Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
/Я.Н. Нужин
«23» июня 2023 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПРИМЕНЕНИЕ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ В АНАЛИЗЕ ИНФОРМАЦИИ И ПРАГМАТИКЕ СОСТОЯНИЙ И СОБЫТИЙ

Руководитель	профессор, доктор физико-математических наук	В.В. Рыбаков
Выпускник		М.А. Извеков
Нормоконтролер		Т.Н. Шипина

Красноярск 2023

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Применение модальной логики в анализе информации и прагматике состояний и событий» содержит 33 страницы текста, 6 использованных источников.

МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА, СЕМАНТИКА КРИПКЕ, МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ, ТЕХНИКА ПРОРЕЖИВАНИЯ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ.

Цель работы – построить оптимальный алгоритм распознающий выполнимость формулы. Освоить техники, которые позволят при работе с модальной системой упростить нахождение доказательства разрешимости.

В результате исследований были применены техники по упрощению модальных систем: метод фильтрации и техники прореживания. После их использования алгоритм доказательства разрешимости, а следовательно, и выполнимости формулы становится оптимальным.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Модальная логика является разделом математической логики, изучающей «модальные» логические связки, такие как «необходимо» и «возможно». То есть, она изучает не только утверждения и отрицания, но и так называемые сильные и слабые утверждения и отрицания. К сильным относится, к примеру, утверждение «Это необходимо истинно», а к слабым относится «Это возможно ложно».

Интерес к модальной логике считается высоким, что связано с широким разнообразием прикладного применения модальностей. Модальная логика в частности помогает решать вопросы, которые касаются обучения искусственного интеллекта, теории игр, анализа достоверности и доступа к информации, а также к изменению состояния объектов в пространстве и во времени. И это только малая часть вопросов, ответ на которые ищут при помощи модальной логики.

Модальная логика и её прикладные приложения математически активно исследовались К.Льюисом [1], К. Геделем, Д. Леммоном [2,3,4], Д. Скотт [4], Р. Фейсом [5], В. В. Рыбаковым [6] и другими авторами.

Цель бакалаврской работы – построить оптимальный алгоритм распознающий выполнимость формулы. Освоить техники, которые позволят при работе с модальной системой упростить нахождение доказательства разрешимости.

На основе условии может применяться как метод фильтрации, так и техника прореживания.

Метод фильтрации объединяет все узлы, которые при доказательстве разрешимости, имеют практически идентичный процесс и результат доказательства. В результате чего при доказательстве «отфильтрованного» узла одновременно доказываются все узлы, которые в этот самый узел и вошли. Что ускоряет и упрощает дальнейшее доказательство того что система является финитно-аппроксимируемой, а затем и того что она разрешима.

Техника прореживания позволяет избавиться от таких узлов, которые могут являться лишними при проверке формулы, что также упрощает и ускоряет проверку разрешающего алгоритма.

1 Описание истории вопроса

Несмотря на то, что модальную логику математическими методами стали рассматривать только в XX веке, о существовании модальностей было известно ещё в античные времена. Впервые в логику модальности были введены Аристотелем, и хотя его интерес к модальным высказываниям был связан с его философской концепцией, исследование модальностей в работах Аристотеля являлся чисто логическим, без каких-либо философских предположений. То есть Аристотель либо явно формулировал, либо неявно использовал некоторые модальные правила противоположения и вывода. Но, он не использовал модальности в определенном смысле, что видно по тому, что термин «возможно» понимался им весьма различным образом в соответствии с разнообразными интуитивными смыслами этого слова.

Математическими методами модальности исследуются, начиная с работ К. Льюиса, предпринявшего синтаксическое построение модальных систем. В его исследованиях была формализована система классических модальностей. Также была проведена подобная же работа с целью построения теории «строгой импликации» и положено начало в различении систем модальной логики. Основные черты льюисовских исчислений были скопированы с формализованной логики $Principia\ Mathematica$. Поэтому эти исчисления исходят из модального исчисления высказываний, сформулированы с помощью понятий, разве лишь терминологически отличающихся от понятий, использованных в $Principia$ и выведены аксиоматически по образцу $Principia$.

Следует подчеркнуть, что Льюис ставил перед собой специфическую цель. Его идея состояла в проведении различия между связками, выражающими логическую необходимость, и связками, не выражающими такого рода необходимости. Это проявилось в различении «материальной импликации» $Principia$ и необходимой импликации, логические законы которой более адекватно описывают понятие «импликации» как отношения, оправдывающего выводимость. Вывод этой цели привел к такому следствию: так как строгой импликации была отведена роль, аналогичная той, которую играет материальная импликация в $Principia$, то аксиомы были аналогичны аксиомам $Principia$, но содержали строгую импликацию вместо материальной. Это был новый метод построения теории модальностей, который привел к новым результатам.

Таким образом Льюис создал такие системы аксиом как $S3$ (Впервые опубликована в $A\ Survey\ of\ Symbolic\ Logic$ в 1916-ом году) и $S2$ (Менее строгая система аксиом, впервые появившаяся в $Symbolic\ Logic$, написанной совместно с Лэнгфордом в 1932-ом году). После этого было построено много различных модальных систем.

Новое направление исследований началось с попытки О. Беккера разъяснить путем формализации один давно известный факт. Классическая теория модальностей все свое внимание уделяла модальностям истины, необходимости, возможности и их отрицаниям. Но как быть с «суперпозициями» модальностей, такими как «необходимо, что необходимо…», «необходимо, что возможно…», или с суперпозициями более чем двух модальностей?

Хоть и подобные суперпозиции казались странными. Однако была возможность попытаться сформулировать аксиомы, позволяющие «сводить» модальности к определенному числу или к модальностям определенной формы.

Если ввести аксиому, сводящую любую сложную модальность к одной из шести простейших модальностей (что означает, что любая суперпозиция модальностей будет эквивалентной модальности без суперпозиций), то получится система, называемая $S5$. Но можно и ослабить систему. Так, например система $S4$, позволяет повторению операторов необходимости или возможности становится эквивалентным единственному оператору необходимости или возможности.

Стимулом для дальнейших исследований явилось доказательство Маккиниси того, что в $S2$ существует бесконечное количество неэквивалентных суперпозиций модальностей. Не менее удивительным кажется результат Парри, который доказал что в системе $S3$ содержится ровно 42 простых модальности и их суперпозиции. А между основными системами располагается большое (если не бесконечное) количество систем. Для них выяснено, какие импликации модальностей имеют место, а какие нет, и тому подобное. Для того чтобы решить проблему разрешения систем $S5$, $S2$ и $S4$ была разработана техника построения матриц.

К этому моменту модальная логика стала весьма развитой отраслью формализованной логики. Но остается важным вопрос о ее интерпретации.

К примеру, самой очевидной интерпретацией является задуманная Льюисом. Она отождествляет необходимость с «логической необходимостью», которую можно охарактеризовать синтаксически. Теория Карнапа, что использует систему $S5$, пытается связать эти два понятия между собой. В то же время есть и другая синтаксическая интерпретация, которая использует уже $S4$ и термин «возможно» в качестве исходного. Эта интерпретация была предложена Маккинси. Для более слабых систем интерпретаций не было получено.

Очень интересный перевод интуиционистской логики посредством системы $S4$ был дан Гёделем. Согласно ему, модальности можно использовать для разъяснения некоторых трудных логических понятий. Синтезировав алгебраические методы Маккинси и Тарского, а также семантику Крипке он получил свою интерпретацию модальной логики, которая впоследствии была развита Леммоном. Как раз такую интерпретацию мы и будем использовать в дальнейшем.

2 Изложение основных технических инструментов необходимых для работы

Для применения модальной логики нужно применить большое число технических инструментов, которые относятся как к классической математической логике, так и к самой модальной. В этом разделе будут описаны как раз такие инструменты.

