Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
__________/И.В. Фроленков
«_____» __________ 2023 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

О РАЗРЕШИМОСТИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Магистерская программа 01.04.02.01 Математическое моделирование

Руководитель	________________	кандидат физико-математических наук, доцент	И.В. Фроленков
Выпускник	________________		И.Е. Зубров
Нормоконтролер	________________		Т.Н. Шипина

Красноярск 2023

АННОТАЦИЯ

Цель работы – исследовать разрешимость нагруженного уравнения типа Бюргерса специального вида, а также получить условия, гарантирующие единственность решения некоторого другого нагруженного уравнения типа Бюргерса с данными Коши.

В ходе работы удалось обобщить и усилить результаты, полученные в статье [1]. Также была доказана теорема гарантирующая единственность решения нагруженного уравнения типа Бюргерса специального вида с данными Коши.

Ключевые слова: уравнение типа Бюргерса, метод слабой аппроксимации, расщеплённая задача, нагруженное уравнение.

The aim of this work is to investigate the solvability of a loaded equation of Burgers type of special form and to obtain conditions guaranteeing the uniqueness of the solution of some other loaded equation of Burgers type with Cauchy data.

In the course of this work it was possible to generalize and strengthen the results obtained in [1]. The theorem guaranteeing the uniqueness of the solution of a loaded equation of Burgers type of special form with Cauchy data was also proved.

Keywords: Burgers type equation, weak approximation method, split problem, loaded equation.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Существуют различные методы решения обратных задач. Для решения обратных задачи, содержащих уравнения в частных производных параболического типа было разработано несколько методов, которые описаны в работах Ю. Я. Белова, А. И. Кожанова и Ю. Е. Аниконова – см. [2] - [6].Один из подходов описан, например, в статье [2] Ю. Я. Белова и К. В. Коршуна.

Пусть дана некоторая обратная задача с условиями переопределения и согласования, после этого она приводится к некоторой прямой вспомогательной задаче, затем с помощью метода слабой аппроксимации получаются априорные оценки и доказывается существование решения прямой вспомогательной задачи, последним этапом является доказательство того, что полученное решение является решением обратной задачи.

При незначительных изменениях входных данных или количества и вида неизвестных коэффициентов, или структуры уравнения, как правило, требуется заново получать все априорные оценки.

В статье [1] И. В. Фроленкова, М. А. Даржаа предложен подход, основанный на рассмотрении нагруженного уравнения специального вида. Приведём формулировку теоремы, доказанной в этой статье.

В пространстве E_1 выберем r различных точек $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$ рассмотрим задачу Коши

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t,x,u(t,x),\omega(t))u_x + f(t,x,u(t,x),\omega(t)), \tag{0.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{0.2}$$

Обозначим через $\omega(t) = (u(t,\alpha_j), \frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,\alpha_k)), k = 0,\dots,p_1, j = 1,\dots,r$ вектор–функцию, компонентами которой являются следы (зависящие только от переменной t) функции $u(t,x)$ и всех её производных по x до порядка p_1 включительно. Выберем и зафиксируем постоянную $p \geqslant \max\{2, p_1\} \geqslant 2$.

Условие 0.1. Функции $b(t,x,u(t,x),\omega(t))$, $f(t,x,u(t,x),\omega(t))$ – действительнозначные функции, которые определены и непрерывны для любых значений своих аргументов. Для всех $t^* \in (0,T]$ и для всех $u(t,x) \in Z_x^{p+2}([0,t^*])$ эти функции, как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$, непрерывны и имеют непрерывные производные, участвующие в соотношениях (2.5) и (2.6). Функция $a(t) \geqslant a_0 > 0$ – непрерывная ограниченная функция на отрезке $[0,T]$. Функция $u_0(x)$ имеет непрерывные производные, участвующие в следующем соотношении

$$\sum_{k=0}^{p+2} \left| \frac{d^k u_0(x)}{dx^k} \right| \leqslant C.$$

Условие 0.2. Введём следующие обозначения

$$U_k(0) = \sup_{x \in E_1} \left| \frac{d^k}{dx^k} u_0(x) \right|, \quad k = 0,1,\ldots,p+2,$$

$$U_k(t) = \sup_{0<\xi\leqslant t} \sup_{x \in E_1} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(\xi,x) \right|, \quad k = 0,1,\ldots,p+2,$$

$$U(t) = \sum_{k=0}^{p+2} U_k(t), \quad U(0) = \sum_{k=0}^{p+2} U_k(0).$$

Пусть для всех $t^* \in (0,T]$, для всех $t \in [0,t^*]$, для любой функции $u(t,x) \in Z_x^{p+2}([0,t^*])$ выполнены следующие оценки

$$\sum_{k=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} b(t,x,u(t,x),\omega(t)) \right| \leqslant P_{\gamma_1}(U(t)), \tag{0.3}$$

$$\sum_{k=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t,x,u(t,x),\omega(t)) \right| \leqslant P_{\gamma_2}(U(t)). \tag{0.4}$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0$ – некоторые фиксированные целочисленные константы и

$$P_\xi(y) = C(1 + |y| + |y|^2 + \ldots + |y|^\xi),$$

а $C \geqslant 1$ – константа, не зависящая от функции $u(t,x)$ и её производных.

Теорема 0.1 (Существования). *Пусть выполняются условия 0.1 и 0.2, причём* $0 \leqslant \gamma_1 < \infty$, $0 \leqslant \gamma_2 \leqslant 1$, *тогда существует константа* $t^* \in (0, T]$, *которая зависит от* a_0, C *из условия 0.1 и соотношений (0.3), (0.4), такая, что классическое решение* $u(t, x)$ *задачи (0.1), (0.2) существует в классе* $Z_x^p([0, t^*])$.

Продемонстрируем применимость данной теоремы к исследованию задачи, приведённой в статье [2] Ю. Я. Белова и К. В. Коршуна.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t, x) | 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$ рассмотрим уравнение типа Бюргерса с данными Коши

$$u_t(t, x) = \mu(t) u_{xx} + A(t) u u_x + B(t) u + C(t) + g(t) f(t, x), \tag{0.5}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in E_1, \tag{0.6}$$

где функции $A(t), B(t), C(t), f(t, x)$ – заданы, а функции $u(t, x)$ и $g(t)$ неизвестны.

Также потребуем, чтобы были выполнены условия переопределения и условия согласования

$$u(t, x_0) = \varphi(t), \quad x_0 = \mathrm{const}, \tag{0.7}$$

$$u_0(x_0) = \varphi(0). \tag{0.8}$$

Для того, чтобы привести обратную задачу (0.5)-(0.8) к прямой, положим в (0.5) $x = x_0$, тогда

$$g(t) = \frac{\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) - C(t) - \mu(t) u_{xx}(t, x_0) - A(t)\varphi(t) u_x(t, x_0)}{f(t, x_0)}. \tag{0.9}$$

Подставляя (0.9) в (0.5), получим прямую задачу

$$\begin{aligned} u_t(t, x) = \mu(t) u_{xx} + A(t) u u_x + B(t) u + C(t) + \\ + \frac{\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) - C(t) - \mu(t) u_{xx}(t, x_0) - A(t)\varphi(t) u_x(t, x_0)}{f(t, x_0)} f(t, x), \end{aligned} \tag{0.10}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in E_1. \tag{0.11}$$

Для того, чтобы гарантировать, что знаменатель выражения (0.10) не обращается в нуль, потребуем выполнения следующего условия

$$|f(t,x)| \geqslant \delta, \quad (t,x) \in G_{[0,T]}.$$

Заметим, что прямую задачу (0.10), (0.11) можно представить в виде

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t,x,u(t,x),\omega(t))u_x + f(t,x,u(t,x),\omega(t)), \tag{0.12}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{0.13}$$

для которой применима теорема 0.1 при выполнении условий 0.1, 0.2. Проверим их выполнение. Для данной задачи функции $b(t,x,u(t,x),\omega(t))$ и $f(t,x,u(t,x),\omega(t))$ будут иметь вид

$$b(t,x,u(t,x),\omega(t)) = A(t)u,$$

$$f(t,x,u(t,x),\omega(t)) = B(t)u + C(t) + \\ + \frac{\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) - C(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\varphi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x).$$

Из условия 0.2 получим

$$\sum_{k=0}^{4} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} A(t)u \right| \leqslant CU(t) \leqslant P_1(U(t)),$$

$$\sum_{k=0}^{4} \Big| \frac{\partial^k}{\partial x^k} B(t)u + C(t) + \\ + \frac{\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) - C(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\varphi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x) \Big| \leqslant \\ \leqslant C(1+U(t)) \leqslant P_1(U(t)).$$

Относительно функций $A(t), B(t), C(t), f(t,x), \varphi(t), u_0(x), \mu(t)$ предположим, что они являются достаточно гладкими и удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{k=0}^{4} \left| \frac{d^k u_0(x)}{dx^k} \right| + \sum_{k=0}^{4} \left| \frac{\partial^k f(t,x)}{\partial x^k} \right| + |A(t)| + |B(t)| + |C(t)| + |\varphi(t)| + |\varphi'(t)| \leqslant C,$$

$$|f(t,x)| \geqslant \delta > 0,$$
$$\mu(t) \geqslant \mu_0 > 0.$$

Так как для данной задачи $0 \leqslant \gamma_1 = 1$ и $0 \leqslant \gamma_2 = 1 \leqslant 1$, то выполнены условия теоремы 0.1 и существует постоянная t^* такая, что решение $u(t,x)$ задачи (0.10), (0.11) существует в классе $Z_x^2([0,t^*])$.

