На правах рукописи

Леонтьев Владимир Маркович

О СОБИРАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛОВ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2024

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, доцент **Колесников Сергей Геннадьевич**

Официальные оппоненты:
Клячко Антон Александрович, д-р физ.-мат. наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова», механико-математический факультет,
кафедра высшей алгебры, доцент

Нещадим Михаил Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор,
ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского
отделения Российской академии наук», лаборатория обратных задач
математической физики, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация:
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук»

Защита состоится 13 июня 2024 года в 15.30 на заседании диссертационного совета 24.2.404.14 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» https://www.sfu-kras.ru

Автореферат разослан «___» апреля 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кравцова Ольга Вадимовна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе Ф. Холла [16], посвященной теории конечных p-групп, было введено понятие собирательного процесса, суть которого можно описать следующим образом. Пусть W — положительное слово свободной группы $F = F(a_1, \ldots, a_n)$, $n \geqslant 1$, т.е. W не содержит порождающие элементы $a_1, \ldots, a_n$ в отрицательных степенях. Последовательно меняя местами соседние элементы в W с использованием коммутаторов: $QR = RQ[Q, R]$, $Q, R \in F$, собирательный процесс преобразует W к следующему виду:

$$W = q_1^{e_1} \ldots q_j^{e_j} T_j, \quad j \geqslant 1, \tag{1}$$

где $q_1, \ldots, q_j$ — коммутаторы в буквах $a_1, \ldots, a_n$, упорядоченные по возрастанию веса, T_j состоит из коммутаторов веса не меньше, чем $w(q_j)$ (вес q_j), показатели степеней $e_1, \ldots, e_j$ — положительные целые числа.

Результатом применения собирательного процесса к слову $W = (a_1 a_2)^m$, $m \geqslant 1$, стала собирательная формула Ф. Холла [16, теоремы 3.1 и 3.2]:

$$(a_1 a_2)^m = q_1^{e_1} \ldots q_{j(s)}^{e_{j(s)}} \pmod{\Gamma_s(F)}, \quad s \geqslant 2, \tag{2}$$

где $\Gamma_s(F)$ — s-й член нижнего центрального ряда группы F, определяемый следующим образом: $\Gamma_1(F) = F$, $\Gamma_k(F) = [\Gamma_{k-1}(F), F]$, $k \geqslant 2$, и показатели степеней коммутаторов представимы в виде целозначных полиномов от m:

$$e_i(m) = \sum_{k=1}^{w(q_i)} c_k \binom{m}{k} \tag{3}$$

с целыми неотрицательными c_k, не зависящими от m. Для теории p-групп важным оказывается свойство делимости $e_i(p^\alpha)$ на степень простого числа p^α, когда $w(q_i) < p$. Идея доказательства формулы (2) была основана на присвоении вхождениям коммутатора q_i меток (конечных целочисленных последовательностей $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{w(q_i)})$). Показатель степени $e_i(m)$, совпадающий с числом меток всех вхождений q_i, оказывался равным количеству элементов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{w(q_i)})$ декартовой степени $\{1, \ldots, m\}^{w(q_i)}$, компоненты которых удовлетворяют определенной системе линейных равенств и неравенств.

В монографии М. Холла [12, теорема 12.3.1], доказательство Ф. Холла было в точности перенесено на слово $W = (a_1 \ldots a_n)^m$, $n \geqslant 1$. Еще большее обобщение было получено в монографии В. Магнуса, А. Карраса, Д. Солитэра [5, теоремы 5.13A и 5.13B], где для произвольного слова W группы F (не обязательно положительного) с использованием аппарата алгебр Ли доказано, что слово W^m, $m \geqslant 1$, представимо в виде:

$$W^m = q_1^{e_1} \ldots q_{j(s)}^{e_{j(s)}} \pmod{\Gamma_s(F)}, \quad s \geqslant 2, \tag{4}$$

где $q_1, \ldots, q_{j(s)}$ — коммутаторы в буквах $a_1, \ldots, a_n$ весов меньше s и e_i делится на m, если m есть степень простого числа p^α и $w(q_i) < p$.

В связи с исследованием нильпотентных произведений циклических групп были получены разные собирательные формулы со свойствами делимости показателей степеней коммутаторов. В работе Р. Струик [20, лемма 4] на основе модификации идеи Ф. Холла была доказана следующая формула:

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} = q_1^{e_1} q_2^{e_2} q_3^{e_3} \ldots q_{j(s)}^{e_{j(s)}} \pmod{\Gamma_s(F)}, \quad s \geqslant 2, \tag{5}$$

где $q_1 = a_2$, $q_2 = a_1$ и

$$e_i = \sum_{k=1}^{w_{a_1}(q_i)} \sum_{t=1}^{w_{a_2}(q_i)} c_{k,t} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{t}, \quad c_{k,t} \in \mathbb{N}_0.$$

Здесь $w_{a_l}(q_i)$ — вес q_i в a_l, $l = 1, 2$. Если m_l, $l = 1, 2$, есть степень простого числа p^α и $1 \leqslant w_{a_l}(q_i) < p$, тогда e_i делится на m_l. Формула (5) была также получена методами из [5] в работе Г. Волдингера [21] при $m_1 = 1$, $m_2 = p$, $s = p+2$ для простого p и в работе Э. Гаглионе [14] при $m_1 = 1$, $m_2 = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, $s = p^2+1$ для простого p. С использованием тех же методов в статье Э. Гаглионе и Д. Спеллмана [15, теорема 2.3] доказана упомянутая выше формула для слова $W = (a_1 \ldots a_n)^m$, $n \geqslant 1$.

Рассмотренные выше результаты с разными техниками доказательства приводят к естественному вопросу о существовании универсального метода исследования свойств делимости показателей степеней e_j в собирательных формулах (1) и о возможности получения подобных результатов для других положительных слов. В связи с этим мы ставим следующую задачу.

(A) *Разработать подход к исследованию делимости показателей степеней коммутаторов в собирательных формулах для положительных слов свободной группы, позволяющий единообразно доказать и обобщить известные результаты. В частности, для любых натуральных $n, m, m_1, \ldots, m_n$ в свободной группе с образующими $a_1, \ldots, a_n$ рассмотреть слова $(a_1 \ldots a_n)^m$, $a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$ и W^m, где W — произвольное положительное слово, в первом и третьем слове некоторые вхождения букв могут быть удалены.*

Другое направление исследований, связанное с собирательным процессом, заключается в поиске явного вида показателей степеней коммутаторов в собирательной формуле Ф. Холла (2) и, как следствие, получение собирательных формул в явном виде при некоторых ограничениях на группу (ступень разрешимости, нильпотентности группы и т.п.). Рассмотрим группу $G = \langle x, y \rangle$. Известно (см., например, [12]), что при условии $[y, x] \in Z(G)$ формула (2) принимает следующий вид:

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}.$$

Если же $[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1,\ y \in C_G(\Gamma_2(G))$, получаем формулу

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x]^{\binom{n}{i+1}}.$$

Мы используем краткую запись: $[y, {}_0 x] = y$, $[y, {}_u x] = [[y, {}_{u-1} x], x]$, где $u \in \mathbb{N}$; $[y, {}_u x, {}_v z] = [[y, {}_u x], {}_v z]$, где $u, v \in \mathbb{N}_0$.

