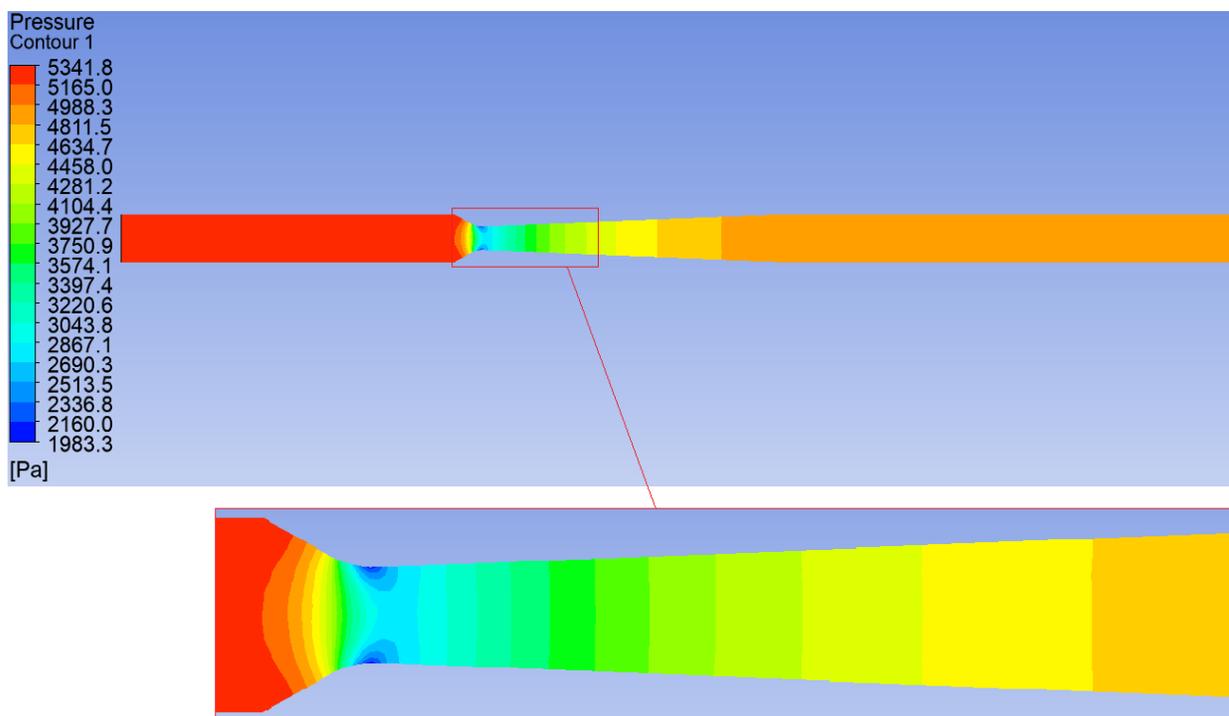


Рисунок 24 – Распределение давления в трубе Вентури  
 объемный расход –  $0,7 \text{ м}^3/\text{ч}$ , давление на выходе –  $4885,3 \text{ Па}$