Заметим, что ограничение на постоянную γ_2 $(0 \leqslant \gamma_2 \leqslant 1)$ не позволяет применять теорему 0.1 для задач, в которых правая часть нагруженного уравнения нелинейным образом зависит от следов функции $u(t,x)$, как в следующем примере.

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x)\,|\,0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$ следующую задачу Коши

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + (u(t,x) + \lambda_1(t))u_x(t,x) + \lambda_2(t)f(t,x), \tag{0.14}$$
$$u(0,x) = u_0(x). \tag{0.15}$$

Функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (0.14), (0.15), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,\alpha) = \varphi_1(t), \tag{0.16}$$
$$u_x(t,\alpha) = \varphi_2(t) \tag{0.17}$$

и условиям согласования

$$u(0,\alpha) = \varphi_1(0), \tag{0.18}$$
$$u_x(0,\alpha) = \varphi_2(0). \tag{0.19}$$

Относительно функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), u_0(x), f(x)$ предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют им

$$|\varphi_1| + |\varphi_1'| + |\varphi_2| + |\varphi_2'| + \left|\frac{d^k}{dx^k}u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(t,x)\right| \leqslant C,\ k = 0,\ldots,6. \tag{0.20}$$

Также введём функцию срезки $S_\delta(y)$, сколь угодно раз дифференцируемую, обладающую следующими свойствами

$$S_\delta(y) \geqslant \frac{\delta}{3} > 0, \qquad \forall y \in E_1,$$

$$S_\delta(y) = \begin{cases} y, & y \geqslant \dfrac{\delta}{2}; \\ \dfrac{\delta}{3}, & y \leqslant \dfrac{\delta}{3}. \end{cases}$$

Путём преобразований, получим, что обратная задача сводится к вспомогательной прямой задаче вида

$$\begin{aligned} u_t = a^2 u_{xx} + \Bigg[u + \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) f(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} \Bigg] u_x + \\ + \Bigg[\frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) \varphi_2}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) u_{xx}(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} \Bigg] f(t,x), \end{aligned} \tag{0.21}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{0.22}$$

Проверим выполнение условий 0.1, 0.2. Для данной задачи функции $b(t,x,u(t,x),\omega(t))$ и $f(t,x,u(t,x),\omega(t))$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} b(t,x,u(t,x),\omega(t)) = u + \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) f(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))}, \\ f(t,x,u(t,x),\omega(t)) = \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) \varphi_2}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) u_{xx}(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} f(t,x). \end{aligned}$$

Из условия 0.2 получим

$$\sum_{k=0}^{5} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \Bigg[u + \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \right.$$

$$-\frac{(\psi_2(t)-a^2u_{xxx}(t,\alpha)-\varphi_1u_{xx}(t,\alpha))f(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2f_x(t,\alpha)-u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha))}\Bigg]\Bigg| \leqslant CU(t) \leqslant P_1(U(t)),$$

$$\sum_{k=0}^{5}\Bigg|\Bigg[\frac{(\psi_2(t)-a^2u_{xxx}(t,\alpha)-\varphi_1u_{xx}(t,\alpha))\varphi_2}{S_\delta(\varphi_2f_x(t,\alpha)-u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha))}-$$

$$-\frac{(\psi_1(t)-a^2u_{xx}(t,\alpha))u_{xx}(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2f_x(t,\alpha)-u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha))}\Bigg]\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(t,x)\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C(1+U_2(t)+U_3(t)+U_2^2(t)) \leqslant P_2(U(t)).$$

Таким образом, условия теоремы 0.1 не выполнены, так как $\gamma_2 > 1$.

В данной работе получен результат, который позволяет расширить применимость теоремы 0.1 для любых натуральных γ_2.

1 Вспомогательные обозначения, определения и теоремы

В данной главе приведены некоторые обозначения, определения и теоремы, которые будут далее использоваться в течение всей работы.

E_n – n-мерное евклидово пространство действительных чисел.

Ω – некоторая ограниченная область в E_n.

$\overline{\Omega}$ – замыкание множества Ω.

$\partial\Omega$ – граница области Ω.

$C^k(\Omega)$ - множество всех функций непрерывно дифференцируемых k раз в области Ω.

$C^{k,l}_{t,x}(\Omega)$ – множество всех функций непрерывно дифференцируемых k раз по t и l раз по x в области Ω.

Определение 1.1. Множество M нормированного пространства E_n называется *компактным*, если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Определение 1.2. Говорят, что множество M непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций *равномерно ограничено*, если для всех $f \in M$ и всех $x \in \overline{\Omega}$ существует постоянная K, такая что $|f| \leqslant K$.

Определение 1.3. Говорят, что множество M непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций *равностепенно непрерывно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой функции $f \in M$ и любых $x^{'}, x^{''} \in \overline{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству $|x^{'} - x^{''}| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x^{'}) - f(x^{''})| < \varepsilon$.

1.1 Теорема Арцела

Теорема 1.1. *Пусть M - некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций.*

Для того, чтобы множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ было компактно в $C(\overline{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$.

Доказательство приведено, например, в [21].

1.2 Принцип максимума для параболического уравнения второго порядка

Пусть $T > 0 - const, \Pi_{[0,T]} = \{(t,x) | 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$.

Рассмотрим в $\Pi_{[0,T]}$ линейное уравнение

$$u_t = a u_{xx} + b u_x + cu + f, \tag{1.1}$$

где a, b, c, f - вещественные конечнозначные функции переменных t, x.

Рассмотрим для уравнения (1.1) задачу Коши: найти непрерывную в полосе $\Pi_{[0,T]}$ функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую в $\Pi_{[0,T]}$ уравнению (1.1) и при $t = 0$ совпадающую с заданной на E_1 функцией φ:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in E_1. \tag{1.2}$$

Теорема 1.2. *Пусть функция $u(t,x)$ – классическое ограниченное решение задачи Коши* (1.1), (1.2), *a, b, c, f - вещественные конечнозначные функции переменных t, x и выполняются соотношения*

$$|\varphi(x)| \leqslant q, \quad x \in E_1,$$
$$|f(t,x)| \leqslant N, \quad c(t,x) \leqslant M, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \leqslant e^{Mt}(Nt + q).$$

Доказательство данной теоремы приведено в [20].

1.3 Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

В полосе $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1, x \in E_n\}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t, x, \overline{u}). \tag{1.3}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_l(t,x)), \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ – вектор-функции размерности $l \geqslant 1$. Через $\overline{u} = (v_0, v_1, \ldots, v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом: $v_0 = u; v_1$ – вектор, составленный из всех производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\overline{u} = (u_1, \ldots, u_l, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_l}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}, \ldots, \frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r}),$$

и система уравнений (1.3) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно.

Мы предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi^i, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^{m} \varphi_j^i, \quad j = 1, \ldots, l,$$

где φ^i – вектор-функции размерности l; φ^i, φ_j^i – j-ые компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\tau}(t) \varphi_i(t, x, \overline{u}^\tau), \tag{1.4}$$

где функции $a_{i,\tau}$ определены следующим соотношением

$$a_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & t_0 + (n + \frac{i-1}{m})\tau < t \leqslant t_0 + (n + \dfrac{i}{m})\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, \ldots, N; \quad \tau N = t_1 - t_2.$

Система (1.4) слабо аппроксимирует систему (1.3).

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau), \tag{1.5}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i, (t, x, \overline{u}^\tau)$, зависящие от τ.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1.1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \overline{u}^\tau)$ на классических решениях $\overline{u}^\tau$ системы уравнения (1.5) непрерывны по переменным $(t, x) \in \Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}(0 < \tau \leqslant \tau_0)$ – некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u^{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (1.5) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 1.2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (1.5) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в $\Pi^N_{[t_0,t_1]} = \{(t, x) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1, |x| \leqslant N\}$, последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящими в (1.3), причём

$$\max_{\Pi^N_{[t_0,t_1]}} |\varphi_i(t, x, \overline{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t, x, \overline{u}^{\tau_k})| \to 0, \quad \tau_k \to 0, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия (1.1), (1.2). Тогда вектор-функция $u(t, x)$ есть решение системы* (1.3) *в* $\Pi^N_{[t_0,t_1]}$.

Доказательство данной теоремы приведено в [7].

1.4 Существование и единственность решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

Рассмотрим на отрезке $[0,T]$ систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{aligned}
h_1'(t) &= a_{11}(t)h_1(t) + a_{12}(t)h_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)h_n(t) + f_1(t),\\
h_2'(t) &= a_{21}(t)h_1(t) + a_{22}(t)h_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)h_n(t) + f_2(t),\\
&\ldots\\
h_n'(t) &= a_{n1}(t)h_1(t) + a_{n2}(t)h_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)h_n(t) + f_n(t),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $a_{ij}(t), f_i(t),\ i,j=1,\ldots,n$ – заданные непрерывные на отрезке $[0,T]$ функции, а определитель матрицы, составленной из элементов a_{ij} отличен от нуля.