Из того факта, что показатель степени коммутатора $[y, {}_i x]$ в собирательной формуле для $(xy)^n$ равен $\binom{n}{i+1}$, следует, что группа простой экспоненты p удовлетворяет $(p-1)$–му условию Энгеля [12, с. 354]:

$$[y, {}_{p-1} x] = 1 \ (\mathrm{mod}\ \Gamma_{p+1}(G)).$$

Как отмечается в [12, с. 354], данное соотношение было основным при исследовании ослабленной проблемы Бернсайда для групп экспоненты p. Опираясь на него, А. И. Кострикин решил ослабленную проблему Бернсайда для группы экспоненты 5 с двумя образующими.

В работе Ю. Краузе [17] найдены показатели степеней для следующих коммутаторов:

$$\begin{aligned}
[y, {}_i x, {}_j y] \quad &: \quad \sum_{m=0}^{n-1} \binom{m}{i} \binom{m}{j}, \quad \text{где } i \geqslant 1, j \geqslant 0;\\
[[y, x, y], [y, {}_2 x]] \quad &: \quad \sum_{m=0}^{n-1} m \left(2\binom{m}{2} + (m+2)\binom{m}{3} \right), \quad \text{где } i \geqslant 1;\\
[[y, {}_i x, {}_j y], [y, x]] \quad &: \quad \sum_{m=0}^{n-1} \binom{m}{i} \left(\binom{m}{2}\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} \right), \quad \begin{array}{c}\text{где } i \geqslant 1, j \geqslant 0,\\ \text{и } i \geqslant 2 \text{ при } j = 0.\end{array}
\end{aligned}$$

Явный вид этих показателей позволил доказать, что группа экспоненты 8 удовлетворяет 14-му условию Энгеля [18].

Собирательная формула Ф. Холла существенно использовалась А. И. Скопиным при исследовании строения нижнего центрального ряда групп бернсайдовского типа примарной экспоненты. В [7] был вычислен отрезок собирательной формулы для $(xy)^8$ по модулю $\Gamma_{10}(G)$, а в [8] установлено, что для любых $x \in G$, $y \in \Gamma_2(G)$ справедливы две следующие формулы:

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} [y, {}_i x, {}_j y]^{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \binom{k}{i}\binom{k}{j}},$$

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x]^{\binom{n}{i+1}} \prod_{m=0}^{n-2} \prod_{i=m+1}^{n-1} [[y, {}_i x], [y, {}_m x]]^{c^n_{mi}}$$

при условии трасметабелевости группы G I типа ($[\Gamma_3(G), \Gamma_3(G)] = 1$) и II типа ($[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1$), соответственно. Было показано, что числа c^n_{mi} удовлетворяют системе соотношений, явные выражения для c^n_{mi} найдены не были. В работе [9], а также статье А. И. Скопина и Ю. Г. Тетерина [10] был представлен алгоритм построения собирательной формулы Ф. Холла для метабелевых и трансметабелевых групп.

Приведенные результаты использовались, например, в [11] для нахождения ступени нильпотентности и верхней границы порядка максимальной 2-порожденной трансметабелевой группы I типа экспоненты 8. В случае экспоненты 9 верхние границы ступени нильпотентности и порядка группы найдены в статье Ф. А. Иванова и А. И. Скопина [1].

Вычисление в явном виде показателей степеней коммутаторов в собирательной формуле Ф. Холла является, вообще говоря, сложной задачей. Более того, в некоторых случаях, например, при работе с p-группами в формуле для $(xy)^p$ требуется знать показатели степеней по модулю p. В таких условиях крайне полезен холловский вид показателей (3), т.е. выражение $e_i(p)$ через целочисленную линейную комбинацию биномиальных коэффициентов вида $\binom{p}{k}$. Отметим, что из перечисленных выше серий коммутаторов только для $[y, {}_i x]$, $i \geqslant 1$, показатель степени найден в виде (3). В диссертационной работе рассматривается следующая задача.

(B) *В собирательной формуле Ф. Холла для выражения $(xy)^n$, $n \geqslant 1$, найти в явном холловском виде показатели степеней для двух серий коммутаторов: $[y, {}_u x, {}_v y]$, где $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, и $v = 0$ при $u = 0$; $[[y, {}_u x], [y, {}_v x]]$, где $u > v \geqslant 1$.*

Интерес к указанным сериям коммутаторов вызван, в частности, одним известным вопросом о регулярности конечной p-группы. Напомним, что понятие регулярности введено Ф. Холлом [16] на основе собирательной формулы (2) и суть его заключается в следующем. Конечная p-группа называется *регулярной*, если для любых ее элементов x, y и любого $\alpha \in \mathbb{N}$ существуют такие элементы $c_1, \ldots, c_t$ из коммутанта $\langle x, y\rangle'$, что $(xy)^{p^\alpha} = x^{p^\alpha} y^{p^\alpha} c_1^{p^\alpha} \ldots c_t^{p^\alpha}$.

В Коуровской тетради Б. Верфрицем была поставлена следующая проблема [19, вопрос 8.3].

(C) *Для целых положительных чисел m, n и простого числа p пусть $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ — группа всех таких матриц (a_{ij}) над кольцом классов вычетов по модулю p^m, что $a_{ii} \equiv 1 \pmod p$ для всех i и $a_{ij} \equiv 0 \pmod p$ для всех $i > j$. Группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ является конечной p-группой. Для каких m и n она регулярна?*

Из формулы (2) и свойства делимости показателей степеней входящих в нее коммутаторов следует, что любая конечная p-группа ступени нильпотентности $< p$ является регулярной. Согласно работе Ю. И. Мерзлякова [6] группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$

имеет ступень нильпотентности $mn-1$, поэтому при $mn-1<p$ она регулярна. В статьях А. В. Ягжева [13] и С. Г. Колесникова [2] для случаев $m=1$ и $m=2$, соответственно, доказано, что $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна тогда и только тогда, когда ее ступень нильпотентности меньше p. Далее, в [3] установлено, что при $n^2<p$ группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ регулярна для любого m. Таким образом, ответ на вопрос Б. Верфрица остается неизвестным в следующих случаях:

$$2n-1<p\leqslant \min\{mn-1,n^2\}.$$

В работе [4] показано, что в этих случаях группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ удовлетворяет ряду необходимых условий регулярности из [12, теоремы 12.4.3–12.4.5].

