Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«**СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**»
Институт Математики и Фундаментальной Информатики
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ И.В. Фроленков
подпись

«____»_______ ___2023г

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Руководитель______________ доцент, кандидат физ.-мат. наук А.Ш. Любанова
подпись, дата

Выпускник ______________ Д.А. Хумбун
подпись, дата

Нормоконтролер ______________ Т.Н. Шипина
подпись, дата

Красноярск 2023

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа по теме "Идентификация неизвестной правой части уравнения соболевского типа" содержит 49 страниц текста и 30 использованных источников.

ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКА, ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕСКОГО ТИПА, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕ, ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ.

Цель работы – найти достаточные условия разрешимости и единственности решения обратной задачи идентификации функции источника (правой части) в линейном уравнении соболевского типа по дополнительным интегральным данным на границе.

В результате исследований доказаны теоремы существования и единственности обратной задачи отыскания правой части в линейном уравнении соболевского типа. Теорема доказана путем сведения обратной задачи к операторному уравнению второго роды для неизвестной правой части.

Полученные результаты являются новыми, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Появление новых математических моделей, учитывающих внутренние взаимодействия в сложных средах, дало толчок развитию качественной теории обратных и нелокальных задач для уравнений диффузии и фильтрации. К таким уравнениям относятся параболические и связанные с ними стационарные уравнения и системы, а также уравнения, неразрешенные относительно старшей производной по времени, высшего порядка (третьего и выше) с производной по времени первого порядка, которые можно записать в виде

$$(Au)_t + Bu = f, \tag{1}$$

где A и B – вообще говоря, нелинейные дифференциальные операторы по пространственным переменным четного порядка. Уравнения (1) и (2) с линейными операторами относятся к классу так называемых простых уравнений соболевского типа.

Такие уравнения возникают при математическом описании многих физических процессов. Например, широкое приложение в моделировании имеет линейное уравнение

$$u_t - \eta\Delta u_t - k\Delta u = f,$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации слабо сжимаемой жидкости в трещиноватой среде, где Δ – оператор Лапласа [2 – 4]. Различные уравнения и системы такого типа моделируют также процессы теплопереноса в гетерогенных средах [18].

Актуальность темы исследования. Коэффициенты уравнений соболевского типа характеризуют физические свойства среды, которые трудно определить экспериментально. Так свойства и структура трещиноватой среды (например, гидравлические свойства и проницаемость) могут меняться со временем и зависят от естественных условий залегания пласта или грунта, которые практически невозможно воссоздать в лабораторных условиях с необходимой точностью [2 – 3]. Поэтому параметры среды следует определять с помощью математических моделей на основе дополнительной информации о поведении среды в естественных условиях, а не на основе лабораторных экспериментов.

Таким образом, широкие приложения и трудности определения физических параметров сложных сред приводят к необходимости постановки и изучения различных краевых задач для уравнений соболевского типа.

В настоящей работе рассматривается следующая обратная задача для уравнений соболевского типа. При заданных константах η, k и функциях $g(t,x), \mathcal{U}_0(x), \beta(t,x)$ найти пару функций $u(t,x)$ и $f(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t - \eta \Delta u_t - k\Delta u = f(t)g(t,x), \tag{2}$$

в цилиндре $Q_T = (0,T) \times \Omega$, краевым условиям

$$(u - \eta\Delta u)|_{t=0} = \mathcal{U}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(t,x)|_{\partial\Omega}, \qquad t \in [0,T] \tag{4}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial w_t}{\partial \overline{n}} + k \frac{\partial w}{\partial \overline{n}} \right\} \alpha(t,x) ds = \varphi(t), \qquad t \in [0,T] \tag{5}$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^n -$ ограниченная область, $\alpha(t,x), \varphi(t)$-заданные функции. Основным результатом работы является теорема существования и единственности сильного обобщенного решения данной задачи. Для доказательства теоремы используется метод, который разработан в [7, 22, 23] на основе идеи сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента [11].

Обратные задачи для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени, в частности, уравнений соболевского типа слабо изучены в отличие от обратных задач для уравнений в частных производных второго порядка. На сегодняшний день большинство результатов в этом направлении связаны с задачами восстановления правой части уравнений. Первый результат, полученный в [26], относится к обратным задачам идентификации неизвестной функции источника f в уравнении (1) с $A = I+L$, $B = L$, где L – линейный эллиптический оператор, I – тождественный оператор. В данной работе доказаны глобальные теоремы существования и единственности решения обратной задачи отыскания неизвестной правой части $f = f(x)$ по известному следу u при $t = T$, а также функции $f = \varphi(x)g(t)$, содержащей неизвестный множитель $g(t)$ по информации о потоке u в некоторой точке границы области $\partial\Omega$.

Обратным задачам отыскания правой части уравнений соболевского типа посвящены также работы [1, 8]. В них найдены условия существования и единственности классического решения задачи определения функции, зависящей от пространственных переменных, в правой части уравнения фильтрации (3) в дивергентной форме с переменными коэффициентами η, k. Кроме того, в [1] получены оценки непрерывной зависимости решения от данных переопределения в финальный момент времени. В работах [10,15,16,24,25] обсуждаются вопросы корректности задачи определения нескольких функций $c_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ в правой части

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i(t) f_i(x,t) + f_0(x,t) \tag{7}$$

уравнения (1) при точечных условиях переопределения. В [15,25] доказано существование и единственность «в целом» по t сильного обобщенного решения обратных задач нахождения неизвестных функций $c_i(t)$ в правой части (7) уравнений соболевского типа третьего и четвертого порядка по известным следам решения u во внутренних точках области x_i, $i = 1, 2, \ldots, r_0$.

В [14, 19] исследуется корректность обратных задач восстановления неизвестных функций в правой части $f = f_1(x,t) + q(x)h(x,t)$ вырождающихся уравнений и систем соболевского типа при различных условиях переопределения. В частности, в [19] доказана однозначная разрешимость задачи восстановления вектор-функции $\bar{q}$ для системы уравнений соболевского типа в абстрактном банаховом пространстве. С помощью данных результатов в [14] установлены необходимые и достаточные условия разрешимости и единственности сильного обобщенного решения задачи определения вектор-функций $\mathbf{u}(t,x)$, $\mathbf{q}(x)$ и скалярной функции $q_r(x)$, удовлетворяющих линеаризованной системе Осколкова

$$(\lambda - \Delta)\mathbf{u}_t = \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{r}(t,x) + f(t)\mathbf{q}(x)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u} = q_r(x)f(t)$$

с краевыми условиями $\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u_0}(x)$, $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ и условиями переопределения

$$\mathbf{u}(T,x) = \mathbf{u}_T(x), \qquad \mathbf{r}(T,x) = \mathbf{r}_T(x).$$

Все приведенные выше результаты получены для линейных уравнений соболевского типа. В работах [5, 17, 20, 21, 30] изучались обратные задачи для нелинейных уравнений и систем с неизвестной правой частью. Получены теоремы существования и единственности обобщенного решения обратной задачи определения функции в правой части нелинейной системы, описывающей течение жидкости Кельвина-Фойгта, [5, 20, 21]. Для задачи восстановления функции h в правой части слабо нелинейного уравнения

$$u_t - a\Delta u_t - \Delta u + \left(\bar{b}, \nabla u\right) + |u|^p u = h(t)g(x)$$

с интегральным условием переопределения в [30] установлены условия разрушения решения u за конечный промежуток времени, а также условия стабилизации u к 0 при $t \to +\infty$.

С описанными выше обратными задачами для уравнений и систем соболевского типа тесно связаны задачи управления, которые по сути своей также являются обратными задачами. Причем управление или управляющие параметры в таких задачах, как правило, находятся в правой части или на границе области. Такие задачи с различными критериями управления изучались Л.В.Уайтом и Т.-Ц.Ли [29]. В [29] исследуется поведение при $\varepsilon \to 0$ решения задачи управления в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ (n = 2, 3) с границей Γ_ρ для уравнения (2) при $u = y^\varepsilon$, $\eta = \varepsilon$, $k = 1$ с однородными начальными и граничными условиями и управлением с ε на границе Γ_ρ шара B_ρ радиуса ρ, вложенного в область Ω. В качестве критерия управления используется интегральное условие

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\varepsilon y_t^\varepsilon + y^\varepsilon)ds = v_\varepsilon(t) \qquad \text{почти всюду на } [0, T].$$

Установлено, что если $v_\varepsilon(t) \to v(t)$ слабо в $L^2(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$, то решение y^ε сходится к решению y соответствующей задачи управления для параболического уравнения, получающейся из данной задачи при $\varepsilon = 0$, слабо в $L^2(Q)$ ($Q = (0,T) \times \Omega$).

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что раннее обратные задачи нахождения неизвестной правой части уравнения (2) и других уравнений соболевского типа с интегральным условием переопределения на границе (5) раннее другими исследователями не изучались.