В связи с тем, что основной задачей является доказательство разрешимости, то в этом разделе также будет описан как теоремы, которые доказывают разрешимость модальных систем. И ещё будут расписаны два метода, благодаря которым, становится значительно легче описывать разрешимость модальной системы.

2.1 Основные инструменты классической логики высказываний

Синтаксическое построение исчисления предполагает задание алфавита, правил образования слов-формул, аксиом и правил вывода. Под алфавитом понимаются утверждения, полученные из более простых с помощью логических правил образования. Также, правила вывода – способы строить доказательства утверждений исходя из гипотез.

Алфавит классической логики высказываний состоит из пропозициональных переменных: p, q, r ..., они обычно обозначаются прописными латинскими буквами (при необходимости с индексами). Также в алфавит входят логические связки: $\wedge$ (конъюнкция, «И»), $\vee$ (дизъюнкция, «ИЛИ»), $\rightarrow$ (импликация, «ВЛЕЧЕТ»), $\neg$ (отрицание, «НЕ»), и также входят скобки $($, $)$.

Кроме того, также присутствует 10 аксиом и одно правило вывода. Аксиом 10 и каждый из них описывается следующим образом:

$$A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

$$A_2: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)),$$

$$A_3: A \land B \to A,$$

$$A_4: A \land B \to B,$$

$$A_5: A \to (B \to A \land B),$$

$$A_6: A \to A \lor B,$$

$$A_7: B \to A \lor B,$$

$$A_8: (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C)),$$

$$A_9: (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A),$$

$$A_{10}: \neg\neg A \to A.$$

Правило вывода всего одно и это известное правило вывода классического исчисления высказываний «Modus Ponens».

$$R_1 : \frac{A, A \to B}{B}.$$

Из таких компонентов как раз и состоит классическая логика высказываний. И в данных инструментах как раз и заложен фундамент для модальных логик.

2.2 Основные инструменты модальной логики

Вдобавок к элементам классической логики в модальной логике присутствуют следующие элементы. Во-первых, такие логические связки: $\Box$ (необходимо, box) и $\Diamond$ (возможно, diamond). Связка «возможно» $\Diamond$ выражается через: $\Diamond p = \neg \Box \neg p$.

Также есть дополнительные правила вывода:

$$R_2 : \frac{A}{\Box A},$$

$$R_3 : \frac{A(p_1,\dots,p_n)}{A(A_1,\dots,A_n)}.$$

Правило R_2 это правило Геделя, также его иначе называют правилом усиления. Расшифровывается оно вот так: если доказано, что A, то A – необходимо, $\Box$. Правило R_3 называют правилом подстановки.

Также предлагаются следующие аксиомы:

A_{11}: $\Box\ (A \lor \neg A) \leftrightarrow (A \lor \neg A)$,

A_{12}: $\Box\ (A \to B) \to (\Box\ A \to \Box\ B)$,

A_{13}: $\Box\ A \to A$,

A_{14}: $\Box\ A \to \Box\Box\ A$,

A_{15}: $\Diamond A \to \Box\ \Diamond A$.

Теперь, получив все нужные элементы, можно расписать такие системы, которые на данный момент наиболее часто встречаются при изучении модальных систем.

В минимальной системе K содержится: пропозициональные переменные, логические связки, формулы вида A_1-A_{12} и правила вывода R_1, R_2. Рефлексивная модальная система T получается из системы K присоединением к списку аксиом формул вида A_{13}. Транзитивная модальная система $K4$ получается из K присоединением формул вида A_{14}. В то же время как модальная система $S4$ получается из T добавлением формул вида A_{14}. И симметричная модальная система $S5$ получается из $S4$ присоединением формул вида A_{15}.

Если Λ одна из приведенных систем, то последовательность формул $A_1, \dots, A_k$ называется доказательством в системе Λ, если любая формула A_i есть либо аксиома Λ, или получена из $A_j, j \leq i$ по одному из правил вывода.

Формула A_k – доказуема в Λ (символически $\rhd_\Lambda A_k$), если существует доказательство в Λ, у которой заключительная формула A_k.

Если Γ – некоторое множество формул, то $\Gamma \rhd_{\mathrm{k}} A_k$ (из множества гипотез Γ в системе Λ выводима формула A_k), если существует последовательность $A_1, \dots, A_k$, такая, что любая A_j или входит в Γ, или является аксиомой Λ, или получена из $A_j, j \leq i$ по одному из правил вывода.

Благодаря теореме о подстановке и теореме о замене из [6] можно сделать правило вывода R_3 в Λ «излишним».

2.3 Семантика Крипке

В данном параграфе излагается семантика «возможных миров» Крипке. Построение основывается на неформальной идее о том, что какое-либо утверждение является «необходимым» только тогда, когда оно истинно во всех «возможных» мирах (в таких мирах, переход в которые возможен).

Шкалой Крипке называется пара $< W, R >$, где W – непустое множество «возможных» миров, а R – бинарный предикат отношении перехода из одного мира в другой, определенный на W, т.е. $R \subseteq W^2$.

Моделью Крипке называется тройка $< W, R, V >$, где $< W, R >$ - шкала Крипке, а V – отображение множества P пропозициональных переменных в множество 2^W всех подмножеств множества W. Отображение V называется «оценкой» и оно ставит в соответствие переменной множество «миров», в которых переменная истинна.

В качестве примера мы рассмотрим модель со следующим означиванием:

$$\mathfrak{M}, w_1 \Vdash p,$$

$$\mathfrak{M}, w_5 \nVdash p.$$

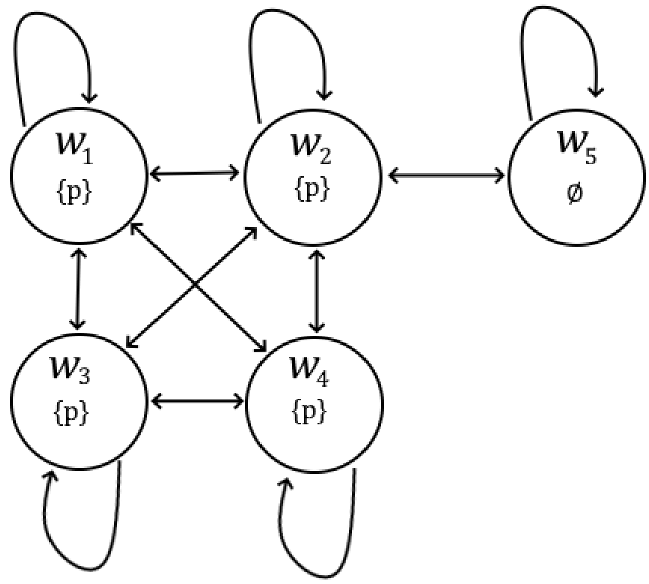

Рисунок 1- Пример модели Крипке

Фраза «в точке $x \in W$ при означивании V истинна формула α» формально записывается как $x \Vdash_V \alpha$, а отрицание как $x \nVdash_V \alpha$. Истинность формул в мирах модели Крипке $< W, R, V >$ определяется индуктивно.

Индуктивное определение истинности таково:

1. $x \Vdash_V p \iff x \in V(p) \;\; \forall\, p \in P$,
2. $x \Vdash_V \alpha \vee \beta \iff x \Vdash_V \alpha$ или $x \Vdash_V \beta$,
3. $x \Vdash_V \alpha \wedge \beta \iff (x \Vdash_V \alpha)\ \&\ (x \Vdash_V \beta)$ (используем предыдущие определения и $\alpha \wedge \beta = \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$),
4. $x \Vdash_V \neg\alpha \iff x \nVdash_V \alpha$,
5. $x \Vdash_V \alpha \to \beta \iff (x \Vdash_V \beta)$ или $(x \nVdash_V \alpha)$ (используем предыдущие определения и $\alpha \to \beta = \neg\alpha \vee \beta$),
6. $x \Vdash_V \Box\, \alpha \iff \forall y \in W(< x, y > \in R \Rightarrow y \Vdash_V \alpha)$,
7. $x \Vdash_V \Diamond\alpha \iff \exists y \in W(< xy > \in R \& y \Vdash_V \alpha)$ (используем предыдущие определения и $\Diamond\alpha = \neg \Box \neg\alpha$).