Целью диссертационной работы является получение полного или частичного решения задач **(A)**, **(B)** и **(C)**.

Методы исследования. В работе используются методы комбинаторного анализа, теории групп.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер и может быть использована при исследовании проблем комбинаторной теории групп, при изучении проблем бернсайдовского типа, а также для проверки конечных p-групп на регулярность. Кроме того, результаты диссертации могут быть полезны при составлении программ специальных курсов для студентов математических направлений.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: Проспект Свободный» (СФУ, г. Красноярск, 2016 г.); Двадцатый Всероссийский конкурс студенческих работ им. Августа Мебиуса (НМУ, г. Москва, 2016 г.); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный — 2018» (СФУ, г. Красноярск, 2018 г.); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный — 2019» (СФУ, г. Красноярск, 2019 г.); 57-ая Международная научная студенческая конференция МНСК-2019 (НГУ, г. Новосибирск, 2019 г.); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный — 2020» (СФУ, г. Красноярск, 2020 г.); Международная конференция математических центров мирового уровня (Образовательный центр Сириус, г. Сочи, 2021 г.); Городской алгебраический семинар им. Д. К. Фаддеева (ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург, 2021 г.); Международная конференция «Мальцевские чтения» (ИМ СО РАН, г. Новосибирск, 2022 г.); Международная конференция по теории групп, посвященная 80-летию В. Д. Мазурова (ИМ СО РАН, НГУ, г. Новосибирск, 2023 г.); Городской алгебраический семинар (СФУ, г. Красноярск, 2024 г.).

Основные публикации. Все основные результаты диссертации опубликованы в работах [22–35]. Статьи [22–26] входят в издания, рекомендованные ВАК для публикации результатов диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 96 страницах, состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 36 наименований. Номер определения, теоремы, леммы и др. включает номер главы, параграфа и порядковый номер.

Содержание работы

К **основным результатам** работы относятся следующие.

1. Разработан логико-комбинаторный подход к исследованию делимости показателей степеней коммутаторов, возникающих в собирательных формулах для положительных слов свободной группы.

2. Получены обобщения известных собирательных формул со свойствами делимости показателей степеней коммутаторов, а именно, для любых натуральных $n, m, m_1, \ldots, m_n$ в свободной группе с образующими $a_1, \ldots, a_n$ рассмотрены слова $(a_1 \ldots a_n)^m$, $a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n}$ и W^m, где W — произвольное положительное слово, в первом и третьем слове некоторые вхождения букв могут быть удалены.

3. Представлена параметризация несобранной части собирательной формулы Ф. Холла с помощью функции бинарного веса числа (равной количеству единиц в двоичной записи ее целого неотрицательного аргумента).

4. В собирательной формуле Ф. Холла для выражения $(xy)^n$, $n \geqslant 1$, в явном холловском виде найдены показатели степеней для двух серий коммутаторов: $[y, {}_ux, {}_vy]$, где $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, и $v = 0$ при $u = 0$; $[[y, {}_ux], [y, {}_vx]]$, где $u > v \geqslant 1$. Как следствие, получены явные собирательные формулы для групп ступени нильпотентности 2, а также для групп с нильпотентным коммутантом ступени 2 и условием перестановочности элемента y с любым элементом коммутанта.

5. Доказана нерегулярность силовской p-подгруппы общей линейной группы $(n \times n)$-матриц над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$, когда $n \geqslant (p+2)/3$, $m \geqslant 3$ и p — такое простое число, что число $(p+2)/3$ — целое.

Результаты **1** и **2** служат решением поставленной задачи **(A)**. С использованием результата **3** получено полное решение задачи **(B)**, сформулированное в пункте **4**. Результат **5** дает частичный ответ на вопрос **(C)**.

В **главе 1** диссертации представлен подход к исследованию делимости показателей степеней коммутаторов, возникающих в ходе собирательного процесса, примененного к положительному слову свободной группы. В основе подхода лежит идея, реализованная Ф. Холлом в доказательстве формулы (2) и заключающаяся в присваивании вхождениям коммутаторов различных целочисленных последовательностей и, как следствие, равенстве показателя степени коммутатора количеству таких последовательностей.

В **§ 1.1** вводится система базовых понятий и обозначений, рассматриваются основные свойства собирательного процесса. Определяется собирательный процесс, как построение последовательности слов

$$\{W_j \equiv q_1^{e_1} \ldots q_j^{e_j} T_j\}_{j \geqslant 0},$$

где W_0 — произвольное положительное слово свободной группы $F(a_1, \ldots, a_n)$, $n \geqslant 1$, и слово W_j получено из W_{j-1} путем сбора всех вхождений произвольно выбранного коммутатора q_j в несобранной части T_{j-1}. При этом всем вхождениям коммутаторов в словах присваиваются метки (конечные целочисленные последовательности) следующим образом. Различные вхождения одной буквы a_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют различные метки одинаковой длины, а вхождениям коммутаторов, возникших в ходе собирательного процесса, присваиваются метки по правилу

$$y(\Lambda_u)x(\Lambda_v) = x(\Lambda_v)y(\Lambda_u)[y, x](\Lambda_u\Lambda_v),$$

где $\Lambda_u\Lambda_v$ — результат конкатенации меток Λ_u и Λ_v.

Пример 1.1.1. Пусть $W_0 \equiv a_1(1)a_2(1)a_1(2)a_2(2)$. Представим возможный вариант собирательного процесса, примененного к слову W_0 (для наглядности несобранные части слов отделены точкой):

$$\begin{aligned}
&W_0 \equiv a_1(1)a_2(1)a_1(2)a_2(2),\\
&W_1 \equiv a_1(1)a_1(2) \cdot a_2(1)[a_2, a_1](1, 2)a_2(2),\\
&W_2 \equiv a_1(1)a_1(2)a_2(1)a_2(2) \cdot [a_2, a_1](1, 2)[a_2, a_1, a_2](1, 2, 2),\\
&W_3 \equiv a_1(1)a_1(2)a_2(1)a_2(2)[a_2, a_1](1, 2) \cdot [a_2, a_1, a_2](1, 2, 2),\\
&W_4 \equiv a_1(1)a_1(2)a_2(1)a_2(2)[a_2, a_1](1, 2)[a_2, a_1, a_2](1, 2, 2).
\end{aligned}$$

Собрав коммутаторы в следующем порядке: a_1, a_2, $[a_2, a_1]$, $[a_2, a_1, a_2]$, мы получили слово $W_4 \equiv a_1^2 a_2^2 [a_2, a_1][a_2, a_1, a_2]$ с пустой несобранной частью.