Пусть заданы начальные условия

$$h_i(t_0) = h_{0i}, \quad i=1,\ldots,n \tag{1.7}$$

Теорема 1.4. *Пусть функции $a_{ij}(t), f_i(t),\ i,j=1,\ldots,n$ – непрерывны на отрезке $[0,T]$. Тогда существует единственный набор функций $h_1(t)$, $h_2(t),\ldots,h_n(t)$, являющийся решением системы* (1.6), (1.7) *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство теоремы приведено в учебнике [19].

2 Разрешимость нагруженного уравнения типа Бюргерса специального вида

2.1 Постановка задачи

В пространстве E_1 выберем r различных точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t,x,u(t,x),\omega(t))u_x + f(t,x,u(t,x),\omega(t)), \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{2.2}$$

Обозначим через $\omega(t) = (u(t,\alpha_j), \frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,\alpha_k)), k = 0,\ldots,p_1, j = 1,\ldots,r$ вектор–функцию, компонентами которой являются следы (зависящие только от переменной t) функции $u(t,x)$ и всех её производных по x до порядка p_1 включительно. Выберем и зафиксируем постоянную $p \geqslant \max\{2, p_1\} \geqslant 2$.

Определение 2.1. Обозначим через $Z_x^p([0,t^*])$ множество функций $u(t,x)$, определённых в $G_{[0,t^*]}$, принадлежащих классу

$$C_{t,x}^{1,p}(G_{[0,t^*]}) = \left\{u(t,x)|\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,\ldots,p\right\},$$

ограниченных при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ вместе со всеми производными, входящими в соотношение

$$\sum_{k=0}^{p}\left|\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}\right| \leqslant C. \tag{2.3}$$

Определение 2.2. Под классическим решением задачи (2.1), (2.2) в $G_{[0,t^*]}$ будем понимать функцию $u(t,x) \in Z_x^p([0,t^*])$, удовлетворяющую уравнению (2.1) и начальным данным (2.2) в $G_{[0,t^*]}$.

Здесь $0 < t^* \leqslant T$ — некоторая фиксированная постоянная.

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 2.1. Функции $b(t,x,u(t,x),\omega(t))$, $f(t,x,u(t,x),\omega(t))$ – действительнозначные функции, которые определены и непрерывны для любых значений своих аргументов. Для всех $t^* \in (0,T]$ и для всех $u(t,x) \in Z_x^{p+2}([0,t^*])$ эти функции, как функции переменных $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$, непрерывны и имеют непрерывные производные, участвующие в соотношениях (2.5) и (2.6). Функция $a(t) \geqslant a_0 > 0$ – непрерывная ограниченная функция на отрезке $[0,T]$. Функция $u_0(x)$ имеет непрерывные производные, участвующие в следующем соотношении

$$\sum_{k=0}^{p+2} \left| \frac{d^k u_0(x)}{dx^k} \right| \leqslant C. \tag{2.4}$$

Условие 2.2. Введём следующие обозначения

$$U_k(0) = \sup_{x\in E_1} \left| \frac{d^k}{dx^k} u_0(x) \right|, \quad k = 0,1,\ldots,p+2,$$

$$U_k(t) = \sup_{0<\xi\leqslant t}\sup_{x\in E_1} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(\xi,x) \right|, \quad k = 0,1,\ldots,p+2,$$

$$U(t) = \sum_{k=0}^{p+2} U_k(t), \quad U(0) = \sum_{k=0}^{p+2} U_k(0).$$

Пусть для всех $t^* \in (0,T]$, для всех $t \in [0,t^*]$, для любой функции $u(t,x) \in Z_x^{p+2}([0,t^*])$ выполнены следующие оценки

$$\sum_{k=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} b(t,x,u(t,x),\omega(t)) \right| \leqslant P_{\gamma_1}(U(t)), \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=0}^{p+2} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t,x,u(t,x),\omega(t)) \right| \leqslant P_{\gamma_2}(U(t)). \tag{2.6}$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2 \geqslant 0$ – некоторые фиксированные целочисленные константы и

$$P_\xi(y) = C(1 + |y| + |y|^2 + \ldots + |y|^\xi),$$

а $C \geqslant 1$ – константа, не зависящая от функции $u(t,x)$ и её производных.

Теорема 2.1 (Существования). *Пусть выполняются условия 2.1 и 2.2, причём $0 \leqslant \gamma_1 < \infty$, $0 \leqslant \gamma_2 < \infty$, тогда существует константа $t^* \in (0, T]$, которая зависит от a_0, C из условия 2.1 и соотношений (2.5), (2.6), такая, что классическое решение $u(t,x)$ задачи (2.1), (2.2) существует в классе $Z_x^p([0,t^*])$.*

Доказательство теоремы для случая $0 \leqslant \gamma_2 \leqslant 1$ приведено в [1]. В настоящей работе рассматривается случай $2 \leqslant \gamma_2 < \infty$.

Доказательство. Для доказательства существования решения задачи Коши (2.1), (2.2) воспользуемся методом слабой аппроксимации. Рассмотрим вспомогательную расщеплённую задачу следующего вида, в которой сделан сдвиг по времени на $\left(t - \frac{\tau}{3}\right)$ в следах неизвестных функций и нелинейных членах.

$$u_t^\tau(t,x) = 3a(t)u_{xx}^\tau(t,x), \quad n\tau < t \leqslant \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau; \tag{2.7}$$

$$u_t^\tau(t,x) = 3b\left(t - \frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t - \frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t - \frac{\tau}{3}\right)\right) u_x^\tau(t,x), \\ \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leqslant \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau; \tag{2.8}$$

$$u_t^\tau(t,x) = 3f\left(t - \frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t - \frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t - \frac{\tau}{3}\right)\right), \\ \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leqslant (n+1)\tau; \tag{2.9}$$

$$u^\tau(t,x)\big|_{t \leqslant 0} = u_0(x). \tag{2.10}$$

Докажем априорные оценки, обеспечивающие компактность семейства решений $u(t,x)$ задачи (2.7)–(2.10) в классе $C_{t,x}^{1,p}(G_{[0,t^*]})$ для некоторой константы $0 < t^* \leqslant T$.

На первом дробном шаге $\left(0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}\right)$ нулевого целого шага $(n = 0)$ применим принцип максимума к задаче (2.7), (2.10) и получим оценку на функцию $u^\tau(t,x)$

$$|u^\tau(t,x)| \leqslant U_0(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}.$$

Дифференцируя задачу (2.7), (2.10) k раз по x, получаем аналогичные оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right| \leqslant U_k(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}, \quad k = 1,\ldots,p+2.$$

Суммируя полученные неравенства получим оценку

$$U^\tau(t) \leqslant U(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{3}. \tag{2.11}$$

На втором дробном шаге $\left(\frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}\right)$ решается уравнение (2.8). Так как функция $b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right)$ является непрерывной и известной из предыдущего дробного шага, то решение данного уравнения существует ([12], п. 2.6). Рассмотрим характеристическое уравнение для уравнения (2.8)

$$\frac{dx}{dt} = -3b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right).$$

Обозначим за $\varphi(\xi,\zeta,\eta)$ характеристическую функцию полученного характеристического уравнения, то есть $x = \varphi(\xi,\zeta,\eta)$ – интегральная кривая, проходящая через точку (ζ,η). Тогда решение на втором дробном шаге будет иметь вид

$$u^\tau(t,x) = u^\tau\left(\frac{\tau}{3}, \varphi\left(\frac{\tau}{3}, t, x\right)\right), \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{2.12}$$

Следовательно, справедлива следующая оценка

$$U_0^\tau(t) \leqslant U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) \leqslant U(0), \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{2.13}$$

Продифференцируем уравнение (2.8) по x и введём следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&u_x^\tau(t,x) = z^\tau(t,x),\\
&b_0^\tau(t,x) = 3b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right),\\
&b_1^\tau(t,x) = 3\frac{\partial}{\partial x}b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

В новых обозначениях продифференцированное уравнение примет вид

$$z_t^\tau = b_0^\tau(t,x) z_x^\tau + b_1^\tau(t,x) z^\tau.$$

Решение данного уравнения может быть записано в параметрической форме ([12], п. 4.3)

$$z^\tau(t,x) = e^{F_0^\tau(t,\frac{\tau}{3},\eta)} z^\tau\left(\frac{\tau}{3},\eta\right), \quad x = \varphi^\tau\left(t,\frac{\tau}{3},\eta\right),$$

где

$$F_0^\tau = F_0^\tau(t,\zeta,\eta) = -\int\limits_\zeta^t b_1^\tau(\xi,\zeta,\eta)d\xi,$$

а $x = \varphi^\tau(\xi,\zeta,\eta)$ – всё ещё характеристическая функция уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -b_0^\tau(t,x) = -3b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right).$$

Следовательно, справедлива следующая оценка

$$|u_x^\tau(t,x)| = |z^\tau(t,x)| \leqslant U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) e^{P_{\gamma_1}(U^\tau(t-\frac{\tau}{3}))\tau} \leqslant U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) e^{P_{\gamma_1}(U(0))\tau}.$$

Теперь возьмём от левой и правой частей полученного неравенства sup по $x \in E_1$

$$U_1^\tau(t) \leqslant U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) e^{P_{\gamma_1}(U(0))\tau}, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{2.14}$$