Так определено понятие истинности формул на моделях и шкалах. Теперь напомним, как это понятие применяется к модальным системам.

Модель $< W, R, V >$ является адекватной для модальной системы Λ, если для любой формулы α, доказуемой в Λ, имеет место $< W, R, V > \Vdash \alpha$.

Шкала $< W, R >$ является адекватной для модальной системы Λ, если для любой формулы α, доказуемой в Λ, имеет место $< W, R > \Vdash \alpha$.

Шкала $< W, R >$ является рефлексивной, если $\forall x \in W (< xx > \in R)$, транзитивной при $\forall x, y, z \in W (< xy > \in R, < yz > \in R \ \& \ (z \in W) \Rightarrow < xz > \in R)$, и симметричной, если $\forall x, y \in W (< xy > \in R \Rightarrow < yx > \in R)$, а R – рефлексивно и транзитивно.

2.4 Метод фильтрации

Известно, что описанные выше модальные системы обладают характеристическими классами шкал (иногда о них говорят, что они аппроксимируют систему; этот термин хорошо отражает факт описания системы путем «приближения» - «аппроксимации»). Имеет смысл задаться поиском наиболее простых аппроксимируемых классов. Также это важно и при изучении вопроса разрешимости модальных систем.

Модальная система Λ – разрешима, если существует алгоритм, позволяющий для любой формулы α установить, доказуема ли в Λ формула α. Такого алгоритма на данный момент нет; определение доказуемости позволяет перечислять доказуемые в модальной системе Λ формулы, теорема о полноте, доказанная в [1], говорит о том, что любая недоказуемая формула не истинна на некоторой шкале из некоторого характеристического класса. Но эти классы состоят из бесконечных множеств не конечных шкал, и неясно, как в конечное число шагов установить недоказуемость формулы.

Для того чтобы разобраться с этим вопросом нужно найти более простой характеристический класс. Один из таких методов, который «ограничивает» характеристические классы шкал на конечные шкалы этих классов, называют методом фильтрации. Этот метод был предложен Скоттом и разработан Сегербером и Леммоном.

Пусть задана модель $\Gamma =< T, R, V >$; предположим, что X – множество формул, содержащее с каждой своей формулой все ее подформулы (замкнутое по подформульности). Введем на X отношение эквивалентности:

$$a \equiv b \Leftrightarrow (\forall \varphi \in X)(a \Vdash_V \varphi \Leftrightarrow b \Vdash_V \varphi).$$

Разобьем множество T на классы эквивалентности относительно $\equiv$. Через $[a]$ обозначаем множество элементов T, эквивалентных a, а через T_X – фактор-множество T по эквивалентности $\equiv$ (т.е. множество всех классов эквивалентности). Предположим, что отношение R_X на множестве T_X удовлетворяет следующим условиям:

$$< [a][b] >\in R_X \Longrightarrow (\forall \Box \varphi \in X)(a \Vdash_V \Box \varphi \Longrightarrow b \Vdash_V \varphi),$$

$$< ab >\in R \Longrightarrow < [a][b] >\in R_X.$$

Зададим на шкале $< T_X, R_X >$ оценку V_X:

$$V_X(p) = \begin{cases} \{[a] | a \in V(p)\}, & \text{если } p \in X; \\ \emptyset, \text{если } p \notin X. \end{cases}$$

Модель $< T_X, R_X, V_X >$ называется фильтрацией модели $< T, R, V >$ по множеству X.

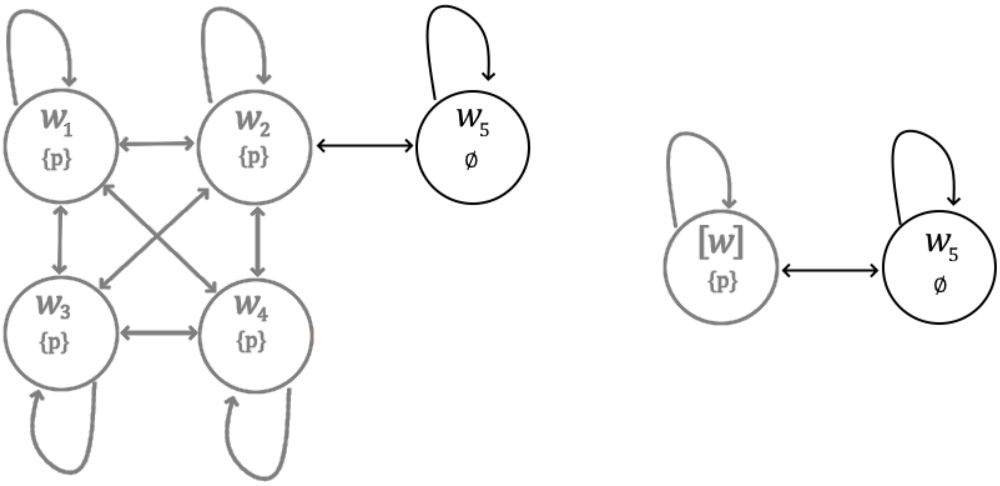

Рисунок 2 – Применение метода фильтрации. Слева – исходная модель Крипке. Справа – модель Крипке после фильтрации.

Теперь докажем основной технический результат – лемму о фильтрации.

Лемма (о фильтрации). *Пусть* $\Gamma =< T, R, V >$ *– модель,* X *– множество формул, замкнутое по подформульности.* $\Gamma_X =< T_X, R_X, V_X >$ *– фильтрация* Γ *по* X*. Тогда для любых* $a \in T, \varphi \in X$ *верно следующее:*

$$[a] \Vdash_{V_X} \varphi \Leftrightarrow a \Vdash_V \varphi.$$

Доказательство. Будет через индукцию по длине φ. Пусть $\varphi = p$ и $p \in X$.

1. Если $[a] \Vdash_{V_X} p$, то $a \in V(p)$. Если $a \Vdash_V p$, то по определению V_X, $[a] \Vdash_{V_X} p$.

2. Предположим, что $[a] \Vdash_{V_X} \alpha \vee \beta$. Тогда $a \Vdash_{V_X} \alpha$ или $a \Vdash_{V_X} \beta$. Кроме того, ввиду замкнутости X по подформульности, $\alpha \in X$ и $\beta \in X$. Следовательно, по индукционному предположению $a \Vdash_V \alpha$ или $a \Vdash_V \beta$, что значит $a \Vdash_V \alpha \vee \beta$. И обратно, пусть $a \Vdash_V \alpha \vee \beta$, тогда $a \Vdash_V \alpha$ или $a \Vdash_V \beta$, по индукции имеем $[a] \Vdash_{V_X} \alpha$ или $[a] \Vdash_{V_X} \beta$. Следовательно, $[a] \Vdash_{V_X} \alpha \vee \beta$.

3. Полагаем, что $[a] \Vdash_{V_X} \neg\alpha$, в этом случае, $[a] \nVdash_{V_X} \alpha, \alpha \in X$ и по индукции $a \nVdash_V \alpha$. Обратно, пусть $a \Vdash_V \neg\alpha$, тогда $a \nVdash_V \alpha, \alpha \in X$ и, вновь по индуктивному предположению, $[a] \nVdash_{V_X} \alpha$, следовательно, $[a] \Vdash_{V_X} \neg\alpha$.

