

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____/ И.В.Фроленков

«____» _____ 2023 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ РЕЗУЛЬТАНТА ДВУХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Руководитель _____ доцент, кандидат физико- В.И. Кузоватов
математических наук

Выпускник _____ А.С. Бушкова

Нормоконтролер _____ Т.Н. Шипина

Красноярск 2023

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Об одном подходе к построению результата двух целых функций» содержит 31 страницу текстового документа, 7 иллюстраций, 25 использованных источников, 1 приложение.

РЕЗУЛЬТАНТ, ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ, СТЕПЕННЫЕ СУММЫ, РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА.

Цель работы — построение результата двух целых функций, разработка и программная реализация алгоритма вычисления степенных сумм и формулы для результата.

Данные результаты имеют отношение к системам неалгебраических уравнений, возникающих в различных моделях химической кинетики (Ариса-Амундсона, Зельдовича-Семенова).

В итоге была получена формула для вычисления результата двух целых функций. Кроме этого, разработаны и программно реализованы алгоритмы вычисления степенных сумм корней и формулы для результата. Данные алгоритмы реализованы в системе компьютерной алгебры Maple.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Классический результат Сильвестра и его обобщения	5
1.1 Пример 1	7
1.2 Пример 2	8
1.3 Пример 3	8
1.4 Пример 4	10
2 Степенные суммы корней и рекуррентные формулы Ньютона	13
2.1 Пример	13
3 Основной результат	16
3.1 Результат двух целых функций	16
3.2 Алгоритм	18
3.3 Примеры	19
4 Вычисление некоторых типов сумм кратных числовых рядов	24
Заключение	28
Список использованных источников	29
Приложение А Компьютерная реализация алгоритма	32

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных инструментов, открывших путь к созданию алгоритмических методов исследования и решения систем алгебраических уравнений, явилось понятие базиса Гребнера идеала кольца многочленов, занимающее одно из центральных мест в современной компьютерной алгебре (см., например, [1]). Одно из дальнейших развитий понятия базиса Гребнера приведено в [2]. Классические схемы исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений, основанные на методе базисов Гребнера, реализованы во многих существующих системах компьютерной алгебры. Однако, такие методы неприменимы для исследования систем существенно неалгебраических уравнений (т.е. уравнений, не сводящихся к алгебраическим заменам переменных).

Вместе с тем, неалгебраические системы уравнений возникают в различных областях знания. В частности, в процессах, описываемых системами дифференциальных уравнений с правыми частями, разложимыми в ряд Тейлора, актуален вопрос об определении числа стационарных состояний в множествах определенного вида (и их локализации). Эта проблема приводит к задачам построения алгоритмов для определения числа корней заданной системы уравнений в различных множествах, определения самих корней, исключения части неизвестных из системы. В частности, в монографии [3] приведены многочисленные примеры из химической кинетики, где требуются алгоритмы исключения неизвестных. Здесь важно применение разработанных методов для качественного и численного анализа математических моделей термокинетики процессов горения и катализа с целью получения условий воспламенения, взрыва и критических явлений в химически реагирующих системах. Для приложений, в том числе, например, для уравнений химической кинетики, важной задачей является исследование зависимостей решений систем нелинейных, в том числе и неалгебраических, уравнений от параметров. В вычислительном плане эта задача является достаточно трудоемкой. Ее степень сложности сильно зависит от размерности пространства неизвестных. Поэтому снижение этой размерности за счет исключения переменных может привести к упрощению исходной задачи.

Метод исключения неизвестных из систем нелинейных алгебраических уравнений, основанный на теории многомерных вычетов, был предложен

Л.А. Айзенбергом в [4] в 1977 г. Дальнейшие модификации метода были предложены А.П. Южаковым, А.К. Цихом, В.И. Быковым, А.М. Кытмановым, М.З. Лазманом в конце прошлого века [3]. Эти идеи были в последствии развиты в работах [5, 6, 7]. Алгоритмический метод (разработанный на основе идей Л.А. Айзенберга и А.П. Южакова) был предложен М. Елкади и А. Ижером в работе [8]. Идея метода заключалась в нахождении определенных вычетных интегралов, связанных со степенными суммами корней (в положительных степенях) заданной системы уравнений, избегая нахождения самих корней и применяя затем к ним рекуррентные формулы Ньютона. По сравнению с классическим методом, данный метод сокращал время работы алгоритма, не повышая при этом кратность корней.

Еще одним методом исключения неизвестных служит построение результата двух целых функций. Хорошо известен классический результат Сильвестра для двух многочленов и метод исключения неизвестных, на нем основанный. Для неалгебраических функций такое понятие не было изучено ранее. Лишь в последние года в работах (см., например, [9]) обсуждается один подход к нахождению результата двух целых функций, основанный на рекуррентных формулах Ньютона.

Разработанный в данной работе алгоритм может быть также использован при исследовании дзета-функции корней некоторых классов целых функций, которые являются важным инструментом в создании методов исключения неизвестных из систем нелинейных уравнений, как было показано в работах [10, 11, 12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена формула для вычисления результата двух целых функций. Кроме этого, разработаны и программно реализованы алгоритмы вычисления степенных сумм корней и формулы для результата. Данные алгоритмы реализованы в системе компьютерной алгебры Maple.