Далее продифференцируем уравнение (2.8) дважды по x и введём следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&u_{xx}^\tau(t,x) = v^\tau(t,x),\\
&c_0^\tau(t,x) = 3b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right),\\
&c_1^\tau(t,x) = 6\frac{\partial}{\partial x}b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right),\\
&c_2^\tau(t,x) = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3},x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

В новых обозначениях уравнение примет вид

$$v_t^\tau = c_0^\tau(t,x)v_x^\tau + c_1^\tau(t,x)v^\tau + c_2^\tau(t,x)z^\tau(t,x).$$

Решение данного уравнения может быть записано в параметрической форме ([12], п. 4.3)

$$v^\tau = e^{G_0^\tau(t,\frac{\tau}{3},\eta)}\Big(v^\tau\left(\frac{\tau}{3},\eta\right) + \int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} c_2^\tau\left(\xi,\varphi\left(\xi,\frac{\tau}{3},\eta\right)\right) z^\tau\left(\xi,\varphi\left(\xi,\frac{\tau}{3},\eta\right)\right) e^{G_0^\tau(\xi,\frac{\tau}{3},\eta)}d\xi\Big),$$

$x = \varphi^\tau(\xi,\zeta,\eta)$,

где

$$G_0^\tau = G_0^\tau(t,\zeta,\eta) = -\int\limits_{\zeta}^{t} c_1^\tau(\xi,\zeta,\eta)d\xi.$$

Заметим, что для функции $z^\tau(t,x)$ оценка уже получена. Следовательно, мы сможем оценить функцию $v^\tau(t,x)$

$$\begin{aligned}
&|u_{xx}^\tau(t,x)| = |v^\tau(t,x)| \leqslant \\
&\leqslant e^{2\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_2^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + 3P_{\gamma_1}(U(0))e^{2\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} U_1^\tau(\xi)d\xi\Big) \leqslant \\
&\leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_2^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + C\tau P_{\gamma_1}(U(0))U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)e^{\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big) \leqslant \\
&\leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_2^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + C\tau P_{\gamma_1}(U(0))U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big) \leqslant \\
&\leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_2^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big)(1 + C\tau P_{\gamma_1}(U(0))) \leqslant \\
&\leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_2^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big).
\end{aligned}$$

Теперь возьмём от левой и правой частей полученного неравенства sup по $x \in E_1$

$$U_2^\tau(t) \leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_2^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + U_1^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big), \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{2.15}$$

Далее будем дифференцировать уравнение (2.8) $k = 3,\dots p+2$ раза по x и, используя формулу Лейбница для k-ой производной произведения двух функций, получим в общем виде уравнение

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_t^\tau = g_0^\tau\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_x^\tau + g_1^\tau\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau + \sum_{j=2}^{k} g_j^\tau\frac{\partial^{k-j+1}}{\partial x^{k-j+1}}u^\tau,$$

где

$$g_0^\tau = 3b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right),$$
$$g_j^\tau = 3C_k^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} b\left(t-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(t-\frac{\tau}{3}\right)\right).$$

Записывая решение в явном виде, получим следующую оценку

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x)\right| \leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_k^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + CP_{\gamma_1}(U(0))\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\sum_{j=1}^{k-1} U_j^\tau(\xi)d\xi\Big) \leqslant$$
$$\leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(U_k^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + C\tau P_{\gamma_1}(U(0))e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\sum_{j=1}^{k-1} U_j^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(\sum_{j=1}^{k} U_j^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big)(1 + C\tau P_{\gamma_1}(U(0))) \leqslant$$
$$\leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(\sum_{j=1}^{k} U_j^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big), \quad k = 3, \dots, p+2, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}.$$

Теперь возьмём от левой и правой частей полученного неравенства sup по $x \in E_1$

$$U_k^\tau(t) \leqslant e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\Big(\sum_{j=1}^{k} U_j^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)\Big), \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{2.16}$$

Сложив неравенства (2.13), (2.14), (2.15) и (2.16) получим оценки решения на втором дробном шаге

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\frac{\tau}{3})e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}, \quad \frac{\tau}{3} < t \leqslant \frac{2\tau}{3}. \tag{2.17}$$

На третьем дробном шаге $\left(\frac{2\tau}{3} < t \leqslant \tau\right)$ проинтегрируем уравнение (2.9) по переменной t

$$u^\tau(t,x) = u^\tau\left(\frac{2\tau}{3}, x\right) + 3\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} f\left(\eta-\frac{\tau}{3}, x, u^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{3}, x\right), \omega^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{3}\right)\right)d\eta.$$

Из условия 2.2, будет справедливо следующее неравенство

$$U_0^\tau(t) \leqslant U_0^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\tau P_{\gamma_2}\left(U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right).$$

Дифференцируя уравнение (2.9) k раз по $x, k = 1, \ldots, p+2$ и, используя условие 2.2, получим

$$U_k^\tau(t) \leqslant U_k^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\tau P_{\gamma_2}\left(U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right).$$

Просуммировав полученные неравенства, получим

$$\begin{aligned}U^\tau(t) \leqslant U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\tau P_{\gamma_2}\left(U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right) \leqslant \\ \leqslant 1 + U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + C\tau\left(1 + U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right)^{\gamma_2} - 1 \leqslant \\ \leqslant \left(1 + U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right)\left(1 + C\tau\left(1 + U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right)^{\gamma_2-1}\right) - 1 \leqslant \\ \leqslant \left(1 + U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right) e^{C\tau\left(1+U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right)^{\gamma_2-1}} - 1. \quad (2.18)\end{aligned}$$

Используя оценки (2.11), (2.17), (2.18), на нулевом временном шаге $t \in [0, \tau]$ справедливо следующее соотношение

$$\begin{aligned}U^\tau(t) \leqslant \left(1 + U(0)e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\right) e^{C\tau\left[1+U(0)e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}\right]^{\gamma_2-1}} - 1 \leqslant \\ \leqslant (1 + U(0))e^{C\tau P_{\gamma_1}(U(0)) + C\tau(1+U(0))^{\gamma_2-1}e^{(\gamma_2-1)C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}} - 1 \leqslant \\ \leqslant (1 + U(0))e^{C\tau\left[P_{\gamma_1}(U(0)) + (1+U(0))^{\gamma_2-1}\right]e^{(\gamma_2-1)C\tau P_{\gamma_1}(U(0))}} - 1.\end{aligned}$$

Выберем $\gamma_3 = \max\{\gamma_1; \gamma_2 - 1\}$, тогда

$$U^\tau(t) \leqslant (1 + U(0))e^{C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))e^{\gamma_3 C\tau P_{\gamma_3}(U(0))}} - 1.$$

Пусть τ такое, что справедливо неравенство

$$e^{\gamma_3 C\tau P_{\gamma_3}(U(0))} \leqslant 2,$$

тогда

$$U^\tau(t) \leqslant (1 + U(0))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))} - 1, \quad t \in [0, \tau].$$

Рассуждая аналогично, на первом временном шаге $(\tau < t \leqslant 2\tau)$ получим оценку

$$
\begin{aligned}
U^\tau(t) &\leqslant (1+U^\tau(\tau))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U^\tau(\tau))} - 1 \leqslant \\
&\leqslant \left(1+(1+U(0))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))}-1\right) e^{2C\tau P_{\gamma_3}[1+(1+U(0))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))}-1]} - 1 \leqslant \\
&\qquad \leqslant (1+U(0))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))+2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))e^{2C\tau\gamma_3 P_{\gamma_3}(1+U(0))}} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant (1+U(0))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))\left[1+e^{2C\tau\gamma_3 P_{\gamma_3}(1+U(0))}\right]} - 1.
\end{aligned}
$$

Пусть τ такое, что справедливо неравенство

$$
e^{2C\tau\gamma_3 P_{\gamma_3}(1+U(0))} \leqslant 2,
$$

тогда

$$
U^\tau(t) \leqslant (1+U(0))e^{6C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))} - 1, \quad t \in [0, 2\tau].
$$

На втором целом временном шаге ($2\tau < t \leqslant 3\tau$) получим оценку

$$
\begin{aligned}
U^\tau(t) &\leqslant (1+U^\tau(2\tau))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U^\tau(2\tau))} - 1 \leqslant \\
&\leqslant \left(1+(1+U(0))e^{6C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))}-1\right) e^{2C\tau P_{\gamma_3}[1+(1+U(0))e^{6C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))}-1]} - 1 \leqslant \\
&\qquad \leqslant (1+U(0))e^{6C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))+2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))e^{6C\tau\gamma_3 P_{\gamma_3}(1+U(0))}} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant (1+U(0))e^{2C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))\left[3+e^{6C\tau\gamma_3 P_{\gamma_3}(1+U(0))}\right]} - 1.
\end{aligned}
$$

Пусть τ такое, что справедливо неравенство

$$
e^{6C\tau\gamma_3 P_{\gamma_3}(1+U(0))} \leqslant 2,
$$

тогда

$$
U^\tau(t) \leqslant (1+U(0))e^{10C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))} - 1, \quad t \in [0, 3\tau].
$$

Продолжая приведённые выше рассуждения, получим, что на i-том целом временном шаге будет верна оценка

$$
U^\tau(t) \leqslant (1+U(0))e^{(4i+2)C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))} - 1, \quad t \in [0, i\tau].
$$

Пусть t^* ($0 < t^* \leqslant T$) такое, что

$$
e^{t^* C\gamma_3 P_{\gamma_3}(1+U(0))} \leqslant 2.
$$

Тогда для всех $i \geqslant 0$, таких что $(4i+2)\tau \leqslant t^*$ справедлива следующая оценка

$$U^\tau(t) \leqslant (1+U(0))e^{(4i+2)C\tau P_{\gamma_3}(1+U(0))} - 1 \leqslant (1+U(0))e^{t^*CP_{\gamma_3}(1+U(0))} - 1.$$

Так как t^*, C, γ_3 и $U(0)$ зависят от входных данных, но не зависят от τ, то получим

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right| \leqslant U^\tau(t) \leqslant (1+U(0))e^{t^*CP_{\gamma_3}(1+U(0))} - 1 = K, \quad t \in [0, t^*]. \quad (2.19)$$

Отсюда следует равномерная по τ ограниченность функции $u^\tau(t,x)$ и её производных по x до порядка $p+2$ включительно в полосе $G_{[0,t^*]}$.

