Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
И. О. заведующего кафедрой
________/Я. Н. Нужин
«23» июня 2023 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ИНВОЛЮЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ И НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Руководитель	профессор, доктор физико-математических наук	Я.Н.Нужин
Выпускник		Р.И.Гвоздев
Нормконтролер		Т.Н.Шипина

Красноярск 2023

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Порождающие множества инволюций линейных групп над кольцом целых гауссовых чисел и над конечными полями» содержит 66 страниц текста, 29 использованных источников.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНАЯ И ПРОЕКТИВНАЯ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППЫ, КОЛЬЦО ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ, ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ИНВОЛЮЦИЙ, КОНЕЧНАЯ ПРОСТАЯ ГРУППА.

Цель работы — нахождение минимального числа порождающих инволюций с определенными свойствами для линейных групп над кольцом целых гауссовых чисел и над конечными полями.

В результате исследования найдено минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно единице, для проективных специальных линейных групп над полем из девяти элементов. Завершено решение вопроса о порождаемости специальных линейных групп и их проективных образов над кольцом целых гауссовых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Группы, порожденные тремя инволюциями, две их которых перестановочны, будем называть $(2 \times 2, 2)$-*порожденными*. Очевидно, из $(2 \times 2, 2)$-порождаемости какой-то группы следует $(2 \times 2, 2)$-порождаемость любого ее неединичного гомоморфного образа, при этом мы не исключаем того, что две или все три инволюции совпадают. В работе [21] доказана $(2 \times 2, 2)$-порождаемость некоторых классических групп над определенными d-порожденными областями целостности достаточно большой размерности n, зависящей от параметра d, в частности, доказана $(2 \times 2, 2)$-порождаемость специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ при $n \geq 14$. В работах [16] и [5] установлена $(2 \times 2, 2)$-порождаемость проективной специальной линейной группы $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ при $n \geq 8$ и соответственно при $n = 7$. Доказательство в [16, 5] состояло в том, что порождающие тройки указывались в явном виде, более того, при $n \neq 4k + 2$ они выбирались из специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Следовательно, для таких размерностей справедлив более сильный результат. При $n \geq 7$ и $n \neq 4k + 2$ группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ является $(2 \times 2, 2)$-порожденной. Поэтому в силу работ [21, 16, 5] ответ о $(2 \times 2, 2)$-порожденности групп SL_n и PSL_n над кольцом $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ не был известен к 2010 году только при $n = 3, 4, 5, 6, 10$ для SL_n и только при $n = 2, 3, 4, 5, 6$ для PSL_n. В данной выпускной работе рассматриваются оставшиеся малые размерности.

Я. Н. Нужин в 1999 г. записал в Коуровскую тетрадь следующий вопрос

[17, вопрос 14.69] Для каждой конечной простой неабелевой группы найти минимум числа порождающих инволюций, удовлетворяющих дополнительному условию, в каждом из следующих случаев.

а) Произведение порождающих инволюций равно 1.

б) Все порождающие инволюции сопряжены (Малле-Саксл-Вайгель).

в) Выполняются одновременно свойства а), б) (Малле-Саксл-Вайгель).

г) Все порождающие инволюции сопряжены и две из них перестановочны.

Вопросы б) и в) впервые были сформулированы в работе Г. Малле, Дж. Саксла и Т. Вайгеля [18].

Для конечной группы G, порожденной инволюциями (элементами порядка 2), обозначим через $n_c(G)$ минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно 1.

В 2009 г. Дж. М. Уорд [22] решил вопрос в) для спорадических, знакопеременных и проективных специальных линейных групп $PSL_n(q)$ над полем нечетного порядка q, исключая случай $q = 9$ при $n \geq 4$, а при $n = 6$ и случай $q \equiv 3(mod 4)$. В 2021 г. И. Ю. Ефимов и Я. Н. Нужин [2] сняли ограничение $q \neq 9$ для $n = 4, 5, 7, 8$. Автором ограничение $q \neq 9$ снимается для размерностей $n \geq 9$ и для размерности $n = 6$. Во всех этих случаях оказалось, что порождающие пятерки сопряженных инволюций, произведение которых равно единице, указанные в [22], годятся и при $q = 9$.

1 Определения и предварительные результаты

Пусть K — произвольное коммутативное кольцо с единицей 1. Зафиксируем некоторые специальные элементы из общей линейной группы $GL_n(K)$ и ее подгруппы матриц $SL_n(K)$ с определителем 1 над кольцом K. Для элементов из проективной группы $PSL_n(K)$ будем также использовать матричную запись, считая при этом два элемента равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу из $SL_n(K)$. Элементарные трансвекции

$$t_{ij}(k) = E_n + ke_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ i \neq j,\ k \in K,$$

будем называть просто трансвекциями, где E_n — единичная матрица степени n, а e_{ij} — $(n \times n)$-матрица с 1 на позиции (i,j) и нулями в остальных местах. Положим также

$$t_{ij}(K) = \langle t_{ij}(k) \mid k \in K \rangle,\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ i \neq j.$$

Здесь и далее для любого непустого подмножества M некоторой группы через $\langle M \rangle$ обозначаем подгруппу, порожденную множеством M. Следующие две леммы хорошо известны (см., например, [3, с. 26], [11, с. 107]).

Лемма 1. *Группа $SL_n(K)$ над полем K порождается подгруппами $t_{ij}(K)$, $i,j = 1,\ldots,n$.*

Лемма 2. *Группа $SL_n(K)$ над евлидовым кольцом K порождается подгруппами $t_{ij}(K)$, $i,j = 1,\ldots,n$.*

Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ и кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, где $i^2 = -1$, евклидовы (см., например, [4, с. 439]), а поскольку $t_{rs}(\mathbb{Z}) = \langle t_{rs}(1) \rangle$ и $t_{rs}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) = \langle t_{rs}(1), t_{rs}(i) \rangle$, то следствием леммы 2 является

Лемма 3. *а) Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{ij}(1)$, $i,j = 1,\ldots,n$.*

б) Группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{rs}(1)$, $t_{rs}(i)$, $r,s = 1,\ldots,n$.

В доказательствах о порождении групп $SL_n(K)$ и $PSL_n(K)$ определенным набором инволюций будет использоваться матрица

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа, порожденная матрицей μ, действует сопряжениями транзитивно на множестве трансвекций

$$T = \{t_{1n}((-1)^{n+1}),\ t_{i+1i}(1),\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

и на транспонированном множестве

$$T' = \{t_{n1}((-1)^{n+1}),\ t_{ii+1}(1),\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Коммутируя между собой элементы из множества T или из T', мы получим все трансвекции $t_{ij}(1)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Поэтому в силу леммы 3а) каждое из множеств T и T' порождает группу $SL_n(\mathbb{Z})$. Более того, справедлива

Лемма 4. *а) Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается матрицей μ и одной трансвекцией из множества T или из множества T'.*

б) Группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается матрицей μ в совокупности с одной трансвекцией из множества T или из T' и любой трансвекцией $t_{rs}(i)$.

в) Группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается каждым из множеств T и T' в совокупности с любой трансвекцией $t_{rs}(i)$.

Лемма 5. *а) При фиксированном s, $1 \leq s \leq n$, группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{rs}(1)$, $t_{sr}(1)$, $r = 1, \ldots, n$, $r \neq s$.*

б) При фиксированном s, $1 \leq s \leq n$, группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{rs}(1)$, $t_{sr}(1)$, $r = 1, \ldots, n$, $r \neq s$, вместе с любой трансвенкцией $t_{km}(i)$. В частности, группа $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается подгруппой $SL_n(\mathbb{Z})$ вместе с любой трансвенкцией $t_{km}(i)$.

Доказательство. а) Коммутируя между собой трансвекции из множества $t_{rs}(1)$, $t_{sr}(1)$, $r \neq s$, $r = 1, \ldots, n$, получим все трансвекции $t_{pq}(1)$, $p, q = 1, \ldots, n$, $p \neq q$. Особенно просто этот процесс выглядит при $s = 1$. Остается применить лемму 3а).

б) Для любого фиксированного числа x мономиальная подгруппа из $SL_n(\mathbb{Z})$ действует сопряжением транзитивно на множестве трансвекций $t_{pq}(x)$, $p, q = 1, \ldots, n$, $p \neq q$, при $n \geq 3$, а при $n = 2$ переводит $t_{12}(x)$ в $t_{21}(-x)$. Поэтому применяя лемму 5а), затем лемму 3б), получаем требуемое утверждение. $\square$

Как уже отмечалось во введении, утверждение следующей леммы очевидно, но мы фиксируем его еще раз в виде леммы для удобства ссылок в доказательствах.

Лемма 6. *Из* $(2\times2, 2)$*-порождаемости группы следует* $(2\times2, 2)$*-порождаемость любого ее неединичного гомоморфного образа.*

Линейную группу типа X_n над конечным полем из q элементов будем обозначать через $X_n(q)$.

Если группа G простая и неабелева, то $n_c(G) \geq 5$ (см., например, [22, стр. 13] или [6, лемма 4]). Очевидно, если группа G порождается тремя сопряженными инволюциями, то $n_c(G) \leq 6$. Назовем группу (2,3)-порожденной, если она порождается инволюцией и элементом порядка 3. Всякая совершенная (2,3)-порожденная группа порождается тремя сопряженными инволюциями [14, стр. 221] (группа называется совершенной, если она совпадает со своим коммутантом). Таким образом, для конечной простой (2,3)-порожденной группы G число $n_c(G)$ равно либо 5, либо 6 и вопрос 14.69 в) сводится к следующему. Порождается ли группа G пятеркой сопряженных инволюций, произведение которых равно единице? Отметим, что имеются простые конечные группы G, для которых $n_c(G) > 6$ [6], например, $n_c(PSU_3(9)) = 7$.

Зафиксируем в виде леммы один технический результат, полезный для решения вопроса 14.69в)(см. также [6, лемма 6]).

Лемма 7. *[22, Лемма 1.2.2] Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Группа G порождается тремя сопряженными инволюциями α, β, γ, причем произведение $\alpha\beta$ тоже является инволюцией и она сопряжена с α.*

2. *Группа G порождается сопряженными инволюциями $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, две из которых совпадают и $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon = 1$.*

Ниже используются следующие сокращения: $a^b = bab^{-1}$, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

2 Линейные группы над кольцом целых гауссовых чисел

Пусть I — идеал кольца R. Тогда естественный кольцевой гомоморфизм $\rho_I : \ R \to R/I$ определяет сюръективный гомоморфизм

$$\psi_I : \ M_n(R) \to M_n(R/I)$$

кольца $n \times n$-матриц $M_n(R)$ с обычными операциями сложения и умножения, где для любой матрицы $(a_{ij}) \in M_n(R)$ по определению

$$\psi_I : \ (a_{ij}) \to (\rho_I(a_{ij})).$$

С другой стороны, гомоморфизм ρ_I индуцирует гомоморфизм групп

$$\varphi_I : \ GL_n(R) \to GL_n(R/I),$$

$$\varphi_I : \ SL_n(R) \to SL_n(R/I),$$

где также определению

$$\varphi_I : \ (a_{ij}) \to (\rho_I(a_{ij})).$$

Д. А. Супруненко называет φ_I *гомоморфизмом Минковского* [12, стр. 95]. Однако, гомоморфизм φ_I уже не обязан быть сюръективным как гомоморфизм ψ_I.

Пример 1. Пусть $R = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, а I — идеал, порожденный элементом 3. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ имеет порядок 4 и порождается элементом i. Поэтому

$$GL_n(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) = \langle d(i)\rangle SL_n(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i),$$

где

$$d(i) = diag(i, 1, \ldots, 1).$$

Поскольку SL_n над евклидовым кольцом и над полем порождается трансвекциями, то редукция по модулю 3 дает гомоморфизм φ_I группы $GL_n(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ на собственную подгруппу $\langle d(i)\rangle SL_n(9)$ индекса 2 группы $GL_n(9)$ (см. доказательство леммы 12 ниже). На этот пример Я. Н. Нужину указал М. А. Всемирнов еще в 2017 г.

Лемма 8. *Группа $PSL_n(2)$ является гомоморфным образом групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Поскольку фактор-кольцо $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})/I$ по идеалу I, порожденному элементом $1+i$, изоморфно полю из двух элементов и группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_n(2) = PSL_n(2)$ порождаются трансвекциями в силу леммы 1, то гомоморфизм $\varphi_I : SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \to SL_n(2)$ сюръективен. Все диагональные и, в частности, скалярные матрицы лежат в ядре гомоморфизма φ_I. Поэтому существует гомоморфизм группы $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на группу $PSL_n(2)$. □

Лемма 9. *Группа $PSL_n(9)$ является гомоморфным образом групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.*

Доказательство. В евклидовом кольце свойство элемента p быть простым эквивалентно условию максимальности порожденного им идеала, а простое число $p \in \mathbb{Z}$ остается простым элементом в кольце $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $p = 4k-1$ (см., например, [4, стр. 440, 441]). Поэтому фактор-кольцо $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})/I$ по идеалу I, порожденному элементом 3, изоморфно полю из девяти элементов. Группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_n(9)$ порождаются трансвекциями в силу леммы 1, следовательно, гомоморфизм $\varphi_I : SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \to SL_n(9)$ сюръективен. С другой стороны, имеется гомоморфизм π группы $SL_n(9)$ на группу $PSL_n(9)$. Поэтому композиция $\pi \circ \varphi$ задает гомоморфизм $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на $PSL_n(9)$, а поскольку все скалярные матрицы лежат в ядре гомоморфизма $\pi \circ \varphi$, то существует гомоморфизм $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ на $PSL_n(9)$. $\square$

Доказана

Теорема 1. *а) Группа $SL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не порождается никаким множеством инволюций.*

б) Группы $PSL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $PSL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями, но не порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

в) Группы $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями.

Поскольку мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ циклическая порядка 4, то $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) = PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ в случае нечетного n. Поэтому в теореме 1 при $n = 3, 5$ мы указываем только $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Группы $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями, но для этих групп теорема 1 не дает ответа на вопрос о $(2\times 2, 2)$-порожденности. Группа $SL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной [10], но неизвестно, порождается ли она тремя инволюциями. Тем не менее, объединяя теорему 1 с указанными выше утверждениями из [16, 5], получаем для групп $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ следующий почти законченный результат.

Теорема 2. *При $n \neq 5, 6$ группа $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 7$.*

Отметим, что при выборе порождающих троек инволюций здесь используются методы статьи [8].

Доказательство. **Случай $\mathbf{SL_2}$.** В группе $SL_2(R)$ над любым коммутативным кольцом с единицей характеристики, отличной от 2, есть только одна инволюция $diag(-1, -1)$, поэтому она не порождается никаким множеством инволюций.

Случай $\mathbf{PSL_2}$. Группа $PSL_2(9)$ не является $(2\times 2, 2)$-порожденной [9]. Поэтому в силу лемм 6 и 12 группа $PSL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ также не является $(2\times 2, 2)$-порожденной, но она порождается тремя инволюциями

$$\alpha = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -1+i & i \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

никакие две из которых не перестановочны. Действительно, пусть $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. По лемме 3а) две матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha\beta$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma\alpha\beta\gamma$$

порождают группу $PSL_2(\mathbb{Z})$ и, в частности, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \eta$$

лежит в подгруппе M. Следовательно, в M лежит и матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} = \eta\gamma\beta.$$

Четыре последних матрицы порождают всю группу $PSL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ в силу леммы 3б).

Случаи $\mathbf{SL_3}$, $\mathbf{SL_4}$ и $\mathbf{PSL_4}$. Группы $PSL_3(2)$ и $PSL_4(2)$ не являются $(2\times 2, 2)$-порожденными [**?**], поэтому в силу лемм 6 и 11 группы $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ также не является $(2\times 2, 2)$-порожденными.

