

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное  
Образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики  
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ В.В. Шайдуров

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

**Направление 02.03.01 – «Математика и компьютерные науки»**

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ**

Руководитель \_\_\_\_\_ кандидат физико-математических наук А.В. Вяткин

Выпускник \_\_\_\_\_ В.Е. Прокопчук

Нормоконтролер \_\_\_\_\_ Т.Н. Шипина

Красноярск 2023

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Сравнительный анализ трех численных методов уравнения неразрывности» содержит 37 страниц текста, 14 рисунков, 5 использованных источников.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.  
ПОЛУЛАГРАНЖЕВЫЙ МЕТОД, УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА.

Цель работы заключается в исследовании и сравнительном анализе эффективности численных методов для решения уравнения неразрывности. В работе будут теоретически описаны некоторые численные методы, а также проведено сравнение их эффективности и точности.

В результате работы были выведены три численных метода, проведены численные тесты и по их итогам проведено сравнение методов.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. Постановка задачи.....	6
2. Решение методом конечных разностей .....	8
2.1 Численная схема.....	8
2.3 Тестирование .....	10
2.3.1 Тест 1: .....	10
2.3.2 Тест 2: .....	13
3. Решение эйлера-лагранжевым методом. ....	16
3.1 Постановка задачи.....	16
3.2 Аппроксимация траекторий .....	17
3.3 Аппроксимация интегралов .....	18
3.4 Тестирование .....	21
3.4.1 Тест 1: .....	21
3.4.2 Тест 2: .....	25
4. Решение лагранжево-эйлеровым методом. ....	27
4.1 Постановка задачи.....	27
4.2 Аппроксимация траектории движения .....	28
4.3 Интегральный тождества.....	29
4.4 Аппроксимация интегралов .....	30
4.5 Тестирование .....	30
4.5.1 Тест 1: .....	30
4.5.2 Тест 2: .....	32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	35
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	37

## ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения позволяют описывать законы и процессы в различных науках, включая математику, экономику, физику, химию и другие. В курсе дифференциальных уравнений изучаются методы получения аналитических решений. Однако на практике возникают задачи, для которых найти решение может быть сложно или в принципе невозможно. В таких случаях прибегают к численным методам, которые позволяют получить приближенное решение задачи. Например, уравнение неразрывности - это фундаментальное уравнение в механике жидкостей и газов, которое описывает сохранение массы во время потока жидкости или газа. Это уравнение входит в систему уравнений Навье-Стокса, которая описывает движение жидкости или газа[1]. Решение этой системы уравнений имеет множество практических приложений, таких как прогноз погоды, проектирование автомобилей и самолетов, анализ и оптимизация процессов в нефтяной и газовой промышленности и т.д. Однако аналитическое решение уравнений Навье-Стокса возможно только в нескольких простых случаях. В большинстве прикладных случаев необходимо использовать численные методы для решения этой системы. Поэтому разработка и применение наиболее эффективных численных методов является актуальной современной задачей.

Цель данной работы заключается в исследовании и сравнительном анализе эффективности численных методов для решения уравнения неразрывности. В работе будут теоретически описаны некоторые численные методы, а также проведено сравнение их эффективности и точности.

Задачами работы являются:

1. Построение и теоретическое обоснование численного алгоритма из семейства конечных разностей для численного решения уравнения неразрывности.

2. Построение и теоретическое обоснование алгоритма из семейства эйлеро-лагранжевых методов.
3. Построение и теоретическое обоснование алгоритма из семейства лагранжево-эйлеровых методов.
4. Программная реализация изложенных методов и проведение численных экспериментов с использованием каждого из рассмотренных методов на тестовых задачах.
5. Сравнительный анализ результатов численных экспериментов и оценка преимуществ и недостатков каждого метода.

Результаты исследования могут быть полезны для научного и инженерного сообщества, которые занимаются моделированием потоков жидкости или газа, таких как инженеры-гидродинамики, аэродинамики, а также для разработчиков программного обеспечения, создающих программы для численного моделирования и расчетов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Темам, Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ. / Р. Темам. – 2-е изд. – М: Мир, 1981. – 408 с.
2. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений. / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М: Наука, 1978. – 592 с.
3. Штеттер, Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. / Х. Шеттер. – Москва: Мир, 1978. – 461 с.
4. Ковеня, В.М. Разностные методы решения многомерных задач. / В.М. Ковеня. – Новосиб: Новосиб. гос. ун-т., 2004. – 146 с.
5. Ковеня, В.М. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. / В.М. Ковеня, Д.В. Чирков. – Новосиб: Новосиб. гос. ун-т., 2013. – 86 с.

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное  
Образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики  
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ В.В. Шайдуров

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

**Направление 02.03.01 – «Математика и компьютерные науки»**

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ**

Руководитель \_\_\_\_\_ кандидат физико-математических наук А.В. Вяткин

Выпускник \_\_\_\_\_ В.Е. Прокопчук

Нормоконтролер \_\_\_\_\_ Т.Н. Шипина

Красноярск 2023