4. Предположение $[a] \Vdash_{V_X} \alpha\wedge\beta$ излишнее, так как оно определяется через связку $\vee$.

5. Также излишней является проверка предположения $[a] \Vdash_{V_X} \alpha \to \beta$, так как оно определяется через $\neg$ и $\vee$, а они уже определены.

6. Предположим, что $[a] \Vdash_{V_X} \Box\, \alpha,\ \Box\, \alpha \in X$. Пусть $b \in T$ и $< ab > \in R$. В этом случае $< [a][b] > \in R_X$. Вспомнив, что на $[a]$ истинно $\Box\, \alpha$, получаем $[b] \Vdash_{V_X} \alpha$. По индуктивному предположению $b \Vdash_{V_X} \alpha$. Таким образом, $[a] \Vdash_V \Box\, \alpha$. Докажем обратное утверждение. Пусть $a \Vdash_V \Box\, \alpha, \Box\, \alpha \in X$. Пусть $< [a][b] > \in R_X$. Поскольку $\Box\, \alpha \in X$, то $\alpha \in X$ и, ввиду условия, налагаемого на R_X в определении фильтрации, $b \Vdash_V \alpha$, используя индуктивное предположение, получаем $[b] \Vdash_{V_X} \alpha$. Мы установили, что $[a] \Vdash_{V_X} \Box\, \alpha$.

Индукцией по длине φ лемма о фильтрации доказана.

2.5 Техника прореживания

Кроме метода фильтрации, для упрощения решения задачи нахождения разрешимости модальной системы Λ также подходит и техника прореживания. Благодаря ему, находится более простой характеристический класс, который позволяет установить, доказуема ли формула. И благодаря этому также доказать, что модальная система является разрешимой.

У нас имеется модель Крипке $\mathfrak{M} =< W, R, V >$, где $W = \{a_1, a_2, a_3\}$, $R = \{a_1 R a_2, a_2 R\ a_3, a_1 R\ a_3\}$, $V(p) = \{a_1, a_2\}$. При помощи техники прореживания удалим «мир» a_3, так как он единственный «мир» без какого-либо означивания. После этого истинность формулы по модели останется прежней. Теперь докажем истинность через индукцию по длине формулы p.

Так как

$$\forall p\ a_2 \Vdash_V p \iff a_3 \Vdash_V p.$$

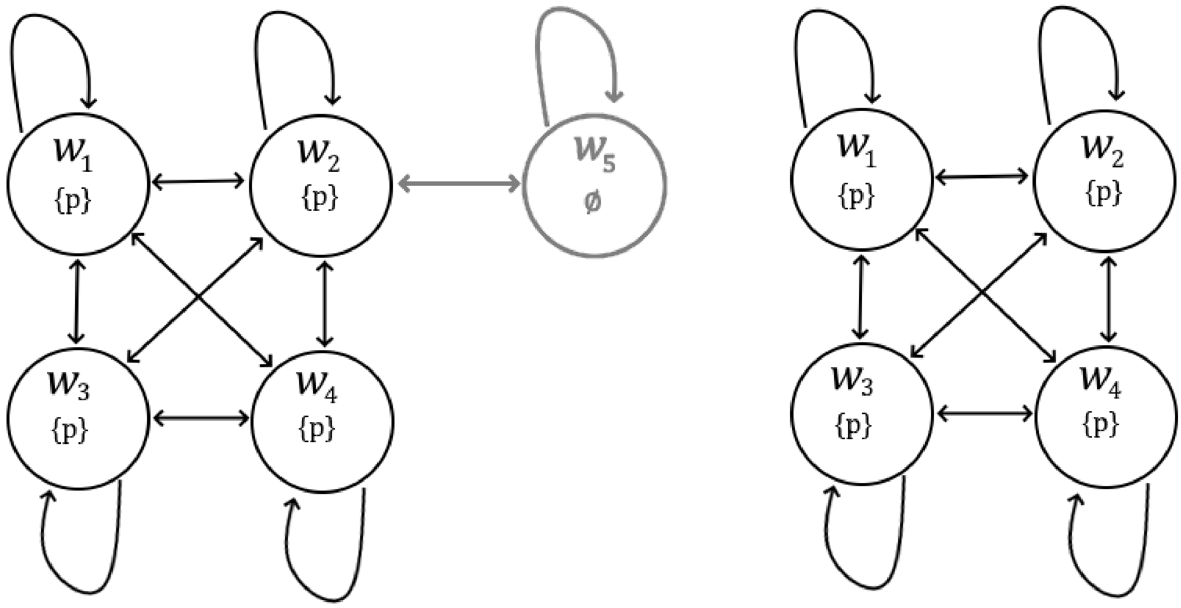

Рисунок 3 – Применение техники прореживания. Слева – исходная модель Крипке. Справа – модель Крипке после прореживания.

Доказываем индукцию.

1. Если $a_2 \Vdash_V p$, то $a_3 \in V(p)$ и, значит $a_3 \Vdash_V p$. Если $a_3 \Vdash_V p$, то по определению $V(p)$, $a_2 \Vdash_V p$.

2. Предположим, что $a_2 \Vdash_V p \vee q$. Тогда $a_2 \Vdash_V p$ или $a_2 \Vdash_V q$. Верно и то, что согласно индукционному предположению, $a_3 \Vdash_V p$ или $a_3 \Vdash_V q$, значит, $a_3 \Vdash_V p \vee q$. Обратно, пусть $a_3 \Vdash_V p \vee q$, тогда $a_3 \Vdash_V p$ или $a_3 \Vdash_V q$, по индукции имеем $a_2 \Vdash_V p$ или $a_2 \Vdash_V q$. Следовательно, $a_2 \Vdash_V p \vee q$.

3. Абсолютно аналогично доказывается предположение $a_2 \Vdash_V p \wedge q$, тогда $a_2 \Vdash_V p$ и $a_2 \Vdash_V q$.

4. Полагаем $a_2 \Vdash_V \neg p$, в этом случае, $a_2 \nVdash_V p$ и по индукции $a_3 \nVdash_V p$. Обратно, пусть $a_3 \Vdash_V \neg p$, тогда $a_3 \nVdash_V p$ и, вновь по индуктивному предположению, $a_2 \nVdash_V p$, следовательно, $a_2 \Vdash_V \neg p$.

5. Также предположим, что $a_2 \Vdash_V p \to q$. Тогда $a_2 \nVdash_V p$ или $a_2 \Vdash_V q$. Верно и то, что согласно индукционному предположению, $a_3 \nVdash_V p$ или $a_3 \Vdash_V q$, значит, $a_3 \Vdash_V p \to q$. Докажем в обратную сторону, пусть $a_3 \Vdash_V p \to q$, тогда $a_3 \nVdash_V p$ или $a_3 \Vdash_V q$, по индукции имеем $a_2 \nVdash_V p$ или $a_2 \Vdash_V q$. Следовательно, $a_2 \Vdash_V p \to q$.

6. Предположим, что $a_2 \Vdash_V \Box p$. Пусть $b_3 \in W$ и $< b_3 R\, a_3 > \in R$. В этом случае $< b_2 R\, a_2 > \in R$. Вспомнив, что на a_2 истинно $\Box p$, получаем $b_2 \Vdash_V p$. По индуктивному предположению $b_3 \Vdash_V p$. Таким образом, $a_3 \Vdash_V \Box p$. Докажем обратное. Пусть $a_3 \Vdash_V \Box p$. Пусть $< b_3 R\, a_3 > \in R$. Это приводит к $b_3 \Vdash_V p$, и, используя индуктивное предположение, получаем $b_2 \Vdash_V p$. Отсюда мы установили, что $a_2 \Vdash_V \Box p$.

Индукцией по длине p доказано, что формула является истинной, т.е. выполняется во всех мирах. Таким образом, и выполняется техника прореживания.