Выпускная работа включает себя введение, 2 раздела, заключение и список использованных источников. В 1 разделе приводятся определения основных функциональных пространств, используемых в работе, и теоремы существование и единственности решение обобщенной прямой краевой задачи для уравнения соболевского типа. 2 раздел посвящен основным результатам выпускной работы.

1 Основные определения и теоремы

1.1 Основные обозначения и функциональные пространства

Приведём основные обозначения и определения функциональных пространств, используемых в данной работе.

$\mathbf{R}^n$ – n- мерное евклидово пространство точек с n действительными координатами; $x = (x_1, \dots, x_n)$ -произвольная точка в нём; всюду $n \geq 2$. Пространство $\mathbf{R}^n$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x, y)_R = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$.

$\partial\Omega$ – граница Ω.

$\overline{\Omega}$ – замыкание Ω, то есть $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

$(0, T)$ – интервал изменения переменной t, $0 < T < +\infty$ – действительное число.

$Q_T = (0, T) \times \Omega$ – цилиндр в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$. Точки в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ будем обозначать через (t, x).

$S_T -$ боковая поверхность цилиндра Q_T.

$L^p(\Omega) -$ банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω функций, суммируемых по Ω со степенью $p \geq 1$, норма которого задается формулой

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

В частности пространство $L^2(\Omega)$ является гильбертовым со скалярных произведением

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} uvdx\,.$$

Норму в $L^2(\Omega)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

$W_p^m(\Omega)$ –банахово пространство, состоящее из всех элементов $v \in L^p(\Omega)$, имеющие обобщённые производные v^α всех видов до порядка m включительно, суммируемые по Ω со степенью p, в котором определена норма

$$\|v\|_{W_p^m(\Omega)} = \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha|=1}^{m} \left|v^{(\alpha)}\right|^2 + |v|^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{1/p}.$$

В частности, $W_2^m(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^m(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1}^{m} u^{(\alpha)}\, v^{(\alpha)} dx\,,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс. Норму в $W_2^m(\Omega)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_m$.

$\mathring{W}{}_p^m(\Omega)$ – подпространство пространства $W_p^m(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в Ω.

$C(\overline{\Omega})$ – банахово пространство функций, непрерывных на $\overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$, с нормой

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |v|.$$

$C^k(\overline{\Omega})$ – пространство функций, k раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$, с нормой

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x\in\overline{\Omega}}\left\{\sum_{|\alpha|}^{k}\left|v^{(\alpha)}\right| + |v|\right\}.$$

$W_2^{-1}(\Omega)$ –пространсво всех линейных непрерывных функционалов определенных на $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ с нормой

$$\|F\|_{W_2^{-1}(\Omega)} = \sup_{v\in W_2^1(\Omega)} \frac{|F(v)|}{\|v\|_1}.$$

1.2 Основные неравенства

Приведем некоторые неравенства необходимые для доказательство теорем. При любом $\varepsilon > 0$ для произвольных a и b справедливо неравенство Коши

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

Для любых элементов $u \in L^q(\Omega)$ и $v \in L^p(\Omega)$ в пространстве $L^p(\Omega)$ имеет место неравенство Гёльдера

$$\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right| \le \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

при $\forall\ 1 < q < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Частным случаем неравенства Гёльдера при $q = 2$ является неравенство Коши – Буняковского.

И для любого элемента $f \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ верно неравенство Стеклова

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 \, dx,$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая от размерности n и mesΩ.

При выводе оценок $W_2^2(\Omega)$ используется второе энергетическое неравенство для оператора Лапласа [8]

$$\|v\|_2 \leq c\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

справедливое для любого $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$.

1.3 Принцип сжимающих отображений

Пусть в банаховом пространстве X действует оператор $\Phi(x)$ с областью определения $D(\Phi) \subset X$ и с областью значений $R(\Phi) \subset X$. Предположим, что множество $M = D(\Phi) \cap R(\Phi)$ не пусто.

Определение 1.3.1 *Точка x^* называется неподвижной точкой оператора Φ, если*

$$\Phi(x^*) = x^*.$$

Таким образом, неподвижные точки Φ - это решения уравнения

$$x = \Phi(x).$$

Пусть дано некоторое множество $Q \subset D(\Phi)$.

Определение 1.3.2 *Будем говорить, что оператор* Φ *является сжимающим оператором (короче, сжатием) на* Q, *если существует* $q \in (0, 1)$ *такое, что для любых* $x', x'' \in Q$ *выполнятеся неравенство*

$$||\Phi(x') - \Phi(x'')|| \leq q||x' - x''||.$$

Число q будем называть коэффициентом сжатия.

Для сжимающих отображений справедлива следующая теорема называемый принцип сжимающих отображений.

Теорема 1.3.1 *Пусть оператор* Φ *отображает замкнутое в банаховом пространстве X множество* Q *в себя и является на* Q *сжимающим оператором с коэффициентом сжатия q. Тогда в Q оператор* Φ *имеет единственную неподвижную точку* x^*. *Пусть* $x_0 \in Q$ *произвольно. Образуем последовательность*

$$x_n = \Phi(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Тогда $\{x_n\} \subset Q$ и $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. *Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости*

$$||x_n - x^*|| \leq \frac{q_n}{1-q} ||\Phi(x_0) - x_0||.$$

1.4 Основные результаты для уравнений соболевского типа

Результаты для уравнений соболевского типа, приводимые ниже в данном параграфе, были получены Р. Е. Шоултером и Т. Тингом [27].

Обозначим через *M* и *L* дифференциальные операторы второго порядка вида

$$M = -\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} m_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + m(x) \tag{1.1}$$

$$L = -\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}l_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} l_i\,(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + l(x). \qquad (1.2)$$

Рассмотрим задачу нахождения функции $u(t,x)$ пространственных и временных переменных x и t, которая удовлетворяет уравнению в частных производных

$$M\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right) + L\big(u(t,x)\big) = 0, \qquad (1.3)$$

обращается в нуль на границе области Ω для всех $t \in R$, при $t = 0$ равна заданной функции $u_0(x)$.

Будем предполагать выполненными следующие предположения относительно операторов M и L.

1) Коэффициенты, встречающие в (1.1) и (1.2), ограничены и измеримы, и $m(x) \geqq 0$ для x из Ω.

2) Оператор M равномерно сильно эллиптичен на Ω. Следовательно, существует постоянная $m_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}\,(x)\xi_i\xi_j \geq m_0 \sum_{i=0}^{n}(\xi_i)^2$$

для каждого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ из $\mathbf{R}^n$ и $x \in \Omega$.

3) При $1 \leq i,j \leq n$ и $m_{i,j}$ из $W_2^2(\Omega)$.

Введённые предположения позволяют соотнести операторы M и L с соответствующими билинейными формами

$$B_M(\varphi,\psi) \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\left(m_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi, \frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right)_0 + (m\varphi,\psi)_0$$

и

$$B_L(\varphi,\psi) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \left(l_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi, \frac{\partial}{\partial x_i} \psi \right)_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(l_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \psi \right) + (l\varphi, \psi)_0$$

при $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Из формулы интегрирования по частям для операторов M и L и предположения 3) следует, что

$$B_M(\varphi,\psi) = (M\varphi,\psi)_0$$

и

$$B_L(\varphi,\psi) = (L\varphi,\psi)_0.$$

В силу ограничений 1) – 2) для билинейных форм B_M и B_L справедливы следующие неравенства. Для произвольных φ и ψ из $C_0^\infty(\Omega)$ получаем из неравенства Коши – Буняковского

$$|B_M(\varphi,\psi)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \left(m_{ij}\varphi_{xj}, \psi_{xi} \right)_0 + (m\varphi,\psi)_0 \right| \le$$

$$\le \bar{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\psi_{xi}\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_{xj}\right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \bar{m}\|\varphi\|_0\|\psi\|_0,$$

где $\bar{m} = \max_{1\le i,j\le n} \left\{ \left\|m_{ij}\right\|_\infty, \|m\|_\infty \right\}$. Следовательно, существует константа $K_m > 0$ такая, что

$$|B_M(\varphi,\psi)| \le K_m\|\varphi\|_1\|\psi\|_1 \tag{1.4}$$

для всех $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Повторяя аналогичные рассуждения, для формы $B_L(\varphi, \psi)$ получаем неравенство

$$|B_L(\varphi, \psi)| \leq K_1 \|\varphi\|_1 \|\psi\|_1 \tag{1.5}$$

с некоторой константой $K_1 > 0$.

Следовательно, B_M и B_L определяются непрерывностью для всех $\varphi, \psi \in W_2^1(\Omega)$.