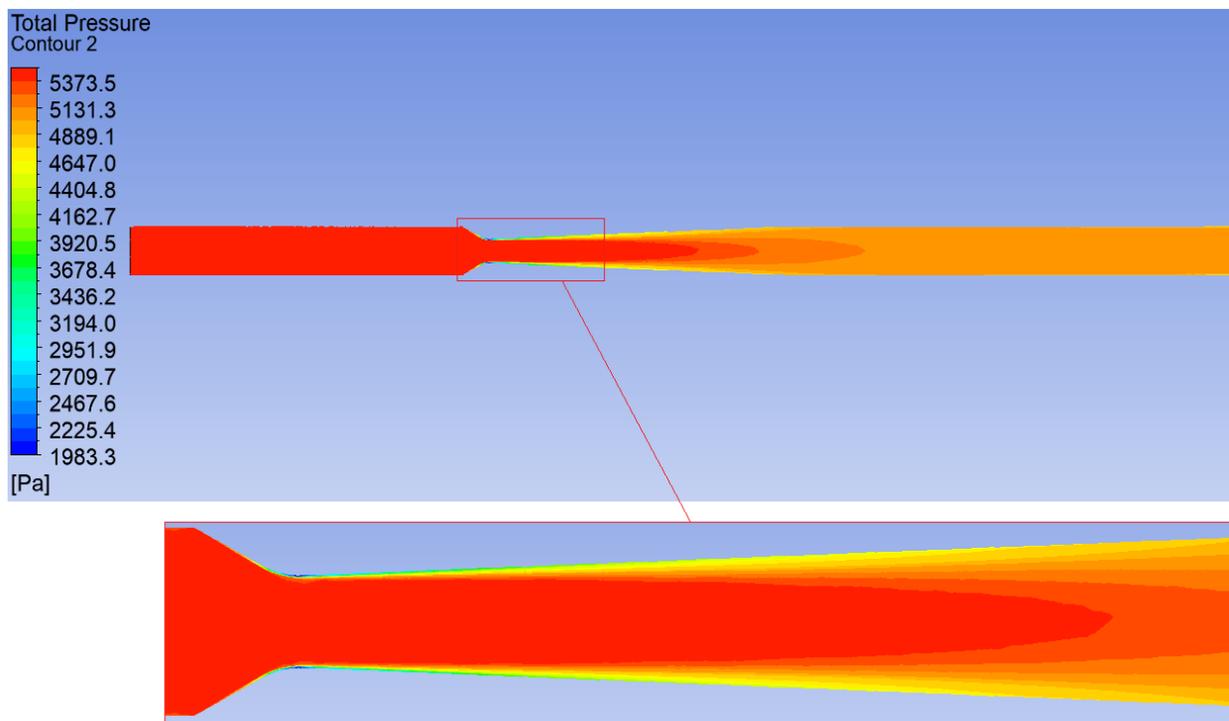


Рисунок 25 – Распределение полного давления в трубе Вентури  
 объемный расход –  $0,7 \text{ м}^3/\text{ч}$ , давление на выходе –  $4885,3 \text{ Па}$

Полученные расчётные результаты согласуются с законом Бернулли. Согласно рисункам 20, 23 при сужении потока скорость и увеличиваются, что вызывает уменьшение статического давления. Анализ полученных результатов показал, что полное давление снижается по течению в трубе Вентури, что соответствует действительности. Линия полного напора снижается на величину гидравлических потерь. На рисунке 26 представлены пьезометрическая и напорная линии, построенные по давлению, рассчитанному в ходе численного эксперимента.