2.6 Доказательство разрешимости

Теперь для нахождения разрешимости осталось только показать что модальная система Λ финитно-аппроксимируема и разрешима.

Сначала покажем, что система Λ финитно-аппроксимируема. Модальная система Λ называется финитно-аппроксимируемой, если для любой формулы α, не доказуемой в Λ, существует конечная шкала Γ такая, что $\Gamma \nVdash \alpha$ и Γ адекватная для Λ. Иначе говоря, Λ финитно-аппроксимируема, если существует класс конечных шкал характеристических для Λ.

Теорема. *Модальные системы $K, T, K4, S4, S5$ финитно-аппроксимируемы.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = K, T, K4, S4, S5$ и $\neg \rhd_\Lambda \alpha$. Согласно теореме о полноте, существует такая модель $\Gamma =< T, R, V >$, что Γ адекватна для Λ и

$\Gamma \nVdash \alpha$, то есть нашлось $a \in T$ такое, что $a \Vdash_V \alpha$. Пусть X – множество всех подформул формулы α. Тогда, очевидно, что X замкнуто по подформульности и имеет n элементов. Если $\Lambda = K$ или $\Lambda = T$, то определим на T_X отношение R_X следующим образом:

$$< [a][b] > \in R_X \Leftrightarrow (\forall \Box \alpha \in X)(a \Vdash_V \Box \varphi \Rightarrow b \Vdash_V \varphi).$$

Пусть $< ab > \in R$. Предположим, что $\Box \varphi \in X$ и $a \Vdash_V \Box \varphi$, в этом случае $b \Vdash_V \varphi$. Таким образом, $< [a][b] > \in R_X$ и, следовательно, $< T_X, R_X, V_X >$ – фильтрация Γ по X.

Если $\Lambda = K4, S4$, то отношение R_X на T_X задается следующим образом:

$$< [a][b] > \in R_X \Leftrightarrow (\forall \Box \alpha \in X)(a \Vdash_V \Box \varphi \Rightarrow b \Vdash_V \Box \varphi \wedge \varphi).$$

Как и в прошлом случае, также проверяем, удовлетворяет ли R_X условиям, заданным в определении фильтрации.

Если $< ab > \in R$, то $< [a][b] > \in R_X$. Действительно, пусть $a \Vdash_V \Box \varphi$. Ввиду того, что $< T, R >$ адекватна для Λ и $\Box \varphi \to \Box \Box \varphi$ – аксиома Λ, $< T, R > \Vdash \Box \varphi \to \Box \Box \varphi$. Поэтому $a \Vdash_V \Box \Box \varphi$, следовательно, $b \Vdash_V \Box \varphi$. Кроме того, очевидно, что $b \Vdash_V \varphi$. Итак $< [a][b] > \in R_X$. Предположим, что $< [a][b] > \in R_X$, $\Box \varphi \in X$, $a \Vdash_V \Box \varphi$, тогда по определению R_X очевидно $b \Vdash_V \varphi$. Таким образом, получаем, что $< T_X, R_X, V_X >$ – фильтрация Γ по X.

Если $\Lambda = S5$, отношение R_X выбираем следующим образом:

$$< [a][b] > \in R_X \Leftrightarrow (\forall \Box \alpha \in X)(a \Vdash_V \Box \varphi \Leftrightarrow b \Vdash_V \Box \varphi).$$

Ввиду того, что $< T, R > \in Sim$ (класс всех симметричных шкал), несложно заметить, что $< T_X, R_X, V_X >$ – фильтрация Γ по X.

Согласно лемме о фильтрации, доказанной в разделе 2.4, $[a] \Vdash_{V_X} \alpha \Leftrightarrow a \Vdash_V \alpha$, следовательно, $[a] \Vdash_{V_X} \neg\alpha$. Таким образом, $\Gamma_X \nVdash \alpha$ и Γ_X конечно, причем имеет не более 2^n элементов. Дальше надо установить адекватность $< T_X, R_X >$ для Λ.

1. Пусть $\Lambda = K$. Тогда любая шкала, а следовательно, и $< T_X, R_X >$ адекватна для K.

2. Пусть $\Lambda = T$. По теорем об адекватности достаточно показать рефлексивность R_X.

Пусть $[a] \in T_X$, ввиду $< T, R > \in Ref$ (класс всех рефлексивных шкал) $< aa > \in R$. Если $\Box\ \varphi \in X$ и $a \Vdash_V \Box\ \varphi$, то, очевидно, $a \Vdash_V \varphi$. Согласно определению R_X тогда имеем $< [a][a] > \in R_X$. Следовательно, R_X – рефлексивно.

3. Предположим, что $\Lambda = K4$. Пусть $[a], [b], [c] \in T_X$ и $< [a][b] > \in R_X$, $< [b][c] > \in R_X$. Получаем, что $\Box\ \varphi \in X$ и $a \Vdash_V \Box\ \varphi$. Ввиду определения R_X имеем, $b \Vdash_V \Box\ \varphi$, $b \Vdash_V \varphi$, далее снова из определения R_X получаем что $c \Vdash_V \Box\ \varphi$ и $c \Vdash_V \varphi$. Таким образом $< [a][c] > \in R_X$ и R_X – транзитивно, следовательно, по теореме об адекватности, $< T_X, R_X >$ адекватна для $K4$.

4. Пусть $\Lambda = S4$. Как и в предыдущем пункте устанавливается, что R_X – транзитивно. Пусть $[a] \in T_X$, $\Box\ \varphi \in X$ и $a \Vdash_V \Box\ \varphi$. Поскольку $< T, R >$ адекватна для $S4$, R – рефлексивно, согласно теореме об адекватности. Значит $< aa > \in R_X$ и R_X – рефлексивно. По теореме адекватности получаем, что $< T_X, R_X >$ адекватна для $S4$.

5. Пусть $\Lambda = S5$. Рефлексивность, транзитивность и симметричность R_X следует непосредственно из его задания. Следовательно, применяя теорему об адекватности получаем, что $< T_X, R_X >$ адекватна для $S5$.

Теорема доказана. Модальные системы финитно-аппроксимируемы. Осталось лишь доказать их разрешимость.

Теорема. *Модальные системы $K, T, K4, S4, S5$ разрешимы.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = K, T, K4, S4, S5$ и α некоторая модальная формула. Ведем параллельно два процесса: в первом строим последовательно все возможные доказательства в системе Λ, во втором проверяем истинность формулы α на конечных шкалах из соответствующего характеристического для Λ класса шкал (согласно теореме о полноте). Если формула α доказуема в Λ, то на каком-то шаге первого процесса мы обнаружим это. Если $\neg\rhd_\Lambda \alpha$, то по теореме о полноте найдется конечная шкала Г, такая, что $\Gamma \nVdash \alpha$ и Г адекватна для Λ, а, следовательно, по теоремам об адекватности и полноте, входящая в характеристический для Λ класс шкал. Таким образом, в этом случае, на определенном шаге второго процесса мы вновь обнаружим это.

Теорема доказана, тем самым доказано, что модальная система разрешима, что изначально и требовалось.

При технике прореживания используется другое отношение:

$$\forall p\; a_2 \Vdash_V p \iff a_3 \Vdash_V p.$$

Результат будет аналогичным, прореженная модальная система разрешима.

3. Описание предметных областей и задач, предполагаемых к решению

В этой главе будут описаны предметные области, в которых можно активно применить модальную логику, а также задачи, которые будут выполнены в этой работе.

Модальная логика находит широкое применение в самых различных предметных областях: от философии до лингвистики. Обратим внимание на некоторые из них.