Из предположения 2) мы имеем для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$B_M(\varphi, \varphi) \geq m_0 \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_{xi}\|_0^2.$$

Неравенство Пуанкаре приводит к соотношению

$$B_M(\varphi, \varphi) \geq \frac{m_0}{K} \|\varphi\|_0^2.$$

Тогда

$$B_M(\varphi, \varphi) \geq \frac{m_0}{2} \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_{xi}\|_0^2 + \frac{m_0}{2K} \|\varphi\|_0^2.$$

Следовательно, существует константа $k_m > 0$ такая, что

$$B_M(\varphi, \varphi) \geq k_m \|\varphi\|_0^2 \tag{1.6}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Без ограничения общности можно считать оператор L сильно эллиптическим. Тогда

$$B_L(\varphi, \varphi) \geq k_l \|\varphi\|_0^2 \qquad (1.7)$$

для некоторого $k_l > 0$ и для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Обобщенная начально-краевая задача теперь может быть сформулирована в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ следующим образом: найдите сильно дифференцируемое отображение $t \to u(t)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ такое, что выполняется тождество

$$B_M(u'(t), \varphi) + B_L(u(t), \varphi) = 0 \qquad (1.8)$$

для каждого t в $\mathbf{R}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ с $u(0) = u_0$, где u_0 – заданная “начальная” функция в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Теорема 1.4.1 *Пусть выполняются предположения 1) и 2). Тогда существует единственный линейный оператор B в* $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, *равный* $M_0^{-1}L_0$. *Если* u_0 *является элементом* $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, *то существует единственное сильно дифференцируемое отображение* $t \to u(t)$ *из* $\mathbf{R}$ *в* $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ *такое, что*

$$u'(t) = Bu(t) \qquad (1.9)$$

для всех $t \in \mathbf{R}$ *и* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *с* $u(0) = u_0$.

Гладкость решения обобщенной начально-краевой задачи (1.8) зависит от гладкости исходных данных.

Определение 1.4.1 *Обобщенная начально-краевая задача (1.8) является p-гладкой для целого числа* $p \geq 2$, *если*

(i) коэффициенты в (1.1) и (1.2) удовлетворяют следующим условиям: для $l_{ij}, m_{ij} \in C^{p-1}(\overline{\Omega}); m, l, l_i \in C^{p-2}(\overline{\Omega}), 1 \leq i; j \leq n;$ $m(x) \geq 0$ *для* $x \in \overline{\Omega}$;

(ii) операторы M и L равномерно сильно эллиптичны в Ω; *и*

(iii) граница $\partial\Omega$ *относится к классу* C^p.

Теорема 1.4.2 *Пусть* (*связанная однородная*) *задача 2-гладкая,* f (*t*) *сильно непрерывна в* $L^2(\Omega)$, $\beta(t)$ *имеет сильно непрерывную производную в*

$W_2^2(\Omega)$ *и* u_0 *– функция в* $W_2^2(\Omega)$*, для которой выполняется* $\left(u_0 - \beta(0)\right)\big|_{\partial\Omega} = 0$. *Существует единственная сильно дифференцируемая функция* $u(t)$ *в* $W_2^2(\Omega)$*, которая удовлетворяет (1.3),* $u(t) - \beta(t) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ для всех $t \in R$ *и* $u(0) = u_0$.

2 Обратная задача для уравнения соболевского типа

Данный раздел посвящен исследованию корректности обратной задачи отыскания неизвестной правой части в уравнении соболевского типа с интегральным условием переопределения.

2.1 Постановка задачи

Задача рассматривается в цилиндре $Q_T = (0,T) \times \Omega$ с боковой поверхностью S_T, где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, $(0,T)$ – интервал изменения переменной t, $0 < T < +\infty$ – действительное число. Будем обозначать через $\overline{\Omega}$ замыкание области Ω. Будем также использовать следующие обозначения: $\|\cdot\|_j$ – норма в пространстве $W_2^j(\Omega)$, j=1, 2; $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ – отношение двойственности между $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и $W_2^{-1}(\Omega)$.

Сформулируем обратную задачу.

Задача: при заданных константах η, k и функциях $g(t,x)$, $\mathcal{U}_0(x)$, $\beta(t,x)$, $\alpha(t,x)$, $\varphi(t)$ найти пару функций $u(t,x)$ и $f(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t - \eta\Delta u_t - k\Delta u = f(t)g(t,x), \qquad (2.1)$$

краевым условиям

$$(u - \eta\Delta u)|_{t=0} = \mathcal{U}_0(x) \qquad (2.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \beta(t,x)|_{\partial\Omega}, \quad t \in [0,T]. \qquad (2.3)$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial w_t}{\partial \bar{n}} + k\frac{\partial w}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x)ds = \varphi(t), \quad t \in [0,T]. \qquad (2.4)$$

Под решением задачи (2.1) – (2.4), будем понимать пару функций $u(t,x)$ и $f(t)$, которые удовлетворяют следующим условиям

1) $u(t,x)$ непрерывно дифференцируема по t на отрезке [0, T] и при каждом $t \in [0,T]$ $u(t,x)$, $u_t(t,x) \in W\,_2^2(\Omega)$, $f(t) \in C[0,T]$;

2) выполняется уравнение (2.1) почти всюду в Q_T, в начальное данные (2.2) почти всюду $\overline{\Omega}$, граничное условие (2.3) почти всюду на S_T и условие переопределение при всех $t \in [0,T]$.

Существование и единственность решения прямой задачи (2.1) – (2.3) при известном $f(t)$ гарантируется теоремой 1.4.2. Если исходные данные задачи (2.1) – (2.3) удовлетворяют условиям теоремы 1.4.2, то при каждом $t \in [0,T]$ $u(t,x)$, $u_t(t,x) \in W\,_2^2(\Omega)$.

2.2 Сведение обратной задачи к операторному уравнению для неизвестной функции $f\,(t)$

Доказательство существование решения обратной задачи (2.1) – (2.4) опирается на идею сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента [11]. Для построения операторного уравнения введём функции h^η, a, b такие, что

$$\begin{cases} h^\eta - \eta h^\eta = 0, \\ h^\eta|_{\partial\Omega} = \alpha(t,x), \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \Delta a = 0, \\ a|_{\partial\Omega} = \beta(t,x), \end{cases} \tag{2.6}$$

и

$$\begin{cases} \Delta b = 0, \\ b|_{\partial\Omega} = \alpha(t,x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Определим функцию $w = u - a$. Она является решением уравнения

$$w_t - \eta\Delta w_t - k\Delta w = f(t)g(t,x) - a_t \tag{2.8}$$

удовлетворяет начальному условию

$$(w - \Delta w)|_{t=0} = (u - a - \Delta u)|_{t=0} = \mathcal{U}_0(x) - a(o,x), \tag{2.9}$$

граничным данным

$$w|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.10}$$

и условию переопределения

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial w_t}{\partial \bar{n}} + k \frac{\partial w}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x) ds = \int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial u_t}{\partial \bar{n}} + k \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x) ds -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial a_t}{\partial \bar{n}} + k \frac{\partial a}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x) ds = \varphi(t) - \int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial a_t}{\partial \bar{n}} + k \frac{\partial a}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x) ds. \tag{2.11}$$

Сведём задачу (2.8) – (2.11) к операторному уравнению для функции $f(t)$. Умножим уравнение (2.8) на h^η и проинтегрируем по x по области Ω.

$$\int\limits_{\Omega} (w_t - \eta\Delta w_t - k\Delta w) h^\eta \, dx = \int\limits_{\Omega} f(t) g(t,x) \, h^\eta \, dx.$$

Во втором и третьем слагаемых этого равенства дважды проинтегрируем по частям. Будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} (w_t - \eta\Delta w_t - k\Delta w) h^\eta \, dx = \int\limits_{\Omega} w_t h^\eta \, dx - \eta \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w_t}{\partial \bar{n}} h^\eta ds +$$

$$+\eta\int\limits_{\Omega}(\nabla w_t,\nabla h^{\eta}\,)dx-k\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial w}{\partial\bar{n}}h^{\eta}ds+k\int\limits_{\Omega}(\nabla w_t,\nabla h^{\eta}\,)dx=\int\limits_{\Omega}w_t h^{\eta}\,dx-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial w_t}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial w}{\partial\bar{n}}\right\}h^{\eta}ds+\eta\int\limits_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial h^{\eta}}{\partial\bar{n}}ds-\eta\int\limits_{\Omega}w_t\Delta h^{\eta}dx+k\int\limits_{\partial\Omega}w\frac{\partial h^{\eta}}{\partial\bar{n}}ds-$$

$$-k\int\limits_{\Omega}w\Delta h^{\eta}dx=\int\limits_{\Omega}w_t(h^{\eta}-\eta\Delta h^{\eta})\,dx-k\int\limits_{\Omega}w\Delta h^{\eta}dx-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial w_t}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial w}{\partial\bar{n}}\right\}h^{\eta}ds+\eta\int\limits_{\partial\Omega}w_t\frac{\partial h^{\eta}}{\partial\bar{n}}ds+\int\limits_{\partial\Omega}w\frac{\partial h^{\eta}}{\partial\bar{n}}ds=$$

$$=\int\limits_{\Omega}f(t)h^{\eta}g(t,x)\,dx-\int\limits_{\Omega}a_t h^{\eta}\,dx.$$