В **§ 1.2** рассматривается декартово произведение

$$D(q_j) = D(a_{i_1}) \times \cdots \times D(a_{i_{w(R)}}), \tag{6}$$

где $D(a_i)$ — множество, содержащее метки всех вхождений a_i, и последовательность букв $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{w(R)}}$ соответствует бесскобочной записи коммутатора q_j.

Пример 1.2.1. Коммутатор $\Big[\big[a_2, [a_1, a_2]\big], a_4\Big]$ имеет бесскобочную запись (a_2, a_1, a_2, a_4).

Поскольку метки всех вхождений q_j содержатся в $D(q_j)$, задается предикат $E^{\Lambda}_{q_j}$, $\Lambda \in D(q_j)$, равный 1 тогда и только тогда, когда Λ есть метка некоторого вхождения q_j. Изучение свойств предиката E_{q_j} оказывается важным для получения информации о показателе степени e_j, поскольку

$$e_j = |\{\Lambda \in D(q_j) \mid E^{\Lambda}_{q_j} = 1\}|. \tag{7}$$

Определим строго следующие три предиката. Предположим, что некоторая несобранная часть содержит вхождение коммутатора R. *Условие существования* коммутатора R есть предикат E^{Λ}_R, $\Lambda \in D(R)$, который равен 1 тогда и только тогда, когда существует слово W_j, несобранная часть которого содержит вхождение $R(\Lambda)$.

Предположим, что некоторая несобранная часть содержит вхождения коммутаторов R и Q. *Условие предшествования* для коммутаторов R и Q есть предикат $P^{\Lambda_1\Lambda_2}_{Q,R}$, $\Lambda_1\Lambda_2 \in D(Q) \times D(R)$, который равен 1 тогда и только тогда, когда существует слово W_j, в несобранной части которого $Q(\Lambda_1)$ предшествует (находится левее) $R(\Lambda_2)$.

Для произвольных коммутаторов R_1, R_2 предикат $R_1 \prec R_2$ равен 1 тогда и только тогда, когда существуют коммутаторы q_i, q_j такие, что $q_i = R_1$, $q_j = R_2$, $i < j$, т.е. вхождения R_1 собраны на более раннем этапе, чем вхождения R_2.

Пример 1.1.2. Для собирательного процесса из примера 1.1.1 имеем:

$$D(a_1) = D(a_2) = \{1, 2\};$$

$$D([a_2, a_1]) = D(a_2) \times D(a_1) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\};$$

$$D([a_2, a_1, a_2]) = D(a_2) \times D(a_1) \times D(a_2) = \{1, 2\}^3;$$

$$E^{\lambda_1}_{a_1} = E^{\lambda_2}_{a_2} = 1,\ P^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{a_1,a_2} = (\lambda_1 < \lambda_2) \vee (\lambda_1 = \lambda_2), \quad \text{где } \lambda_1 \in D(a_1),\ \lambda_2 \in D(a_2);$$

$$a_1 \prec a_2;\ [a_2, a_1] \prec [a_2, a_1, a_2];$$

$$e_3 = \left|\left\{(\lambda_1, \lambda_2) \in D([a_2, a_1]) \mid E^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{[a_2,a_1]} = 1\right\}\right| = |\{(1, 2)\}| = 1.$$

Далее мы будем придерживаться следующего важного соглашения.

Замечание 1.1.1. *Для любых коммутаторов $Q, R \in \Gamma(a_1, \ldots, a_n)$, мы можем использовать запись $[Q, {}_uR]$ только с максимально возможным значением параметра u, т.е. для любого $S \in \Gamma(a_1, \ldots, a_n)$ имеем $[Q, {}_uR] \neq [S, {}_{u+1}R]$.*

Центральным результатом параграфа является следующая система рекуррентных соотношений.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\{W_j\}_{j\geqslant 0}$ — *произвольный вариант собирательного процесса. Тогда имеют место следующие рекуррентные соотношения (если левая часть соотношения определена для* $\{W_j\}_{j\geqslant 0}$*):*

$$E^{\Lambda_0^1\cdots\Lambda_u^1}_{[Q_1,\,_uR_1]} = P^{\Lambda_0^1\Lambda_1^1}_{Q_1,R_1}\bigwedge_{k=1}^{u-1} P^{\Lambda_k^1\Lambda_{k+1}^1}_{R_1,R_1}, \quad u \geqslant 1;$$

$P^{\Lambda_0^1\cdots\Lambda_u^1\Lambda_0^2\cdots\Lambda_v^2}_{[Q_1,\,_uR_1],[Q_2,\,_vR_2]}$ *равен*

$$\begin{array}{ll}
E^{\Lambda_0^1\cdots\Lambda_u^1}_{[Q_1,\,_uR_1]}E^{\Lambda_0^2\cdots\Lambda_v^2}_{[Q_2,\,_vR_2]}F, & \text{если } u+v\geqslant 1,\ R_1=R_2,\ Q_1=Q_2;\\
E^{\Lambda_0^1\cdots\Lambda_u^1}_{[Q_1,\,_uR_1]}E^{\Lambda_0^2\cdots\Lambda_v^2}_{[Q_2,\,_vR_2]}P^{\Lambda_0^1\Lambda_0^2}_{Q_1,Q_2}, & \text{если } u+v\geqslant 1,\ R_1=R_2,\ Q_1\neq Q_2,\\
 & u=0\Rightarrow w(Q_1)=1,\ v=0\Rightarrow w(Q_2)=1;\\
E^{\Lambda_0^1\cdots\Lambda_u^1}_{[Q_1,\,_uR_1]}E^{\Lambda_0^2\cdots\Lambda_v^2}_{[Q_2,\,_vR_2]}P^{\Lambda_0^1\cdots\Lambda_u^1\Lambda_0^2}_{[Q_1,\,_uR_1],Q_2}, & \text{если } u,v\geqslant 1,\quad R_1\prec R_2;\\
E^{\Lambda_0^1\cdots\Lambda_u^1}_{[Q_1,\,_uR_1]}E^{\Lambda_0^2\cdots\Lambda_v^2}_{[Q_2,\,_vR_2]}P^{\Lambda_0^1\Lambda_0^2\cdots\Lambda_v^2}_{Q_1,[Q_2,\,_vR_2]}, & \text{если } u,v\geqslant 1,\quad R_2\prec R_1;
\end{array}$$

где $[Q_1,\,_uR_1]\neq Q_2$ *для* $u\geqslant 1$ *и* $[Q_2,\,_vR_2]\neq Q_1$ *для* $v\geqslant 1$,

$$\Lambda_0^1\in D(Q_1),\ \Lambda_0^2\in D(Q_2),\ \Lambda_1^1,\ldots,\Lambda_u^1\in D(R_1),\ \Lambda_1^2,\ldots,\Lambda_v^2\in D(R_2),$$

$$F = P^{\Lambda_0^1\Lambda_0^2}_{Q_1,Q_2}\vee(\Lambda_0^1=\Lambda_0^2)\left((u<v)\bigwedge_{k=1}^{u}(\Lambda_k^2=\Lambda_k^1)\vee\bigvee_{k=1}^{\min\{u,v\}}P^{\Lambda_k^2\Lambda_k^1}_{R_1,R_2}\bigwedge_{h=1}^{k-1}(\Lambda_h^2=\Lambda_h^1)\right).$$

Полученные соотношения позволяют выразить $E^{\Lambda}_{q_j}$ через операции конъюнкции, дизъюнкции, предикат равенства и предикаты

$$E^{\Lambda}_{a_i},\quad \Lambda\in D(a_i),\qquad P^{\Lambda_2\Lambda_2}_{a_i,a_j},\quad \Lambda_1\Lambda_2\in D(a_i)\times D(a_j), \tag{9}$$

значения которых определяются структурой начального слова W_0.

