Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(4), 517-520

УДК 517.55

Об аналоге формулы Коши-Адамара для гармонических в шаре функций

Ольга В.Ходос*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.09.2009, окончательный вариант 25.10.2009, принята к печати 10.11.2009

Получен аналог формулы Коши-Адамара для гармонических функций, позволяющий вычислять радиус сходимости ряда по однородным гармоническим многочленам.

Ключевые слова: гармонические функции, однородные многочлены, формула Коши-Адамара.

Классическая формула Коши-Адамара позволяет вычислять радиус сходимости степенного ряда по его коэффициентам. Для голоморфных функций многих комплексных переменных ее аналоги хорошо известны (см., например, [1, §3]). Для гармонических функций многих переменных естественно вместо разложения в степенной ряд рассматривать разложение функций в ряд по однородным гармоническим многочленам (см., например, [2, гл. 11]). В данной работе мы приводим формулы, позволяющие вычислять радиус сходимости такого ряда, зная коэффициенты разложения функции в ряд Тейлора (т.е. зная значения производных функции в начале координат). Приводится также пример, показывающий, что нельзя такие формулы получить прямо из комплексификации функции (т.е нельзя использовать формулы Коши-Адамара для голоморфных функций многих комплексных переменных). В трехмерном случае коэффициенты в аналоге формулы Коши-Адамара можно вычислить явно.

Основные результаты

Пусть B_R — шар в $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ радиуса R с центром в нуле, а $S_R = \partial B_R$.

Рассмотрим систему однородных гармонических многочленов $\{P_{k,l}\}$ в $\mathbb{R}^n$, где k — степень многочлена, $P_{k,l}|_{S_1} = Y_{k,l}$ — сферические функции, такие, что система $\{Y_{k,l}\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве $\mathcal{L}^2(S_1)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{S_1} f\overline{g}\, d\sigma,$$

где f, $g \in \mathcal{L}^2(S_1)$, $d\sigma$ — элемент поверхности S_1; $l = 1, 2, \ldots, l(k)$, $l(k)$ — число функций $Y_{k,l}$, входящих в базис (при фиксированном k). Это число

$$l(k) = \frac{(n + 2k - 2)(n + k - 3)!}{k!(n - 2)!},$$

*e-mail: khodos@lan.krasu.ru

$l(k)$ — число функций $Y_{k,l}$, входящих в базис. Число $l(k)$ является степенной функцией по k степени $n-2$ при фиксированном n (см., например, [2, гл. 11]).

Как известно (см., например, [2, гл. 11]), всякая функция $F(x)$ $(x = (x_1, \dots, x_n))$ — гармоническая в B_R представима в B_R рядом

$$F(x) = \sum_{k,l} a_{k,l} P_{k,l}(x),$$

абсолютно сходящимся в B_R и равномерно внутри B_R. Тогда (представляя $x = r\theta$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $r = |x|$) получим разложение

$$F(r,\theta) = \sum_{k,l} a_{k,l}\, r^k\, Y_{k,l}(\theta), \tag{1}$$

$\theta \in S_1$, $0 < r < R$.

Коэффициент $a_{k,l}$ равен

$$a_{k,l} = \frac{1}{r^k} \int\limits_{S_1} F(r,\theta)\, \overline{Y_{k,l}(\theta)}\, d\sigma(\theta).$$

Так как ряд (1) сходится в $\mathcal{L}^2(S_r)$, то

$$\sum_{k,l} |a_{k,l}|^2\, r^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k} \sum_{l=1}^{l(k)} a_{k,l}^2 < \infty. \tag{2}$$

Тем самым ряд (2) является степенным рядом по r. Поэтому для сходимости ряда (1) в $\mathcal{L}^2(S_r)$ для любого $r < R$ (а, следовательно, и для абсолютной и равномерной сходимости ряда (1) в B_R) необходимо и достаточно (по формуле Коши-Адамара для ряда (2)), чтобы

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{l=1}^{l(k)} |a_{k,l}|^2} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{3}$$

Перепишем условие (3) по-другому. Поскольку

$$\max_{1\leqslant l\leqslant l(k)} |a_{k,l}|^2 \leqslant \sum_{l=1}^{l(k)} |a_{k,l}|^2 \leqslant l(k) \max_{1\leqslant l\leqslant l(k)} |a_{k,l}|^2,$$

и $l(k)$ — степенная функция по k, то $\sqrt[2k]{l(k)} \to 1$ при $k \to \infty$.