Группа $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ $(= PSL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}))$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Наша задача — установить равенство $M = SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Вычисления показывают, что

$$(\alpha\beta)^2 = t_{31}(i),$$

$$\gamma(\alpha\beta)^2\gamma = t_{13}(i),$$

$$\Big(\alpha\big(\gamma(\alpha\beta)^2\gamma\big)\Big)^2 = t_{23}(-i),$$

$$[t_{23}(-i), t_{31}(i)] = t_{21}(1),$$

$$\gamma t_{21}(1)\gamma = t_{23}(-1),$$

$$t_{21}(-1)\alpha = diag(1,-1,-1),$$

$$\gamma\big(diag(1,-1,-1)\big)\gamma = diag(-1,-1,1),$$

$$diag(-1,-1,1)\,\beta = t_{32}(i),$$

$$\gamma t_{32}(i)\gamma = t_{12}(-i),$$

$$[t_{12}(i), t_{23}(i)] = t_{13}(-1),$$

$$[t_{13}(i), t_{32}(i)] = t_{12}(-1),$$

$$[t_{21}(1), t_{13}(1)] = t_{23}(1).$$

Итак, мы получили все трансвекции $t_{ij}(1), t_{ij}(i)$, где $i,j = 1,2,3, i \neq j$. Поэтому $M = SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ в силу леммы 3б). Что и требовалось показать.

Группа $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. Следовательно, и группа $PSL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ обладает такими порождающими. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, вычисления показывают, что

$$\alpha^\gamma = t_{31}(1)diag(1,-1,-1,1),$$

$$\alpha\alpha^{\gamma} = t_{31}(-1)t_{21}(1),$$
$$(\alpha\alpha^{\gamma})^{\beta} = t_{42}(-1)t_{12}(1),$$
$$\alpha^{\gamma}(\alpha\alpha^{\gamma})^{\beta}\alpha^{\gamma} = t_{42}(1)t_{12}(-1)t_{32}(-1),$$
$$(\alpha^{\gamma}(\alpha\alpha^{\gamma})^{\beta})^2 = t_{32}(-1).$$

Далее сопрягая полученную трансвекцию $t_{32}(-1)$ мономиальными матрицами β и γ и коммутируя результаты сопряжения, получим все трансвекции $t_{ij}(1)$, $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$. Действительно,

$$t_{32}(-1)^{\gamma} = t_{23}(-1),$$

$$t_{32}(-1)^{\beta} = t_{41}(-1),$$
$$t_{23}(1)^{\beta} = t_{14}(1),$$
$$t_{32}(1)(\alpha\alpha^{\gamma})^{-1}t_{32}(-1) = t_{21}(-1),$$
$$(\alpha\alpha^{\gamma})t_{21}(-1) = t_{31}(-1),$$
$$[t_{31}(1), t_{14}(1)] = t_{34}(1),$$
$$(t_{21}(1))^{\beta} = t_{12}(1),$$
$$[t_{41}(1), t_{12}(1)] = t_{42}(1),$$
$$[t_{21}(1), t_{14}(1)] = t_{24}(1),$$
$$(t_{34}(1))^{\beta} = t_{43}(1),$$
$$[t_{14}(1), t_{43}(1)] = t_{13}(1).$$

Сейчас в силу леммы 3а) группа $SL_4(\mathbb{Z})$ лежит в подгруппе $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Так как матрица γ есть произведение трансвекции $t_{41}(i)$ на мономиальную матрицу из $SL_4(\mathbb{Z})$, то $t_{41}(i) \in M$. Сопрягая $t_{41}(i)$ мономиальными матрицами из $SL_4(\mathbb{Z})$, получим, что все трансвекции $t_{ij}(i)$, $i,j = 1,2,3,4$, $i \neq j$, лежат в M. В силу леммы 3б) $M = SL_4(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Что и требовалось показать.

Случай $\mathbf{SL_5}$. Группа $SL_5(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что группа $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ совпадает с $SL_5(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Пусть $\beta\gamma = \mu$. Будем записывать матрицы из M в виде произведения трансвекций и диагональных инволюций. Так,

$$\alpha = t_{21}(i) diag(1, -1, -1, 1, 1),$$

$$\alpha^{\mu} = t_{32}(i) diag(1, 1, -1, -1, 1),$$

$$(\alpha\alpha^{\mu})^2 = t_{31}(1),$$

$$((\alpha\alpha^{\mu})^2)^{\mu^2} = t_{53}(1),$$

$$[t_{53}(1), t_{31}(1)] = t_{51}(1).$$

По лемме 4а) трансвекция $t_{51}(1)$ и мономиальная матрица μ порождают группу $SL_5(\mathbb{Z})$, в частности, в M лежит диагональная матрица $diag(1, -1, -1, 1, 1)$. Следовательно, в M лежит и трансвекция

$$t_{21}(i) = \alpha diag(1, -1, -1, 1, 1).$$

Таким образом, трансвекции $t_{51}(1), t_{21}(i)$ и мономиальная матрица μ лежат в M. По лемме 4б) $M = SL_5(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.

Случай $\mathbf{PSL_6}$. Группа $PSL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, никакие две из которых не перестановочны. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = diag(1,-1,-1,1,1,1)t_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \alpha^{t_{32}(i)\mu'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\mu' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу построения матрицы α, β, γ лежат в группе $SL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, а их квадраты являются скалярными матрицами. Поэтому образы матриц α, β, γ в группе $PSL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ являются инволюциями.

Покажем, что группа $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ совпадает с $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Пусть

$$\theta = \gamma\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= diag(1,-1,1,1,-1,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} t_{45}(-i)t_{16}(-i).$$

Тогда последовательно получаем следующие равенства

$$\beta^{\theta} = diag(1,1,1,-1,-1,1)t_{42}(i)t_{43}(-1),$$

$$\beta^{\theta^4} = diag(1,1,1,-1,-1,1)t_{42}(i)t_{52}(1),$$

$$\beta^{\theta}\beta^{\theta^4} = t_{43}(1)t_{52}(1),$$

$$(\beta^{\theta}\beta^{\theta^4})^{\theta} = t_{14}(1)t_{64}(-i)t_{65}(-1),$$

$$[\beta, (\beta^{\theta}\beta^{\theta^4})^{\theta}] = t_{24}(1),$$

$$t_{24}(1)^{\theta^2} = t_{63}(i),$$

$$t_{24}(1)^{\theta^3} = t_{25}(i)t_{35}(-1),$$

$$[t_{25}(i)t_{35}(-1), t_{63}(i)] = t_{65}(i),$$

$$t_{65}(i)^{\alpha} = t_{12}(i),$$

$$[t_{12}(i), t_{24}(1)] = t_{14}(i),$$

$$(t_{14}(i)\beta^{\theta^4})^2 = t_{12}(1),$$

$$[t_{12}(1), t_{24}(1)] = t_{14}(1),$$

$$t_{12}(1)^{\alpha} = t_{65}(1),$$

$$(\beta^{\theta}\beta^{\theta^4})^{\theta} t_{14}(-1) t_{65}(1) = t_{64}(-i),$$

$$t_{24}(1)^{\theta^4} = t_{41}(i) t_{51}(1),$$

$$[t_{24}(1), t_{41}(i) t_{51}(1)] = t_{21}(i),$$

$$[t_{41}(i) t_{51}(1), t_{12}(1)] = t_{42}(i) t_{52}(1),$$

$$\beta^{\theta^4} t_{42}(-i) t_{52}(-1) = diag(1, 1, 1, -1, -1, 1),$$

$$diag(1, 1, 1, -1, -1, 1)^{\alpha}\beta = t_{21}(-1),$$

$$[\beta^{\theta}\beta^{\theta^4}, t_{21}(1)] = t_{51}(1).$$

$$[t_{51}(1), t_{12}(1)] = t_{52}(1),$$

$$t_{42}(i) t_{52}(1) t_{52}(-1) = t_{42}(i),$$

$$t_{42}(i)^{\alpha} = t_{35}(-i),$$

$$t_{64}(i)^{\alpha} = t_{13}(i),$$

$$[t_{13}(i), t_{35}(-i)] = t_{15}(1),$$

$$[t_{65}(1), t_{51}(1)] = t_{61}(1),$$

$$t_{61}(1)^{\alpha} = t_{16}(-1),$$

$$[[t_{64}(-i), t_{42}(i)], t_{24}(1)]^{\alpha} = t_{13}(1).$$

Таким образом, все трансвекции вида $t_{1j}(1)$ лежат в подгруппе M. Далее,

$$t_{15}(1)^{\theta} = t_{31}(1),$$

$$t_{31}(1)^{\alpha} = t_{46}(1),$$

$$[t_{21}(1), t_{1j}(1)] = t_{2j}(1), \quad j > 2,$$

$$[[t_{64}(-i), t_{42}(i)], t_{2j}(1)] = t_{6j}(1), \quad j \neq 2, 6,$$

$$[t_{51}(1), t_{1j}(1)] = t_{5j}(1), \quad j \neq 1, 5,$$

$$[t_{31}(1), t_{1j}(1)] = t_{3j}(1), \quad j \neq 1, 3,$$

$$[t_{46}(1), t_{6j}(1)] = t_{4j}(1), \quad j \neq 4, 6.$$

Таким образом, в группе M лежат хотя бы одна трансвекция вида $t_{rs}(i)$ и множество трансвекций

$$T = \{t_{16}(1),\ t_{i+1i}(1),\ i = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Поэтому $M = PSL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ в силу леммы 4в).

Теорема 1 доказана. $\square$

В [8] доказано, что для любой области целостности D характеристики отличной от 2 группа $SL_6(D)$, в частности, $SL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, не является $(2 \times 2, 2)$-порожденной. Таким образом, в вопросе о $(2\times 2, 2)$-порождаемости групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ остаются нерассмотренными только случаи SL_5, PSL_6 и SL_{10}. Доказана

Теорема 3. *Группы $SL_5(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, $PSL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Доказательство теоремы конструктивное, то есть порождающие тройки инволюций указываются явно, и в установлении порождаемости данной тройкой инволюций существенно используются компьютерные вычисления.

Объединяя теоремы 1 и 3 с отмеченные выше результатами статей [21, 16, 5, 8], получаем два следствия, являющиеся основными результатами данной главы.

Следствие 1. *Группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 5$ и $n \neq 6$.*

Следствие 2. *Группа $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 5$.*

Доказательство. Далее мы используем левое действие группы $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ на n-мерном пространстве вектор-столбцов V с компонентами из поля комплексных чисел. Пусть $v^t = (v_1, \ldots, v_n)^t$, $u^t = (u_1, \ldots, u_n)^t$ — некоторые ненулевые элементы из V. Если $g = E_n + v^t \times u$, то ранг матрицы $g - E_n$ равен единице. При этом линейная оболочка вектора v^t является образом преобразования $g - E_n$ и называется его *центром*. Гиперплоскость, ортогональная вектору u^t, является ядром преобразования $g - E_n$ и называется его *осью*. Матрица $g = E_n + v^t \times u$ называется *трансвекцией*, если векторы v^t и u^t ортогональны, то есть $uv^t = 0$ (центр лежит на оси). Известно, что всякая трансвекция из $SL_n(F)$ над полем F сопряжена с элементарной трансвекцией (см., например, [12, стр. 65]).

Наш метод доказательства порождаемости группы $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ заданным набором инволюций состоит из следующих этапов.

1. В явном виде приводятся тройки инволюций, две из которых перестановочны, лежащие в $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Группа, порожденная данными инволюциями обозначается через M.

2. Показывается, что в группе M лежит матрица g_1, которая является трансвекцией $E_n + v^t \times u$ или произведением коммутирующих трансвекций. Далее такие матрицы обозначаем g_l.

3. Если g_1 является трансвекцией, то показывается, что в группе M лежат матрицы h_l такие, что $h_l v^t = \pm v^t$, либо $u {h_l}^{-1} = \pm u$. Тогда, сопрягая g_1 элементом h_l, получим другую матрицу с тем же центром, либо с той же осью соответственно. Аналогичная техника используется, если g_1 есть произведение коммутирующих трансвекций и ранг $g_1 - E_n$ больше 1.

4. После получения достаточного количества матриц g_l, показываем, что элементарные трансвекции $t_{rs}(x)$ лежат в подгруппе группы M, порожденной матрицами g_l.

Случай $\mathbf{SL_5}$

Покажем, что группа $SL_5(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ порождается следующими тремя инволюциями

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3+2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & 2+i & -2-i \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

первые две из которых перестановочны. Положим $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$.

Пусть

$$h_1 = \beta^\gamma \gamma^\alpha \gamma \beta,$$

$$h_2 = \alpha h_1,$$

$$h_3 = (\gamma^\alpha \alpha^\gamma)^\beta.$$

Тогда

$$g_1 = (\alpha\gamma)^6 = t_{13}(i)t_{14}(i)t_{15}(-i)t_{23}(-i)t_{24}(-i)t_{25}(i),$$

$$g_2 = g_1^{h_1} g_1^{h_2} = t_{13}(-1)t_{14}(1)t_{23}(1)t_{24}(-1),$$

$$g_3 = g_1^{h_1} g_1^{h_3} = t_{13}(i-4)t_{14}(i-3)t_{15}(3-i)t_{23}(4-i)t_{24}(3-i)t_{25}(i-3),$$

$$g_4 = g_2^\gamma = t_{13}(1)t_{15}(1)t_{23}(-1)t_{25}(-1),$$

$$g_5 = g_2^{h_1} g_2^{h_2} = t_{13}(1-i)t_{14}(i-1)t_{23}(i-1)t_{24}(1-i),$$

$$g_6 = g_5^\gamma = t_{13}(i-1)t_{15}(i-1)t_{23}(1-i)t_{25}(1-i),$$

$$g_7 = g_2^{h_1} g_2^{h_3} = t_{13}(1-2i)t_{14}(2-i)t_{15}(i)t_{23}(2i-1)t_{24}(i-2)t_{25}(-i),$$

$$g_8 = g_1^{-10} g_2^{14} g_3^{-3} g_4^6 g_5^3 g_6^{-3} g_7^{-10} = t_{13}(i)t_{23}(-i),$$

$$g_9 = g_1^{-3} g_2^4 g_3^{-1} g_4^2 g_5^1 g_6^{-1} g_7^{-3} = t_{13}(1)t_{23}(-1),$$

$$g_{10}=g_1^{-10}g_2^{15}g_3^{-3}g_4^{6}g_5^{4}g_6^{-3}g_7^{-10}=t_{14}(i)t_{24}(-i),$$

$$g_{11}=g_1^{-3}g_2^{5}g_3^{-1}g_4^{2}g_5^{1}g_6^{-1}g_7^{-3}=t_{14}(1)t_{24}(-1),$$

$$g_{12}=g_1^{10}g_2^{-14}g_3^{3}g_4^{-5}g_5^{-3}g_6^{4}g_7^{10}=t_{15}(i)t_{25}(-i),$$

$$g_{13}=g_1^{3}g_2^{-4}g_3^{1}g_4^{-1}g_5^{-1}g_6^{1}g_7^{3}=t_{15}(1)t_{25}(-1).$$

Далее, пусть

$$h_4=\beta^{\alpha\gamma}\gamma,$$

$$h_5=\beta(\alpha\gamma)^3\beta(\alpha\gamma)^4\alpha\beta(\gamma\alpha)^4\beta(\gamma\alpha)^3\beta=(\alpha\beta)^{\beta(\alpha\gamma)^3\beta(\alpha\gamma)^4}.$$