В силу уравнений (2.7)–(2.9) следует также равномерная по τ ограниченность производных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}, \quad k = 0, \ldots, p, \quad (2.20)$$

которые вместе с ограниченностью производных $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}$, $k=1,\ldots,p$ гарантируют равностепенную непрерывность в $G^N_{[0,t^*]} = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant t^*, |x| \leqslant N\}$ множества функций $\left\{\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}\right\}, k = 0, \ldots p$ для любой фиксированной константы N.

В силу теоремы Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ последовательности $u^\tau(t,x)$ решений расщеплённой задачи (2.7)-(2.10) сходится вместе с производными по x до порядка p включительно к функции $u(t,x) \in C^{1,p}_{t,x}\left(G_{[0,t^*]}\right)$. И в силу теоремы сходимости метода слабой аппроксимации [7], $u(t,x)$ – решение исходной задачи (2.1), (2.2). При этом при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{p}\left|\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}\right| \leqslant C.$$

Таким образом, $u(t,x) \in Z^p_x([0,t^*])$. Теорема доказана. □

3 Исследование единственности решения нагруженного уравнения типа Бюргерса специального вида с данными Коши

3.1 Постановка задачи

В пространстве E_1 выберем r различных точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t = a(t)u_{xx} + B_1(t,x)u_x + B_0(t,x)u + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left[\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,\alpha_k)\right)\cdot F_{k,s}(t,x)\right], \tag{3.1}$$

$$u(0,x) = 0, \tag{3.2}$$

где через $\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,\alpha_k), k = 1,\dots,r; s = 1,\dots,p_1$ обозначены следы функции $u(t,x)$ и всех её производных по x до порядка p_1 включительно. Выберем и зафиксируем постоянную $p \geqslant max\{2, p_1\} \geqslant 2$ и постоянную $t^* > 0$.

Условие 3.1. Функции $B_1(t,x)$, $B_0(t,x)$, $F_{k,s}(t,x)$ $(k = 1,\dots,r$, $s = 0,\dots,p_1)$ – действительнозначные функции, которые определены и непрерывны для любых значений своих аргументов. Для всех $t^1 \in (0,t^*]$ эти функции имеют непрерывные производные, участвующие в соотношении (3.3). Функция $a(t) \geqslant a_0 > 0$ – непрерывная ограниченная функция на интервале $[0,t^*]$,

$$\sum_{m=0}^{p_1}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}B_0\right| + \sum_{m=0}^{p_1}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}B_1\right| + \sum_{m=0}^{p_1}\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}F_{k,s}\right| \leqslant C, \quad \forall (t,x) \in G_{[0,t_1]}. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *При выполнении условия 3.1, решение задачи (3.1), (3.2) тривиально и единственно.*

Доказательство. Очевидно, что функция $u(t,x) \equiv 0$ является решением задачи (3.1), (3.2). Докажем, что это решение единственно.

Рассмотрим задачу (3.1) с начальными данными (3.2).

$$u_t = a(t)u_{xx} + u_x \cdot B_1 + u \cdot B_0 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=0}^{p_1} \left[\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s} u(t, \alpha_k) \right) \cdot F_{k,s} \right], \qquad (3.4)$$

$$u(0, x) = 0. \qquad (3.5)$$

Введём следующие обозначения

$$g_s(t) = \sup_{x \in E_1} \sup_{0 < \xi \leqslant t} \left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} u(\xi, x) \right|, \quad s = 0, \ldots, p_1.$$

Отметим, что функции $g_s(t)$ являются неотрицательными, неубывающими на отрезке $[0, t^*]$.

Применим принцип максимума для задачи (3.4), (3.5)

$$|u(\xi, x)| \leqslant e^{\xi \cdot \sup |B_0|} \left(\sum_{k=1}^{r} \sum_{s=0}^{p_1} |F_{k,s}|\, g_s(t) \right) \xi \leqslant e^{Ct^*} \left(C \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=0}^{p_1} g_s(t) \right) \xi \leqslant$$
$$\leqslant Ct \left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t) \right), \quad (\xi, x) \in G_{[0,t^*]}, \quad 0 < t \leqslant t^*. \qquad (3.6)$$

Возьмём от левой и правой частей полученного неравенства сначала $\sup\limits_{\xi \in (0,t]}$, а потом $\sup\limits_{x \in E_1}$ и в силу неотрицательности функций $g_s(t)$, получим

$$g_0(t) \leqslant Ct \left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t) \right), \quad 0 < t \leqslant t^*. \qquad (3.7)$$

Теперь продифференцируем задачу (3.4), (3.5) по x и обозначим $z(t, x) = u_x(t, x)$

$$z_t = a(t)z_{xx} + B_1 z_x + (B_{1x} + B_0)z + B_{0x}u + \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=0}^{p_1} \left[\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s} u(t, \alpha_k) \right) (F_{k,s})_x \right], \qquad (3.8)$$

$$z(0, x) = 0. \qquad (3.9)$$

Отметим, что из рассуждений приведённых выше для функции $u(t, x)$ справедливо неравенство (3.6). В силу принципа максимума справедлива следующая оценка

$$
\begin{aligned}
|z(\xi,x)| \leqslant e^{\xi\cdot\sup|B_{1x}+B_0|}\left(\sup|B_{0x}|\cdot g_0(t)+\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}|(F_{k,s})_x|\,g_s(t)\right)\xi \leqslant \\
\leqslant C\left(Ct\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right)+C\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right)\xi \leqslant \\
\leqslant C\xi\left(t^*\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right)+\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right) \leqslant \\
\leqslant Ct\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right), \quad (\xi,x)\in G_{[0,t^*]}, \quad 0<t\leqslant t^*. \quad (3.10)
\end{aligned}
$$

Возьмём от левой и правой частей полученного неравенства сначала $\sup\limits_{\xi\in(0,t]}$, а потом $\sup\limits_{x\in E_1}$ и в силу неотрицательности функций $g_s(t)$, получим

$$
g_1(t) \leqslant Ct\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right), \quad 0<t\leqslant t^*. \tag{3.11}
$$

Теперь продифференцируем задачу (3.4), (3.5) $m = 2,\ldots,p_1$ раз по x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_t = a(t)\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_{xx} + B_1\frac{\partial^m}{\partial x^m}u_x + (mB_{1x}+B_0)\frac{\partial^m}{\partial x^m}u + \\
+ H(t,x,u,B_1,B_0) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1}\left[\left(\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,\alpha_k)\right)\cdot\frac{\partial^m}{\partial x^m}F_{k,s}\right], \quad (3.12)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^m}{\partial x^m}u(0,x) = 0, \tag{3.13}
$$

где функция $H(t,x,u,B_1,B_0)$ зависит от функции $u(t,x)$ и всех её производных до порядка $m-1$ включительно, а также от функций B_1, B_0 и всех их производных до порядка m включительно.

В силу принципа максимума

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}u(\xi,x)\right| \leqslant e^{\xi\cdot\sup|mB_{1x}+B_0|}\left(C\sum_{l=0}^{m-1} g_l(t) + C\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right)\xi \leqslant \\
\leqslant C\left(mCt^*\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right)+C\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right)\xi \leqslant Ct\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right), \quad 0<t\leqslant t^*.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Возьмём от левой и правой частей полученного неравенства сначала $\sup\limits_{\xi\in(0,t]}$, а потом $\sup\limits_{x\in E_1}$ и в силу неотрицательности функций $g_s(t)$, получим

$$g_m(t) \leqslant Ct\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right), \quad 0 < t \leqslant t^*, \quad 2 \leqslant m \leqslant p_1. \tag{3.15}$$

Складывая неравенства (3.7), (3.11) и (3.15), получим следующую оценку

$$\sum_{m=0}^{p_1} g_m(t) \leqslant Ct\left(\sum_{s=0}^{p_1} g_s(t)\right), \quad 0 < t \leqslant t^*.$$

Взяв $t \in [0, \frac{1}{C})$, получим, что

$$\sum_{m=0}^{p_1} g_m(t) = 0,$$

откуда в силу неотрицательности функций $g_m(t)$ следует, что $g_m(t) = 0, m = 0, \ldots, p_1$. Следовательно

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} u(\xi, x)\right| = 0, \quad 0 < \xi \leqslant t < \frac{1}{C}, \quad x \in E_1, \quad m = 0, \ldots, p_1.$$