В силу (2.5), (2.10), (2.11) последнее соотношение можно переписать в виде

$$-\frac{k}{\eta}\int\limits_{\Omega}w\,h^{\eta}dx-\varphi(t)+\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial a_t}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial a}{\partial\bar{n}}\right\}\alpha(t,x)ds=$$

$$=f(t)\int\limits_{\Omega}h^{\eta}g(t,x)\,dx-\int\limits_{\Omega}a_t h^{\eta}\,dx. \tag{2.12}$$

Введём линейный оператор $A\colon C[0,T]\to C[0,T]$ по следующему правилу. Оператор A каждому $y(t)\in C[0,T]$ ставит в соответствие элемент

$$Ay=\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial a_t}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial a}{\partial\bar{n}}\right\}\alpha(t,x)ds-\varphi(t)+\int\limits_{\Omega}a_t h^{\eta}\,dx-\right.$$

$$\left.-\frac{k}{\eta}\int\limits_{\Omega}w_y\,h^{\eta}dx\right)\left[\int\limits_{\Omega}h^{\eta}g(t,x)\,dx\right]^{-1},$$

где w_y — решение прямой задачи (2.8) – (2.10) при $f(t) = y(t)$. Тогда равенство (2.12) можно записать в виде операторного уравнения второго рода

$$y(t) = Ay(t). \qquad (2.13)$$

Теорема 2.2.1 Пусть $\partial\Omega \subset C^2$, $\eta > 0$, $k > 0$ −константы, $g(t,x) \in L^2(\Omega)$, $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$, $\beta_t(t,x) \in W_2^2(\Omega)$ при каждом $t \in [0,T]$ и непрерывны по t, $\mathcal{U}_0(x) \in L^2(\Omega)$, $\varphi(t) \in C[0,T]$ и

$$\left|\int\limits_{\Omega} h^{\eta} g(t,x)\, dx\right| \geq \sigma_0 > 0 \qquad (2.14)$$

для $\forall t \in [0,T]$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если задача (2.8) – (2.11) имеет решение $\{w, f\}$, то f является решением уравнения (2.13);

б) если разрешимо уравнение (2.13), то существует решение $\{w, f\}$ обратной задачи (2.8) – (2.11).

Доказательство. а) Если задача (2.8) – (2.11) имеет решение $\{w, f\}$, то, повторяя рассуждения, приводящие к соотношению (2.12), мы получаем, что в силу определения оператора A, функция f является решением уравнения (2.13).

б) Пусть $f(t)$ – решение уравнения (2.13) и $w_f(t,x)$-решение прямой задачи (2.8) – (2.10) с этой $f(t)$. Докажем, что w_f удовлетворяет условию (2.11). Для этого умножим (2.8) на h^{η}, проинтегрируем по области Ω и затем проинтегрируем во втором и третьем слагаемых по частям по x дважды. Это даст

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial w_{ft}}{\partial \bar{n}} + k\frac{\partial w_f}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha ds - \frac{k}{\eta}\int\limits_{\Omega} w_f\, h^{\eta} dx = f(t)\int\limits_{\Omega} g(t,x) h^{\eta}\, dx - \int\limits_{\Omega} a_t h^{\eta}\, dx.$$

Подставим в полученное соотношение Af вместо f в соответствии с определением оператора A. Будем иметь

$$-\int_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial w_{ft}}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial w_f}{\partial\bar{n}}\right\}\alpha ds-\frac{k}{\eta}\int_{\Omega} w_f\,h^{\eta}dx=\int_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial a_t}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial a}{\partial\bar{n}}\right\}\alpha(t,x)ds-$$

$$-\varphi(t)+\int_{\Omega} a_t h^{\eta}\,dx-\frac{k}{\eta}\int_{\Omega} w_f\,h^{\eta}dx-\int_{\Omega} a_t h^{\eta}\,dx,$$

откуда следует, что

$$\int_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial w_{ft}}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial w_f}{\partial\bar{n}}\right\}\alpha ds=\varphi(t)-\int_{\partial\Omega}\left\{\eta\frac{\partial a_t}{\partial\bar{n}}+k\frac{\partial a}{\partial\bar{n}}\right\}\alpha(t,x)ds,$$

то есть w_f удовлетворяет условию (2.11). Теорема доказана.

2.3 Теорема существования и единственности решения обратной задачи

Перейдём к доказательству существования и единственности сильного обобщенного решения задачи (2.1) – (2.4).

Теорема 2.3.1 Пусть $\partial\Omega\subset C^2,\ \eta>0,\ k>0$ –константы, $g(t,x)\in L^2(\Omega),\ \alpha(t,x),\ \beta(t,x),\beta_t(t,x)\in W_2^2(\Omega)$ при каждом $t\in[0,T]$ и непрерывны по t, $\mathcal{U}_0(x)\in L^2(\Omega)$, $\varphi(t)\in C[0,T]$ и существует константа σ_0>0 такая, что

$$\left|\int_{\Omega} h^{\eta}g(t,x)\,dx\right|\geq\sigma_0. \tag{2.15}$$

для $\forall t \in [0, T]$. Тогда существует решение $\{u(t,x), f(t)\}$ обратной задачи (2.8)– (11), и это решение единственно. Кроме того для решения $\{u, f\}$ справедливы оценки

$$\|w\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_t\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_1,\ t \in [0, T], \tag{2.16}$$

$$\|f\|_{C[0,T]} \leq C_2 \tag{2.17}$$

с некоторыми константами $C_1, C_2 > 0$.

Доказательство. Для доказательства существования решения достаточно доказать разрешимость операторного уравнения (2.13) в силу теоремы 2.3.1. В условиях данной теоремы оператор A действует из $C[0, T]$ в $C[0, T]$ и при $f(t) = y(t)$, решение прямой задачи (2.8) – (2.10) w_y и его ная w_{yt} принадлежат $W_2^2(\Omega)$ и непрерывны по t на $[0, T]$.

Умножим уравнение (2.8) на w в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по частям по x во втором и третьем слагаемых левой части полученного равенства:

$$\int_\Omega w_t w\, dx + \eta \int_\Omega (\nabla w_t, \nabla w\ )\, dx + k \int_\Omega |\nabla w|^2\, dx = \int_\Omega (f(t)g - a_t) w\, dx$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\nabla w, \nabla w\ )\, dx + k \int_\Omega |\nabla w|^2\, dx = \int_\Omega (f(t)g - a_t) w\, dx.$$

Проинтегрируем последнее соотношение по t от 0 до $\tau, 0 \leq \tau \leq T$. Это даст

$$\frac{1}{2}\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\eta}{2}\int_\Omega |\nabla w\ |^2\, dx + k \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla w\ |^2\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\|w(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\eta}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla w\,|^2\,dx\right\} + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} (f(t)g - a_t)w\,dxdt. \qquad (2.18)$$

Оценим последнее слагаемое правой части по модулю с помощью неравенств Коши-Буняковского, Стеклова и Коши.

$$\left|\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} (f(t)g - a_t)w\,dxdt\right| \le \int\limits_0^{\tau} \|f(t)g - a_t\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}\,dt \le$$

$$\le \int\limits_0^{\tau} \|f(t)g - a_t\|_{L^2(\Omega)} \text{c}\left(\int\limits_{\Omega} \|w\|_{L^2(\Omega)}\right) dt \le \frac{k}{2}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} |\nabla w\,|^2\,dx\,dt +$$

$$+\frac{c^2}{2k}\int\limits_0^{\tau} \|f(t)g - a_t\|_{L^2(\Omega)}\,dt. \qquad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) вытекает неравенство

$$\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \eta\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2\,dx + k\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} |\nabla w\,|^2\,dx\,dt \le \|w(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\eta\int\limits_{\Omega} |\nabla w(0,\cdot)|^2\,dx + \frac{c^2}{k}\int\limits_0^{\tau}\left(|f|\cdot\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|a_t\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 dt, \qquad (2.20)$$

так как

$$\int\limits_0^{\tau} \|f(t)g - a_t\|_{L^2(\Omega)}\,dt \le \int\limits_0^{\tau}\left(|f|\cdot\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|a_t\|_{L^2(\Omega)}\right)dt.$$

Из начального условия (2.9) и граничных данных (2.10) при t=0 получаем, что

$$w(0,x) = (I - \eta\Delta)^{-1}\big(\mathcal{U}_0(x) - a(0,x)\big)$$

Пусть $(I - \eta\Delta)v = G$ для $G \in L^2(\Omega)$. Тогда $v = (I - \eta\Delta)^{-1}G$. В силу сильной эллиптичности оператора $I - \eta\Delta$ справедливо следующее неравенство

$$\min\{1,\eta\}\|v\|^2_{-\mathring{W}_2^1(\Omega)}\langle (I-\eta\Delta)v, v\rangle_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \le \max\{1,\eta\}\|v\|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}.$$