Пример 1.2.4. Рассмотрим вариант собирательного процесса из примера 1.1.1. Условие существования

$$E^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}_{[[a_2,a_1],a_2]},\quad (\lambda_1,\lambda_2)\in D([a_2,a_1]) = D(a_2)\times D(a_1),\ \lambda_3\in D(a_2),$$

с помощью рекуррентных соотношений выражается следующим образом:

$$E^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}_{[[a_2,a_1],a_2]} = P^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}_{[a_2,a_1],a_2} = E^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{[a_2,a_1]}E^{(\lambda_3)}_{a_2}P^{(\lambda_1\lambda_3)}_{a_2,a_2} = P^{(\lambda_1,\lambda_2)}_{a_2,a_1}E^{(\lambda_3)}_{a_2}P^{(\lambda_1\lambda_3)}_{a_2,a_2}.$$

Используя информацию из примера 1.1.2, получаем

$$E^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}_{[[a_2,a_1],a_2]} = (\lambda_1<\lambda_2)(\lambda_1<\lambda_3),\quad (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\{1,2\}^3.$$

Единственный случай, когда $E^{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}_{[[a_2,a_1],a_2]} = 1$, — это $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (1,2,2)$.

В доказательстве теоремы существенно используется установленное соответствие двоичных чисел коммутаторам в несобранной части, что позволяет эффективно описать ее строение и свести вопрос предшествования вхождений коммутаторов к предшествованию двоичных чисел.

Теорема 1.2.1. *Пусть G — группа, $m \in \mathbb{N}$ и $y, x_1, x_2, \dots, x_m \in G$. Тогда справедливо следующее тождество:*

$$[y, x_1 x_2 \dots x_m] = \prod_{i=1}^{2^m-1} [y, {}_{i_1}x_1, {}_{i_2}x_2, \dots, {}_{i_m}x_m],$$

где $\overline{i_1 i_2 \dots i_m}$ — m-разрядное двоичное представление индекса i.

Пример 1.2.3. При $m = 2$ указанное тождество принимает вид хорошо известной формулы (см., например, [12]):

$$[y, x_1 x_2] = [y, {}_0x_1, {}_1x_2][y, {}_1x_1, {}_0x_2][y, {}_1x_1, {}_1x_2] = [y, x_2][y, x_1][y, x_1, x_2].$$

В **§ 1.3** удается найти выражение для мощности (7) в следующем случае. Назовем L-условием ранга не выше r, $r \in \mathbb{N}$, произвольную формулу алгебры высказываний, в которой каждая пропозициональная переменная заменена на предикаты $[\lambda_i = \lambda_j]$, $[\lambda_i < \lambda_j]$, где $1 \leqslant i, j \leqslant r$. Справедлива

Теорема 1.3.1. *Пусть $M_1, \dots, M_r$ — непустые конечные подмножества некоторого линейно упорядоченного множества, C — произвольное L-условие ранга не выше r. Если выполнены условия:*

$$M = M_1 \cap \dots \cap M_r \neq \varnothing; \qquad [\min M, \max M] \cap (M_i \backslash M) = \varnothing, \quad i \in \overline{1, r};$$

то количество элементов из $M_1 \times \dots \times M_r$, удовлетворяющих условию C, выражается в виде

$$\sum_{t=1}^{r} a_t \binom{|M|}{t} + \sum_{t=0}^{r-1} b_t \binom{|M|}{t}, \tag{10}$$

где a_s, b_s — целые неотрицательные коэффициенты, b_s зависят от $M_1, \dots, M_r$ и C, a_s зависят только от C. Более того, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^r$, то $b_0 = 0$, а при $M_1 = \dots = M_r$ все b_s равны нулю.

В условиях теоремы, если $M \in \{M_i\}_{i=1}^r$, то выражение (10) обладает свойством делимости: если $|M|$ есть степень простого числа p^α и $r < p$, то (10) делится на $|M|$.

Всюду далее используем следующее определение расширенного биномиального коэффициента:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (n - i), \text{ если } k \geqslant 0; \\ 0, \text{ если } k < 0. \end{cases} \qquad n, k \in \mathbb{Z}.$$

В **§ 1.4** демонстрируется применение разработанного подхода к исследованию делимости показателей степеней e_j. Суть этого подхода заключается в нахождении разметки для слова W_0, при которой предикаты (9), а следовательно, согласно § 1.2, и предикат E_{q_j} выражаются некоторыми L-условиями, а множество (6) удовлетворяет условиям комбинаторного результата из § 1.3, благодаря которому и будет получено свойство делимости для (7).

Теорема 1.4.1. *Пусть* $\{W_j \equiv q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j\}_{j \geqslant 0}$ *— произвольный вариант собирательного процесса в свободной группе* $F(a_1, \dots, a_n)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, с начальным словом*

$$W_0 \equiv \prod_{i=1}^{N} \left(a_1^{\rho(i,1)} \dots a_n^{\rho(i,n)} \right), \quad N \in \mathbb{N},\ \rho(i,k) : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}.$$

Пусть $M_k = \{i \mid \rho(i,k) = 1\}$*,* $k \in \overline{1,n}$*, и* $(a_{k_1}, \dots, a_{k_{w(q_j)}})$ *есть бесскобочная запись* q_j*. Если множество* $M = M_{k_1} \cap \dots \cap M_{k_{w(q_j)}}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$M \in \{M_{k_s}\}_{s=1}^{w(q_j)}; \qquad [\min M, \max M] \cap (M_{k_s} \backslash M) = \varnothing, \quad s \in \overline{1, w(q_j)};$$

тогда

$$e_j = \sum_{t=1}^{w(q_j)} c_t \binom{|M|}{t}, \quad c_t \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема показывает, что для любого семейства множеств M_k, удовлетворяющих условиям теоремы 1.3.1, можно построить соответствующее начальное слово W_0. Отсюда мы получаем многочисленные примеры собирательных формул с нетривиальными свойствами делимости показателей степеней коммутаторов. Далее мы рассмотрим лишь несколько таких примеров.