Рассуждая аналогично при $t \in [\frac{1}{C}, \frac{2}{C})$, получим, что

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} u(\xi, x)\right| = 0, \quad 0 < \xi \leqslant t < \frac{2}{C}, \quad x \in E_1, \quad m = 0, \ldots, p_1.$$

Через конечное число шагов получим, что $u(\xi, x) \equiv 0, \xi \in [0, t^*], x \in E_1$. $\square$

4 Примеры использования полученных результатов

4.1 Задача идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса

Рассмотрим прямую задачу (0.10), (0.11), которая исследовалась Ю. Я. Беловым и К. В. Коршуном.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$ рассмотрим задачу Коши

$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t)+ \\ + \frac{\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) - C(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\varphi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x), \quad (4.1)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in E_1. \quad (4.2)$$

Предположим, что функции $A(t), B(t), C(t), f(t,x), \varphi(t), u_0(x), \mu(t)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{k=0}^{6} \left| \frac{d^k u_0(x)}{dx^k} \right| + \sum_{k=0}^{6} \left| \frac{\partial^k f(t,x)}{\partial x^k} \right| + |A(t)| + |B(t)| + |C(t)| + |\varphi(t)| + |\varphi'(t)| \leqslant C,$$

$$|f(t,x)| \geqslant \delta > 0,$$

$$\mu(t) \geqslant \mu_0 > 0.$$

Проверим выполнение условий теоремы 2.1. Для данной задачи функции $b(t,x,u(t,x),\omega(t))$ и $f(t,x,u(t,x),\omega(t))$ будут иметь вид

$$b(t,x,u(t,x),\omega(t)) = A(t)u,$$

$$f(t,x,u(t,x),\omega(t)) = B(t)u + C(t)+ \\ + \frac{\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) - C(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\varphi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x).$$

Из условия 2.2 получим

$$\sum_{k=0}^{6} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} A(t)u \right| \leqslant CU(t) \leqslant P_1(U(t)),$$

$$\sum_{k=0}^{6}\Big|\frac{\partial^k}{\partial x^k}B(t)u + C(t) + \\ + \frac{\varphi'(t)-B(t)\varphi(t)-C(t)-\mu(t)u_{xx}(t,x_0)-A(t)\varphi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)}f(t,x)\Big| \leqslant \\ \leqslant C(1+U(t)) \leqslant P_1(U(t)).$$

Так как для данной задачи $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, то выполнены условия теоремы 2.1 и существует постоянная t^* такая, что решение $u(t,x)$ задачи (4.1), (4.2) существует в классе $Z_x^4([0,t^*])$.

Докажем, что пара функций $u(t,x)$ и $g(t)$ является решением обратной задачи

$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t) + g(t)f(t,x), \tag{4.3}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in E_1, \tag{4.4}$$

где

$$g(t) = \frac{\varphi'(t) - B(t)\varphi(t) - C(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\varphi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)}.$$

Для этого подставим в (4.1) $x = x_0$ и получим

$$u_t(t,x_0) - \varphi'(t) = A(t)u_x(t,x_0)(u(t,x_0) - \varphi(t)) + B(t)(u(t,x_0) - \varphi(t)).$$

Для функции $v(t) = u(t,x_0) - \varphi(t)$, учитывая условие согласования

$$u_0(x_0) = \varphi(0),$$

получим задачу Коши

$$v'(t) = \Big(A(t)u_x(t,x_0) + B(t)\Big)v(t),$$

$$v(0) = 0,$$

которая имеет единственное нулевое решение. Следовательно выполнено условие переопределения $u(t,x_0) = \varphi(t)$ и существует решение обратной задачи (4.3), (4.4).

Предположим, что существует два различных решения задачи (4.3), (4.4) $u_1(t,x) \neq u_2(t,x)$, $g_1(t) \neq g_2(t)$, тогда разность $u = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$ будет являться решением задачи

$$u_t = \mu(t)u_{xx} + A(t)u_1u_x + A(t)u_{2x}u + B(t)u + g(t)f(t,x), \tag{4.5}$$

$$u(0,x) = 0, \tag{4.6}$$

$$u(t,x_0) = 0. \tag{4.7}$$

Подставим в (4.5) $x = x_0$ и выразим $g(t)$

$$g(t) = -\frac{\mu(t)u_{xx}(t,x_0) + A(t)u_1(t,x_0)u_x(t,x_0) + (B(t) + A(t)u_{2x}(t,x_0))u(t,x_0)}{f(t,x_0)}.$$

Тогда $u(t,x)$ будет являться решением задачи

$$u_t = \mu(t)u_{xx} + A(t)u_1u_x + (A(t)u_{2x} + B(t))u + g(t)f(t,x), \tag{4.8}$$

$$u(0,x) = 0. \tag{4.9}$$

Проверим выполнение условий теоремы 3.1. Где согласно введённым обозначениям

$$B_1(t,x) = A(t)u_1(t,x),$$

$$B_0(t,x) = A(t)u_{2x}(t,x) + B(t),$$

$$F_{1,0} = -\frac{B(t) + A(t)u_{2x}(t,x_0)}{f(t,x_0)}f(t,x),$$

$$F_{1,1} = -\frac{A(t)u_1(t,x_0)}{f(t,x_0)}f(t,x),$$

$$F_{1,2} = -\frac{\mu(t)}{f(t,x_0)}f(t,x).$$

Поскольку функции $A(t), B(t), \mu(t), f(t,x), u_1(t,x), u_{2x}(t,x)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют условию

$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}B_0\right| + \sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}B_1\right| + \sum_{m=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}F_{1,s}\right| \leqslant C, \quad \forall (t,x) \in G_{[0,t^*]},$$

то существует только тривиальное решение задачи (4.8), (4.9). Значит $u(t,x) \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$ и решение задачи (4.5)-(4.7) также тривиально, откуда следует единственность решения обратной задачи (4.3), (4.4).

4.2 Задача идентификации двух неизвестных функций в уравнении типа Бюргерса

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x)\,|\,0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1\}$ следующую задачу Коши

$$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + (u(t,x) + \lambda_1(t))u_x(t,x) + \lambda_2(t)f(t,x), \tag{4.10}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{4.11}$$

Функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (4.10), (4.11), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,\alpha) = \varphi_1(t), \tag{4.12}$$

$$u_x(t,\alpha) = \varphi_2(t) \tag{4.13}$$

и условиям согласования

$$u(0,\alpha) = \varphi_1(0), \tag{4.14}$$

$$u_x(0,\alpha) = \varphi_2(0). \tag{4.15}$$

Относительно функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), u_0(x), f(x)$ предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют им

$$|\varphi_1| + |\varphi_1'| + |\varphi_2| + |\varphi_2'| + \left|\frac{d^k}{dx^k}u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(t,x)\right| \leqslant C,\ k = 0,\ldots,7. \tag{4.16}$$

Пусть также для всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0(\alpha) \geqslant \delta > 0. \tag{4.17}$$

Приведём исходную задачу (4.10)-(4.13) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Для этого сначала продифференцируем (4.10) по x, после чего в полученное выражение и в выражение (4.10) подставим $x = \alpha$, таким образом получим систему

$$\varphi_1'(t) = a^2 u_{xx}(t,\alpha) + (\varphi_1(t) + \lambda_1(t))\varphi_2(t) + \lambda_2(t)f(t,\alpha),$$

$$\varphi_2'(t) = a^2 u_{xxx}(t,\alpha) + \varphi_2^2(t) + (\varphi_1(t) + \lambda_1(t))u_{xx}(t,\alpha) + \lambda_2(t) f_x(t,\alpha).$$

Запишем полученную систему как систему линейных уравнений относительно $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$:

$$\lambda_1(t)\varphi_2 + \lambda_2(t) f(t,\alpha) = \varphi_1' - a^2 u_{xx}(t,\alpha) - \varphi_1\varphi_2,$$
$$\lambda_1(t) u_{xx}(t,\alpha) + \lambda_2(t) f_x(t,\alpha) = \varphi_2' - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_2^2 - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha).$$

Вычислим определители полученной системы

$$\Delta = \varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha),$$
$$\Delta_1 = (\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha) - (\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) f(t,\alpha),$$
$$\Delta_2 = (\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha))\varphi_2 - (\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) u_{xx}(t,\alpha),$$

где

$$\psi_1(t) = \varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(t), \qquad \psi_2(t) = \varphi_2'(t) - \varphi_2^2(t).$$

Подставляя в (4.10) выражения для $\lambda_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\lambda_2(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, получим

$$\begin{aligned} u_t = a^2 u_{xx} + \Bigg[u + \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha)}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha)} - \\ - \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) f(t,\alpha)}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha)}\Bigg] u_x + \\ + \Bigg[\frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha))\varphi_2}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha)} - \\ - \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) u_{xx}(t,\alpha)}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha)}\Bigg] f(t,x), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$u(0,x) = u_0(x). \quad (4.19)$$

Для того, чтобы гарантировать, что знаменатель выражения (4.18) не обращается в нуль, введём функцию срезки $S_\delta(y)$, сколь угодно раз дифференцируемую, обладающую следующими свойствами

$$S_\delta(y) \geqslant \frac{\delta}{3} > 0, \qquad \forall y \in E_1,$$

$$S_\delta(y) = \begin{cases} y, & y \geqslant \dfrac{\delta}{2}; \\ \dfrac{\delta}{3}, & y \leqslant \dfrac{\delta}{3}. \end{cases}$$