Тогда

$$\|(I-\eta\Delta)^{-1}\| = \max_{\substack{G\in W_2^{-1}(\Omega)\\ \|G\|_{W_2^{-1}(\Omega)}=1}} \langle (I-\eta\Delta)G, G\rangle_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \le$$

$$\le \max_{\substack{G\in W_2^{-1}(\Omega)\\ \|G\|_{W_2^{-1}(\Omega)}=1}} \|(I-\eta\Delta)^{-1}, G\|_{W_2^{-1}(\Omega)}\|G\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \le$$

$$\le \frac{1}{\min\{1,\eta\}}\max\|G\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \cdot \|G\|_{W_2^{-1}(\Omega)} = \frac{1}{\min\{1,\eta\}}$$

и

$$\|(I-\eta\Delta)^{-1}, G\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \le \frac{1}{\min\{1,\eta\}}\|G\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \le \frac{1}{\min\{1,\eta\}}\|G\|_{L^2(\Omega)}.$$

Используя это неравенство и начальные данные (2.2) получаем, что

$$\|w(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \eta\int_\Omega |\nabla w(0,\cdot)|^2\,dx \le \max\{1,\eta\}\|w(0,\cdot)\|^2_{W_2^1(\Omega)} =$$

$$= \max\{1,\eta\}\left\|(I-\eta\Delta)^{-1}\big(\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\big)\right\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le \frac{\max\{1,\eta\}}{(\min\{1,\eta\})^2}\|\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Применяя последнее неравенство к правой части (2.20) приходим к неравенству

$$\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \eta \int\limits_\Omega |\nabla w|^2\, dx + k \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |\nabla w\,|^2\, dx\, dt \le$$

$$\le \frac{\max\{1,\eta\}}{(\min\{1,\eta\})^2} \|\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+ \frac{c^2}{k} \int\limits_0^\tau \left(|f| \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|a_t\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 dt. \quad (2.21)$$

В силу определения *w* из последнего соотношения и неравенства

$$\|v_1\|_X - \|v_2\|_X \le \|v_1 - v_2\|_X\,,$$

справедливого для элементов v_1, v_2 из любого нормированного пространства *X*, вытекает что

$$[\min\{1,\eta\}]^{\frac{1}{2}} \|w\|_1 \le$$

$$\le \left[\frac{\max\{1,\eta\}}{(\min\{1,\eta\})^2} \|\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c^2}{k} \int\limits_0^\tau \left(|f| \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|a_t\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left[\frac{\max\{1,\eta\}}{(\min\{1,\eta\})^2} \|\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\right.$$

$$\left. + \frac{2c^2}{k} \int\limits_0^\tau |f|^2 \cdot \|g\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{2c^2}{k} \int\limits_0^\tau \|a_t\|^2_{L^2(\Omega)} dt\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{k}} \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)} \left(\int\limits_0^\tau |f|^2 dt\right)^{1/2} + \frac{\max\{1,\eta\}^{\frac{1}{2}}}{\min\{1,\eta\}} \|\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{k}} \|a_t\|_{L^2(Q_T)}\,,$$

откуда

$$\left|\|u\|_1 - \|a\|_1\right| \le \|u-a\|_1$$

$$\le \left[\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{k}} \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^\tau |f|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\max\{1,\eta\}^{\frac{1}{2}}}{\min\{1,\eta\}} \|\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{k}} \|a_t\|_{L^2(Q_T)}\right] \min\{1,\eta\}^{-1/2}$$

или

$$\|u\|_1 \le \max_{t\in[0,T]} \|a\|_1 + K_1 \left(\int_0^\tau |f|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + K_2\,, \tag{2.22}$$

где

$$K_1 = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{k\min\{1,\eta\}}} \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

$$K_2 = \frac{\max\{1,\eta\}^{\frac{1}{2}}}{(\min\{1,\eta\})^{3/2}} \|\mathcal{U}_0 - a(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{k\min\{1,\eta\}}} \|a_t\|_{L^2(Q_T)}.$$

Пусть $y_1(t), y_2(t) \in C(0,T)$. Составим разность значений оператора A на элементах y_1 и y_2. Согласно определению оператора A имеем:

$$Ay_1 - Ay_2 = \left(\int_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial w_t}{\partial \bar{n}} + k \frac{\partial w}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x) ds - \varphi(t) + \int_{\Omega} a_i\, h^\eta dx\right.$$

$$\left. - \frac{k}{\eta} \int_{\Omega} w_{y_1}\, h^\eta dx\right) \left[\int_{\Omega} h^\eta\, g(t,x) dx\right]^{-1} -$$

$$-\left(\int_{\partial\Omega} \left\{\eta \frac{\partial w_t}{\partial \bar{n}} + k \frac{\partial w}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x) ds - \varphi(t) + \int_{\Omega} a_i\, h^\eta dx - \frac{k}{\eta} \int_{\Omega} w_{y_2}\, h^\eta dx\right) \times$$

$$\times\left[\int_\Omega h^\eta\, g(t,x)dx\right]^{-1} = \frac{k}{\eta}\int_\Omega \left(w_{y_2} - w_{y_1}\right) h^\eta dx \left[\int_\Omega h^\eta\, g(t,x)dx\right]^{-1},$$

где w_{y_1} и w_{y_2} − решения задач (2.8) – (2.10) при $f(t) = y_1(t)$ и $f(t) = y_2(t)$. Оценим $|Ay_1 - Ay_2|$ с учётом (2.14) и определением h^η.

$$|Ay_1 - Ay_2| = \frac{k}{\eta}\left|\int_\Omega \left(w_{y_2} - w_{y_1}\right) h^\eta dx\right| \left|\int_\Omega h^\eta\, g(t,x)dx\right|^{-1} \le$$

$$\le \frac{k}{\eta\sigma_0}\int_\Omega \left|w_{y_2} - w_{y_1}\right| |h^\eta| dx \le \frac{k}{\eta\sigma_0}\left(\int_\Omega \left|w_{y_2} - w_{y_1}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |h^\eta|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{k}{\eta\sigma_0}\left\|w_{y_2} - w_{y_1}\right\|_{L^2(\Omega)} \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.23}$$

С другой стороны, разность $v_y = w_{y_1} - w_{y_2}$ является решением задачи

$$v_{yt} - \eta\Delta v_{yt} - k\Delta v_y = \left(y_1(t) - y_2(t)\right)g(t,x), \tag{2.24}$$

$$\left.(v_y - \eta\Delta v_y)\right|_{t=0} = 0\,, \tag{2.25}$$

$$\left.v_y\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.26}$$

Умножим (2.24) на v_y в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$ и проинтегрируем во втором и третьем слагаемых по частям по x с учетом (2.26). Это даст

$$\int_\Omega v_{yt} v_y dx - \int_\Omega \eta\Delta v_{yt} v_y\, dx - k\int_\Omega \Delta v_y v_y\, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} v_y^2 dx +$$

$$+\eta\int_\Omega\left(\nabla v_{yt},\nabla v_y\right)dx+k\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega v_y^2dx+\frac{\eta}{2}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla v_y\right|^2dx+$$

$$+k\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\Omega v_y^2dx+\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx\right]+k\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\|v_y\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx\right]+k\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx$$

$$=(y_1-y_2)\int_\Omega g v_y dx. \quad (2.27)$$

Оценим правую часть с помощью неравенства Коши. Будем иметь

$$\left|(y_1-y_2)\int_\Omega g v_y dx\right|=|y_1-y_2|\left|\int_\Omega g v_y dx\right|\le|y_1-y_2|\int_\Omega|g|\left|v_y\right|dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}|y_1-y_2|^2\int_\Omega|g|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega\left|v_y\right|^2dx\le\frac{1}{2}|y_1-y_2|^2\int_\Omega|g|^2dx+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left\|v_y\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\eta\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx\right).$$

Из (2.27) в силу последнего неравенства получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\|v_y\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx\right]+k\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}|y_1-y_2|^2\int_\Omega|g|^2dx+\frac{1}{2}\left(\left\|v_y\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\eta\int_\Omega\left|\nabla v_y\right|^2dx\right)$$

или ввиду неотрицательности последнего слагаемого в левой части

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\|v_y\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int\limits_\Omega \left|\nabla v_y\right|^2 dx\right] \le |y_1 - y_2|^2 \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|v_y\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int\limits_\Omega \left|\nabla v_y\right|^2 dx.$$

Согласно лемме Гронуолла из последнего неравенства следует соотношение

$$\left\|v_y\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int\limits_\Omega \left|\nabla v_y\right|^2 dx \le \int\limits_0^t |y_1 - y_2|^2 \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{t-\tau} d\tau,$$

которое влечёт за собой справедливость неравенства

$$\left\|w_{y_2} - w_{y_1}\right\|_{L^2(\Omega)} \le \left[\int\limits_0^t |y_1 - y_2|^2 \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{t-\tau} d\tau\right] \le$$

$$\le \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)} \left[\int\limits_0^t |y_1 - y_2|^2 e^{t-\tau} d\tau\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.28)$$

Объединяя (2.23) и (2.28) приходим к неравенству

$$|Ay_1 - Ay_2| \le \frac{k}{\eta\sigma_0} \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)} \left[\int\limits_0^t |y_1 - y_2|^2 e^{t-\tau} d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{k}{\eta\sigma_0} \max_{t\in[0,T]} \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)} \left[\int\limits_0^t |y_1 - y_2|^2 e^{t-\tau} d\tau\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.29)$$