Отсюда

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\sum_{l=1}^{l(k)} |a_{k,l}|^2} = \varlimsup_{k\to\infty} \max_{1\leqslant l\leqslant l(k)} \sqrt[2k]{|a_{k,l}|^2}.$$

Получили утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы ряд (1) абсолютно и равномерно сходился в B_R, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \max_{1\leqslant l\leqslant l(k)} \sqrt[k]{|a_{k,l}|} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{4}$$

Условие (4) неявно содержится в работе [3].

Пусть
$$F(x) = \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0} c_\alpha x^\alpha \tag{5}$$
— ряд Тейлора функции $F(x)$ в окрестности точки 0, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $c_\alpha = \dfrac{1}{\alpha!}\dfrac{\partial^\alpha F}{\partial x^\alpha}(0)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ и $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$

Ряд (5) не обязан сходиться абсолютно и равномерно во всем шаре B_R.

Пример 1. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения Лапласа
$$\varphi(x) = \frac{c_n}{\left(|x_1 - R|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{n-2}}$$
с особенностью в точке $(R, 0, \ldots, 0)$.

Эта функция гармонична в шаре B_R. Если бы ряд Тейлора абсолютно сходился к $\varphi(x)$ в B_R, то он должен был бы абсолютно сходиться к голоморфному продолжению $\varphi(x)$ в шаре $B_R^c = \left\{x \in \mathbb{C}^n : |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 < R^2\right\}$ из $\mathbb{C}^n$. Но знаменатель функции $\varphi(x)$
$$|x_1 - R|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$$
равен 0 в точке $c = \left(\dfrac{R}{2}, \dfrac{iR}{2}, 0, \ldots, 0\right)$, $|c| = \dfrac{R}{\sqrt{2}} < R$. Поэтому $\varphi(x)$ не может быть голоморфно продолжена в B_R^c.

Выразим теперь коэффициенты $a_{k,l}$ через c_α.

Моном $x^\alpha|_{S_1} = \theta^\alpha$,
$$\theta^\alpha = \sum_{|k| \leqslant \|\alpha\|} d_{\alpha,k,l} Y_{k,l},$$
$$d_{\alpha,k,l} = \int\limits_{S_1} \theta^\alpha\, \overline{Y_{k,l}(\theta)}\, d\sigma(\theta). \tag{6}$$

Тогда
$$\begin{aligned} r^{\|\alpha\|}\theta^\alpha &= \sum_{|k| \leqslant \|\alpha\|} d_{\alpha,k,l}\, r^{\|\alpha\|}\, Y_{k,l}(\theta), \qquad \text{то есть} \\ x^\alpha &= \sum_{|k| \leqslant \|\alpha\|} d_{\alpha,k,l}\, r^{\|\alpha\| - k}\, P_{k,l}(x). \end{aligned}$$

Переписывая ряд (5) по однородным многочленам
$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\|\alpha\| = k} c_\alpha x^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x),$$
получим, что эти многочлены $\varphi_k(x)$ гармоничны в $\mathbb{R}^n$. Тогда
$$\varphi_k(x) = \sum_{\|\alpha\| = k} c_\alpha \sum_{l=1}^{l(k)} d_{\alpha,k,l}\, P_{k,l}(x) = \sum_{l=1}^{l(k)} a_{k,l}\, P_{k,l}(x).$$

Отсюда
$$a_{k,l} = \sum_{\|\alpha\| = k} c_\alpha\, d_{\alpha,k,l}.$$

Из условия (4) получаем утверждение

Теорема 1. *Для того чтобы функция $F(x)$ была гармонической в B_R, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \max_{1\leqslant l\leqslant l(k)} \sqrt[k]{\left|\sum_{\|\alpha\|=k} c_\alpha\, d_{\alpha,k,l}\right|} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Таким образом, получаем условие сходимости, в которое входят коэффициенты Тейлора c_α функции $F(x)$ и постоянные $d_{\alpha,k,l}$, определяемые формулами (6) и не зависящие от F. В случае $n=3$ они могут быть явно вычислены.

Автор использовал финансовую поддержку РФФИ, грант 08-01-90250.

Список литературы

[1] Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, т. 2, М., Наука, 1976.

[2] С.Л.Соболев, Введение в теорию кубатурных формул, М., Наука, 1974.

[3] A.A.Shlapunov, Green's Integrals and Their Applications to Elliptic Systems, Tesi di perfezionamento, Pisa, Scuola Normale Superiore, 1996.

[4] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики, М., Наука, 1966.

On an Analogue of the Cauchy-Hadamard Formula for Harmonic Function in a Ball

Ol'ga V.Khodos

It is obtained the analogue of the Cauchy-Hadamard formula for harmonic functions permitting to calculate the convergence radius of a series by homogeneous harmonic polynomials.

Keywords: harmonic functions, homogeneous polynomials, Cauchy-Hadamard formula.