Тогда

$$g_{14}=g_8^{h_4}=t_{13}(2-3i)t_{23}(-2+3i)t_{43}(-i)t_{53}(-i),$$

$$g_{15}=g_9^{h_4}=t_{13}(-3-2i)t_{23}(3+2i)t_{43}(-1)t_{53}(-1),$$

$$g_{16}=g_8^{h_5}=t_{13}(2-3i)t_{23}(-2+3i)t_{43}(1-i)t_{53}(-i),$$

$$g_{17}=g_9^{h_5}=t_{13}(-3-2i)t_{23}(3+2i)t_{43}(-1-i)t_{53}(-1),$$

$$g_{18}=g_{16}^{h_4}=t_{13}(3+8i)t_{23}(-4-8i)t_{43}(2+i)t_{53}(2+i),$$

$$g_{19}=g_{17}^{h_4}=t_{13}(8-3i)t_{23}(4i-8)t_{43}(1-2i)t_{53}(1-2i),$$

$$g_9^{-1}g_{14}^{-2}g_{15}g_{19}=t_{13}(i),$$

$$g_8g_{14}^{-1}g_{15}^{-2}g_{18}^{-1}=t_{13}(1),$$

$$g_8^{-1}g_9^{-1}g_{14}^{-2}g_{15}g_{19}=t_{23}(i),$$

$$g_8g_9^{-1}g_{14}^{-1}g_{15}^{-2}g_{18}^{-1}=t_{23}(1),$$

$$g_{15}g_{17}^{-1}=t_{43}(i),$$

$$g_{14}^{-1}g_{16}=t_{43}(1),$$

$$g_8^{-3}g_9^{2}g_{14}^{-1}g_{15}^{-1}g_{17}=t_{53}(i),$$

$$g_8^{-2}g_9^{-3}g_{14}g_{15}^{-1}g_{16}^{-1}=t_{53}(1).$$

Таким образом, мы установили, что все трансвекции вида $t_{k3}(x)$, $k=1,2,4,5,$

$x = 1, i$, лежат в M. Пусть

$$h_6 = \gamma^{\beta\alpha},$$

$$h_7 = \beta\gamma\alpha\gamma\alpha\beta.$$

Тогда

$$t_{13}(x)^{\beta} = t_{31}(x),$$

$$t_{31}(x)^{h_6} = t_{35}(x),$$

$$t_{31}(x)^{h_7} = t_{32}(x).$$

Следовательно, трансвекции вида $t_{3j}(x)$, $j = 1, 2, 5$, $x = 1, i$, лежат в M. Пусть

$$h_8 = g_8^{\beta\gamma\alpha\beta\gamma}.$$

Тогда

$$t_{31}(-i)^{h_8} = t_{31}(-1-2i)t_{32}(2+i)t_{34}(1)t_{35}(-2-i).$$

Отсюда $t_{34}(1) \in M$. Итак, мы получили, что в M лежат все трансвекции вида $t_{3k}(1)$, $t_{k3}(1)$, $k = 1, 2, 4, 5$, а также некоторые трансвекции $t_{jk}(i)$. Поэтому $M = SL_5(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ в силу леммы 5б). Что и требовалось показать.

Случай $\mathbf{PSL_6}$ Покажем, что группа $PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается следующими тремя инволюциями

$$\alpha = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\beta\gamma = \gamma\beta$. Здесь для элементов группы $PSL_6(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ мы используем матричную запись, считая два элемента равными, если они различаются лишь скалярным множителем. Положим $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$.

Пусть

$$g_1 = (\beta(\alpha\beta\gamma)^3\alpha)^4 = I_6 + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$h_1 = \beta\gamma,$$

$$h_2 = \alpha\beta\gamma\alpha,$$

$$h_3 = \beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta,$$

$$h_4 = \gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta,$$

$$h_5 = g_1^{\gamma\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta},$$

$$h_6 = g_1^{\beta\alpha(\beta\gamma\alpha)^2(\gamma\alpha\beta\alpha)^2\beta\gamma\alpha\gamma\alpha}.$$

Тогда

$$g_2 = h_1^{-1} g_1 h_1,$$

$$g_3 = h_2^{-1} g_1 h_2,$$

$$g_4 = h_3^{-1} g_1 h_3,$$

$$g_5 = h_4^{-1} g_1 h_4,$$

$$g_6 = h_4^{-1} g_3 h_4,$$

$$g_7 = h_2^{-1} g_5 h_2,$$

$$g_8 = h_4^{-1} g_7 h_4,$$

$$g_9 = h_4^{-1} g_6 h_4,$$

$$g_{10} = h_2^{-1} g_9 h_2,$$

$$g_{11} = h_4^{-1} g_{10} h_4,$$

$$g_{12} = h_4^{-1} g_{11} h_4,$$

$$g_{13} = h_5^{-1} g_3 h_5,$$

$$g_{14} = h_6^{-1} g_2 h_6,$$

$$g_{15} = g_1^{-4} g_2^{4} g_3^{-3} g_4^{-4} g_5^{1} g_6^{2} g_7^{-2} g_8^{1} g_9^{-3} g_{10}^{0} g_{11}^{0} g_{12}^{-2} g_{13}^{0} g_{14}^{1} =$$

$$= I_6 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$g_{16} = g_1^{11} g_2^{0} g_3^{-8} g_4^{1} g_5^{6} g_6^{-3} g_7^{-5} g_8^{-5} g_9^{3} g_{10}^{3} g_{11}^{-1} g_{12}^{-2} g_{13}^{1} g_{14}^{-3} =$$

$$= I_6 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$g_{17} = g_1^{12} g_2^{-1} g_3^{-7} g_4^2 g_5^6 g_6^{-4} g_7^{-4} g_8^{-5} g_9^3 g_{10}^3 g_{11}^{-1} g_{12}^{-2} g_{13}^1 g_{14}^{-3} =$$

$$= I_6 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$g_{18} = g_1^3 g_2^0 g_3^1 g_4^0 g_5^{-4} g_6^{-1} g_7^2 g_8^0 g_9^3 g_{10}^{-1} g_{11}^0 g_{12}^2 g_{13}^0 g_{14}^{-1} =$$

$$= I_6 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$g_{19} = g_{18} g_{18}^{\alpha\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta\alpha} = t_{43}(i-2) t_{46}(1),$$

$$g_{20} = g_{17} g_{17}^{\alpha\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta\alpha} = t_{43}(-1-2i) t_{46}(i),$$

$$(g_{20}^{-1})^{\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta\alpha\gamma\beta} g_{20}^{\beta\alpha\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\alpha\beta\alpha} = t_{54}(i-1),$$

$$(g_{19}^{-1})^{\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta\alpha\gamma\beta} g_{19}^{\beta\alpha\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\alpha\beta\alpha} = t_{54}(i+1).$$

Так как

$$t_{54}(x)^{\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\gamma\beta\alpha\gamma\beta\alpha} = t_{56}(ix),$$

$$t_{54}(x)^{\beta\alpha\gamma\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\gamma} = t_{52}(x+ix) t_{56}(ix),$$

то

$$t_{56}(i-1),\ t_{56}(i+1),\ t_{52}(2)t_{56}(i+1),\ t_{52}(2i)t_{56}(i-1)\in M.$$

Далее,

$$g_{20}^{\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\gamma\alpha}(g_{20}^{-1})^{\gamma\alpha\beta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\gamma\alpha}=t_{52}(-1-2i)t_{54}(-1-3i),$$

$$(t_{52}(-1-2i)t_{54}(-1-3i))(t_{54}(i+1))^2t_{54}(i-1)(t_{52}(2i)t_{56}(i-1))(t_{56}(i-1))^{-1}=t_{52}(-1),$$

$$g_{19}^{\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\gamma\alpha}(g_{19}^{-1})^{\gamma\alpha\beta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\gamma\alpha}=t_{52}(i-2)t_{54}(i-3),$$

$$(t_{52}(i-2)t_{54}(i-3))t_{54}(i+1)(t_{54}(i-1))^{-2}(t_{52}(1))^2=t_{52}(i).$$

Таким образом, $t_{52}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\subset M$. Поскольку

$$t_{52}(x)^{\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\beta}=t_{53}(x),$$

$$t_{52}(x)^{\beta\alpha\gamma\beta\alpha\gamma}=t_{56}(-x),$$

$$t_{52}(x)^{\gamma(\beta\alpha)^3\gamma}=t_{51}(ix),$$

$$t_{52}(-1)^{\alpha\gamma\beta\alpha}=t_{53}(i-1)t_{54}(-i)t_{56}(1),$$

то, домножая последний элемент на $t_{53}(1-i)t_{56}(-1)$, получим включение $t_{54}(-i)\in M$. Элемент $t_{54}(i+1)$ уже был получен выше, поэтому $t_{54}(-i)t_{54}(i+1)=t_{54}(1)\in M$. Следовательно, $t_{5j}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\subset M, j\neq 5$.

Так как

$$g_{19}^{\beta\alpha}=t_{64}(1)t_{65}(1),$$

$$[g_{19}^{\beta\alpha},t_{5j}(x)]=t_{6j}(x), j\neq 5,6,$$

$$g_{20}^{\beta\alpha}=t_{64}(i)t_{65}(i),$$

$$(t_{64}(x))^{-1}(t_{64}(x)t_{65}(x))=t_{65}(x),$$

то $t_{6j}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\subset M, j\neq 6$ и в M лежат трансвекции

$$t_{5j}(x)^{\gamma}=t_{2k}(-x),\ j=1,2,3,\ k=7-j,$$

$$t_{5j}(x)^\gamma = t_{2k}(x),\ j = 4, 6,\ k = 7 - j,$$

$$t_{6j}(x)^\gamma = t_{1k}(-x),\ j = 1, 2, 3,\ k = 7 - j,$$

$$t_{6j}(x)^\gamma = t_{1k}(x),\ j = 4, 6,\ k = 7 - j.$$

Следовательно, $t_{1k}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \subset M, k \neq 1$, $t_{2l}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \subset M, l \neq 2$.

Далее,

$$[g_{17}, t_{6j}(x)] = t_{4j}(x),\ j \neq 4, 6,$$

$$g_{17}t_{41}(-i)t_{42}(1)t_{45}(-i) = t_{46}(1),$$

$$g_{18}t_{41}(-1)t_{42}(-i)t_{45}(-1) = t_{46}(-i).$$

Отсюда $t_{4j}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \subset M, j \neq 4$. Сопрягая последнюю подгруппу элементом γ, получим включение $t_{3j}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \subset M, j \neq 3$. Таким образом, мы, в частности, получили включения $t_{j5}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \subset M, j \neq 5$, которые вместе с уже полученными выше включениями $t_{5j}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \subset M, j \neq 5$, дают равенство $M = PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ в силу леммы 5б). Что и требовалось показать.

Случай $\mathbf{SL_{10}}$ Покажем, что группа $SL_{10}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается следующими тремя инволюциями

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

последние две из которых перестановочны. Положим $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$.

Пусть

$$g_1 = (\alpha\beta)^{10},$$

$$h_1 = ((\alpha\beta)^5)^{\gamma},$$

$$h_2 = ((\alpha\beta)^5)^{\beta\alpha\gamma},$$

$$h_3 = ((\alpha\beta)^5)^{\alpha\beta\alpha\gamma},$$

$$h_4 = ((\alpha\beta)^5)^{\alpha\beta\gamma},$$

В этом случае g_1 — произведение двух коммутирующих трансвекций, причём ранг $g_1 - E_{10}$ равен 2. Более того, g_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_4 & * \\ 0 & E_6 \end{pmatrix},$$

а построенные далее элементы $g_2,\ldots,g_{42}$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & E_6 \end{pmatrix}.$$

$$g_2 = h_1 g_1 h_1^{-1},$$

$$g_3 = h_2 g_1 h_2^{-1},$$

$$g_4 = h_3 g_1 h_3^{-1},$$

$$g_5 = h_2 g_2 h_2^{-1},$$

$$g_6 = h_3 g_2 h_3^{-1},$$

$$g_7 = h_1 g_3 h_1^{-1},$$

$$g_8 = h_3 g_3 h_3^{-1},$$

$$g_9 = h_1 g_4 h_1^{-1},$$

$$g_{10} = h_2 g_4 h_2^{-1},$$

$$g_{11} = h_1 g_5 h_1^{-1},$$

$$g_{12} = h_2 g_5 h_2^{-1},$$

$$g_{13} = h_3 g_5 h_3^{-1},$$

$$g_{14} = h_1 g_6 h_1^{-1},$$

$$g_{15} = h_2 g_6 h_2^{-1},$$

$$g_{16} = h_3 g_6 h_3^{-1},$$

$$g_{17} = h_1 g_7 h_1^{-1},$$

$$g_{18} = h_2 g_7 h_2^{-1},$$

$$g_{19} = h_3 g_7 h_3^{-1},$$

$$g_{20} = h_1 g_8 h_1^{-1},$$

$$g_{21} = h_2 g_8 h_2^{-1},$$

$$g_{22} = h_1 g_9 h_1^{-1},$$

$$g_{23} = h_2 g_9 h_2^{-1},$$

$$g_{24} = h_3 g_9 h_3^{-1},$$

$$g_{25} = h_1 g_{10} h_1^{-1},$$

$$g_{26} = h_2 g_{10} h_2^{-1},$$

$$g_{27} = h_3 g_{10} h_3^{-1},$$

$$g_{28} = h_1 g_{11} h_1^{-1},$$

$$g_{29} = h_2 g_{11} h_2^{-1},$$

$$g_{30} = h_3 g_{11} h_3^{-1},$$

$$g_{31} = h_1 g_{12} h_1^{-1},$$

$$g_{32} = h_3 g_{12} h_3^{-1},$$

$$g_{33} = h_1 g_{13} h_1^{-1},$$

$$g_{34} = h_2 g_{13} h_2^{-1},$$

$$g_{35} = h_3 g_{13} h_3^{-1},$$

$$g_{36} = h_1 g_{14} h_1^{-1},$$

$$g_{37} = h_1 g_{18} h_1^{-1},$$

$$g_{38} = h_1 g_{19} h_1^{-1},$$

$$g_{39} = h_4 g_1 h_4^{-1},$$

$$g_{40} = h_4 g_2 h_4^{-1},$$

$$g_{41} = h_4 g_4 h_4^{-1},$$

$$g_{42} = h_4 g_8 h_4^{-1}.$$

Теперь в подгруппе $\langle g_1, g_2, \ldots, g_{42} \rangle$ можно получить следующую трансвекцию

$$g_{43} = g_1^{-1161} g_2^{1463} g_3^{-1856} g_4^{1557} g_5^{271} g_6^{25} g_7^{1151} g_8^{-2141} g_9^{-491} g_{10}^{-291} g_{11}^{-954} g_{12}^{1001} \times$$

$$\times g_{13}^{227} g_{14}^{-385} g_{15}^{623} g_{16}^{797} g_{17}^{-32} g_{18}^{-23} g_{19}^{195} g_{20}^{-609} g_{21}^{-306} g_{22}^{-1523} g_{23}^{-147} \times$$

$$\times g_{24}^{-545} g_{25}^{798} g_{26}^{-500} g_{27}^{-44} g_{28}^{559} g_{29}^{-146} g_{30}^{-24} g_{31}^{-254} g_{32}^{42} g_{33}^{-29} g_{34}^{-77} \times$$

$$\times g_{35}^{-264} g_{36}^{-2} g_{37}^{-68} g_{38}^{9} g_{39}^{-293} g_{40}^{475} g_{41}^{-46} g_{42}^{261} = t_{17}(1) t_{27}(2i) t_{37}(-1) t_{47}(-2i).$$

Далее, сопряжением матрицы g_{43} будет получено еще 40 трансвекций вида $E_{10} + v^t \times e_7$, где $e_7 = (0,0,0,0,0,0,1,0,0,0)$.