Пример 1.4.2. Пусть $M_k = \{1, \dots, m\}$, $k \in \overline{1,n}$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда мы имеем начальное слово $W_0 \equiv (a_1 \dots a_n)^m$ в варианте собирательного процесса $\{W_j \equiv q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j\}_{j \geqslant 0}$. Если коммутаторы собирались в порядке возрастания весов, то справедлива следующая собирательная формула в свободной группе $F = F(a_1, \dots, a_n)$:

$$(a_1 \dots a_n)^m = q_1^{e_1} \dots q_{j(s)}^{e_{j(s)}} \pmod{\Gamma_s(F)}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Для любого коммутатора q_j имеем $M = \{1, \dots, m\}$, $|M| = m$. Следовательно, e_j делится на m, если m есть степень простого числа p^α и $w(q_j) < p$.

Пример 1.4.3. Пусть $M_k = \{1, \dots, m\}$ для $k \neq s$, и $M_s = \{1, \dots, m+r\}$, где $s \in \overline{1,n}$, $m, r \in \mathbb{N}$. Тогда мы имеем начальное слово $W_0 \equiv (a_1 \dots a_n)^m a_s^r$ в варианте собирательного процесса $\{W_j \equiv q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j\}_{j \geqslant 0}$. Таким образом, справедлива следующая собирательная формула в свободной группе $F(a_1, \dots, a_n)$:

$$(a_1 \dots a_n)^m a_s^r = q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j.$$

Предположим, что $w(q_j) \geqslant 2$. Тогда бесскобочная запись q_j содержит букву отличную от a_s. Следовательно, $M = \{1, \dots, m\}$, $|M| = m$, и e_j делится на m, если m есть степень простого числа p^α и $1 < w(q_j) < p$.

Пример 1.4.4. Пусть $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Тогда мы имеем слово $W_0 \equiv (a_1 a_2 a_3)^3 (a_2 a_3)^2 a_3^2$. Если $w_{a_1}(q_j) \geqslant 1$ и $3 > w(q_j) \geqslant 1$, то e_j делится на 3. Если $w_{a_1}(q_j) = 0$, $w_{a_2}(q_j) \geqslant 1$ и $5 > w(q_j) \geqslant 1$, то e_j делится на 5.

Теорема 1.4.2. Пусть $\left\{W_j \equiv q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j\right\}_{j \geqslant 0}$ — произвольный вариант собирательного процесса в свободной группе $F(a_1, \dots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, с начальным словом

$$W_0 \equiv a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}, \quad m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}.$$

Если $w_{a_{s_1}}(q_j) \geqslant 1, \dots, w_{a_{s_r}}(q_j) \geqslant 1$, тогда показатель степени e_j выражается в виде

$$e_j = \sum_{t_1=1}^{w_{a_{s_1}}(q_j)} \cdots \sum_{t_r=1}^{w_{a_{s_r}}(q_j)} c(t_1, \dots, t_r) \binom{m_{s_1}}{t_1} \cdots \binom{m_{s_r}}{t_r},$$

где целые числа $c(t_1, \dots, t_r)$ не зависят от $m_{s_1}, \dots, m_{s_r}$.

Пример 1.4.5. Пусть коммутаторы собираются в порядке возрастания весов, и коммутаторы веса 1 собираются в следующем порядке: a_{s+1}, a_{s+2}, …, a_n, a_1, a_2, …, a_s для некоторого $s \in \overline{1, n-1}$. Тогда рассматриваемый вариант собирательного процесса $\left\{W_j \equiv q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j\right\}_{j \geqslant 0}$ приводит к следующей собирательной формуле в свободной группе $F = F(a_1, \dots, a_n)$:

$$[a_1^{m_1} \dots a_s^{m_s}, a_{s+1}^{m_{s+1}} \dots a_n^{m_n}] = q_{n+1}^{e_{n+1}} \dots q_{j(k)}^{e_{j(k)}} \pmod{\Gamma_k(F)}, \quad k \geqslant 2,$$

где $q_{n+1}, \dots, q_{j(k)}$ — коммутаторы весов не меньше, чем k, и e_j делится на m_i, если m_i есть степень простого числа p^α и $1 \leqslant w_{a_i}(q_j) < p$.

Теорема 1.4.3. *Пусть $\{W_j \equiv q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j\}_{j \geqslant 0}$ — произвольный вариант собирательного процесса в свободной группе $F(a_1, \dots, a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, с начальным словом*

$$W_0 \equiv \prod_{i=1}^{N} \left(a_{k_1}^{\rho(i,1)} \dots a_{k_s}^{\rho(i,s)}\right), \quad N, s \in \mathbb{N},\ \rho(i,j) : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, s\} \to \{0, 1\},$$

где $k_1, \dots, k_s \in \overline{1, n}$. Пусть

$$M_k = \{(i,j) \mid k_j = k,\ \rho(i,j) = 1\}, \qquad M_k(\mu) = \{i \mid (i, \mu) \in M_k\}, \quad k \in \overline{1, n},$$

и $(a_{i_1},\ldots,a_{i_{w(q_j)}})$ *— бесскобочная запись коммутатора* q_j. *Если для любых* $\mu_1,\ldots,\mu_{w(q_j)}$ *множество* $M = M(\mu_1,\ldots,\mu_{w(q_j)}) = M_{i_1}(\mu_1)\cap\cdots\cap M_{i_{w(q_j)}}(\mu_{w(q_j)})$ *удовлетворяет условиям:*

$$M \in \{M_{i_k}(\mu_k)\}_{k=1}^{w(q_j)}; \qquad [\min M, \max M]\cap (M_{i_k}(\mu_k)\backslash M) = \varnothing, \quad k\in\overline{1, w(q_j)};$$

тогда

$$e_j = \sum_{t=1}^{w(q_j)} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_{w(q_j)}} c_t(\mu_1,\ldots,\mu_{w(q_j)}) \binom{|M(\mu_1,\ldots,\mu_{w(q_j)})|}{t},$$

где $c_t(\mu_1,\ldots,\mu_{w(q_j)})\in\mathbb{N}_0$.

Пример 1.4.6. Пусть $W_0 \equiv (a_{k_1}\ldots a_{k_s})^m$, где $m\in\mathbb{N}$. Тогда мы положим

$$M_k = \{1,\ldots,m\}\times\{j \mid k_j = k\}, \quad k\in\overline{1,n}.$$

Если коммутаторы собираются в порядке возрастания весов, тогда мы получаем следующую собирательную формулу в свободной группе $F = F(a_1,\ldots,a_n)$:

$$(a_{k_1}\ldots a_{k_s})^m = q_1^{e_1}\ldots q_{j(c)}^{e_{j(c)}} \pmod{\Gamma_c(F)}, \quad c\in\mathbb{N},$$

где e_j делится m, если m есть степень простого числа p^α и $w(q_j) < p$.