Подставим срезку в знаменатель дробных выражений и получим прямую нагруженную задачу:

$$\begin{aligned} u_t = a^2 u_{xx} + \Bigg[u + \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) f(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} \Bigg] u_x + \\ + \Bigg[\frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) \varphi_2}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) u_{xx}(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} \Bigg] f(t,x). \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{4.21}$$

Проверим выполнение условий 2.1, 2.2. Для данной задачи функции $b(t,x,u(t,x),\omega(t))$ и $f(t,x,u(t,x),\omega(t))$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} b(t,x,u(t,x),\omega(t)) = u + \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) f(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))}, \\ f(t,x,u(t,x),\omega(t)) = \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) \varphi_2}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) u_{xx}(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} f(t,x). \end{aligned}$$

Из условия 2.2 получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{5} \Bigg| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \Bigg[u + \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) f_x(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} - \\ - \frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) f(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} \Bigg] \Bigg| \leqslant CU(t) \leqslant P_1(U(t)), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{5} \Bigg| \Bigg[\frac{(\psi_2(t) - a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)) \varphi_2}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))} -$$

$$- \frac{(\psi_1(t) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)) u_{xx}(t,\alpha)}{S_\delta(\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha))}\Bigg] \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t,x)\Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant C(1 + U_2(t) + U_3(t) + U_2^2(t)) \leqslant P_2(U(t)).$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 2.1 и существует постоянная t^* такая, что решение $u(t,x)$ задачи (4.20), (4.21) существует в классе $Z_x^5([0,t^*])$.

Теперь нужно «снять» срезающую функцию, для этого покажем, что выражение под срезающей функцией удовлетворяет условию

$$\varphi_2(t) f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha) f(t,\alpha) \geqslant \frac{\delta}{2}. \tag{4.22}$$

Для этого возьмём сначала первую, а потом вторую производную по x в выражении (4.20) и проинтегрируем от 0 до t:

$$u_{xt}(t,x) = a^2 u_{xxx}(t,x) + u_x^2(t,x) + (u(t,x) + \lambda_1) u_{xx}(t,x) + \lambda_2 f_x(t,x),$$
$$u_{xxt}(t,x) = \Psi(t,x),$$
$$u_{xx}(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x) + \int\limits_0^t \Psi(\eta, x)\, d\eta, \tag{4.23}$$

где

$$\Psi(t,x) = a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t,x) + 3u_x(t,x) u_{xx}(t,x) + (u(t,x) + \lambda_1) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t,x) + \lambda_2 f_{xx}(t,x).$$

Домножим (4.23) на $(-f(t,\alpha))$ и прибавим к обеим частям уравнения $\varphi_2(t) f_x(t,\alpha)$

$$\varphi_2(t) f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha) u_{xx}(t,x) =$$
$$= \varphi_2(t) f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x) - f(t,\alpha) \int\limits_0^t \Psi(\eta, x)\, d\eta. \tag{4.24}$$

Подставим в выражение (4.24) $x = \alpha$:

$$\varphi_2(t) f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha) u_{xx}(t,\alpha) =$$
$$= \varphi_2(t) f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(\alpha) - f(t,\alpha) \int\limits_0^t \Psi(\eta, \alpha)\, d\eta.$$

В силу (4.17), получим

$$\varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha) \geqslant \delta - A(\delta)t \geqslant \frac{\delta}{2},$$

где $A(\delta)$ – некоторая положительная константа, которая зависит от δ, C. В силу определения срезающей функции $S_\delta(y)$ получим

$$S_\delta(\varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha)) = \varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha),$$

при $t \in [0, t^*]$, где $t^* = \min\left\{t_1^*, \dfrac{\delta}{2A(\delta)}\right\}$.

Таким образом, в уравнении (4.20) срезка снимается и доказано существование решения $u(t,x)$ прямой задачи (4.18), (4.19).

Докажем, что тройка функций $u(t,x), \lambda_1(t), \lambda_2(t)$, где

$$\lambda_1(t) = \frac{(\psi_1(t) - a^2u_{xx}(t,\alpha))f_x(t,\alpha) - (\psi_2(t) - a^2u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha))f(t,\alpha)}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha)},$$
$$\lambda_2(t) = \frac{(\psi_2(t) - a^2u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha))\varphi_2 - (\psi_1(t) - a^2u_{xx}(t,\alpha))u_{xx}(t,\alpha)}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha)}$$

является решением обратной задачи (4.10)-(4.13). Так как $u(t,x)$ – решение прямой задачи (4.18), (4.19), то подставляя $u(t,x), \lambda_1(t), \lambda_2(t)$ в (4.10) мы получим верное тождество.

Тройка функций $u(t,x), \lambda_1(t), \lambda_2(t)$ при $(t,x) \in G_{[0,t^*]}$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{5}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\right| + |\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| \leqslant C. \tag{4.25}$$

Докажем выполнение условий переопределения (4.12), (4.13). Для этого введём обозначения $h_1(t) = \varphi_1(t) - u(t,\alpha), h_2(t) = \varphi_2(t) - u_x(t,\alpha)$ и домножим (4.18) на $\varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha)$:

$$\begin{gathered}(\varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha))\big(u_t(t,x) - a^2u_{xx}(t,x) - u(t,x)u_x(t,x)\big) = \\ = \Big[\big(\psi_1(t) - a^2u_{xx}(t,\alpha)\big)f_x(t,\alpha) - \big(\psi_2(t) - a^2u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)\big) \times \\ \times f(t,\alpha)\Big]u_x(t,x) + \Big[\big(\psi_2(t) - a^2u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1 u_{xx}(t,\alpha)\big)\varphi_2 - \\ - \big(\psi_1(t) - a^2u_{xx}(t,\alpha)\big)u_{xx}(t,\alpha)\Big]f(t,x).\end{gathered} \tag{4.26}$$

Положим в уравнении (4.26) $x = \alpha$ и приведём подобные:

$$h_1'(t)\left(u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha) + f_x(t,\alpha)\varphi_2(t,\alpha)\right) = A_1(t)h_1(t) + B_1(t)h_2(t),$$

где

$$A_1(t) = u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha)u_x(t,\alpha) - \varphi_1(t)f_x(t,\alpha)u_x(t,\alpha),$$
$$B_1(t) = a^2 f_x(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha) + \psi_2(t)f(t,\alpha) - a^2u_{xxx}(t,\alpha)f(t,\alpha) + f_x(t,\alpha)\varphi_1'.$$

Теперь продифференцируем (4.18) по x и домножим на $\varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha)$:

$$\begin{gathered}(\varphi_2(t)f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha))\big(u_{tx}(t,x) - a^2u_{xxx}(t,x) - u_x^2(t,x) - \\ - u(t,x)u_{xx}(t,x)\big) = \Big[\big(\psi_1(t) - a^2u_{xx}(t,\alpha)\big)f_x(t,\alpha) - \\ - \big(\psi_2(t) - a^2u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1u_{xx}(t,\alpha)\big)f(t,\alpha)\Big]u_{xx}(t,x) + \Big[\big(\psi_2(t) - \\ - a^2u_{xxx}(t,\alpha) - \varphi_1u_{xx}(t,\alpha)\big)\varphi_2 - \big(\psi_1(t) - a^2u_{xx}(t,\alpha)\big)u_{xx}(t,\alpha)\Big]f_x(t,x).\end{gathered} \tag{4.27}$$

Положим в уравнении (4.27) $x = \alpha$ и приведём подобные:

$$h_2'(t)\left(u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha) - f_x(t,\alpha)\varphi_2(t,\alpha)\right) = A_2(t)h_1(t) + B_2(t)h_2(t), \tag{4.28}$$

где

$$A_2(t) = u_{xx}^2(t,\alpha)f(t,\alpha) - \varphi_2(t)f_x(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha), \tag{4.29}$$

$$B_2(t) = (f(t,\alpha)u_{xx}(t,\alpha) - \varphi_2'f_x(t,\alpha))(\varphi_2(t) + u_x(t,\alpha)). \tag{4.30}$$

Таким образом, получим систему дифференциальных уравнений

$$h_1'(t) = \tilde{A}_1(t)h_1(t) + \tilde{B}_1(t)h_2(t), \tag{4.31}$$

$$h_2'(t) = \tilde{A}_2(t)h_1(t) + \tilde{B}_2(t)h_2(t), \tag{4.32}$$

$$h_1(0) = 0, \tag{4.33}$$

$$h_2(0) = 0, \tag{4.34}$$

где

$$\tilde{A}_i(t) = \frac{A_i(t)}{\Delta}, \qquad \tilde{B}_i(t) = \frac{B_i(t)}{\Delta}, \tag{4.35}$$

где Δ определяется выражением (4.2)

Заметим, что решение системы (4.31)-(4.34) существует и единственно в силу теоремы 1.4. Нетрудно убедиться, что функции $h_1(t) = 0$, и $h_2(t) = 0$, являются решением системы (4.31)-(4.34). Тогда

$$u(t,\alpha) = \varphi_1(t),$$
$$u_x(t,\alpha) = \varphi_2(t).$$

Далее докажем единственность полученного решения в классе $Z_x^5(t^*)$.