Введём в пространстве $C[0, T]$ эквивалентную норму

$$\|\cdot\|_\gamma = \max_{t\in[0,T]} e^{-\gamma t}|\cdot|$$

С положительной постоянной $\gamma>0$. Тогда из (2.29) вытекает, что

$$e^{-\gamma t}|Ay_1 - Ay_2| \le \frac{ke^{-\gamma t}}{\eta\sigma_0} \max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)} \times$$

$$\times \left[\int_0^t e^{-2\gamma t}|y_1 - y_2|^2\, e^{2\gamma t} e^{t-\tau} d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{ke^{-\gamma t}e^T}{\eta\sigma_0} \max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \times$$

$$\times \max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)}\, \|y_1 - y_2\|_\gamma \left[\int_0^t e^{2\gamma\tau}\, d\tau\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{ke^T}{\eta\sigma_0} \max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \times$$

$$\times \max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)}\, \|y_1 - y_2\|_\gamma \frac{(e^{2\gamma\tau} - 1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\gamma}} e^{-\gamma\tau} \le q\|y_1 - y_2\|_\gamma\,,$$

где

$$q = \frac{ke^T}{\eta\sigma_0\sqrt{2\gamma}} \max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Следовательно,

$$\|Ay_1 - Ay_2\|_\gamma \le q\|y_1 - y_2\|. \tag{2.30}$$

При

$$\sqrt{2\gamma} > \frac{\eta\sigma_0}{ke^T \max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)}},$$

то есть

$$\gamma > \frac{\eta^2{\sigma_0}^2}{2k^2e1^{2T} \max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \max_{t\in[0,T]}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

оператор A является сжимающим отображением в смысле нормы $\|\cdot\|_\gamma$, так как в этом случае $q < 1$ в (2.30). Поэтому согласно принципу сжимающих отображений оператор A имеет единственную неподвижную точку f^* в $C[0,T]$, являющуюся единственным решением уравнения (2.13). По теореме 2.2.1 это означает, что задача (2.8) – (2.11) имеет решение (u^*, f^*), где $u^* -$ решение задачи (2.8) – (2.10) при $f = f^*$.

Пусть задача (2.8)-(2.11) имеет два решения (w_1, f_1) и (w_2, f_2). Тогда, повторяя рассуждения, которые привели к уравнению (2.13), можно показать, что f_1^* и f_2^* являются решениям уравнения (2.13). В силу (2.30)

$$\|f_1 - f_2\| = \|Af_1 - Af_2\|_\gamma \leq q\|f_1 - f_2\|,$$

откуда следует, что $(1-q)\|f_1 - f_2\| \leq 0$. Так как $q < 1$, последнее неравенство означает равенство $f_1 = f_2$. Из (2.28) для $y_1 = f_1$, $y_2 = f_2$, $w_{y_1} = w_1$, $w_{y_2} = w_2$ заключаем, что

$$\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)} \left[\int_0^t |f_1 - f_2|^2 \, e^{t-\tau} d\tau\right]^{1/2}$$

откуда $w_1 = w_2$.

Получим оценку для u_t в норме $W_2^1(\Omega)$. Умножим уравнение (2.8) на w_t и проинтегрируем по Ω. Это даст

$$\int_\Omega \{(w_t)^2 - \eta\Delta w_t w_t - k\Delta w w_t\} dx = \int_\Omega (fg - a_t)\, w_t dx.$$

Проинтегрируем по частям по x во втором и третьем слагаемых левой части. Имеем

$$\int_\Omega (w_t)^2 dx - \eta \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w_t}{\partial \bar{n}} w_t ds + \eta \int_\Omega (\nabla w_t, \nabla w_t\,) dx - k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \bar{n}} w_t ds +$$

$$+k\int_{\Omega}(\nabla w,\nabla w_t\,)dx=\int_{\Omega}(w_t)^2dx+\eta\int_{\Omega}|\nabla w_t|^2dx+k\int_{\Omega}(\nabla w,\nabla w_t\,)dx=$$

$$=\int_{\Omega}(fg-a_t)\,w_tdx.$$

Перенесём третье слагаемое в правую часть полученного соотношения.

$$\int_{\Omega}\{(w_t)^2+\eta|\nabla w_t|^2\}\,dx=$$

$$=\int_{\Omega}f(t)gw_tdx-\int_{\Omega}a_tw_tdx-k\int_{\Omega}(\nabla w,\nabla w_t\,)dx. \qquad (2.31)$$

Оценим правую часть (2.31) с помощью неравенства Коши. Будем иметь

$$\int_{\Omega}f(t)gw_tdx-\int_{\Omega}a_tw_tdx-k\int_{\Omega}(\nabla w,\nabla w_t\,)dx\le\frac{1}{4}\int_{\Omega}|w_t|^2dx+\int_{\Omega}|f|^2|g|^2dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{\Omega}w_t^2dx+\int_{\Omega}|a_t|^2dx+\frac{k^2}{2\eta}\int_{\Omega}|\nabla w|^2dx+\frac{\eta}{2}\int_{\Omega}|\nabla w_t|^2dx\,.$$

Тогда из (2.31) и последнего неравенства вытекает, что

$$\int_{\Omega}\{(w_t)^2+\eta|\nabla w_t|^2\}\,dx\le 2\int_{\Omega}|f|^2|g|^2dx+$$

$$+2\int_{\Omega}|a_t|^2dx+\frac{k^2}{\eta}\int_{\Omega}|\nabla w|^2dx. \qquad (2.32)$$

Обратимся снова к уравнению (2.13) при $f(t) = f^*(t)$. Заметим, что в силу (2.6)

$$0 = \int\limits_{\Omega} \{\eta\Delta a_t + k\Delta a\}\, b(t,x)dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\frac{\partial a_t}{\partial \bar{n}} + k\frac{\partial a}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x)ds +$$

$$+\int\limits_{\Omega} \{\eta(\nabla a_t, \nabla b)_R + k(\nabla a, \nabla b)_R\}\, dx,$$

откуда

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{\frac{\partial a_t}{\partial \bar{n}} + k\frac{\partial a}{\partial \bar{n}}\right\} \alpha(t,x)ds = \int\limits_{\Omega} \{\eta(\nabla a_t, \nabla b)_R + k(\nabla a, \nabla b)_R\}\, dx.$$

Подставим последнее соотношение в (2.13) для $f^*(t)$. Это даст

$$f^*(t) = \left(\int\limits_{\Omega} \{\eta(\nabla a_t, \nabla b)_R + k(\nabla a, \nabla b)_R\}\, dx - \varphi(t) - \frac{k}{\eta}\int\limits_{\Omega} w^*\, h^\eta dx\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega} a_t h^\eta\, dx\right)\left[\int\limits_{\Omega} h^\eta g(t,x)\, dx\right]^{-1}.$$

Оценим правую часть этого уравнения с учётом (2.14), и определения w.

$$\left|\int\limits_{\Omega} \{\eta(\nabla a_t, \nabla b)_R + k(\nabla a, \nabla b)_R\}\, dx - \varphi(t) - \frac{k}{\eta}\int\limits_{\Omega} (u^* - a)\, h^\eta dx + \int\limits_{\Omega} a_t h^\eta\, dx\right| \times$$

$$\times \left|\int\limits_{\Omega} h^\eta g(t,x)\, dx\right|^{-1} \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{\Omega} \{\eta|\nabla a_t|_R, |\nabla b|_R + k|\nabla a|_R, |\nabla b|_R\}\, dx + |\varphi(t)| + \frac{k}{\eta}\int\limits_{\Omega} (|u^*| + |a|)\, |h^\eta| dx \right.$$

$$\left. + \|a_t\|_{L^2(\Omega)} \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \right] \frac{1}{\sigma_0} \leq$$

$$\leq \left[\eta \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla a_t|_R^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla b|_R^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + k \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla a|_R^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla b|_R^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. + |\varphi(t)| + \frac{k}{\eta} \left(\|u^*\|_1 + \|a\|_{L^2(\Omega)} \right) \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|a_t\|_{L^2(\Omega)} \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \right] \frac{1}{\sigma_0}$$

$$\leq K_3 +$$

$$+ \frac{k}{\eta\sigma_0} \|u^*\|_1 \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq K_3 + \frac{k}{\eta\sigma_0} \|u^*\|_1 \max_{t\in[0,T]} \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)},$$

где

$$K_3 = \frac{1}{\sigma_0} \max_{t\in[0,T]} \left\{ \left[\eta \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla a_t|_R^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + k \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla a|_R^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla b|_R\ dx \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. + |\varphi(t)| + \left(\frac{k}{\eta} \|a\|_{L^2(\Omega)} + \|a_t\|_{L^2(\Omega)} \right) \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \right\}$$