Пусть

$$h_5 = \alpha\beta\gamma\alpha,$$

$$h_6 = g_2^{\alpha\beta\gamma\alpha\beta},$$

$$h_7 = g_2^{\alpha\beta\gamma\alpha\beta\alpha\beta},$$

$$h_8 = g_{43}^{\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta},$$

$$g_{44} = h_5^{-1} g_{43} h_5,$$

$$h_9 = g_{44}^{\beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\alpha\beta\alpha\gamma},$$

$$h_{10} = g_{43}^{\beta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\alpha\beta\alpha\gamma\alpha\beta\gamma},$$

$$h_{11} = \alpha\gamma\alpha,$$

$$h_{12} = \beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta,$$

$$h_{13} = g_{43}^{\beta\gamma(\alpha\beta)^3(\gamma\alpha)^2\beta\gamma(\alpha\beta)^2\alpha\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\gamma},$$

$$g_{45} = h_6^{-1} g_{43} h_6,$$

$$g_{46} = h_7^{-1} g_{43} h_7,$$

$$g_{47} = h_5^{-1} g_{45} h_5,$$

$$g_{48} = h_5^{-1} g_{46} h_5,$$

$$g_{49} = h_6^{-1} g_{47} h_6,$$

$$g_{50} = h_5^{-1} g_{49} h_5,$$

$$g_{51} = h_8^{-1} g_{43} h_8,$$

$$g_{52} = h_8^{-1} g_{44} h_8,$$

$$g_{53} = h_5^{-1} g_{51} h_5,$$

$$g_{54} = h_5^{-1} g_{52} h_5,$$

$$g_{55} = h_9^{-1} g_{43} h_9,$$

$$g_{56} = h_9^{-1} g_{44} h_9,$$

$$g_{57} = h_5^{-1} g_{55} h_5,$$

$$g_{58} = h_5^{-1} g_{56} h_5,$$

$$g_{59} = h_{10}^{-1} g_{44} h_{10},$$

$$g_{60} = h_{10}^{-1} g_{45} h_{10},$$

$$g_{61} = h_5^{-1} g_{59} h_5,$$

$$g_{62} = h_5^{-1} g_{60} h_5,$$

$$g_{63} = h_6^{-1} g_{48} h_6,$$

$$g_{64} = h_6^{-1} g_{52} h_6,$$

$$g_{65} = h_6^{-1} g_{55} h_6,$$

$$g_{66} = h_8^{-1} g_{45} h_8,$$

$$g_{67} = h_8^{-1} g_{47} h_8,$$

$$g_{68} = h_9^{-1} g_{45} h_9,$$

$$g_{69} = h_{10}^{-1} g_{46} h_{10},$$

$$g_{70} = h_5^{-1} g_{63} h_5,$$

$$g_{71} = h_5^{-1} g_{65} h_5,$$

$$g_{72} = h_5^{-1} g_{66} h_5,$$

$$g_{73} = h_9^{-1} g_{66} h_9,$$

$$g_{74} = h_5^{-1} g_{73} h_5,$$

$$g_{75} = h_{11}^{-1} g_{51} h_{11},$$

$$g_{76} = h_{11}^{-1} g_{52} h_{11},$$

$$g_{77} = h_{11}^{-1} g_{53} h_{11},$$

$$g_{78} = h_{11}^{-1} g_{55} h_{11},$$

$$g_{79} = h_{12}^{-1} g_{51} h_{12},$$

$$g_{80} = h_{12}^{-1} g_{53} h_{12},$$

$$g_{81} = h_{12}^{-1} g_{73} h_{12},$$

$$g_{82} = h_{11}^{-1} g_{81} h_{11},$$

$$g_{83} = h_{13}^{-1} g_{43} h_{13}.$$

Следующие элементы $g_{84}, \ldots, g_{101}$ — это все элементарные трансвекции $t_{k7}(i)$ и $t_{k7}(1)$, $k \neq 7$, полученные в виде произведения степеней матриц $g_{43}, \ldots, g_{83}$.

$$g_{84} = g_{43}^{13} g_{44}^{5} g_{45}^{66} g_{46}^{-32} g_{47}^{-4} g_{48}^{24} g_{49}^{-48} g_{50}^{-18} g_{51}^{6} g_{52}^{14} g_{53}^{-57} \times$$

$$\times g_{54}^{18} g_{55}^{37} g_{56}^{-40} g_{57}^{82} g_{58}^{47} g_{59}^{97} g_{60}^{-25} g_{61}^{-143} g_{62}^{0} g_{63}^{-8} \times$$

$$\times g_{64}^{12} g_{65}^{-25} g_{66}^{32} g_{67}^{66} g_{68}^{-4} g_{69}^{-32} g_{70}^{22} g_{71}^{-7} g_{72}^{0} g_{73}^{-1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{55} g_{76}^{-35} g_{77}^{62} g_{78}^{10} g_{79}^{57} g_{80}^{3} g_{81}^{-1} g_{82}^{0} g_{83}^{0} = t_{17}(i),$$

$$g_{85} = g_{43}^{-12} g_{44}^{4} g_{45}^{4} g_{46}^{18} g_{47}^{9} g_{48}^{-46} g_{49}^{-87} g_{50}^{-12} g_{51}^{-27} g_{52}^{-22} g_{53}^{67} \times$$

$$\times g_{54}^{-26} g_{55}^{3} g_{56}^{41} g_{57}^{65} g_{58}^{52} g_{59}^{21} g_{60}^{-68} g_{61}^{5} g_{62}^{-2} g_{63}^{-18} \times$$

$$\times g_{64}^{16} g_{65}^{-35} g_{66}^{-8} g_{67}^{-20} g_{68}^{2} g_{69}^{-85} g_{70}^{14} g_{71}^{-1} g_{72}^{-2} g_{73}^{-1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{23} g_{76}^{-30} g_{77}^{-15} g_{78}^{42} g_{79}^{128} g_{80}^{16} g_{81}^{-1} g_{82}^{0} g_{83}^{0} = t_{17}(1),$$

$$g_{86} = g_{43}^{-8} g_{44}^{-7} g_{45}^{45} g_{46}^{0} g_{47}^{16} g_{48}^{69} g_{49}^{-68} g_{50}^{-9} g_{51}^{-9} g_{52}^{2} g_{53}^{71} \times$$

$$\times g_{54}^{-20} g_{55}^{9} g_{56}^{45} g_{57}^{-44} g_{58}^{-26} g_{59}^{64} g_{60}^{25} g_{61}^{49} g_{62}^{-1} g_{63}^{73} \times$$

$$\times g_{64}^{15} g_{65}^{-51} g_{66}^{5} g_{67}^{12} g_{68}^{4} g_{69}^{33} g_{70}^{-11} g_{71}^{0} g_{72}^{-4} g_{73}^{1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{132} g_{76}^{-25} g_{77}^{19} g_{78}^{32} g_{79}^{-72} g_{80}^{-3} g_{81}^{1} g_{82}^{1} g_{83}^{0} = t_{27}(i),$$

$$g_{87} = g_{43}^{9} g_{44}^{1} g_{45}^{-13} g_{46}^{14} g_{47}^{10} g_{48}^{-24} g_{49}^{32} g_{50}^{47} g_{51}^{12} g_{52}^{10} g_{53}^{-53} \times$$

$$\times g_{54}^{-30} g_{55}^{-77} g_{56}^{119} g_{57}^{-4} g_{58}^{56} g_{59}^{-23} g_{60}^{-57} g_{61}^{43} g_{62}^{-2} g_{63}^{-9} \times$$

$$\times g_{64}^{2} g_{65}^{8} g_{66}^{11} g_{67}^{22} g_{68}^{11} g_{69}^{-72} g_{70}^{15} g_{71}^{21} g_{72}^{2} g_{73}^{-1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{-36} g_{76}^{21} g_{77}^{-25} g_{78}^{-29} g_{79}^{65} g_{80}^{79} g_{81}^{-1} g_{82}^{-1} g_{83}^{0} = t_{27}(1),$$

$$g_{88} = g_{43}^{-9} g_{44}^{-19} g_{45}^{-70} g_{46}^{27} g_{47}^{-7} g_{48}^{-63} g_{49}^{-132} g_{50}^{-54} g_{51}^{-18} g_{52}^{-11} g_{53}^{-16} \times$$

$$\times g_{54}^{4} g_{55}^{67} g_{56}^{-40} g_{57}^{101} g_{58}^{47} g_{59}^{97} g_{60}^{-25} g_{61}^{-143} g_{62}^{0} g_{63}^{19} \times$$

$$\times g_{64}^{14} g_{65}^{-55} g_{66}^{4} g_{67}^{6} g_{68}^{-4} g_{69}^{-32} g_{70}^{3} g_{71}^{-10} g_{72}^{0} g_{73}^{-1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{14} g_{76}^{-21} g_{77}^{29} g_{78}^{-6} g_{79}^{57} g_{80}^{3} g_{81}^{-1} g_{82}^{0} g_{83}^{0} = t_{37}(i),$$

$$g_{89} = g_{43}^{-16} g_{44}^{-20} g_{45}^{-24} g_{46}^{25} g_{47}^{7} g_{48}^{-43} g_{49}^{-83} g_{50}^{2} g_{51}^{-13} g_{52}^{-3} g_{53}^{25} \times$$

$$\times g_{54}^{-25} g_{55}^{-1} g_{56}^{41} g_{57}^{51} g_{58}^{52} g_{59}^{21} g_{60}^{-68} g_{61}^{5} g_{62}^{-2} g_{63}^{-29} \times$$

$$\times g_{64}^{17} g_{65}^{-31} g_{66}^{10} g_{67}^{18} g_{68}^{2} g_{69}^{-85} g_{70}^{17} g_{71}^{1} g_{72}^{-2} g_{73}^{-1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{65} g_{76}^{-31} g_{77}^{-14} g_{78}^{54} g_{79}^{128} g_{80}^{16} g_{81}^{-1} g_{82}^{0} g_{83}^{0} = t_{37}(1),$$

$$g_{90} = g_{43}^{32} g_{44}^{11} g_{45}^{44} g_{46}^{-31} g_{47}^{20} g_{48}^{44} g_{49}^{-80} g_{50}^{-16} g_{51}^{14} g_{52}^{2} g_{53}^{82} \times$$

$$\times g_{54}^{-28} g_{55}^{11} g_{56}^{45} g_{57}^{-42} g_{58}^{-26} g_{59}^{64} g_{60}^{25} g_{61}^{49} g_{62}^{-1} g_{63}^{64} \times$$

$$\times g_{64}^{15} g_{65}^{-53} g_{66}^{5} g_{67}^{12} g_{68}^{4} g_{69}^{33} g_{70}^{-33} g_{71}^{4} g_{72}^{-4} g_{73}^{1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{121} g_{76}^{-17} g_{77}^{-4} g_{78}^{26} g_{79}^{-72} g_{80}^{-3} g_{81}^{1} g_{82}^{1} g_{83}^{0} = t_{47}(i),$$

$$g_{91} = g_{43}^{-12} g_{44}^{12} g_{45}^{-11} g_{46}^{-7} g_{47}^{10} g_{48}^{-27} g_{49}^{34} g_{50}^{41} g_{51}^{-14} g_{52}^{-9} g_{53}^{-30} \times$$

$$\times g_{54}^{-27} g_{55}^{-73} g_{56}^{119} g_{57}^{9} g_{58}^{56} g_{59}^{-23} g_{60}^{-57} g_{61}^{43} g_{62}^{-2} g_{63}^{11} \times$$

$$\times g_{64}^{1} g_{65}^{4} g_{66}^{-7} g_{67}^{-16} g_{68}^{11} g_{69}^{-72} g_{70}^{31} g_{71}^{16} g_{72}^{2} g_{73}^{-1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{-59} g_{76}^{18} g_{77}^{-14} g_{78}^{-37} g_{79}^{65} g_{80}^{79} g_{81}^{-1} g_{82}^{-1} g_{83}^{0} = t_{47}(1),$$

$$g_{92} = g_{43}^{46} g_{44}^{-14} g_{45}^{-7} g_{46}^{8} g_{47}^{-21} g_{48}^{77} g_{49}^{79} g_{50}^{-7} g_{51}^{9} g_{52}^{3} g_{53}^{-9} \times$$

$$\times g_{54}^{-116}g_{55}^{-52}g_{56}^{69}g_{57}^{-37}g_{58}^{-1}g_{59}^{-14}g_{60}^{53}g_{61}^{-12}g_{62}^{2}g_{63}^{45}\times$$
$$\times g_{64}^{-15}g_{65}^{21}g_{66}^{-15}g_{67}^{-32}g_{68}^{11}g_{69}^{63}g_{70}^{5}g_{71}^{16}g_{72}^{2}g_{73}^{-1}\times$$
$$\times g_{74}^{1}g_{75}^{27}g_{76}^{94}g_{77}^{32}g_{78}^{-104}g_{79}^{-46}g_{80}^{41}g_{81}^{-1}g_{82}^{-2}g_{83}^{0}=t_{57}(i),$$

$$g_{93}=g_{43}^{8}g_{44}^{4}g_{45}^{-22}g_{46}^{3}g_{47}^{-20}g_{48}^{6}g_{49}^{-77}g_{50}^{-19}g_{51}^{-15}g_{52}^{-13}g_{53}^{86}\times$$
$$\times g_{54}^{-41}g_{55}^{-63}g_{56}^{-95}g_{57}^{-60}g_{58}^{-23}g_{59}^{-29}g_{60}^{-61}g_{61}^{30}g_{62}^{-2}g_{63}^{82}\times$$
$$\times g_{64}^{16}g_{65}^{-61}g_{66}^{-5}g_{67}^{-14}g_{68}^{-6}g_{69}^{-77}g_{70}^{23}g_{71}^{-1}g_{72}^{-4}g_{73}^{-1}\times$$
$$\times g_{74}^{1}g_{75}^{67}g_{76}^{-38}g_{77}^{-5}g_{78}^{35}g_{79}^{116}g_{80}^{12}g_{81}^{-1}g_{82}^{0}g_{83}^{0}=t_{57}(1),$$

$$g_{94}=g_{43}^{-2}g_{44}^{3}g_{45}^{23}g_{46}^{-26}g_{47}^{44}g_{48}^{88}g_{49}^{-29}g_{50}^{-55}g_{51}^{-28}g_{52}^{33}g_{53}^{-66}\times$$
$$\times g_{54}^{-1}g_{55}^{-80}g_{56}^{0}g_{57}^{60}g_{58}^{-20}g_{59}^{-26}g_{60}^{37}g_{61}^{-96}g_{62}^{2}g_{63}^{46}\times$$
$$\times g_{64}^{1}g_{65}^{-32}g_{66}^{12}g_{67}^{22}g_{68}^{5}g_{69}^{43}g_{70}^{-139}g_{71}^{25}g_{72}^{-2}g_{73}^{0}\times$$
$$\times g_{74}^{1}g_{75}^{82}g_{76}^{-30}g_{77}^{98}g_{78}^{19}g_{79}^{18}g_{80}^{-62}g_{81}^{-1}g_{82}^{0}g_{83}^{0}=t_{67}(i),$$