Модальная логика играет важную роль в искусственном интеллекте, особенно в областях, связанных с представлением знаний, рассуждениями и планированием. Она позволяет формализовать и оперировать модальными понятиями, такими как возможность, необходимость, вероятность, временные ограничения и причинно-следственные связи. Это позволяет искусственным интеллектуальным системам представлять и оперировать знаниями с учетом модальных аспектов. Также при помощи модальностей проходят логические рассуждения об утверждениях и их связи. Это используется для переработки новых фактов или проверки согласованности знаний. И ещё модальные операторы используются для выражения ограничений и предпочтений в планировании, а также для моделирования альтернативных сценариев и выбора наилучшего действия.

Также известно применение модальностей в криптографии и безопасности. Она позволяет выражать и рассуждать о различных модальных свойствах, таких как конфиденциальность, целостность, авторизация и доступность информации.

Из трактовки основных инструментов модальной логики, а именно «необходимо» и «возможно», очевидно, что применение к данным инструментам есть и в лингвистике. Что помогает при анализе и изучении предложений и различных языковых эпитетов, которые касаются уверенности и вероятности, смысл которых без модальностей мог бы быть исследован не так уж и просто. Благодаря модальной логике в лингвистике сохраняется более глубокое понимание семантики и логики языка.

Также не менее интересной для изучения областью, в которой применяется модальная логика, является теория игр. В этом активно помогают модальности, которые могут хорошо выражать случайный элемент какой-либо игры, а также непредсказуемое поведение человека во время участия в игре. Благодаря модальной логике становится гораздо проще задача аналитического изучения поведения игрока, в тех или иных обстоятельствах.

Проверка информации на достоверность и на доступность также серьезно облегчается, благодаря упомянутым инструментам. В данном случае модальная логика предоставляет инструменты для упрощения анализа информации, доведения логических рассуждении и выводов на основе информации до нужной доскональности. В частности, доказательство разрешимости перекликается с этой предметной областью.

Именно с этим и связана задача, которую мы будем разбирать. Нужно составить алгоритм проверки сайта, который может делать это максимально эффективно. Известно, что на сайте могут добавляться и удаляться страницы. В сам сайт не добавлено меню, благодаря которому можно перейти на любую страницу, переход между страницами производится через гиперссылки. Но на каждой странице есть кнопка «назад», которая возвращает туда, где пользователь был. Некоторые страницы, при переходе на них, автоматически пересылают пользователя на главную страницу. Для эффективной проверки, все узлы (страницы на сайте), которые нет смысла проверять, по причине отсутствия доступа, должны быть удалены из проверочного алгоритма. Для этого нам и пригодится техника прореживания. Именно таким образом и должен сформироваться наиболее эффективный и быстрый алгоритм проверки сайта.

Не менее любопытный вопрос можно поставить в области теории игр. Один игрок играет с другим в покер. Составляется схема рук, которые могут оказаться у игрока. И надо проверить, есть ли такие комбинации, при которых поражение гарантировано. И чтобы сделать эту схему максимально простой для проверки, тут нам и понадобится метод фильтрации. Благодаря этому методу у нас и получится определить, есть ли такая рука, с которой победить невозможно.

И ещё одна задача касается временной логики. В данном случае будет анализ состояния того или иного продукта, в частности годности самого продукта (т.е. стоит ли его потреблять в пищу или нет). Ведь известно, что продукт может быть как готов к употреблению, так и быть забракованным, а соответственно, не готовым. Это сложно выразить в классической логике, но благодаря связкам «необходимо» и «возможно» в модальной логике, это выражается достаточно просто.

4. Выполнение моделирования задач на языке математической логики

4.1 Задача про веб-сайт

Моделируем первую описанную задачу про веб-сайт. Используем семантику Крипке. У нас есть модель сайта $\mathfrak{M} =< W, R, V >$, где $W = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - страницы веб-сайта, $R = \{a_1Ra_2, a_1Ra_3, \dots, a_{k-1}R\ a_n\}$ – переходы между страницами (гиперссылки) и $V(p) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $V(q) = \{a_{k+1}, \dots, a_{n-2}\}$ – состояние страницы (p – работающая страница, q – пересылающая на другой узел). Отсутствие V на узле означает, что страницы не существует, хоть она и когда-то существовала. Напомним, что на сайте могут, как добавляться, так и удаляться страницы. При добавлении и возможности добраться до новой страницы из сайта она автоматически появляется на «карте сайта». В то же время как старые страницы из алгоритма удаляются вручную. Нужно составить такой алгоритм, при помощи которого нужно проверить доступность всех страниц сайта и сделать это как можно эффективнее и быстрее.

Формулы для нашей модели рассматриваются следующие:

$$\mathfrak{M}, a_1 \Vdash \Box\, p,$$

$$\mathfrak{M}, a_{k+1} \Vdash \Box\, q,$$

$$\mathfrak{M}, a_{n-1} \nVdash \Box\, p.$$

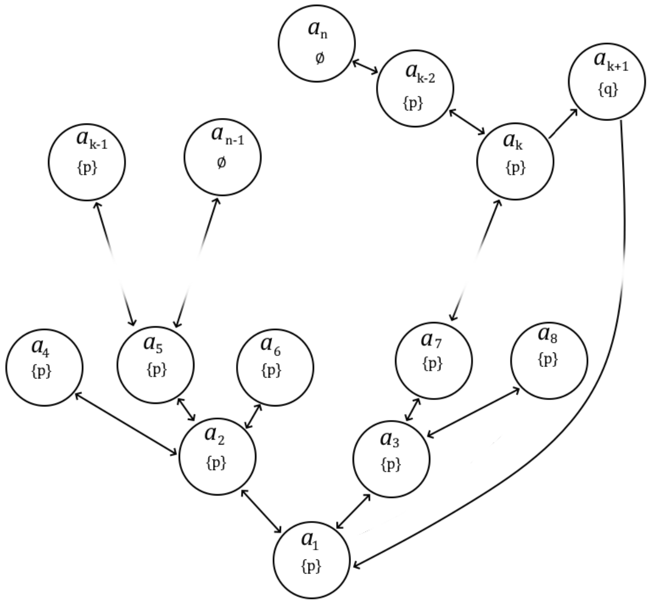

Рисунок 4 – Визуализация первой задачи.

При наличии у узла состояния $V(p)$ формула записывается следующим образом:

$$a_1 \Vdash_V p \iff a_2 \Vdash_V p.$$

При наличии у узла состояния $V(q)$, при котором происходит отправка с исходного узла на главную страницу (a_1) формула записывается вот так:

$$a_{k-1} \Vdash_V p \implies a_{k+1} \Vdash_V q \implies a_1 \Vdash_V p.$$

И наконец, при отсутствии какого-либо состояния выполняется следующая формула:

$$a_{k-2} \Vdash_V p \iff a_{n+1} \nVdash_V p.$$

4.2 Задача по теории игр

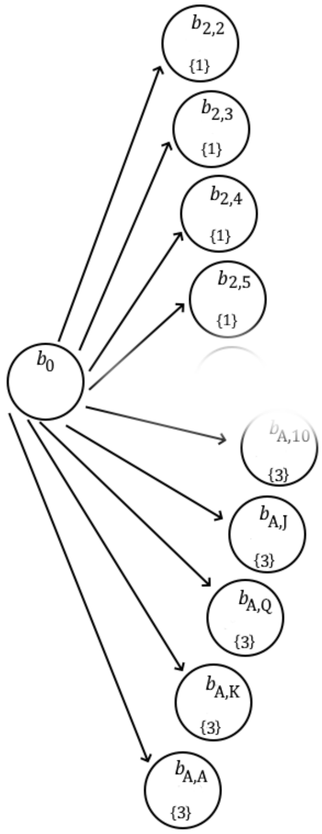

Рисунок 5 – Визуализация второй задачи.