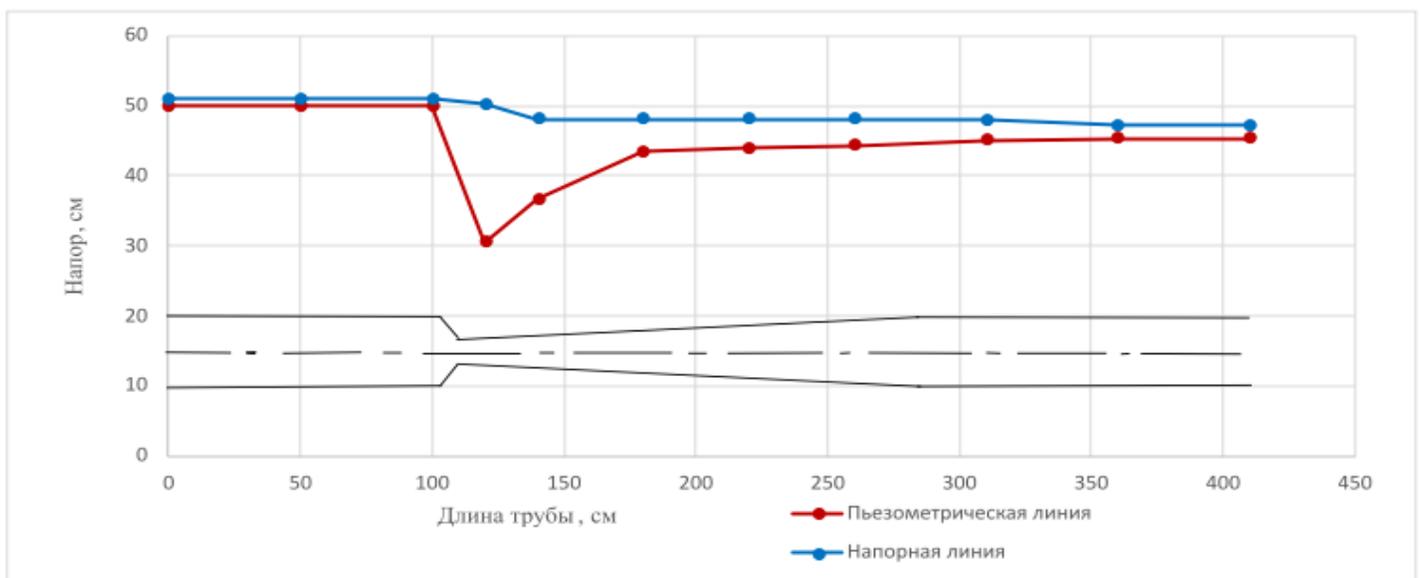


Рисунок 26 – Пьезометрическая и напорная линии, построенные по результатам численного моделирования,  $Q_4 = 0,5562 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$

Прогиб напорной линии, наблюдаемый при построении её по экспериментальным данным, связан с неправильным измерением пьезометрического напора сразу после сужения. Как видно из рисунков 21, 24, распределение статического давления по живому сечению после внезапного сужения в трубе Вентури неравномерно. Вблизи стенок трубы наблюдаются области низкого давления. В результате давление, определенное по пьезометру, установленному сразу после сужения, занижено. Следовательно, линия полного напора, построенная по экспериментальным данным, сразу после сужения

располагается более низко, чем есть в действительности. Далее по течению наблюдается выравнивание давления по живому сечению трубы.

На рисунке 27 показана сравнение напорных линий, построенных по результатам численных и натурального экспериментов.