$$g_{95}=g_{43}^{-23}g_{44}^{22}g_{45}^{-28}g_{46}^{19}g_{47}^{-40}g_{48}^{7}g_{49}^{84}g_{50}^{41}g_{51}^{-12}g_{52}^{2}g_{53}^{-8}\times$$
$$\times g_{54}^{-114}g_{55}^{-27}g_{56}^{-70}g_{57}^{-149}g_{58}^{-12}g_{59}^{-29}g_{60}^{1}g_{61}^{24}g_{62}^{0}g_{63}^{32}\times$$
$$\times g_{64}^{-8}g_{65}^{23}g_{66}^{-4}g_{67}^{-10}g_{68}^{-4}g_{69}^{-1}g_{70}^{72}g_{71}^{12}g_{72}^{2}g_{73}^{-2}\times$$
$$\times g_{74}^{1}g_{75}^{18}g_{76}^{89}g_{77}^{24}g_{78}^{-88}g_{79}^{-17}g_{80}^{91}g_{81}^{-1}g_{82}^{-2}g_{83}^{0}=t_{67}(1),$$

$$g_{96}=g_{43}^{-15}g_{44}^{5}g_{45}^{-48}g_{46}^{40}g_{47}^{-37}g_{48}^{-58}g_{49}^{15}g_{50}^{14}g_{51}^{-36}g_{52}^{19}g_{53}^{45}\times$$
$$\times g_{54}^{-28}g_{55}^{153}g_{56}^{16}g_{57}^{71}g_{58}^{41}g_{59}^{-57}g_{60}^{31}g_{61}^{3}g_{62}^{1}g_{63}^{7}\times$$
$$\times g_{64}^{-6}g_{65}^{13}g_{66}^{-8}g_{67}^{-19}g_{68}^{-4}g_{69}^{39}g_{70}^{6}g_{71}^{-1}g_{72}^{1}g_{73}^{0}\times$$
$$\times g_{74}^{-1}g_{75}^{39}g_{76}^{40}g_{77}^{-20}g_{78}^{-38}g_{79}^{-97}g_{80}^{4}g_{81}^{1}g_{82}^{0}g_{83}^{-1}=t_{87}(i),$$

$$g_{97} = g_{43}^{-25} g_{44}^{-24} g_{45}^{-10} g_{46}^{-27} g_{47}^{0} g_{48}^{-12} g_{49}^{-47} g_{50}^{-5} g_{51}^{-8} g_{52}^{22} g_{53}^{12} \times$$
$$\times g_{54}^{65} g_{55}^{-71} g_{56}^{-34} g_{57}^{53} g_{58}^{-52} g_{59}^{-66} g_{60}^{86} g_{61}^{66} g_{62}^{2} g_{63}^{76} \times$$
$$\times g_{64}^{-1} g_{65}^{-32} g_{66}^{-32} g_{67}^{-68} g_{68}^{1} g_{69}^{110} g_{70}^{-72} g_{71}^{-3} g_{72}^{-1} g_{73}^{4} \times$$
$$\times g_{74}^{-1} g_{75}^{33} g_{76}^{2} g_{77}^{34} g_{78}^{11} g_{79}^{-149} g_{80}^{-116} g_{81}^{3} g_{82}^{2} g_{83}^{-4} = t_{87}(1),$$

$$g_{98} = g_{43}^{25} g_{44}^{-41} g_{45}^{51} g_{46}^{22} g_{47}^{1} g_{48}^{-2} g_{49}^{-100} g_{50}^{-9} g_{51}^{25} g_{52}^{-35} g_{53}^{33} \times$$
$$\times g_{54}^{34} g_{55}^{-95} g_{56}^{-66} g_{57}^{55} g_{58}^{28} g_{59}^{9} g_{60}^{-34} g_{61}^{-16} g_{62}^{-1} g_{63}^{-22} \times$$
$$\times g_{64}^{15} g_{65}^{-27} g_{66}^{-3} g_{67}^{0} g_{68}^{0} g_{69}^{-40} g_{70}^{150} g_{71}^{-50} g_{72}^{0} g_{73}^{2} \times$$
$$\times g_{74}^{-1} g_{75}^{8} g_{76}^{-14} g_{77}^{-57} g_{78}^{25} g_{79}^{-3} g_{80}^{-6} g_{81}^{1} g_{82}^{1} g_{83}^{0} = t_{97}(i),$$

$$g_{99} = g_{43}^{-42} g_{44}^{7} g_{45}^{-30} g_{46}^{-15} g_{47}^{22} g_{48}^{-26} g_{49}^{18} g_{50}^{27} g_{51}^{-45} g_{52}^{1} g_{53}^{-7} \times$$
$$\times g_{54}^{67} g_{55}^{40} g_{56}^{-47} g_{57}^{36} g_{58}^{31} g_{59}^{45} g_{60}^{3} g_{61}^{84} g_{62}^{-2} g_{63}^{15} \times$$
$$\times g_{64}^{2} g_{65}^{-3} g_{66}^{-5} g_{67}^{-12} g_{68}^{-10} g_{69}^{6} g_{70}^{-124} g_{71}^{34} g_{72}^{0} g_{73}^{0} \times$$
$$\times g_{74}^{-1} g_{75}^{-79} g_{76}^{-42} g_{77}^{35} g_{78}^{28} g_{79}^{-70} g_{80}^{28} g_{81}^{1} g_{82}^{1} g_{83}^{0} = t_{97}(1),$$

$$g_{100} = g_{43}^{-5} g_{44}^{10} g_{45}^{-27} g_{46}^{19} g_{47}^{-46} g_{48}^{-27} g_{49}^{69} g_{50}^{2} g_{51}^{4} g_{52}^{2} g_{53}^{-91} \times$$
$$\times g_{54}^{-2} g_{55}^{70} g_{56}^{-92} g_{57}^{-61} g_{58}^{-8} g_{59}^{-148} g_{60}^{-1} g_{61}^{-18} g_{62}^{1} g_{63}^{-34} \times$$
$$\times g_{64}^{-16} g_{65}^{44} g_{66}^{-11} g_{67}^{-24} g_{68}^{-10} g_{69}^{-3} g_{70}^{8} g_{71}^{2} g_{72}^{5} g_{73}^{-1} \times$$
$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{-128} g_{76}^{72} g_{77}^{-47} g_{78}^{-80} g_{79}^{-55} g_{80}^{41} g_{81}^{0} g_{82}^{-1} g_{83}^{0} = t_{10,7}(i),$$

$$g_{101} = g_{43}^{-24} g_{44}^{4} g_{45}^{4} g_{46}^{-12} g_{47}^{4} g_{48}^{-18} g_{49}^{-40} g_{50}^{-36} g_{51}^{-16} g_{52}^{-4} g_{53}^{-152} \times$$
$$\times g_{54}^{-42} g_{55}^{116} g_{56}^{36} g_{57}^{77} g_{58}^{40} g_{59}^{6} g_{60}^{47} g_{61}^{69} g_{62}^{1} g_{63}^{-27} \times$$
$$\times g_{64}^{-4} g_{65}^{-1} g_{66}^{-11} g_{67}^{-24} g_{68}^{1} g_{69}^{58} g_{70}^{-16} g_{71}^{5} g_{72}^{5} g_{73}^{-1} \times$$

$$\times g_{74}^{0} g_{75}^{-97} g_{76}^{106} g_{77}^{18} g_{78}^{-65} g_{79}^{-41} g_{80}^{12} g_{81}^{0} g_{82}^{-1} g_{83}^{0} = t_{10,7}(1).$$

В силу леммы 5б) после получения трансвекций $t_{k7}(i)$ и $t_{k7}(1)$, $k \neq 7$, достаточно показать, что в M лежат трансвекции $t_{7j}(1)$, $j \neq 7$.

Пусть

$$h_{14} = \gamma\alpha\gamma,$$

$$h_{15} = \beta\gamma\alpha\gamma\beta,$$

$$g_{102} = g_{92}^{\beta} = t_{75}(i),$$

$$g_{103} = g_{93}^{\beta} = t_{75}(1),$$

$$h_{16} = g_{103}^{\alpha\gamma\alpha},$$

$$h_{17} = g_{103}^{\alpha\beta\gamma\alpha}.$$

Тогда сопряжением матриц g_{102} и g_{103} будет получено множество трансвекций вида $E_{10} + e_7^t \times u$. Действительно,

$$g_{104} = g_{102}^{h_{14}} = t_{71}(i)t_{72}(i)t_{73}(-i)t_{75}(i)t_{79}(i)t_{7,10}(-i),$$

$$g_{105} = g_{103}^{h_{14}} = t_{71}(1)t_{72}(1)t_{73}(-1)t_{75}(1)t_{79}(1)t_{7,10}(-1),$$

$$g_{106} = g_{102}^{h_{15}} = t_{73}(-1)t_{75}(i)t_{79}(-1)t_{7,10}(1),$$

$$g_{107} = g_{103}^{h_{15}} = t_{73}(i)t_{75}(1)t_{79}(i)t_{7,10}(-i),$$

$$g_{108} = g_{104}^{h_{15}} = t_{71}(2i)t_{72}(-2i)t_{73}(-1+i)t_{75}(i)t_{79}(-1+2i)t_{7,10}(1),$$

$$g_{109} = g_{105}^{h_{15}} = t_{71}(2)t_{72}(-2)t_{73}(1+i)t_{75}(1)t_{79}(2+i)t_{7,10}(-i),$$

$$g_{110} = g_{106}^{h_{14}} = t_{71}(i)t_{72}(i)t_{73}(-1-i)t_{74}(1)t_{75}(i)t_{79}(i-1)t_{7,10}(-i),$$

$$g_{111} = g_{107}^{h_{14}} = t_{71}(1)t_{72}(1)t_{73}(-1+i)t_{74}(-i)t_{75}(1)t_{79}(1+i)t_{7,10}(-1),$$

$$g_{112} = g_{108}^{h_{14}} = t_{71}(-i)t_{72}(3i)t_{73}(-1-3i)t_{74}(1+2i)t_{75}(i)t_{79}(-1-2i)t_{7,10}(i),$$

$$g_{113} = g_{109}^{h_{14}} = t_{71}(-1)t_{72}(3)t_{73}(i-3)t_{74}(2-i)t_{75}(1)t_{79}(i-2)t_{7,10}(1),$$

$$g_{114} = g_{110}^{h_{15}} = t_{71}(1+2i)t_{72}(-1-2i)t_{73}(i)t_{74}(-1)t_{75}(i)t_{79}(1+2i),$$

$$g_{115} = g_{111}^{h_{15}} = t_{71}(2-i)t_{72}(i-2)t_{73}(1)t_{74}(i)t_{75}(1)t_{79}(2-i),$$

$$g_{116} = g_{104}^{h_{16}} = t_{72}(i)t_{73}(-2i)t_{74}(i)t_{75}(1+i)t_{76}(-i)t_{78}(i)t_{79}(1+i)t_{7,10}(-1-i),$$

$$g_{117} = g_{105}^{h_{16}} = t_{72}(1)t_{73}(-2)t_{74}(1)t_{75}(1-i)t_{76}(-1)t_{78}(1)t_{79}(1-i)t_{7,10}(i-1),$$

$$g_{118} = g_{104}^{h_{17}} = t_{71}(1+2i)t_{72}(-1)t_{73}(1)t_{75}(3i)t_{78}(-1-i)t_{79}(1+4i)t_{7,10}(-3i),$$

$$g_{119} = g_{105}^{h_{17}} = t_{71}(2-i)t_{72}(i)t_{73}(-i)t_{75}(3)t_{78}(i-1)t_{79}(4-i)t_{7,10}(-3),$$

$$g_{120} = g_{114}^{h_{14}} = t_{71}(-1-i)t_{72}(1+3i)t_{73}(-1-3i)t_{74}(1+2i)t_{75}(i)t_{79}(-2-2i)t_{7,10}(i),$$

$$g_{121} = g_{115}^{h_{14}} = t_{71}(i-1)t_{72}(3-i)t_{73}(i-3)t_{74}(2-i)t_{75}(1)t_{79}(2i-2)t_{7,10}(1),$$

$$g_{122} = g_{118}^{h_{14}} = t_{71}(-2)t_{72}(1+3i)t_{73}(-1-i)t_{74}(1-i)t_{75}(3i)t_{78}(-1-i)t_{79}(-2)t_{7,10}(2),$$

$$g_{123} = g_{112}^{h_{15}} = t_{71}(1+3i)t_{72}(-1-2i)t_{73}(3i)t_{74}(-1-2i)t_{75}(i)t_{79}(1+4i),$$

$$g_{124} = g_{106}^{h_{17}} = t_{71}(2-i)t_{72}(-2+i)t_{73}(1-i)t_{75}(3+2i)t_{78}(-2+i)t_{79}(4)t_{7,10}(-2-i).$$

Поскольку $t_{75}(1) = g_{103}$, остаётся получить элементарные трансвекции $t_{7j}(1)$, где $j \neq 5, j \neq 7$. Вычисления показывают, что

$$g_{125} = g_{102}^{-1}g_{103}^{2}g_{104}^{0}g_{105}^{0}g_{106}^{1}g_{107}^{-2}g_{108}^{-1}g_{109}^{-1}g_{110}^{0}g_{111}^{-1}g_{112}^{-1}g_{113}^{3}\times$$
$$\times g_{114}^{0}g_{115}^{1}g_{116}^{0}g_{117}^{0}g_{118}^{1}g_{119}^{0}g_{120}^{1}g_{121}^{-2}g_{122}^{-1}g_{123}^{1}g_{124}^{0} = t_{71}(1),$$

$$g_{126} = g_{102}^{0}g_{103}^{2}g_{104}^{1}g_{105}^{0}g_{106}^{0}g_{107}^{-1}g_{108}^{0}g_{109}^{-2}g_{110}^{-1}g_{111}^{-1}g_{112}^{1}g_{113}^{3}\times$$
$$\times g_{114}^{-1}g_{115}^{1}g_{116}^{0}g_{117}^{0}g_{118}^{1}g_{119}^{0}g_{120}^{-1}g_{121}^{-2}g_{122}^{-1}g_{123}^{1}g_{124}^{0} = t_{72}(1),$$

$$g_{127} = g_{102}^{0}g_{103}^{0}g_{104}^{0}g_{105}^{0}g_{106}^{0}g_{107}^{-1}g_{108}^{0}g_{109}^{1}g_{110}^{0}g_{111}^{0}g_{112}^{-2}g_{113}^{0}\times$$
$$\times g_{114}^{0}g_{115}^{0}g_{116}^{0}g_{117}^{0}g_{118}^{0}g_{119}^{0}g_{120}^{2}g_{121}^{0}g_{122}^{0}g_{123}^{0}g_{124}^{0} = t_{73}(1),$$

$$g_{128} = g_{102}^{1}g_{103}^{0}g_{104}^{0}g_{105}^{0}g_{106}^{-1}g_{107}^{0}g_{108}^{1}g_{109}^{0}g_{110}^{0}g_{111}^{0}g_{112}^{1}g_{113}^{0}\times$$
$$\times g_{114}^{-1}g_{115}^{0}g_{116}^{0}g_{117}^{0}g_{118}^{0}g_{119}^{0}g_{120}^{-1}g_{121}^{0}g_{122}^{0}g_{123}^{0}g_{124}^{0} = t_{74}(1),$$

$$g_{129} = g_{102}^{2} g_{103}^{-1} g_{104}^{-1} g_{105}^{0} g_{106}^{-1} g_{107}^{2} g_{108}^{-1} g_{109}^{1} g_{110}^{1} g_{111}^{0} g_{112}^{2} g_{113}^{-2} \times$$
$$\times g_{114}^{2} g_{115}^{-1} g_{116}^{0} g_{117}^{-1} g_{118}^{-1} g_{119}^{1} g_{120}^{-2} g_{121}^{2} g_{122}^{1} g_{123}^{-1} g_{124}^{-1} = t_{76}(1),$$

$$g_{130} = g_{102}^{2} g_{103}^{0} g_{104}^{0} g_{105}^{-1} g_{106}^{1} g_{107}^{1} g_{108}^{-1} g_{109}^{0} g_{110}^{0} g_{111}^{0} g_{112}^{1} g_{113}^{-2} \times$$
$$\times g_{114}^{0} g_{115}^{0} g_{116}^{0} g_{117}^{0} g_{118}^{0} g_{119}^{1} g_{120}^{-1} g_{121}^{2} g_{122}^{0} g_{123}^{0} g_{124}^{-1} = t_{78}(1),$$

$$g_{131} = g_{102}^{0} g_{103}^{0} g_{104}^{0} g_{105}^{0} g_{106}^{0} g_{107}^{0} g_{108}^{-2} g_{109}^{0} g_{110}^{0} g_{111}^{-1} g_{112}^{0} g_{113}^{1} \times$$
$$\times g_{114}^{2} g_{115}^{0} g_{116}^{0} g_{117}^{0} g_{118}^{0} g_{119}^{0} g_{120}^{0} g_{121}^{0} g_{122}^{0} g_{123}^{0} g_{124}^{0} = t_{79}(1),$$

$$g_{132} = g_{102}^{0} g_{103}^{0} g_{104}^{1} g_{105}^{0} g_{106}^{0} g_{107}^{0} g_{108}^{1} g_{109}^{0} g_{110}^{-1} g_{111}^{0} g_{112}^{1} g_{113}^{0} \times$$
$$\times g_{114}^{-1} g_{115}^{0} g_{116}^{0} g_{117}^{0} g_{118}^{0} g_{119}^{0} g_{120}^{-1} g_{121}^{0} g_{122}^{0} g_{123}^{0} g_{124}^{0} = t_{7,10}(1).$$

Итак, $M = SL_{10}(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Что и требовалось показать.