Моделируем задачу, связанную с теорией игр. Как и в прошлой задаче используем для визуализации семантику Крипке. У нас имеется модель поведения игрока на покерном при-флопе $\mathfrak{M} =< W, R, V >$, где $W = \{b_0, b_{2,2}, \dots, b_{A,A}\}$ – это мир с исходными данными, т.е. какие карты в руке у игрока, $R = \{b_0Rb_{2,2}, b_0Rb_{2,3}, \dots, b_0R\ b_{A,A}\}$ – переходы между исходами выдачи карт, $V(1) = \{b_{2,2}, \dots, b_{7,10}\}$, $V(2) = \{b_{7,J}, \dots, b_{10,10}\}$, $V(3) = \{b_{10,J}, \dots, b_{A,A}\}$ – выбор поведения игрока (от фолда (т.е. выхода из игры) до рейза (т.е. агрессивной игры)). Отсутствие V на узле означает, что полная картина, при котором будет выявляться исход, ещё не составлена. Нужно при помощи метода фильтрации максимально сократить схему, чтобы анализ ситуации у игрока проходил максимально быстро. И доказать или опровергнуть, что при любой игровой ситуации у игрока есть шанс остаться в игре при деньгах.

Формулы для этой модели рассматриваются следующие:

$$\mathfrak{M}, b_{2,3} \Vdash \Diamond\Diamond p,$$

$$\mathfrak{M}, b_{2,3} \nVdash \Diamond q,$$

$$\mathfrak{M}, b_{7,J} \Vdash \Diamond p,$$

$$\mathfrak{M}, b_{10,J} \Vdash \Box\, p,$$

$$\mathfrak{M}, b_{2,2} \Vdash \Diamond\Diamond p\ , \mathfrak{M}, b_{2,2} \Vdash \Diamond q \text{ (при каждом i,i).}$$

4.3 Задача во временной логике

Рисунок 6 – Визуализация третьей задачи.

И моделируем последнюю задачу, на сей раз связанную с временной логикой. Делаем временную линию $\mathfrak{M} =< W, R, V >$. В данном случае, миры $W = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ – это отметки времени (к примеру, c_1 – день производства продукта, а c_n – день истечения срока годности продукта). $R = \{c_1 R c_2, c_2 R c_3, \dots, c_n R\ c_{n+1}, \dots\}$ – переходы между днями. В данном случае используется модальная логика T, ибо там поддерживается рефлексивность, но не транзитивность и симметричность. Означивание $V(p)$ обозначает состояние продукта, т.е. является ли оно по замыслу производителей свежим. Нам нужно доказать разрешимость, а именно проверить что продукт годен во время действия срока годности. В этом случае, для того чтобы доказать сначала будет применен метод фильтрации, а потом техника прореживания, сужая нашу временную линию до минимума. И таким образом доказательство разрешимости будет максимально упрощено.

Формулы, используемые в этой задаче, вот такие:

$$\mathfrak{M}, c_1 \Vdash \Box\, p,$$

$$\mathfrak{M}, c_n \Vdash \Diamond p.$$

5 Нахождение разрешающих алгоритмов

5.1 Задача про веб-сайт

Находим разрешающий алгоритм для первой задачи. Так как мы собираемся применить технику прореживания, надо узнать, какие узлы мы будем удалять из модели, чтобы получить полностью работающий алгоритм.

При анализе «карты сайта» обнаруживается, что есть три разных «означивания», включая его отсутствие. В данном случае, нас интересуют те узлы, которые не имеют какое-либо означивание. Их мы убираем. Чтобы сохранить связность модели, надо проработать переходы между страницами. В том случае, если страница находилась в «тупике», то есть после нее никаких действительных страниц не было, то из-за ненадобности убирается связь между родительской страницей и удаленной страницей. Если так получилось, что у отсутствующей страницы была связь дальше, то есть присутствует ссылка на другую страницу, то система изменяет связь с «родительская страница ↔ удаленная страница ↔ действующая страница» на «родительская страница ↔ действующая страница». Это возможно при наличии свойства транзитивности в модальной логике. В ином случае, возможно применение свойства стягивания, которое позволяет объединить две связи в одну между действующими страницами. И если с удаленной страницы были ссылки на несколько страниц, то используется такое же изменение связи, просто в этот раз родительская страница имеет несколько ссылок, вместо одной.

Убрав все лишние страницы, алгоритм проверки работы сайта, будет фиксировать, что все страницы рабочие, и с главной страницы можно добраться практически до любого места в «карте сайта». Тем самым проверяется следующая формула:

$$a_i \Vdash_V p \iff a_j \Vdash_V p.$$

Выполнение данной формулы на каждом узле как раз и фиксирует, что сайт находится в рабочем состоянии, а модель сайта является разрешимой.

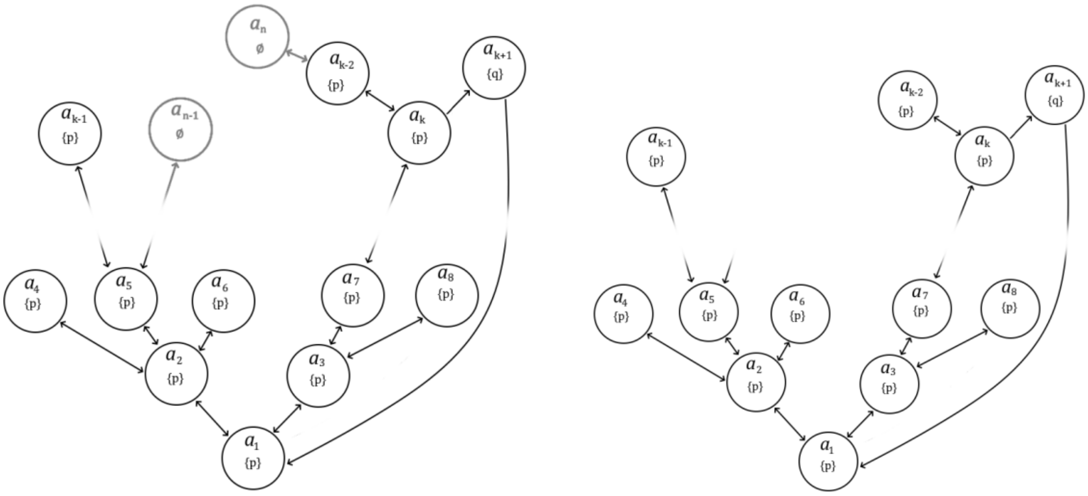

Рисунок 7 и 8 – Выполнение и результат техники прореживания.

5.2 Задача по теории игр

Во второй задаче поиск разрешающего алгоритма проходит следующим образом. У нас имеется значительное число пар карт. Проверять все комбинации не рационально, так что, для того чтобы проверка прошла быстрее, мы применим метод фильтрации. Для работы метода фильтрации нужно что-то что позволит «отфильтровать» узлы. Этим фильтром будет как раз «означивание». Таких «означивании» у нас всего три, следовательно, будет три узла (по одному на каждое означивание). Связи между мирами перестраиваются в связи с тем, что некоторые узлы в одном «означивании» располагаются в совсем разных местах. Проверяя на разрешимость полученные узлы, мы как раз проводим проверку тех узлов (или точнее пар карт), которые входят в новый узел. Так как, известно, что при фильтрации мы собираем в один узел такие узлы, которые при проверке разрешимости выдадут один и тот же результат. Тем самым, сделав проверку всего три раза, мы уже проверили все возможные комбинации. И сделали вывод, что остаться за столом с деньгами можно во всех случаях. Следовательно, модель стратегии игры является разрешимой.