Пример 1.4.7. Пусть $W_0 \equiv a_l^r\,(a_{k_1}\ldots a_{k_s})^m$, где $l\in\overline{1,n}$, $m,r\in\mathbb{N}$. Тогда мы положим

$$M_k = \{r+1,\ldots,m+r\}\times\{j \mid k_j = k\}, \quad k\neq l;$$
$$M_l = \Big(\{1,\ldots,m+r\}\times\{j'\}\Big)\cup\Big(\{r+1,\ldots,m+r\}\times\{j \mid k_j = l\}\Big);$$

где j' такое, что $k_{j'} = l$. Получаем следующую собирательную формулу в свободной группе $F(a_1,\ldots,a_n)$:

$$a_l^r\,(a_{k_1}\ldots a_{k_s})^m = q_1^{e_1}\ldots q_j^{e_j}T_j,$$

где e_j делится на m, если m есть степень простого числа p^α и $1 < w(q_j) < p$.

Основные результаты параграфов 1.1, 1.2 и 1.4 опубликованы в работе автора [26], результаты параграфа 1.3 — в работе автора [22].

Глава 2 диссертации посвящена вычислению показателей степеней коммутаторов в собирательной формуле Ф. Холла (2) для выражения $(xy)^n$, $n\geqslant 1$.

В **§ 2.1** представлена параметризация несобранной части формулы Ф. Холла с помощью функции бинарного веса числа $\omega(i)$, равной количеству единиц в двоичной записи целого неотрицательного числа i.

Теорема 2.1.1. *Пусть* G *— группа,* $x,y\in G$. *Тогда для любого* $n\in\mathbb{N}$ *справедливо следующее тождество:*

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{k=1}^{n-1}\prod_{i_1=1}^{2^{n-k}-1}\prod_{i_2=0}^{2^{n-k}-1} [y,{}_{\omega(i_1)}x,{}_{\omega(i_2)}y].$$

Доказан ряд комбинаторных результатов, связанных с множеством решений i уравнения $\omega(i) = x$, $x \in \mathbb{Z}$, с помощью которых в **§ 2.2** получены в явном холловском виде (3) показатели степеней для двух серий коммутаторов.

Теорема 2.2.1. *Пусть G — группа, $x, y \in G$. Тогда в собирательной формуле Ф. Холла для выражения $(xy)^n$, $n \in \mathbb{N}$, показатель степени коммутатора $[y, {}_u x, {}_v y]$, где $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, и $v = 0$ при $u = 0$, равен*

$$g_n(u, v) = \sum_{i=1}^{u+v+1} \binom{n}{i} \binom{i-1}{u} \binom{u}{i-v-1}. \tag{11}$$

В частности, если $[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1$, то

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{u=1}^{n-1} \prod_{v=0}^{n-1} [y, {}_u x, {}_v y]^{g_n(u,v)}. \tag{12}$$

Теорема 2.2.2. *Пусть G — группа, $x, y \in G$. Тогда в собирательной формуле Ф. Холла для выражения $(xy)^n$, $n \in \mathbb{N}$, показатель степени коммутатора $[[y, {}_u x], [y, {}_v x]]$, $u > v \geqslant 1$, равен*

$$f_n(u, v) = \sum_{i=1}^{u+v+2} \binom{n}{i} \left(\binom{i-1}{v+1} \binom{v+1}{i-u-1} + \sum_{k=1}^{v} \binom{i-k-1}{i-v-1} \binom{v-k}{i-u-2} \right). \tag{13}$$

В частности, если $[\Gamma_2(G), \Gamma_2(G), \Gamma_2(G)] = 1$ и $y \in C_G(\Gamma_2(G))$, то

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=1}^{n-1} [y, {}_i x]^{\binom{n}{i+1}} \prod_{n-1 \geqslant u > v \geqslant 1} [[y, {}_u x], [y, {}_v x]]^{f_n(u,v)}. \tag{14}$$

Благодаря холловскому виду для данных показателей степеней были найдены выражения по модулю простого n, в частности, когда вес коммутатора равен n.

Основные результаты параграфа 2.1 опубликованы в совместной работе [24] (в соавторстве с Г. П. Егорычевым и С. Г. Колесниковым), результаты параграфа 2.2 — в работе автора [23].

В **главе 3** диссертации для любых натуральных чисел $n \geqslant (p+2)/3$ и $m \geqslant 3$, где p — такое нечетное простое число, что $(p+2)/3$ — целое, доказана нерегулярность группы $(n \times n)$-матриц

$$P_n(\mathbb{Z}_{p^m}) = \{E + (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}_{p^m} \text{ при } i > j;\ a_{ij} \in \langle p \rangle \text{ при } i \leqslant j\}, \tag{15}$$

являющейся силовской p-подгруппой общей линейной группы $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$.

В **§ 3.1** получено необходимое условие регулярности конечной p-группы: для любого целого $j \geqslant 0$ и любых элементов a и b регулярной p-группы G существует элемент $d \in \langle a, b \rangle$ такой, что отрезок собирательной формулы Ф. Холла для $(ab)^p$, содержащий коммутаторы весов $p, p+1, \ldots, p+j$, равен d^p по модулю $\Gamma_{p+j+1}(G)$. С помощью результатов главы 2 полученное равенство удалось записать в явном виде при $j = 0$, когда любой коммутатор, имеющий более двух вхождений b, равен 1, а при весе $\geqslant p$ имеет порядок 1 или p:

$$d^p = [b, {}_{p-1}a]\,[b, {}_{p-2}a, b]^{-1} \prod_{v=1}^{(p-3)/2} [[b, {}_{p-2-v}a], [b, {}_{v}a]]^{(-1)^{v+1}} \pmod{\Gamma_{p+1}(G)}.$$

В **§ 3.2** найден контрпример к указанному необходимому условию для группы (15) при $n = (p+2)/3$ и $m = 3$:

$$a = E + A, \quad b = E + pB, \qquad \text{где } A = e_{21} + e_{32} + \cdots + e_{n,n-1},\ B = e_{1n},$$

E — единичная матрица, e_{ij} — матрица с единицей на позиции (i, j) и нулями на остальных позициях. Поскольку свойство регулярности наследуется подгруппами и факторгруппами, имеет место следующий результат.

Теорема 3.2.1 *Пусть p — такое нечетное простое число, что число $(p+2)/3$ — целое. Тогда группа $P_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ не является регулярной, если $n \geqslant (p+2)/3$ и $m \geqslant 3$.*

Основные результаты параграфов 2.1 и 2.2 опубликованы в совместной работе [25] (в нераздельном соавторстве с С. Г. Колесниковым).