$\square$

3 Линейные группы над полем из девяти элементов

Основным результатом главы является следующая

Теорема 4. *а) Специальная линейная группа $SL_n(9)$ размерности $n \geq 9$ над полем порядка 9 порождается тремя сопряженными инволюциями α, β, γ, причем произведение $\alpha\beta$ тоже является инволюцией, которая сопряжена с α.*

б) Проективная специальная линейная группа $PSL_6(9)$ размерности 6 над полем порядка 9 порождается тремя сопряженными инволюциями α, β, γ, причем произведение $\alpha\beta$ тоже является инволюцией, которая сопряжена с α.

В диссертации [22] использовалась лемма 7 и были найдены тройки порождающих сопряженных инволюций α, β, γ, первые две из которых перестановочны и инволюции $\alpha, \alpha\beta$ сопряжены. Также доказательство порождения групп заданным набором инволюций в [22] существенно использовало известную теорему Л. Диксона о том, что порожденная двумя противоположными элементарными трансвекциями группа над конечным полем нечетного порядка q отличного от 9 с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с группой SL_2 над некоторым подполем основного поля. Однако, в случае поля порядка 9, две противоположные трансвекции не всегда порождают группу изоморфную $SL_2(q)$, поэтому в [22] этот случай исключается.

Очевидно, если $\bar{G}$ — неединичный гомоморфный образ группы G, то $n_c(\bar{G}) \leq n_c(G)$. Поэтому, применяя лемму 7 и учитывая, что $n_c(G) \geq 5$ для простой группы G, из теоремы 4 получаем

Следствие 3. *а) Если $n \geq 9$, то $n_c(SL_n(9)) = n_c(PSL_n(9)) = 5$.*
б) $n_c(PSL_6(9)) = 5$.

Отметим, что размерность 6 выделяется в теореме 4 и следствии 3 в особый случай, поскольку группа $SL_6(q)$ при нечетном q не порождается даже произвольной пятеркой инволюций (не обязательно сопряженных), произведение которых равно единице [10]. Однако она является (2,3)-порожденной [15, 20, 19], поэтому справедливо равенство $n_c(SL_6(q)) = 6$.

Наконец, суммируя результаты работ [22], [2] и следствие 3, получаем, что для групп $PSL_n(q)$, q нечетно, вопрос 14.69в) остается нерешенным только для $n = 6$ при $q \equiv 3(mod4)$.

В этой главе всюду на матричных позициях i — элемент поля $GF(9)$ такой, что $i^2 = -1$. Так как группа $SL_n(9)$ является гомоморфным образом группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ (см. доказательство леммы 9), то леммы 1-5 переносятся на случай группы $SL_n(9)$.

При доказательстве используется изоморфизм между симметрической группой S_n и фактор-группой M/D мономиальной группы M в $SL_n(F)$ по подгруппе её диагональных матриц D. Каждой мономиальной матрице ϵ, с ненулевым элементом на позиции (j_k, i_k) и нулями на остальных позициях этого столбца соответствует подстановка $\tilde{\epsilon}$, переводящая элемент i_k в элемент j_k соответственно, $k = 1, 2, ..., n$. Обратно, каждой подстановке на n символах соответствуют мономиальные матрицы из $SL_n(F)$. В частности, матрице μ соответствует цикл $(1, 2, ..., n)$ длины n, и любая мономиальная матрица из $SL_n(F)$, соответствующая циклу длины n сопряжена с μ в $GL_n(F)$ мономиальными и диагональными матрицами.

Зафиксируем в виде леммы следующее элементарное, но полезное утверждение.

Лемма 10. *Пусть η — мономиальная (0,1) - матрица (подстановочная матрица), которой соответствует элемент симметрической группы, переводящий символы l в r и k в s соответственно, $l \neq k, r \neq s$, $l, k, r, s \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогда для любого элемента $u \in F$ справедливо равенство $t_{l,k}(u)^\eta = t_{r,s}(u)$.*

Доказательство теоремы 4 конструктивно и состоит в том, что все порождающие указываются в явном виде. Причем порождающие инволюции те же, что и в диссертации Дж.М. Уорда [22].

Для доказательства сопряженности заданных инволюций $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$ используется известная теория К. Жордана. Поскольку характеристика поля F отлична от двух, клетки Жордана инволюций, а в случае размерности $n = 6$ — элементов порядка 4, одномерные. Следовательно, если соответствующие матрицы имеют одинаковые наборы собственных значений, и все собственные значения лежат в F, то они сопряжены в $GL_n(F)$, а, следовательно, они сопряжены и в $SL_n(F)$.

Доказательство. **Случай размерностей n=4m+1.** Порождающие инволюции имеют вид

$$\alpha = diag(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{2m+1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{2m})$$

$$\beta = diag(\underbrace{1, ..., 1}_{2m+1}, \underbrace{-1, ..., -1}_{2m}),$$

$$\gamma = \gamma_1 t_{n,2m}(i) t_{n,2m+1}(-i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ & & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & & & \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & i & -i & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$ являются инволюциями и имеют собственные значения $\{1^{2m+1}, (-1)^{2m}\}$. Поэтому они сопряжены в $SL_n(9)$. Положим $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ и покажем, что подгруппа M совпадает с $SL_n(9)$. Имеем

$$\eta = (\beta\gamma)^4 = t_{n,2m}(4i) t_{n,2m+1}(-4i) = t_{n,2m}(i) t_{n,2m+1}(-i),$$

$$\gamma_1 = t_{n,2m}(i)t_{n,2m+1}(-i)\gamma.$$

Запишем имеющиеся в группе M мономиальные элементы в виде подстановок

$$\tilde{\alpha} = (1, 2m+1)...(m, m+2)(m+1)(2m+2, 2m+3)...(n-1, n),$$

$$\tilde{\gamma}_1 = (1, n-1)...(2m, 2m+1)(n),$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\alpha}\gamma_1 = (1, 2m, n-2, 3, ..., 2, 2m+1, n-1, n).$$

Ключевым шагом доказательства является следующая

Лемма 11. *Имеет место равенство* $\langle \theta, t_{2,1}(1) \rangle = SL_n(3)$.

Доказательство. Подстановки, соответствующие матрицам, θ и μ являются циклами длины n. Поскольку все циклы длины n сопряжены в S_n, то существует мономиальная матрица δ, лежащая в $GL_n(3)$ и переводящая сопряжением θ в μ.

$$\tilde{\delta} = (2m, 2, n-3, ...)(1)(n-1)(n)$$

Заметим, что $t_{2,1}(1)^{\delta} = t_{n-3,1}(\pm 1)$, следовательно,

$$\langle \theta, t_{2,1}(1) \rangle^{\delta} = \langle \mu, t_{n-3,1}(1) \rangle.$$

Далее, сопрягая трансвекции матрицей μ и коммутируя результаты сопряжения, получим элемент множества T'. Здесь и далее используется лемма 10

$$t_{n-3,1}(1)^{\mu^4} = t_{1,5}(1),$$

$$[t_{n-3,1}(1), t_{1,5}(1)] = t_{n-3,5}(1),$$

$$t_{n-3,5}(1)^{\mu^4} = t_{1,9}(1),$$

$$...$$

$$t_{n-3,4(m-2)+1}(1)^{\mu^4} = t_{1,4m-3}(1) = t_{1,n-4}(1),$$

$$[t_{n-3,1}(1), t_{1,n-4}(1)] = t_{n-3,n-4}(1).$$

В силу леммы 4а)

$$\langle \mu, t_{n-3,n-4}(1) \rangle = SL_n(3)$$

и, следовательно,

$$\langle \theta, t_{2,1}(1) \rangle = SL_n(3)^{\delta^{-1}} = SL_n(3).$$

Лемма доказана. $\square$

Вычисления показывают, что

$$\eta^{\alpha\gamma} = t_{n-1,1}(i)t_{n-1,2}(-i),$$

$$\eta^{\gamma\alpha} = t_{1,n-2}(i)t_{1,n-1}(-i),$$

$$\lambda = (\eta^{(\gamma\alpha)^2})^{\alpha}.$$

Элемент λ имеет следующее представление

$$\lambda = t_{2,2m-1}(i)t_{n-1,2m-1}(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & ... & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении последнего равенства слева на $(\eta^{-1})^{\alpha\gamma}$ получим нули на позициях $(n-1,1)$ и $(n-1,2)$. Далее,

$$\xi = ((\eta^{-1})^{\alpha\gamma}\lambda)^2 = diag(1, -1, 1, ..., 1, -1, 1)t_{2,1}(1)t_{n-1,2m-1}(1).$$

Коммутируя эту матрицу с подходящим диагональным элементом, получим трансвекцию. Имеем

$$\beta^{\theta^3} = diag(1, \underbrace{-1, ..., -1}_{2m-3}, 1, -1, \underbrace{1, ..., 1}_{2m-3}, -1, 1, 1, -1),$$

$$[\xi, \beta^{\theta^3}] = t_{2,1}(1).$$

Итак, мы получили трансвекцию $t_{2,1}(1)$. Теперь, поскольку $t_{2,1}(1), \theta \in M$, то в силу леммы 11 подгруппа M содержит группу $SL_n(3)$. Остается показать, что подгруппа $SL_n(3)$ в совокупности с произведением трансвекций $t_{n,2m}(i)t_{n,2m+1}(-i)$ порождает группу $SL_n(9)$. Для этого достаточно заметить, что коммутатор

$$[diag(\underbrace{-1, ..., -1}_{2m}, \underbrace{1, ..., 1}_{2m+1}), t_{n,2m}(i)t_{n,2m+1}(-i)]$$

с диагональной матрицей из $SL_n(3)$ дает трансвекцию $t_{n,2m}(i)$. Сейчас из леммы 4б) следует порождение группы $SL_n(9)$.

Случай размерностей n=4m+2. В качестве порождающих можно взять инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = diag(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underbrace{-1, ..., -1}_{2m-4}, \underbrace{1, ..., 1}_{2m}, -1, -1),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \iddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & ... & 0 & -i & -i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$ являются инволюциями и имеют собственные значения $\{1^{2m+2}, (-1)^{2m}\}$. Поэтому они сопряжены в $SL_n(9)$. Положим $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Мы имеем

$$\eta = (\beta\gamma)^8 = t_{n,2}(-i)t_{n,3}(-i)t_{n,n-3}(i)t_{n,n-2}(i),$$

$$\gamma_1 = \eta^2\gamma,$$

$$\theta = \gamma_1\alpha.$$

Лемма 12. *Имеет место равенство* $\langle \alpha, \beta, \gamma_1, t_{n,1}(1) \rangle = SL_n(3)$.

Доказательство. В подстановочном представлении мономиальные (0,1) - матрицы α,γ_1 и θ имеют вид

$$\tilde{\alpha} = (1, 2)...(n-5, n-4)(n-3)(n-2)(n-1, n),$$

$$\tilde{\gamma}_1 = (1, n-1)...(2m, 2m+2)(2m+1)(n),$$

$$\tilde{\theta} = (1, n-2, 2, n-1, n)(3, n-4, 5, n-6, ..., 6, n-5, 4, n-3).$$

Сопрягая трансвекции матрицей θ и коммутируя их между собой, получим следующие равенства

$$t_{n,1}(1)^{\langle\theta\rangle} = \{t_{n,1}(1), t_{1,n-2}(1), t_{n-2,2}(1), t_{2,n-1}(1), t_{n-1,n}(1)\},$$

$$[t_{n-1,n}(1), t_{n,1}(1)] = t_{n-1,1}(1),$$

$$t_{n-1,1}(1)^{\langle\theta\rangle} = \{t_{n,n-2}(1), t_{1,2}(1), t_{n-2,n-1}(1), t_{2,n}(1), t_{n-1,1}(1)\},$$

$$[t_{1,n-2}(1), t_{n-2,n-1}(1)] = t_{1,n-1}(1),$$

$$[t_{1,n-1}(1), t_{n-1,n}(1)] = t_{1,n}(1),$$

$$[t_{n,1}(1), t_{1,j}(1)] = t_{n,j}(1), \quad j = 2, n-1, n-2,$$

$$[t_{n-1,1}(1), t_{1,j}(1)] = t_{n-1,j}(1), \quad j = 2, n, n-2,$$

$$[t_{2,n}(1), t_{n,1}(1)] = t_{2,1}(1),$$

$$[t_{2,1}(1), t_{1,j}(1)] = t_{2,j}(1), \quad j = n-2, n-1, n,$$

$$[t_{n-2,2}(1), t_{2,1}(1)] = t_{n-2,1}(1),$$

$$[t_{n-2,1}(1), t_{1,j}(1)] = t_{n-2,j}(1), \quad j = 2, n-1, n.$$

Итак, получено множество трансвекций $\{t_{i,j}(1), i, j = 1, 2, n-2, n-1, n\}$. В следующей цепочке коммутаторов, для простоты, вычисления ведутся без учета знака

$$[t_{1,j}(1)^{\beta}, t_{j,k}(1)] = t_{4,k}(\pm 1), \quad j = n-2, n-1, n, \quad k = 1, 2, n-2, n-1, n,$$

$$[t_{2,j}(1)^{\beta}, t_{j,k}(1)] = t_{3,k}(\pm 1), \quad j = n-2, n-1, n, \quad k = 1, 2, n-2, n-1, n,$$

$$[t_{k,j}(1), t_{j,1}(1)^{\beta}] = t_{k,4}(\pm 1), \quad j = n-2, n-1, n, \quad k = 1, 2, n-2, n-1, n,$$

$$[t_{k,j}(1), t_{j,2}(1)^{\beta}] = t_{k,3}(\pm 1), \quad j = n-2, n-1, n, \quad k = 1, 2, n-2, n-1, n.$$

Сопрягая матрицей θ результаты коммутирования, получим

$$t_{j,3}(1)^{\langle\theta\rangle} = \{t_{j,k}(1), \quad j = 1, 2, n-2, n-1, n, \quad k = 3, 4, ..., n-3\},$$

$$t_{3,j}(1)^{\langle\theta\rangle} = \{t_{k,j}(1), \quad j = 1, 2, n-2, n-1, n, \quad k = 3, 4, ..., n-3\}.$$