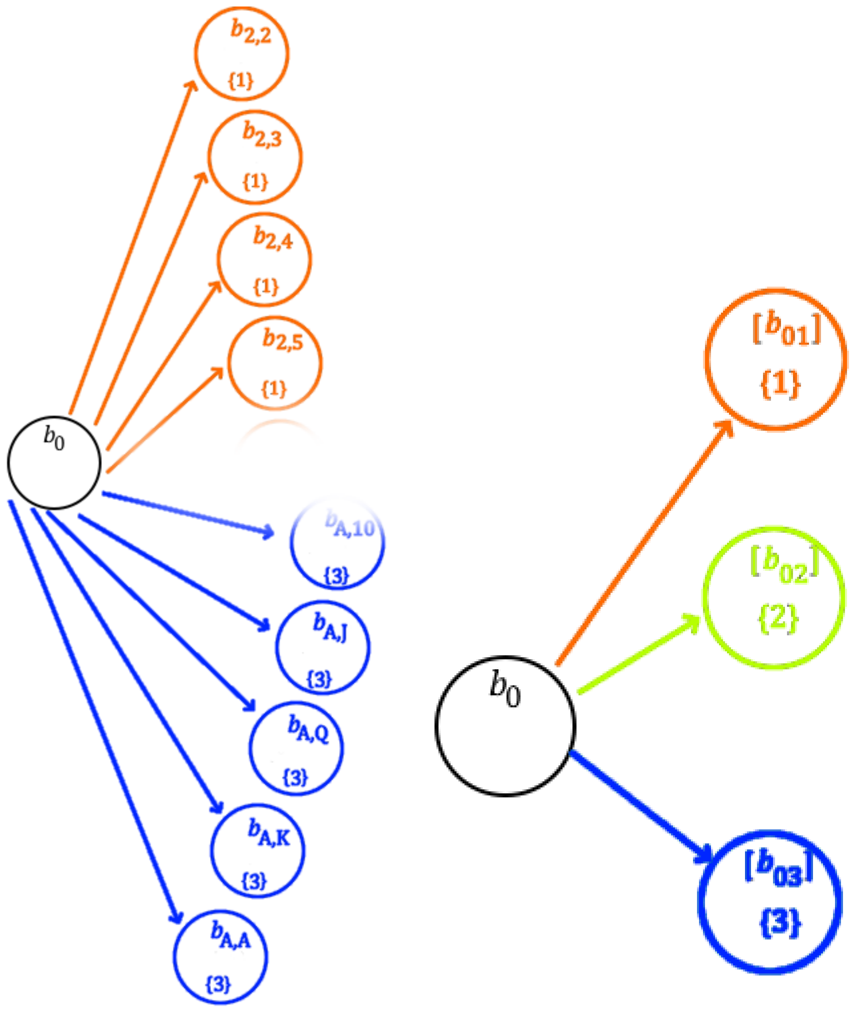

Рисунок 9 и 10 – Выполнение и результат метода фильтрации.

5.3 Задача по временной логике

И наконец, последняя задача. У нас присутствует временная линия, которая стартует в день производства продукта, но не заканчивается. Из-за этого количество проверок в данном случае является бесконечным. Но учитывая, что у нас всего одна оценка, и согласно описанию метода фильтрации формула с одинаковой оценкой доказывается одинаково, мы можем сократить количество проверок до двух, применив этот метод. После применения у нас останется всего два мира, в котором продукт находится в товарном виде, и в котором продукт точно испортился. Но наша задача кроется в том, чтобы доказать что продукт годен к употреблению в течение всего срока годности. Поэтому мы применяем технику прореживания, чтобы убрать узел, в котором продукт является испорченным. Так как, соединение у нас всего одно, то мы его смело можем убрать, связность получившегося графа от этого не поменяется. По итогу последовательного применения этих двух методов, у нас для доказательства разрешимости остается проверить только один мир, что очень значительно упрощает данную задачу.

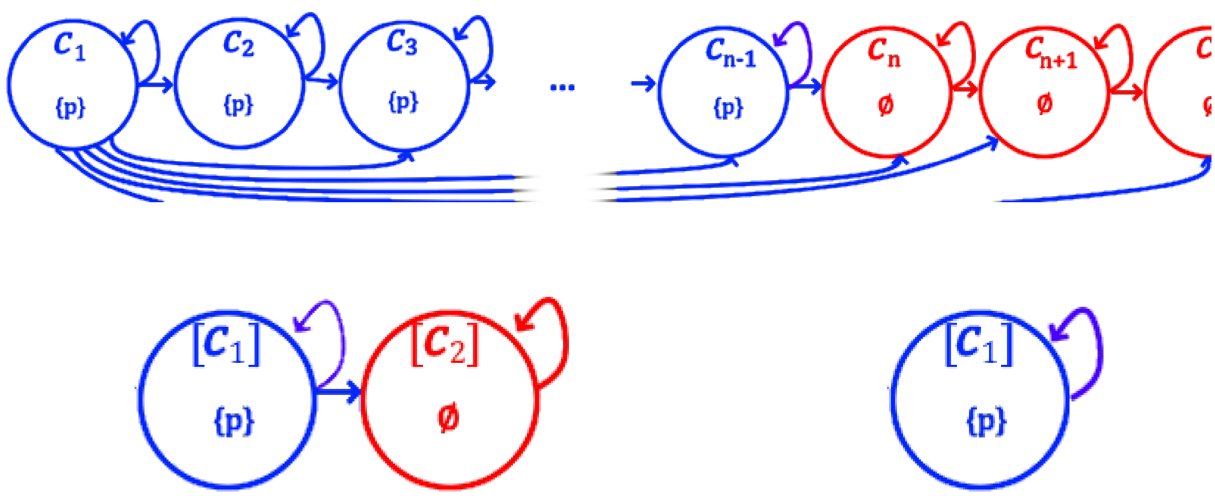

Рисунок 11, 12 и 13 – Последовательное выполнение метода фильтрации, техники прореживания и результат применения данных техник

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. благодаря использованию техники прореживания был получен максимально быстрый алгоритм проверки доступности веб-сайта, который при всем при этом не нарушает связность алгоритма проверки;
2. используя метод фильтрации, мы смогли распределить большое число вероятных событии в несколько групп, что значительно облегчает процесс анализа поведения, и нахождения выполнимости формулы;
3. использование данных техник в комбинации позволяет максимально упростить проверку различных состоянии, что максимально сокращает время и сложность алгоритма распознавания выполнимости.

Полученные результаты имеют прикладное значение и могут быть с некоторыми изменениями использованы во многих сферах жизни, что можно назвать значимым вкладом в исследования по приложениям математики к информационным технологиям.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. C.I. Lewis. Symbolic logic. / C.I. Lewis, C.H Langford; Dover Publications Inc, 1959 – 518 с.
2. Lemmon E.I. Algebraic semantics for modal logics I. / Lemmon E.I. // The Journal of Symbolic Logic – 1966. – № 1. – С. 46-65.
3. Lemmon E.I. Algebraic semantics for modal logics II. / Lemmon E.I. // The Journal of Symbolic Logic – 1966. – № 2. – С. 191-218.
4. Lemmon E.I. An Introduction to Modal Logic / Lemmon E.I., Scott D.; B. Blackwell, 1977 – 94 с.
5. Р. Фейс. Модальная логика / Р. Фейс, перевод с дополнениями под редакцией Г.Е. Минца.; М.: Издательство «Наука», 1974 – 520 с.
6. Рыбаков В.В. Модальные системы. Теоретико-модельная семантика / Рыбаков В.В.. – М.: КГУ, 1982. – 25 с.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
/Я.Н. Нужин
«23» июня 2023 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПРИМЕНЕНИЕ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ В АНАЛИЗЕ ИНФОРМАЦИИ И ПРАГМАТИКЕ СОСТОЯНИЙ И СОБЫТИЙ

Руководитель	23.06.2023	профессор, доктор физико-математических наук	В.В. Рыбаков
Выпускник	23.06.2023		М.А. Извеков
Нормоконтролер	23.06.2023		Т.Н. Шипина

Красноярск 2023