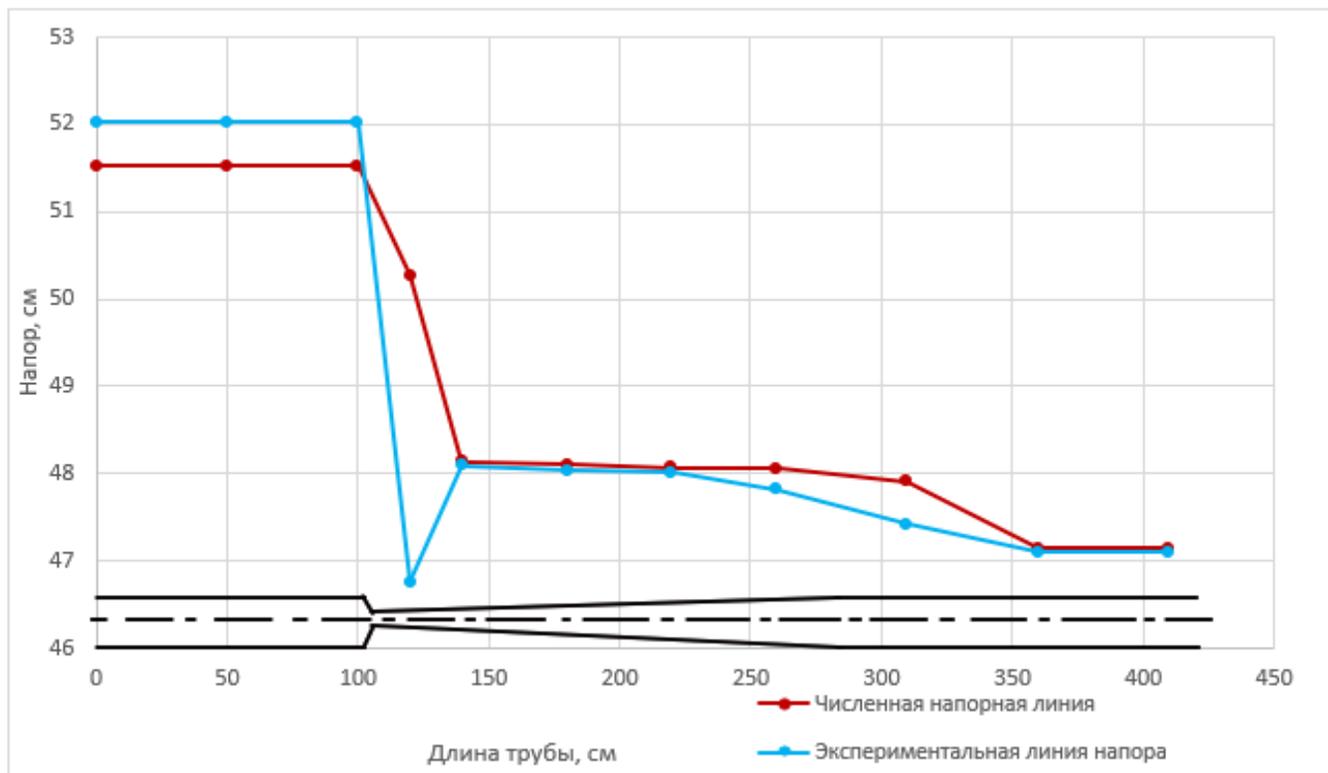


Рисунок 27 – Напорные линии, построенные по результатам численного и натурального эксперимента,  $Q_4 = 0,5562 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$

В результате анализа полученных расчетных и экспериментальных данных можно дать рекомендацию по использованию стенда «Иллюстрация уравнения Бернулли»:

Следует не учитывать показатели пьезометра, установленного на расстоянии одного диаметра трубы после сужения во избежание некорректных показателей пьезометрической и напорной линии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной бакалаврской работы был выполнен анализ экспериментальных и численных данных на примере стенда для совершенствования техники эксперимента по изучению закона Бернулли.

Эксперимент по изучению уравнения Бернулли проводился на гидравлическом стенде ТМЖ2М. Работа выполнена на модуле М3, который представляет собой круглую трубу с участком «трубы Вентури». При построении энергетических графиков по результатам экспериментальных данных наблюдался прогиб напорной линии после внезапного сужения при объемных расходах меньше  $0,6 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$ .

Была разработана математическая модель процессов гидродинамики в трубе Вентури гидродинамического стенда. В результате численного эксперимента было обнаружено, что прогиб напорной линии, наблюдаемый при построении её по экспериментальным данным, связан с неравномерностью распределения статического давления по живому сечению после внезапного сужения в трубе Вентури.

В результате анализа полученных расчетных и экспериментальных данных рекомендуется не учитывать показатели пьезометра, установленного на расстоянии одного диаметра трубы после сужения.

### Список использованных источников

1. Образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» В.И. Колесниченко, А.Н. Шарифулин «Введение в механику несжимаемой жидкости» [Электронный ресурс].
2. Дейли Дж., Харлеман Д. «Механика жидкости» – М.: Энергия, 1971.
3. Техническая физика «Гидромеханика» Цуренко Ю.И.
4. Я.И. Воиткунский, Ю.И.Фадеев, К.К.Федяевский «Гидромеханика».
5. «Численные методы моделирования теплотехнических система» – Январев И.А.
6. Холин К. М., Никитин О. Ф. «Основы гидравлики и объемные гидроприводы». –2-е изд. и доп. - М.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
7. С.Л. Деменок, Л.И. Высоцкий, В.В. Медведев: «Потенциальные течения жидкости в каналах», 2015 – 108 с.
8. Х.Рауз «Механика жидкости» М.: Изд. литературы по строительству, 1967, 392 стр.
9. К. Басов: ANSYS. «Справочник пользователя», 2014.
10. Емцев Б.Т. «Техническая гидромеханика. –Машиностроение», 1987. – 440 с.
11. А.М. Зиганшин «Вычислительная гидродинамика. Постановка и решение задач в процессоре Fluent», 2013.
12. Л.Л. Миньков, К.М. Моисеева «Численное решение задач гидродинамики с помощью вычислительного пакета ANSYS FLUENT», 2017.

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

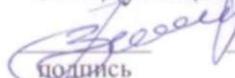
институт

Теплотехники и гидрогазодинамики

кафедра

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой



подпись

В.А. Кулагин

инициалы, фамилия

« 18 »

июне

2024 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

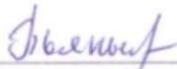
13.03.01. Теплоэнергетика и теплотехника

код – наименование направления

Анализ расчетных и экспериментальных данных на примере стенда  
по изучению закона Бернулли

тема работы

Руководитель

 25.06.24

подпись, дата

доцент каф. ТТиГД, к.т.н.

должность, ученая степень

Т.А. Пьяных

инициалы, фамилия

Выпускник

 21.06.24

подпись, дата

О.Д. Невмержицкий

инициалы, фамилия

Красноярск 2024