Коммутируя полученные трансвекции, имеем

$$[t_{k_1,j}(1), t_{j,k_2}(1)] = t_{k_1,k_2}(1), \quad j = n-2, n-1, n, \quad k_1, k_2 = 3, 4, ..., n-3.$$

Остается применить лемму 3а)

$$\langle \alpha, \beta, \gamma_1, t_{n,1}(1) \rangle = SL_n(3).$$

Лемма доказана. $\square$

Покажем, что трансвекция $t_{n,1}(1)$ лежит во множестве M. Имеем следующие элементы, сопряженные с η

$$\eta^{\alpha} = t_{n-1,1}(-i) t_{n-1,4}(-i) t_{n-1,n-3}(i) t_{n-1,n-2}(i),$$

$$\eta^{\gamma\alpha} = t_{1,2}(i) t_{1,3}(i) t_{1,n-4}(-i) t_{1,n-1}(-i),$$

$$\eta^{\beta\gamma\alpha} = t_{4,2}(i) t_{4,3}(i) t_{4,n-4}(-i) t_{4,n-1}(i),$$

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\alpha} = t_{3,1}(i) t_{3,4}(i) t_{3,n-5}(-i) t_{3,n}(i),$$

$$\eta^{\gamma\alpha\beta\gamma\alpha} = \tau \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & -1 & 1 & i & i \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & i & i & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tau = t_{n-3,2}(-1) t_{n-3,3}(-1) t_{n-3,5}(-i) t_{n-3,n-4}(i) t_{n,2}(-i) t_{n,3}(-i) t_{n,5}(1) t_{n,n-4}(-1).$$

Пусть

$$\xi = (\eta\eta^{\gamma\alpha\beta\gamma\alpha})^2 = t_{n-3,5}(-i) t_{n-3,n-4}(i) t_{n-3,n-1}(i) t_{n-3,n}(i).$$

Тогда

$$(\xi\alpha)^2 = t_{n-3,5}(-i)t_{n-3,6}(-i)t_{n-3,n-5}(i)t_{n-3,n-4}(i)t_{n-3,n-1}(-i)t_{n-3,n}(-i).$$

Далее возможны два варианта:

1. $n = 10$

2. $n > 10$

Следующие вычисления в этих двух случаях различны. При $n = 10$

$$((\xi\alpha)^2)^{\gamma_1\beta\gamma_1} = t_{8,6}(-i)t_{8,10}(i),$$

$$\vartheta = ((((\xi\alpha)^2)^{\gamma_1\beta\gamma_1}\beta)^2)^{\alpha} = t_{8,5}(i),$$

$$\vartheta^{\gamma_1\beta\gamma_1} = t_{7,5}(i) = t_{n-3,n-5}(i).$$

При $n > 10$:

$$((\xi\alpha)^2)^{\gamma_1\beta\gamma_1} = t_{n-2,5}(-i)t_{n-2,6}(-i)t_{n-2,n-5}(-i)t_{n-2,n-4}(-i)t_{n-2,n-1}(i)t_{n-2,n}(i),$$

$$\vartheta = (((\xi\alpha)^2)^{\gamma_1\beta\gamma_1}\beta)^2 = t_{n-2,n-5}(i)t_{n-2,n-4}(i),$$

$$\vartheta^{\gamma_1\beta\gamma_1} = t_{n-3,n-5}(-i)t_{n-3,n-1}(i),$$

$$\zeta = (\vartheta^{\gamma_1\beta\gamma_1}\beta)^2 = t_{n-3,n-5}(i).$$

В обоих случаях в подгруппе M лежит трансвекция $t_{n-3,n-5}(i)$.

$$t_{n-3,n-5}(i)^{\gamma_1\alpha} = t_{3,4}(i),$$

$$t_{3,4}(i)^{\beta} = t_{2,1}(i),$$

$$t_{2,1}(i)^{(\gamma_1\alpha)^2} = t_{n,2}(i),$$

$$[t_{n,2}(i), t_{2,1}(-i)] = t_{n,1}(1).$$

Из леммы 12 следует включение $SL_n(3) \leq M$, но в M также лежит, например, трансвекция $t_{n-3,n-5}(i)$. Сейчас в силу леммы 4б) получаем равенство $M =$

$SL_n(9)$.

Случай размерностей n=4m+3. Покажем, что тройка инволюций

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \iddots & & & & \\ 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, -1, -1),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \iddots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & i & 0 & ... & 0 & i & i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

порождает группу $SL_n(9)$. Инволюции $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$ имеют собственные значения $\{1^{2m+1}, (-1)^{2m+2}\}$. Поэтому они сопряжены в $SL_n(9)$. Положим $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Имеем

$$\eta = (\beta\gamma)^8 = t_{n,3}(i)t_{n,4}(i)t_{n,n-4}(i)t_{n,n-3}(i),$$

$$\gamma_1 = \eta^2\gamma,$$

$$\theta = \gamma_1\alpha.$$

Лемма 13. *Имеет место равенство* $\langle \theta, t_{n,n-1}(1) \rangle = SL_n(3)$.

Доказательство. Матрицам α, γ_1, θ соответствуют следующие подстановки

$$\tilde{\alpha} = (1, n-3)...(2m, 2m+1)(n-2)(n-1, n),$$

$$\tilde{\gamma_1} = (1, n-1)...(2m+1, 2m+2)(n),$$

$$\tilde{\theta} = (1, 3, 5, ..., n-2, 2, 4, 6, ..., n-1, n).$$

Так как θ — цикл длины n, то существует элемент

$$\tilde{\delta} = (1)(3, 2, ..., 5)(n-1)(n)$$

такой, что

$$\tilde{\theta}^{\tilde{\delta}} = \tilde{\mu} = (1, 2, ..., n-1, n),$$

причем

$$t_{n,n-1}(1)^{\delta} = t_{n,n-1}(\pm 1).$$

Применяя лемму 4а), получаем

$$\langle \mu, t_{n,n-1}(1) \rangle = SL_n(3) = \langle \theta, t_{n,n-1}(1) \rangle^{\delta},$$

$$\langle \theta, t_{n,n-1}(1) \rangle = SL_n(3)^{\delta^{-1}} = SL_n(3).$$

Лемма доказана. □

Итак, дальнейшее доказательство сведено к получению трансвекции $t_{n,n-1}(1)$. Аналогично случаю размерностей $4m+2$, находим следующие элементы, сопряженные с η

$$\eta^{\alpha} = t_{n-1,1}(i)t_{n-1,2}(i)t_{n-1,n-6}(i)t_{n-1,n-5}(i),$$

$$\eta^{\gamma\alpha} = t_{1,5}(i)t_{1,6}(i)t_{1,n-2}(i)t_{1,n-1}(i),$$

$$\eta^{\beta\gamma\alpha} = t_{2,5}(i)t_{2,6}(i)t_{2,n-2}(i)t_{2,n-1}(-i),$$

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\alpha} = t_{n-4,n-8}(i)t_{n-4,n-7}(i)t_{n-4,n-2}(-i)t_{n-4,n}(-i),$$

$$\eta^{\gamma\alpha\beta\gamma\alpha} = \tau \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & -1 & 0 & ... & 0 & i \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & i & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\tau = t_{4,7}(i)t_{4,8}(i)t_{4,n-3}(1)t_{4,n-4}(1)t_{n,7}(-1)t_{n,8}(-1)t_{n,n-3}(i)t_{n,n-4}(i).$$

Домножив слева на η и возведя результат в квадрат, получим произведение четырех трансвекций

$$\xi = (\eta\eta^{\gamma\alpha\beta\gamma\alpha})^2 = t_{4,2}(-i)t_{4,7}(i)t_{4,8}(i)t_{4,n}(i).$$

Далее будем сопрягать элемент ξ мономиальной матрицей θ и коммутировать результаты сопряжения. Имеем

$$\xi^{\theta^{2m}} = t_{n,3}(i)t_{n,6}(i)t_{n,n-4}(-i)t_{n,n-1}(i),$$

$$[\xi, \xi^{\theta^{2m}}] = t_{4,3}(-1)t_{4,6}(-1)t_{4,n-4}(1)t_{4,n-1}(-1),$$

$$\xi_1 = [\xi, \xi^{\theta^{2m}}]^{\theta^{2m-1}} = t_{n-1,n-8}(1)t_{n-1,n-7}(-1)t_{n-1,n-2}(-1)t_{n-1,n}(1),$$

$$\xi_2 = [\xi_1, \xi^{\theta^{2m}}]^3 =$$

$$diag(1, ..., 1, -1, -1)t_{n-1,3}(-1)t_{n-1,6}(-1)t_{n-1,n-4}(1)t_{n,n-8}(-1)t_{n,n-7}(1)t_{n,n-2}(1),$$

$$\vartheta_1 = (\xi_2\gamma)^4\eta = t_{n,2}(1)t_{n,7}(1)t_{n,8}(-1)t_{n,n-8}(-1)t_{n,n-7}(1)t_{n,n-2}(1).$$

Заметим, что в случае m=3 элемент ϑ_1 является произведением двух трансвекций. Вычисления дают

$$\vartheta_1^{\beta} = t_{n,1}(-1)t_{n,7}(1)t_{n,8}(-1)t_{n,n-8}(-1)t_{n,n-7}(1)t_{n,n-2}(-1),$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1^{\beta}\vartheta_1 = t_{n,1}(-1)t_{n,2}(1)t_{n,7}(-1)t_{n,8}(1)t_{n,n-8}(1)t_{n,n-7}(-1),$$

$$\vartheta_2^{\gamma_1} = t_{n,7}(1)t_{n,8}(-1)t_{n,n-8}(-1)t_{n,n-7}(1)t_{n,n-2}(-1)t_{n,n-1}(1),$$

$$(\vartheta_2^{\gamma_1}\beta)^2 = t_{n,7}(-1)t_{n,8}(1)t_{n,n-8}(1)t_{n,n-7}(-1)t_{n,n-1}(-1),$$

$$((\vartheta_2^{\gamma_1}\beta)^2)^{\gamma_1} = t_{n,1}(1)t_{n,7}(1)t_{n,8}(-1)t_{n,n-8}(-1)t_{n,n-7}(1).$$

Перемножая последние два равенства, получим произведение двух трансвекций

$$\vartheta_3 = (\vartheta_2^{\gamma_1}\beta)^2((\vartheta_2^{\gamma_1}\beta)^2)^{\gamma_1} = t_{n,1}(1)t_{n,n-1}(-1).$$

Далее,

$$\vartheta_3^{\beta} = t_{n,2}(-1)t_{n,n-1}(-1),$$

$$\vartheta_3^2\vartheta_3^{\beta} = t_{n,1}(-1)t_{n,2}(-1),$$

$$(\vartheta_3^2\vartheta_3^{\beta})^{\gamma_1} = t_{n,n-1}(1)t_{n,n-2}(1),$$

$$((\vartheta_3^2\vartheta_3^{\beta})^{\gamma_1}\beta)^2 = t_{n,n-1}(-1).$$

Следовательно, $SL_n(3) \leq M$, в силу леммы 13 Матрица
$d = diag(1, 1, -1, 1, ..., 1, -1)$ лежит в $SL_n(3)$ и $(d(\beta\gamma)^8)^2 = t_{n,3}(-i) \in M$. Значит по лемме 4б) инволюции α, β, γ порождают $SL_n(9)$.

Случай размерностей n=4m. Схема доказательства аналогична предыдущим случаям.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = diag(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underbrace{-1, ..., -1}_{2m-4}, \underbrace{1, ..., 1}_{2m-2}, -1, -1),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \iddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & ... & 0 & i & i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Элементы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$ являются инволюциями и имеют собственные значения $\{1^{2m}, (-1)^{2m}\}$. Поэтому они сопряжены в $SL_n(9)$. Как и в предыдущих случаях, получим в $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ мономиальные матрицы

$$\eta = (\beta\gamma)^8 = t_{n,2}(i)t_{n,3}(i)t_{n,n-3}(i)t_{n,n-2}(i),$$

$$\gamma_1 = \eta^2\gamma,$$

$$\theta = \alpha\gamma_1.$$

Лемма 14. *Имеет место равенство* $\langle \theta, t_{n,1}(1) \rangle = SL_n(3)$.

Доказательство. Запишем соответствующие подстановки

$$\tilde{\gamma_1} = (1, n-1)(2, n-2)...(2m-1, 2m+1)(2m)(n),$$

$$\tilde{\alpha} = (1, 2)(3, 4)...(n-1, n),$$

$$\tilde{\theta} = (1, n-2, 3, n-4, ..., 2, n-1, n).$$

Элемент $\tilde{\theta}$ является циклом длины n. Следовательно, существует такой элемент

$$\tilde{\delta} = (1)(n-2, 2)(3)(n-4, 4)...(n-1)(n),$$

что

$$\tilde{\theta}^{\tilde{\delta}} = \tilde{\mu} = (1, 2, 3, ..., n-1, n),$$

причем

$$t_{n,1}(1)^{\delta} = t_{n,1}(\pm 1).$$

Переходя к сопряженной подгруппе

$$\langle \theta, t_{n,1}(1) \rangle^{\delta} = \langle \mu, t_{n,1}(1) \rangle$$

и применив лемму 4а), получим

$$\langle \theta, t_{n,1}(1) \rangle = \langle \mu, t_{n,1}(1) \rangle^{\delta^{-1}} = SL_n(3)^{\delta^{-1}} = SL_n(3).$$

Лемма доказана.

Остается показать, что трансвекция $t_{n,1}(1)$ лежит в подгруппе M. Для этого, как и в предыдущих двух случаях, сопрягаем матрицу η, имеем

$$\eta^{\alpha} = t_{n-1,1}(i) t_{n-1,4}(i) t_{n-1,n-3}(i) t_{n-1,n-2}(i),$$

$$\eta^{\gamma\alpha} = t_{1,2}(i) t_{1,3}(i) t_{1,n-4}(i) t_{1,n-1}(i),$$

$$\eta^{\beta\gamma\alpha} = t_{4,2}(i) t_{4,3}(i) t_{4,n-4}(i) t_{4,n-1}(-i),$$

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\alpha} = t_{3,1}(i) t_{3,4}(i) t_{3,n-5}(i) t_{3,n}(-i).$$

Обозначим

$$\tau = t_{n-3,2}(1) t_{n-3,3}(1) t_{n-3,5}(i) t_{n-3,n-4}(i) t_{n,2}(i) t_{n,3}(i) t_{n,5}(-1) t_{n,n-4}(-1),$$

тогда

$$\eta^{\gamma\alpha\beta\gamma\alpha} = \tau \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & i & i \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & i & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = (\eta\eta^{\gamma\alpha\beta\gamma\alpha})^2 = t_{n-3,5}(i)t_{n-3,n-4}(i)t_{n-3,n-1}(i)t_{n-3,n}(i),$$

$$(\xi\beta)^2 = t_{n-3,n-4}(-i).$$

Теперь, получив трансвекцию, будем использовать сопряжение мономиальными матрицами и матрицей γ. Вычисления показывают, что

$$((\xi\beta)^2)^{\gamma_1} = t_{3,4}(-i),$$

$$((\xi\beta)^2)^{\gamma} = t_{3,4}(-i)t_{n,4}(1),$$

$$((\xi\beta)^2)^{\gamma}(((\xi\beta)^2)^{\gamma_1})^2 = t_{n,4}(1),$$

$$t_{n,4}(1)^{\theta^2} = t_{2,6}(-1).$$

Снова используем для сопряжения элементы γ и γ_1, получаем

$$(t_{n,4}(1)^{\theta^2})^{\gamma} = t_{n-2,n-6}(-1)t_{n,n-6}(-i) = (t_{n,4}(1)^{\theta^2})^{\gamma_1}t_{n,n-6}(-i),$$

$$(t_{n,4}(1)^{\theta^2})^{\gamma_1}((t_{n,4}(1)^{\theta^2})^{\gamma})^2 = t_{n,n-6}(i),$$

$$t_{n,n-6}(i)^{\gamma_1} = t_{n,6}(-i),$$

$$((\xi\beta)^2)^{\theta^3} = t_{6,1}(-i),$$

$$[t_{n,6}(i), t_{6,1}(-i)] = t_{n,1}(1).$$

Применяя леммы 14 и 4б), получим равенство $\langle \theta, t_{n,1}(1), t_{6,1}(i) \rangle = SL_n(9)$.