Из последнего неравенства и (2.22) следует, что

$$|f^*(t)| \leq K_3 + \frac{k}{\eta\sigma_0} \|u^*\|_1 \max_{t\in[0,T]} \|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq K_3 + \frac{k}{\eta\sigma_0}\left(\max_{t\in[0,T]}\|a\|_1 + K_1\left(\int_0^t |f^*|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + K_2\right)\max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} =$$

$$= K_3 + \frac{k}{\eta\sigma_0}\left(\max_{t\in[0,T]}\|a\|_1 + K_2\right)\max_{t\in[0,T]}\|h^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \frac{k}{\eta\sigma_0}K_1\left(\int_0^t |f^*|^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \equiv$$

$$\equiv K_4 + \frac{kK_1}{\eta\sigma_0}\left(\int_0^t |f^*|^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат.

$$|f^*|^2 \leq \left(K_4 + \frac{kK_1}{\eta\sigma_0}\left(\int_0^t |f^*|^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq 2K_4^2 + \frac{2k^2K_1^2}{\eta^2{\sigma_0}^2}\int_0^t |f^*|^2\,d\theta,$$

откуда согласно лемме Гронуолла вытекает оценка

$$|f^*|^2 \leq 2K_4^2 \exp\left(\frac{2k^2K_1^2t}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right).$$

Тогда

$$|f^*| \leq \sqrt{2}K_4\ \exp\left(\frac{k^2K_1^2t}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right)$$

или

$$\|f^*\|_{C([0,T])} \leq \sqrt{2}K_4\ \exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right). \tag{2.33}$$

Теперь из (2.22) и (2.33) получаем оценку

$$\|u^*\|_1 \le \max_{t\in[0,T]}\|a\|_1 + K_1\left(\int_0^T \|f^*\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \le$$

$$\le \sqrt{2}K_4\ exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right)T^{\frac{1}{2}} + K_2 + \max_{t\in[0,T]}\|a\|_1. \qquad (2.34)$$

Объединяя (2.32) – (2.34), приходим к оценке на w_t. А именно,

$$\min\{1,\eta\}\|w_t^*\|_1^2 \le 2\|f^*\|^2_{C([0,T])}\max_{t\in[0,T]}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|a_t\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\frac{k^2}{\eta}\int_\Omega |\nabla u^* - \nabla a|^2\,dx \le 2\|f^*\|^2_{C([0,T])}\max_{t\in[0,T]}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|a_t\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\frac{2k^2}{\eta}(\|u^*\|_1^2 + \|a\|_1^2),$$

откуда

$$\min\{1,\eta\}\|w_t^*\|_1 \ \le \sqrt{2}\|f^*\|_{C([0,T])}\max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2}\|a_t\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\eta}}\left(\|u^*\|_1\ + \|a\|_1\ \right) \le 2\max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)}\exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right) + \sqrt{2}\|a_t\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\frac{2kK_4}{\sqrt{\eta}}\exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right)T^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\eta}}\left(K_2 + 2\max_{t\in[0,T]}\|a\|_1\right).$$

Отсюда по определению $w^* = u^* - a$ получаем оценку на u_t.

$$\|u_t^*\|_1\ \le \frac{2\max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)}}{\min\{1,\eta\}}K_2\exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{min\{1,\eta\}} + 1\right)\max_{t\in[0,T]}\|a_t\|_{L^2(\Omega)} +$$

$$\frac{2kK_4}{\sqrt{\eta}\min\{1,\eta\}}\exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right)T^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\eta\min\{1,\eta\}}}\left(K_2 + 2\max_{t\in[0,T]}\|a\|_1\ \right)$$

$$\equiv K_5. \qquad (2.35)$$

Перейдём к выводу оценок для u^* и u_t^* в $W_2^2(\Omega)$. Умножим уравнение (1.1) для $-\Delta u^*$ и проинтегрируем по x по области Ω. Это даст

$$-(u_t^*, \Delta u^*) + \eta(\Delta u_t^*, \Delta u^*) + k\|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)}^2 = -f^*(t)(g, \Delta u^*).$$

Перенесём первое слагаемое из левой части в правую и запишем уравнение в виде

$$\frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + k\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (u_t^*, \Delta u^*) - f^*(t)(g, \Delta u^*). \qquad (2.36)$$

Оценим правую часть этого соотношения с учётом (2.33), (2.35) и неравенства Коши.

$$|(u_t^*, \Delta u^*) - f^*(t)(g, \Delta u^*)| \le |(u_t^*, \Delta u^*)| + |f^*(t)||(g, \Delta u^*)| \le$$
$$\le \|u_t^*\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)} + |f^*(t)|\|g\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le \left[K_5 + \sqrt{2}K_4 \exp\left(\frac{k^2 K_1^2 T}{\eta^2 {\sigma_0}^2}\right) \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)}\right] \|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le \frac{1}{2k}\left[K_5 + \sqrt{2}K_4 \exp\left(\frac{k^2 K_1^2 T}{\eta^2 {\sigma_0}^2}\right) \max_{t\in[0,T]} \|g\|_{L^2(\Omega)}\right]^2 + \frac{k}{2}\|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)}^2 \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{2k}K_6^2 + \frac{k}{2}\|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Из последнего неравенства и (2.36) получаем, что

$$\frac{\eta}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{k}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \frac{1}{2k}K_6^2.$$

Умножим данное неравенство на $e^{\frac{k}{\eta}t}$. Это даст

$$\eta\frac{d}{dt}\left\{e^{kt/\eta}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\right\} \le \frac{K_6^2}{k}e^{kt/\eta}$$

или после интегрирования по t от 0 до τ,

$$\eta e^{kt/\eta}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{K_6^2}{k^2}\left(e^{kt/\eta}-1\right)+\eta\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=0}. \qquad (2.37)$$

Оценим последнее слагаемое, учитывая, что $\|(I-\eta\Delta)^{-1}\| \le \frac{1}{\min\{1,\eta\}}$. В силу (2)

$$\eta\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=0} = \|\mathcal{U}_0 - u^*(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u^*(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} =$$
$$= \|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)} + \|(I-\eta\Delta)^{-1}(I-\eta\Delta)u^*(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)} +$$
$$+\|(I-\eta\Delta)^{-1}\|\|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)} \le \left(1+\frac{1}{min\{1,\eta\}}\right)\|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Тогда в силу (2.37) имеем

$$\|\Delta u^*\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{K_6^2}{k^2}\left(e^{kt/\eta}-1\right)e^{-kt/\eta} + \frac{1}{\eta}\left(1+\frac{1}{\min\{1,\eta\}}\right)^2\|\mathcal{U}_0\|^2_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le \frac{K_6^2}{k^2}e^{-kt/\eta} + \frac{1}{\eta}\left(1+\frac{1}{\min\{1,\eta\}}\right)^2\|\mathcal{U}_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

или

$$\|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{K_6}{k}e^{-kt/2\eta} + \frac{1}{\eta^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{\min\{1,\eta\}}\right)\|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.38)$$

Далее, так как $u^* - a \in \mathring{W}{}^1_2(\Omega)(\Omega) \cap W^2_2(\Omega)$ и $\Delta a = 0$, для $u^* - a$ справедливо неравенство [6]

$$\|u^* - a\|_2 \le c\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},$$

которое позволяет вместе с (2.38) получить оценку

$$|\|u^*\|_2 - \|a\|_2| \le \|u^* - a\|_2 \le$$
$$\le c\left(\frac{K_6}{k}e^{-kt/(2\eta)} + \frac{1}{\eta^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{\min\{1,\eta\}}\right)\|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

или

$$\|u^*\|_2 \le \|a\|_2 + c\left(\frac{K_6}{k}e^{-kt/(2\eta)} + \frac{1}{\eta^{1/2}}(1 + \min\{1,\eta\})\|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)}\right). \qquad (2.39)$$

Из уравнения (2.1) для u^* выразим $-\eta\Delta u_t^*$.

$$-\eta\Delta u_t^* = f^*(t)g + k\Delta u^* - u_t^*.$$

Оценка u_t^* в $W_2^2(\Omega)$ вытекает из (2.33), (2.38) и (2.39).

$$\eta\|\Delta u_t^*\|_{L^2(\Omega)} \le |f^*(t)|\|g\|_{L^2(\Omega)} + k\|\Delta u^*\|_{L^2(\Omega)} + \|u_t^*\|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le \sqrt{2}K_4\exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right)\max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)} + K_6\exp\left(-\frac{k\tau}{2\eta}\right) +$$
$$+\frac{k}{\eta^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{1}{\min\{1,\eta\}}\right)\|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)} + K_5. \qquad (2.40)$$

Повторяя рассуждения, приведшие к (2.39), получим оценку

$$\|u_t^*\|_2 \le \|a_t\|_2 + c\|\Delta u_t^*\|_{L^2(\Omega)} \le$$
$$\le \left(\|a_t\|_2 + c\left[\sqrt{2}K_4\exp\left(\frac{k^2K_1^2T}{\eta^2{\sigma_0}^2}\right)\max_{t\in[0,T]}\|g\|_{L^2(\Omega)} + K_6\exp\left(-\frac{k\tau}{2\eta}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{k}{\eta^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{1}{\min\{1,\eta\}}\right)\|\mathcal{U}_0\|_{L^2(\Omega)} + K_5\right]\right).$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение движения грунтовых вод для слабо неоднородных по вертикали горных пород в случае с одной пространственной переменной [4].

$$u_t - \eta u_{xxt} - k u_{xx} = -k(\varepsilon_0 + \varepsilon_k), \tag{2.41}$$

где $u = u(t,x)$ —потенциал скорости фильтрации, k —коэффициент уровнепроводности, $\eta = \frac{H^2}{2}$, H —мощность потока подземных вод, ε_k и ε_0 — модули питания потока соответственно через нижнюю и верхнюю поверхности пласта. Сумма модулей питания, вообще говоря, меняется со временем, то есть является функцией t.