Пусть $u_1(t,x)$, $\lambda_1^1(t)$, $\lambda_1^2(t)$ и $u_2(t,x)$, $\lambda_2^1(t)$, $\lambda_2^2(t)$ - два различных решения задачи (4.10)-(4.13), которые удовлетворяют условиям (4.22) и (4.25). Подставляя пару решений в (4.10)-(4.13),получим

$$u_{1t}(t,x) = a^2 u_{1xx}(t,x) + (u_1(t,x) + \lambda_1^1(t))u_{1x}(t,x) + \lambda_1^2(t) f(t,x), \tag{4.36}$$

$$u_{2t}(t,x) = a^2 u_{2xx}(t,x) + (u_2(t,x) + \lambda_2^1(t))u_{2x}(t,x) + \lambda_2^2(t) f(t,x), \tag{4.37}$$

$$u_1(0,x) = u_2(0,x) = u_0(x), \tag{4.38}$$

$$u_1(t,\alpha) = u_2(t,\alpha) = \varphi_1(t), \tag{4.39}$$

$$u_{1x}(t,\alpha) = u_{2x}(t,\alpha) = \varphi_2(t). \tag{4.40}$$

Введём обозначения $u = u_1(t,x) - u_2(t,x), \lambda^1 = \lambda_1^1(t) - \lambda_2^1(t), \lambda^2 = \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t)$ и вычтем (4.37) из (4.36)

$$u_t = a^2 u_{xx} + (u_1 + \lambda_1^1(t))u_x + u_{2x}u + \lambda^1(t)u_{2x} + \lambda^2(t) f(t,x), \tag{4.41}$$

$$u(0,x) = 0, \tag{4.42}$$

$$u(t,\alpha) = 0, \tag{4.43}$$

$$u_x(t,\alpha) = 0 \tag{4.44}$$

и подставим $x = \alpha$, учитывая, (4.39) и (4.40)

$$0 = a^2 u_{xx}(t,\alpha) + \varphi_2\lambda^1 + f(t,\alpha)\lambda^2.$$

Теперь продифференцируем (4.41) по x:

$$u_{tx} = a^2 u_{xxx} + u_x(u_{1x} + u_{2x}) + (u_1 + \lambda_1^1(t))u_{xx} + u_{2xx}u + \lambda^1(t)u_{2xx} + \lambda^2(t)f_x(t,x)$$

и подставим $x = \alpha$, учитывая, (4.39) и (4.40)

$$0 = a^2 u_{xxx}(t,\alpha) + (\varphi_1 + \lambda_1^1(t))u_{xx}(t,\alpha) + u_{2xx}(t,\alpha)\lambda^1 + f_x(t,\alpha)\lambda^2.$$

Получили систему линейных уравнений относительно λ^1 и λ^2

$$\begin{gathered} \varphi_2\lambda^1 + f(t,\alpha)\lambda^2 = -a^2 u_{xx}(t,\alpha), \\ u_{2xx}(t,\alpha)\lambda^1 + f_x(t,\alpha)\lambda^2 = -a^2 u_{xxx}(t,\alpha) - (\varphi_1 + \lambda_1^1(t))u_{xx}(t,\alpha). \end{gathered}$$

Решая полученную систему методом Крамера, получим

$$\lambda^1(t) = \frac{\big(a^2 u_{xxx}(t,\alpha) + (\varphi_1 + \lambda_1^1(t))u_{xx}(t,\alpha)\big)f(t,\alpha) - a^2 u_{xx}(t,\alpha)f(t,\alpha)}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{2xx}(t,\alpha)}, \tag{4.45}$$

$$\lambda^2(t) = \frac{a^2 u_{xx}(t,\alpha)u_{2xx}(t,\alpha) - \varphi_2\big(a^2 u_{xxx}(t,\alpha) + (\varphi_1 + \lambda_1^1(t))u_{xx}(t,\alpha)\big)}{\varphi_2 f_x(t,\alpha) - f(t,\alpha)u_{2xx}(t,\alpha)}. \tag{4.46}$$

Заметим, что знаменатель не обращается в нуль в силу (4.17).

Таким образом, выполнены условия теоремы 3.1, поскольку функции $u_1(t,x), u_{2x}(t,x), f(t,x)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют условию

$$\sum_{m=0}^{3}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}B_0\right| + \sum_{m=0}^{3}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}B_1\right| + \sum_{m=0}^{3}\sum_{s=0}^{3}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}F_{1,s}\right| \leqslant C, \quad \forall (t,x) \in G_{[0,t^*]},$$

то существует только тривиальное решение задачи (4.41), (4.44). Значит $u(t,x) \equiv 0$, $\lambda^1(t) \equiv 0$, $\lambda^2(t) \equiv 0$, откуда следует единственность решения обратной задачи (4.10), (4.11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является получение достаточных условий разрешимости нагруженного уравнения типа Бюргерса специального вида. Новизна полученного результата состоит в том, что он расширяет набор входных данных для ранее доказанной теоремы 0.1 и соответственно класс обратных задач, для которых вспомогательная прямая задача содержит в правой части полиномиальную нелинейность.

В работе также получены достаточные условия единственности и тривиальности решения нагруженного уравнения типа Бюргерса специального вида с нулевыми начальными условиями.

Данные результаты могут быть использованы при исследовании коэффициентных обратных задач для параболических уравнений с данными Коши. Соответствующие примеры продемонстрированы в главе 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Фроленков, И.В., On the existence of solution of some problems for nonlinear loaded parabolic equations with Cauchy data / И.В. Фроленков, М.А. Даржаа // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.– 2014. – №7. –P. 173–185.

2. Белов, Ю. Я. О разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения с параметром / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. – 2016.– №16(1). – С. 29–39.

3. Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013.– №16(3). – С. 28–40.

4. Кожанов, А. И. Обратные задачи определения параметра поглощения в уравнении диффузии / А. И. Кожанов // Математические заметки. – 2019.– Т. 106(3). – С. 395–408.

5. Аниконов, Ю. Е. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения / Ю. Е. Аниконов, Ю. Я. Белов // Докл. АН СССР. – 1989.– Т. 306(6). – С. 1289–1293.

6. Аниконов, Ю. Е. Об аналитических методах в теории обратных задач для параболических уравнений / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2011.– №11(3). – С. 20–35.

7. Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации : монография / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор – Красноярск: КрасГУ, 1999. – 236 с.

8. Белов, Ю. Я. Неклассические и обратные краевые задачи : учебное пособие / Ю.Я. Белов, С.В. Полынцева Красноярск: КрасГУ, – 2007. – 152 с.

9. Белов, Ю. Я. Неклассические и обратные краевые задачи : учебное пособие / Ю.Я. Белов, С.В. Полынцева, Р.В. Сорокин, И.В. Фроленков, О.Н. Черепанова. – Красноярск : СФУ, 2007. – 152 с.

10. Белов, Ю. Я. Обратные задачи математической физики : учебное пособие / Ю.Я. Белов, А.Ш. Любанова, С.В. Полынцева, Р.В. Сорокин, И.В. Фроленков. – Красноярск : СФУ, 2008. – 153 с.

11. Белов, Ю. А. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения / Ю.А. Белов, Ю.Е. Аниконов // Докл. АН СССР, – 1989. – Т.306, №6. – С. 1289-1293.ДАН СССР, 1989.

12. Kamke, E. The directory on the differential equations in partial derivatives of the first order, Nauka, Moskva, 1966, 260 p. (Russian).

13. Баранов, С. Н. О задаче идентификации четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения в случае неоднородных условий переопределения / С.Н. Баранов // Вестник КрасГУ: физико-математические науки. Красноярск: КрасГУ, – 2005. №1. С.149-159.

14. Кожанов, А. И. Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени / И.Р. Валитов, А.И. Кожанов // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2006.– №6(1). – С. 43–59.

15. Аниконов, Ю. Е. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. журн. индустр. матем. – 2011.– №14(2). – С. 28–33.

16. Аниконов, Ю. Е. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II / Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим // Сиб. журн. индустр. матем. – 2011.– №14(1). – С. 27–39.

17. Пятков, С. Г. О некоторых обратных задачах для эллиптических уравнений и систем / С. Г. Пятков // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010.– №13(4). – С. 417–430.

18. Кожанов, А. И. О разрешимости обратных задач восстановления параметров в эллиптических уравнениях / А. И. Кожанов // Математические заметки СВФУ. – 2020.– №27(4). – С. 14–29.

19. Жукова, Г. С. Дифференциальные уравнения : учебник / Г.С. Жукова. – Москва : ИНФРА-М, 2020. – 504 с.

20. Ильин, А. М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник // Успехи мат. наук. – 1962. – Т.17, №3. – С. 3-146.

21. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Москва : Физматлит, 2004. – 571 с.

Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

__________/И.В. Фроленков

«22» июня 2023 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

О РАЗРЕШИМОСТИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Магистерская программа 01.04.02.01 Математическое моделирование

Руководитель	22.06.23	кандидат физико-математических наук, доцент	И.В. Фроленков
Выпускник	22.06.23		И.Е. Зубров
Нормоконтролер	22.06.23		Т.Н. Шипина

Красноярск 2023