Случай размерности n=6. В диссертации [22] приведены следующие порождающие инволюции группы $PSL_6(9)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & ia & 0 & a & ia & i \end{pmatrix},$$

где a — элемент мультипликативной группы поля $GF(9)$, удовлетворяющий некоторым ограничениям.

Матрицы $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$ при возведении в квадрат дают скалярную матрицу $-E_6$, то есть, как элементы группы $SL_6(9)$ они имеют порядок 4 и имеют собственные значения $\{i^3, (-i)^3\}$. Поэтому они сопряжены в $SL_6(9)$. Следовательно, их образы сопряжены в группе $PSL_6(9)$. В [22] получено, что элементы $(\beta\gamma)^5$ и $((\beta\gamma)^5)^\alpha$ группы $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ являются трансвекциями, то есть сопряжены в $SL_6(9)$ с элементарными трансвекциями. Известно, что для любой пары трансвекций (ξ, η) из $SL_n(q)$ найдется элемент ε из $GL_n(q)$ такой, что $\xi^\varepsilon, \eta^\varepsilon$ — элементарные трансвекции [12] (см. также [4, лемма 4.1.8], [13, лемма

1]). Далее будет показано, что α, β, γ порождают $SL_6(9)$, причем, в отличие от предыдущих случаев, доказательство для $n = 6$ существенно использует компьютерные вычисления. Положим $a = i$ и перейдем к сопряженной подгруппе M^τ, в которой $(\beta^\tau\gamma^\tau)^5$ и $((\beta^\tau\gamma^\tau)^5)^{\alpha^\tau}$ будут элементарными трансвекциями.

Ниже пара индексов в элементарных трансвекциях не будет разделятся запятой, поскольку все индексы — цифры от 1 до 6. Пусть

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & -i & 1 & 0 \\ -i & 1 & i & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \alpha^\tau\gamma^\tau.$$

Покажем, что $M^\tau = \langle \alpha^\tau, \beta^\tau, \gamma^\tau \rangle = SL_6(9)$, из чего будет следовать равенство $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = SL_6(9)$. В дальнейших вычислениях показано, что в M^τ лежат все элементарные трансвекции. Имеем

$$(\beta^\tau\gamma^\tau)^5 = t_{65}(-i-1).$$

Сопряжение матрицей θ дает равенство

$$(t_{65}(-i-1)^{\alpha^\tau})^{-1} = t_{56}(-i-1).$$

Далее, обозначим

$$\xi = (t_{65}(-i-1)^{\theta^{-1}} t_{65}(-i-1))^2$$

$$\vartheta = (t_{56}(-i-1)^{\theta} t_{56}(-i-1))^2$$

$$\zeta = (\xi^3\vartheta^{\alpha^\tau})^2 = t_{45}(-i)t_{61}(i)t_{62}(i)t_{63}(i)diag(1,1,1,1,-1,-1).$$

После получения элемента ζ вычисления будут более прозрачные. В следующей цепочке равенств будет показано, что в подгруппе $\langle \theta, \zeta \rangle$ лежит трансвекция

$t_{62}(-i)$. Действительно,

$$\zeta^{\theta} = diag(1,1,1,1,-1,-1),$$

$$\zeta^{\theta^2} = t_{36}(i)t_{46}(-1)t_{51}(-1)t_{52}(-i-1)t_{53}(-1)t_{54}(-i)diag(1,1,1,1,-1,-1),$$

$$\zeta_1 = (\zeta\zeta^{\theta^2})^2 = t_{31}(1)t_{32}(1)t_{42}(1)diag(1,1,-1,-1,-1,-1),$$

$$\zeta_2 = ((\zeta^{\theta^3})^{\zeta^{\theta^2}}\zeta^{\theta})^2 = t_{35}(1)t_{62}(1-i)t_{64}(1),$$

$$[\zeta_1, \zeta_2] = t_{62}(-i).$$

Далее,

$$[\beta^{\tau}, t_{62}(-i)] = t_{64}(-i),$$

$$(t_{64}(-i)\zeta)^2 = t_{65}(-1),$$

$$(t_{65}(-1))^{\alpha^{\tau}} = t_{56}(1).$$

Итак, трансвекции $t_{56}(1), t_{65}(1), t_{56}(-i-1), t_{65}(-i-1)$ лежат в множестве M^{τ}. Значит, множества $t_{56}(GF(9)), t_{65}(GF(9))$ тоже лежат в M^{τ}. Пусть u — произвольный элемент поля $GF(9)$. Тогда

$$[t_{56}(u), t_{64}(-i)] = t_{54}(-iu),$$

$$[t_{56}(u), t_{62}(-i)] = t_{52}(-iu).$$

Очевидно, $t_{54}(u)$ и $t_{52}(u)$ тоже лежат в M^{τ}. Справедливы равенства

$$t_{52}(u)^{\alpha^{\tau}} = t_{62}(-iu),$$

$$t_{54}(u)^{\alpha^{\tau}} = t_{64}(iu)t_{62}(-iu),$$

$$[t_{35}(1)t_{62}(1-i)t_{64}(1), t_{54}(u)] = t_{34}(u),$$

$$[t_{35}(1)t_{62}(1-i)t_{64}(1), t_{52}(u)] = t_{32}(u).$$

Таким образом, получены элементы $t_{k2}(u)$ для $k = 3, 5, 6$. Далее,

$$t_{32}(u)^{\gamma^{\tau}} = t_{32}(u)t_{42}(iu)t_{62}(-iu),$$

$$[t_{34}(u), \beta^\tau] = t_{14}(u),$$

$$t_{14}(u)^{\alpha^\tau} = t_{34}(u)t_{32}(-u)t_{14}(u)t_{12}(-u).$$

Из этой цепочки равенств заключаем, что для любого $k \neq 2$ множество $t_{k2}(GF(9))$ лежит в M^τ. Снова последовательные вычисления дают равенства

$$\beta_1 = t_{34}(-i)t_{12}(i)t_{32}(i)t_{14}(-i)\beta^\tau = diag(-i,-i,i,i,i,-i)t_{13}(1)t_{24}(1),$$

$$t_{64}(-i)^{\gamma^\tau}t_{62}(-i)t_{64}(i)t_{65}(1) = t_{61}(-1)t_{63}(-1),$$

$$(t_{61}(-1)t_{63}(-1))^{\beta^\tau}t_{62}(i)t_{64}(-i) = t_{61}(-1),$$

$$t_{61}(-1)^{\alpha^\tau}t_{52}(-1) = t_{51}(i),$$

$$t_{51}(i)^{\gamma^\tau}t_{52}(1)t_{51}(i)t_{42}(i) = t_{41}(1),$$

$$(\beta_1 t_{41}(1))^2 = t_{21}(1)t_{23}(1)t_{43}(-1),$$

$$((\beta_1 t_{41}(1))^2 t_{32}(-1)t_{42}(-1)\zeta_1)^2 t_{41}(-1) = t_{43}(1),$$

$$\zeta_2 t_{62}(i-1)t_{64}(-1) = t_{35}(1).$$

Ранее были получены трансвекции $t_{14}(u)$ и $t_{12}(u)$. Заметим, что

$$[t_{14}(u), t_{43}(1)] = t_{13}(u),$$

$$[t_{13}(u), t_{35}(1)] = t_{15}(u),$$

$$[t_{15}(u), t_{56}(1)] = t_{16}(u).$$

Теперь показано, что в M^τ лежат множества $t_{1k}(GF(9))$, при любом $k \neq 1$. Далее имеем

$$[t_{41}(1), t_{1k}(GF(9))] = t_{4k}(GF(9)), \quad k \neq 4, 1.$$

Трансвекцию $t_{41}(i)$ можно получить, например, так $t_{41}(i) = [t_{42}(i), (\beta_1 t_{41}(1))^2]t_{43}(-i)$. То есть множества $t_{4k}(GF(9))$, при любом $k \neq 4$ лежат в M^τ. Справедливо равенство

$$[t_{l4}(1), t_{4k}(GF(9))] = t_{lk}(GF(9)), \quad k \neq l, \quad l = 3, 5, 6.$$

Трансвекции $t_{34}(u), t_{54}(u), t_{64}(u)$ были получены ранее. Остается получить трансвекции $t_{2k}(u)$, $k \neq 2$.

$$[t_{21}(1)t_{23}(1)t_{43}(-1), t_{15}(u)] = t_{25}(u),$$

$$[t_{25}(u), t_{5k}(1)] = t_{2k}(u), \quad k \neq 2, 5.$$

Таким образом мы показали, что в M^{τ} лежат все трансвекции $t_{lk}(u)$, $k \neq l$, $u \in GF(9)$. Применение леммы 3б) завершает доказательство теоремы. $\square$

Заключение

Установлено, что следующие группы порождаются тремя инволюциями:

$$PSL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}), \quad SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}), \quad SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}),$$

следующие группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны:

$$SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}), \quad PSL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}), \quad SL_{10}(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}),$$

а следующие группы порождаются пятью сопряженными инволюциями, произведение которых равно единице:

$$PSL_6(9), \quad SL_n(9), n > 8.$$

Основные результаты содержатся в [23]-[29].

Результаты бакалаврской работы докладывались и обсуждались на заседании красноярского алгебраического семинара (2022 г.) и апробировались на конференциях

1-4. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный» (в 2020, 2021, 2022 и 2023 гг.)

5-6. Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, ИМ СО РАН, 20-24 сентября 2021 г., 14-19 ноября 2022 г.)

7. XIV международная школа конференция по теории групп, посвященная памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова, Л. А. Шеметкова (5-11 сентября 2022 г.)

Сказанное наводит на мысль о нескольких областях, в которых следует продолжить это исследование:

1. определить, порождается ли группа $SL_6(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями;

2. найти минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно единице, для групп $PSL_6(q)$, где $q \equiv 3(mod 4)$;

Список литературы

[1] Вавилов, Н. А. О геометрии длинных корневых подгрупп в группах Шевалле / Н. А. Вавилов // Вестник ЛГУ, 1, №1(1988), 8-11.

[2] Ефимов, И. Ю. Порождающие множества сопряженных инволюций групп $SL_n(q)$ при $n = 4, 5, 7, 8$ и нечетном q / И. Ю. Ефимов, Я. Н. Нужин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 27, №1(2021), 62-69.

[3] Каргаполов, М. И. Основы теории групп. / М. И. Каргополов, Ю. И. Мерзляков // М., Наука, 1982.

[4] Кострикин, А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин // М.: Наука, 1977.

[5] Левчук, Д. В. О порождаемости группы $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны / Д. В. Левчук // Вестник НГУ. 2009. Т. 9, № 1. С. 35-38.

[6] *Нужин*, Я. Н. О порождающих тройках инволюций групп лиева типа ранга 2 над конечными полями / Я. Н. Нужин // Алгебра и логика, 58, № 1 (2019), 84–107.

[7] *Нужин*, Я. Н. О порождающих множествах инволюций простых конечных групп / Я. Н. Нужин // Алгебра и логика, 58, № 3 (2019), 426–434.

[8] *Нужин*, Я. Н. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 / Я. Н. Нужин // Алгебра и логика, 29, № 2 (1990), 192–206.

[9] *Нужин*, Я. Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II / Я. Н. Нужин // Алгебра и логика , 36, № 4 (1997), 422–440.

[10] *Нужин*, Я. Н. Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп / Я. Н. Нужин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 26, №3(2020), 133-141.

[11] Стейнберг, Р. Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг// М.: Мир, 1975.

[12] Супруненко, Д. А. Группы матриц / Д. А. Супруненко // М.: Наука, 1972.

[13] Aschbacher, M. Involutions in Chevalley groups over fields of even order / M. Aschbacher and G. M. Seitz// Nagoya Math. J., 63(1976), 1-91.

[14] Di Martino, L. 2-generation of finite simple groups and some related topics / Di Martino L., Tamburini M. C. // Generators and Relations in Groups and Geometries, NATO ASI Ser., 333(1991), 195-233.

[15] Di Martino, L. (2,3)-generation of $L(n, q)$. I. Cases $n = 5, 6, 7$. / L. Di Martino and N. Vavilov // Comm. Algebra, 22, №4(1994), 1321-1347.

[16] Levchuk, D. V. On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute / D. V. Levchuk, Ya. N. Nuzhin // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2008. Т. 1, № 2. С. 133–139.

[17] Mazurov, V. D. The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory / Eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro // Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2022, № 20.

[18] Malle, G. Generation of classical groups / Malle G., Saxl J., Weigel T. // Geom. Dedicata, 49(1994), 85-116.

[19] Pellegrini, M. A. The (2,3)-generation of the special linear groups over finite fields. Bull. Aust. Math. Soc., 95, №1(2017), 48-53.

[20] Tabakov, K. (2,3)-generation of the groups $PSL_6(q)$. / Tabakov, K. and Tchakerian K. // Serdica Math. J., 37, №4(2011), 365-370.

[21] Tamburini, M. C. Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute / Tamburini M. C., Zucca P. // J. of Algebra. 1997. Vol. 195, № 2. P. 650–661.

[22] Ward, J. M. Generation of simple groups by conjugate involutions / J. M. Ward // Queen Mary college, University of London, Thesis of doctor of philosophy, 2009.

Публикации автора по теме бакалаврской работы

[23] Всемирнов, М. А. О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны / М. А. Всемирнов, Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Т. Б. Шаипова // Сборник тезисов XIV международной школы конференции по теории групп, посвященной памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова, Л. А. Шеметкова, с. 65.

[24] Всемирнов, М. А. О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны II / М. А. Всемирнов, Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Т. Б. Шаипова // Математические Заметки. (Представлена).

[25] Гвоздев, Р. И. О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны / Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Т. Б. Шаипова // Мальцевские чтения 2021, тезисы докладов, с. 88.

[26] Гвоздев, Р. И. О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны / Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Т. Б. Шаипова // Известия Иркутского Государственного Университета, Серия Математика, 40 (2022), 49-62.

[27] Гвоздев, Р. И. Порождающие множества сопряженных инволюций групп $PSL_n(9)$ / Р. И. Гвоздев // Материалы XVIII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Проспект Свободный - 2022, с. 2691.

[28] Гвоздев, Р. И. Порождающие множества сопряженных инволюций групп $PSL_n(9)$ / Р. И. Гвоздев // Мальцевские чтения 2022, тезисы докладов, с. 94.

[29] Гвоздев, Р. И. Порождающие множества сопряженных инволюций групп $PSL_n(9)$ / Р. И. Гвоздев // Алгебра и логика. (Представлена).

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
И. О. заведующего
кафедрой
________/Я. Н. Нужин
«23» июня 2023 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ИНВОЛЮЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ И НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Руководитель 23.06.2023 — профессор, доктор физико-математических наук — Я.Н. Нужин

Выпускник 23.06.2023 — Р.И. Гвоздев

Нормконтролер — Т.Н. Шипина

Красноярск 2023