Автор искренне благодарит своего научного руководителя Сергея Геннадьевича Колесникова за постановку задач, обсуждение полученных научных результатов и помощь в оформлении текста диссертации. Отдельного упоминания заслуживает д-р физ.-мат. наук Георгий Петрович Егорычев, с которым автор имел честь заниматься исследованиями, связанными с темой диссертации. Автор выражает благодарность коллективу кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики СФУ за хорошие условия работы над диссертацией.

Исследования по части главы 3, частично главы 2, параграфа 1.3 поддержаны Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429). Основные результаты параграфов 1.1, 1.2 и 1.4 получены при поддержке Российского научного фонда (Проект № 22-21-00733).

Список литературы

[1] Иванов Ф. А., Скопин А. И. Максимальная 2-порожденная трансметабелева группа первого типа экспоненты 9 // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2. — № 6. — С. 150–160.

[2] Колесников С. Г. О регулярности силовских p-подгрупп групп $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ // Иссл. по матем. анализу и алгебре. — 2001. — Т. 3. — С. 117–124.

[3] Колесников С. Г. О регулярных силовских p-подгруппах групп Шевалле над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$ // Сиб. матем. журн. — 2006. — Т. 47. — № 6. — С. 1289–1295.

[4] Колесников С. Г. О необходимых условиях регулярности силовской p-подгруппы группы $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. — 2013. — Т. 6. — № 2. — С. 18–25.

[5] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. — 455 с.

[6] Мерзляков Ю. И. Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп // Алгебра и логика. Семинар. — 1964. — Т. 3. — № 4. — С. 49–59.

[7] Скопин А. И. О собирательной формуле // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1974. — Т. 46. — С. 59–63.

[8] Скопин А. И. Тождество Якоби и собирательная формула Ф. Холла в трансметабелевых группах двух типов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1989. — Т. 175. — С. 106–112.

[9] Скопин А. И. Графическое построение собирательной формулы некоторых типов групп // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1991. — Т. 191. — С. 140–151.

[10] Скопин А. И., Тетерин Ю. Г. Ускорение алгорифма построения собирательной формулы Ф. Холла // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1995. — Т. 191. — С. 106–112.

[11] Скопин А. И. Нижний центральный ряд максимальной 2-порожденной трансметабелевой группы I типа экспоненты 8 // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2. — № 5. — С. 197–219.

[12] Холл М. Теория групп. М.: ИИЛ, 1962. — 468 с.

[13] Ягжев А. В. О регулярности силовских подгрупп полных линейных групп над кольцами вычетов // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56. — № 6. — С. 106–116.

[14] Gaglione A. M. A commutator identity proved by means of the Magnus Algebra // Houston J. Math. — 1979. — Vol. 5. — № 2. — P. 199–207.

[15] Gaglione A. M., Spellman D. Commutator identities obtained by the Magnus Algebra // Houston J. Math. — 1985. — Vol. 11. — № 4. — P. 491–504.

[16] Hall P. A contribution to the theory of groups of prime-power order // Proc. Lond. Math. Soc. — 1934. — Vol. 36 (2). — P. 29–95.

[17] Krause E. F. On the collection process // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 15. — № 3. — P. 497–504.

[18] Krause E. F. Groups of exponent 8 satisfy the 14th Engel congruence // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 15. — № 3. — P. 491–496.

[19] Unsolved Problems in Group Theory: the Kourovka Notebook. eds. Khukhro E. I. and Mazurov V. D., 20th edition, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk. 2022.

[20] Struik R. R. On nilpotent products of cyclic groups. II // Can. J. Math. — 1961. — Vol. 13. — P. 557–568.

[21] Waldinger H. V. Two theorems in the commutator calculus // Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — Vol. 167. — P. 389–397.

Работы автора по теме диссертации

[22] Леонтьев В. М. Комбинаторные вопросы, связанные с собирательным процессом Ф. Холла // Сибирские электронные математические известия. — 2020. — Т. 17. — С. 873–889.

[23] Леонтьев В. М. О показателях степеней коммутаторов из собирательной формулы Ф. Холла // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2022. — Т. 28. — № 1. — С. 182–198.

[24] Kolesnikov S. G., Leontiev V. M., Egorychev G. P. Two collection formulas // J. Group Theory. – 2020. – Vol. 23. — № 4. – P. 607–628.

[25] Kolesnikov S. G., Leontiev V. M. One necessary condition for the regularity of a p-group and its application to Wehrfritz's problem // Sib. Electron. Math. Rep. — 2022. — Vol. 19. — № 1. — P. 138–163.

[26] Leontiev V. M. On the collection process for positive words // Sib. Electron. Math. Rep. — 2022. — Vol. 19. — № 2. — P. 439–459.

[27] Леонтьев В. М. Явный вид собирательной формулы Холла при некоторых ограничениях на вхождение переменных в коммутаторы // Проспект Свободный — 2016: материалы науч. конф., посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств (15–25 апреля 2016 г.) — Красноярск: СФУ. — 2016. — С. 34–35.

[28] Леонтьев В. М. Собирательные формулы холловского типа // Проспект Свободный – 2018: материалы Международной студенческой конференции. — Красноярск: СФУ. — 2018. — С. 724–725.

[29] Egorychev G. P., Kolesnikov S. G., Leontiev V. M. Two collection formulas // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: Издательство МГУ. — 2018. — С. 232–235.

[30] Леонтьев В. М. О вычислении показателей степеней коммутаторов в собирательной формуле Холла // Математика: Материалы 57-й Междунар. науч. студ. конф. — Новосибирск : ИПЦ НГУ. — 2019. — С. 11.

[31] Леонтьев В. М. О вычислении показателей степеней коммутаторов в собирательной формуле Холла // Проспект Свободный – 2019: материалы XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной Международному году Периодической таблицы химических элементов Д. И. Менделеева. — Красноярск: СФУ. — 2019. — С. 1070–1071.

[32] Leontiev V. M. Combinatorial problems connected with P. Hall's collection process // Проспект Свободный – 2020: материалы XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной году памяти и славы (75-летию Победы в Великой Отечественной войне 1941–1945 годов). — Красноярск: СФУ. — 2020. — С. 724–725.

[33] Колесников С. Г., Леонтьев В. М. Об одном необходимом условии регулярности p- группы и его следствиях // Мальцевские чтения: тезисы докладов международной конференции. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. — 2021. — С. 96.

[34] Леонтьев В. М. О собирательном процессе для положительных слов // Мальцевские чтения: тезисы докладов международной конференции. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. — 2022. — С. 103.

[35] Leontiev V. M. On the collection formulas for positive words // Международная конференция по теории групп, посвященная 80-летию В. Д. Мазурова: тезисы докладов. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. — 2023. — С. 9.

[36] Leontiev V. M. On divisibility of some sums of binomial coefficients arising from collection formulas // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2018. – Vol. 11. — № 5. — P. 603–614.