Поставим обратную задачу отыскания функции $f(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_k(t)$ в уравнении (2.41) с начальными данными [2].

$$u_{xx}(0,x) = 0, \tag{2.42}$$

граничными условиями на верхней и нижней поверхности пласта

$$u(t,0) = \beta(t), \qquad u(t,l) = 0 \tag{2.43}$$

по дополнительной информации о расходе воды через верхнюю поверхность пласта (например, через поверхность грунта)

$$(-\eta u_{xt} - k u_x)|_{x=0} = \varphi(t). \tag{2.44}$$

Задача (2.41) – (2.44) является одномерным аналогом задачи (2.1) – (2.4), где $g(t,x) = k,\ \beta = \beta(t),\ \alpha(0) = 1,\ \alpha(1) = 0$. Пусть $\beta, \beta_t, \varphi \in C[0,T]$. Из начального условия (2.42) и граничных условий (2.43) вытекает, что

$$u(0,x) = \beta(0)\frac{l-x}{l}$$

и

$$u(0,x) - \eta u_{xx}(0,x) = \beta(0)\frac{l-x}{l}.$$

Проверим условие (2.15). Функция h^η является решением задачи

$$h^\eta - \eta\Delta h^\eta = 0,$$

$$h^\eta(0) = 1, \qquad h^\eta(1) = 0$$

и имеет вид

$$h^\eta = \frac{sh\frac{l-x}{\sqrt{\eta}}}{sh\frac{l}{\sqrt{\eta}}}.$$

Поэтому

$$\int_0^l h^\eta\, kdx = \int_0^l k\,\frac{sh\frac{l-x}{\sqrt{\eta}}}{sh\frac{l}{\sqrt{\eta}}}dx = \frac{k\sqrt{\eta}}{sh\frac{l}{\sqrt{\eta}}}\left(ch\frac{l}{\sqrt{\eta}} - 1\right) > 0.$$

Таким образом, все условия теоремы 2.4.1 выполняются. Следовательно, задача (2.41) – (2.44) имеет единственное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена обратная задача отыскания неизвестной правой части уравнения соболевского типа по дополнительной интегральной информацией решения уравнения на границе области. Основным результатом работы является теорема существования и единственности сильного обобщенного решения данной задачи. Для доказательства теоремы используется метод, который разработан на основе идеи сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента. В работе приведен пример обратной задачи исходные данные, которые удовлетворяют всем условиям теоремы.

Обратные задачи отыскания правых частей дифференциальных уравнений сравнительно просты. Однако, изучение таких задач представляет теоритический интерес с точки зрения разработки методов исследования новых обратных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аблабеков, Б. С. Одномерные обратные задачи для уравнения фильтрациижидкостей в трещиноватой породе и приближенные методы решения / Б. С. Аблабеков // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – № 21. – С. 273–272.

2. Баренблатт, Г. И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 852–864.

3. Баренблатт, Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт , В. М. Ентов , В. М. Рыжик. – Москва: Недра, 1984. – 211 с.

4. Дзекцер, Е. С. Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах / Е. С. Дзекцер // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 220. – № 3. – С. 540–543.

5. Иванова, Н. Д. Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения / Н. Д. Иванова, В. Е. Фёдоров, К. М. Комарова // Вестник ЧелГУ. – 2012. – № 15. – С. 49–70.

6. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа: монография / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.– Москва: Наука, 1964. – 540 с.

7. Любанова, А. Ш. Обратная задача для псевдопараболического уравнения с интегральным условием переопределения / А. Ш. Любанова // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 4. – С. 505—515.

8. Мамаюсупов, М. Ш. Обратная задача для уравнения в частных производных высокого порядка / М. Ш. Мамаюсупов, С. Н.Землянский // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – № 21. – С. 268–272.

9. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных: учебное пособие / В.П. Михайлов. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. – 1983. – 424 с.

10. Намсараева, Г. В. О разрешимости обратных задач для псевдопараболических уравнений / Г.В.Намсараева // Математические заметки ЯГУ. – 2013. – Т. 20 – № 2. – С. 111–137.

11. Прилепко, А. И. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики. I / А. И. Прилепко, Д. Г. Орловский // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 1. – С. 119–129.

12. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике: научное издание / С.Л. Соболев. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. – 1988. – 424 с. – ISBN 5-02-013756-1.

13. Треногин, В.А. Функциональный анализ: учебник / В.А. Треногин. – Москва: Наука, 1994. – 440 с. – ISBN 5-02-014891-1.

14. Уразаева, А. В. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А. В. Уразаева, В. Е. Федоров // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 8. – С. 1111–1119.

15. Шергин, С. Н. О некоторых классах обратных задач для псевдопараболических уравнений / С. Н. Шергин, С. Г. Пятков // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21. – № 2. – С. 106–116.

16. Al-Horani, M. Degenerate first order identification problems in Banach spaces / M. Al-Horani, A. Favini // В кн. «Differential equations: inverse and direct problems». (Lecture notes in pure and applied mathematics ; v. 251.) New York: Taylor & Francis Group, LLC, 2006. – P. 1–15.

17. Antontsev, S. N. An inverse problem for generalized Kelvin–Voigt equation with *p*-Laplacian and damping term / S. N. Antontsev, Kh. Khompysh // Inverse Problems/ – 2021. – T. 37. – № 8. – 085012. – 29 p.

18. Chen, P. J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P. J. Chen, M. E. Gurtin // Zeitschrift f¨ur angewandte Mathematik und Physik. – 1968. – V.19. – № 4. – P. 614–627.

19. Fedorov, V. E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V. E. Fedorov, A. V. Urazaeva // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2004. – V. 12. – № 4. – P. 387–395.

20. Fedorov, V. E. Inverse problem for Oskolkov's system of equations / V. E. Fedorov, N. D. Ivanova // Mathematical Methods in Applied Sciences, 2017. – V. 40. – № 17. – P. 6123–6126.

21. Khompish, K. Inverse Problem with Integral Overdetermination for System of Equations of Kelvin-Voight Fluids / K.Khompish // Advanced Materials Research. – 2013. – V. 705. – P. 15–20.

22. Lyubanova, A. Sh. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity / A. Sh. Lyubanova, A. Tani // Applicable Analysis. – 2011. – V. 90. – № 10. – P. 1557–1571.

23. Lyubanova, A. Sh. Inverse problems for the stationary and pseudoparabolic
equations of diffusion / A. Sh. Lyubanova, A. V. Velisevich // Applicable Analysis. – 2019. – V. 98. – №. 11. – P. 1997–2010.

24. Pyatkov, S. G. On some mathematical models of filtration theory / S. G.Pyatkov, S. N. Shergin // Вестник ЮрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – T. 8. – № 2. – C. 105–116.

25. Pyatkov, S. G. Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models / S. G. Pyatkov, S. N. Shergin // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2016. – T. 9. – № 2. – C. 75–89.

26. Rundell, W. Determination of an unknown nonhomogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data / W. Rundell, D. L. Colton // Applicable Analysis. – 1980. – V. 10. – № 3. – P. 231–242.

27. Showalter, R. E., Pseudoparabolic partial differential equations / R. E. Showalter, T. W. Ting // SIAM Journal of Mathematical Analysys. – 1970. – V. 1. – № 1. – P. 1–26.

28. Ting, T. A Cooling Process According to Two – Temperature Theory of Heat Conduction / T. Ting // Journal of Mathematical and Applications. – 1974. – V. 45. – № 1. – P. 23 – 31.

29. White, L. W. Limit behavior of Sobolev total flux boundary control problems / L. W. White // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 1983. – V. 13. – № 3. – P. 383–396.

30. Yaman, M. Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudoparabolic equation / M. Yaman // Journal of Inequalities and Applications – 2012. – V. 2012. – № 274. – P. 1–8.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«**СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**»
Институт Математики и Фундаментальной Информатики
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ И.В. Фроленков
подпись
«22» июня 2023г

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Руководитель 22.06.23 доцент, кандидат физ.-мат. наук А.Ш. Любанова

Выпускник 22.06.23 Д.А. Хумбун

Нормоконтролер 22.06.23 Т.Н. Шипина

Красноярск 2023