Данные результаты имеют отношение к системам неалгебраических уравнений. Такого рода задачи возникают в системах неалгебраических уравнений при описании процессов химической кинетики и горения. Здесь нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений возникают при математическом моделировании процессов тепло- и массопереноса в химически активных средах. В уравнениях нелинейной и неизотермической кинетики возникающие нелинейности могут иметь не только полиномиальный, но и более общий вид, экспоненциальный. Поэтому прикладные задачи требуют развития методов исключения переменных и для систем существенно нелинейных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Von Zur Gathen, J. Modern Computer Algebra (3rd edition) / J. Von Zur Gathen, J. Gerhard. – Cambridge University Press, 2013. – 811 p.
- [2] Капцов, О. В. Системы образующих идеалов алгебры сходящихся дифференциальных рядов / О. В. Капцов // Программирование. – 2014. – № 2. – С. 32–40.
- [3] Вукон, В. I. Elimination methods in polynomial computer algebra / V. I. Вукон, А. М. Кытманов, М. З. Лазман. – Dordrecht-Boston-Basel : Kluwer Academic Publishers, 1998. – 237 p.
- [4] Айзенберг, Л. А. Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений / Л. А. Айзенберг // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 234, № 3. – С. 505-508.
- [5] Кытманов, А. А. Об аналогах рекуррентных формул Ньютона / А. А. Кытманов // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 10. – С. 40-50.
- [6] Кытманов, А. А. Алгоритм вычисления степенных сумм корней для класса систем нелинейных уравнений / А. А. Кытманов // Программирование. – 2010. – Т. 36, №2. – С. 55-63.
- [7] Kytmanov, A. A. Finding Residue Integrals for systems of Non-algebraic Equations in \mathbb{C}^n / A. A. Kytmanov, A. M. Kytmanov, E. K. Myshkina // Journal of Symbolic Computation Variables. – 2015. – Vol. 66. – P. 98-110.
- [8] Elkadi, M. Residue calculus and applications / M. Elkadi, A. Yger // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 43, Iss. 1. – P. 55–73.
- [9] Kytmanov, A. M. An approach to define the resultant of two entire functions / A. M. Kytmanov, Y. M. Naprienko // Journal Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – Vol. 62, Iss. 2. – P. 269-286.

- [10] Kytmanov, A. M. On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations / A. M. Kytmanov, S. G. Myslivets // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – Vol. 48, Iss. 5. – P. 863-870.
- [11] Kuzovатов, V. I. On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions / V. I. Kuzovатов, A. A. Kytmanov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2014. – Vol. 7, Iss. 4. – P. 489-499.
- [12] Кузоватов, В. И. Алгоритм построения аналога формулы Бине / В. И. Кузоватов, А. А. Кытманов, О. И. Кузоватова // Программирование. – 2020. – № 2. – С. 38–42.
- [13] Бурбаки, Н. Алгебра. Многочлены и поля, упорядоченные группы : перевод с французского / Н. Бурбаки ; под редакцией Ю. И. Манин. – Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 300 с.
- [14] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 431 с.
- [15] Van der Waerden, B. L. Algebra / B. L. Van der Waerden. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag, 1966. – 265 p.
- [16] Krein, M. G. The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation / M. G. Krein, M. A. Naimark // Linear and Multilinear Algebra. – 1981. – Vol. 10, Iss. 4. – P. 265–308.
- [17] Калинина, Е. К. Теория исключения: учебное пособие / Е. К. Калинина, А. Ю. Утешев ; Санкт-Петербургский государственный университет. — Санкт-Петербург : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.
- [18] Gohberg, I. C. Resultant Matrix and its Generalization. I. Resultant Operator of Matrix Polynomial / I. C. Gohberg, G. Heinig // Acta Scientiarum Mathematicarum. – 1975. – Vol. 72. – P. 41–61.
- [19] Gohberg, I. C. Resultant Matrix and its Generalization. II. Continual Analog of Resultant Matrix / I. C. Gohberg, G. Heinig // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1976. – Vol. 28. – P. 189–209.

- [20] Gohberg, I. C. Resultant Operators of a Pair of Analytic Functions / I. C. Gohberg, L. E. Lerer // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1978. – Vol. 72, Iss. 1. – P. 65–73.
- [21] Gustafsson, B. The Resultant on Compact Riemann Surfaces / B. Gustafsson, V. G. Tkachev // Communications in Mathematical Physics. – 2009. – Vol. 10. – P. 265–308.
- [22] Morozov, A. Yu. New and Old Results in Resultant Theory / A. Yu. Morozov, Sh. R. Shakirov // Theoretical and Mathematical Physics. – 2010. – Vol. 163, Iss. 2. – P. 587–617.
- [23] Быков, В. И. Нелинейные модели химической кинетики / В. И. Быков, С. Б. Цыбенова. – Москва : КРАСАНД, 2011. – 396 с.
- [24] Kytmanov, A. M. On Localization of Zeros of an Entire Function of Finite Order of Growth / A. M. Kytmanov, O. V. Khodos // Complex variables and operator theory. – 2017. – Vol. 11, Iss. 2. – P. 393–416.
- [25] Kytmanov, A. M. An Approach to the Determination of the Resultant of Two Entire Functions / A. M. Kytmanov, O. V. Khodos // Russian Mathematics. – 2018. – Vol. 62, Iss. 4. – P. 42–51.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

 / И.В. Фроленков

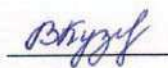
« 23 » июня 2023 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ РЕЗУЛЬТАНТА ДВУХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Руководитель
23.06.2023



доцент, кандидат физико-математических наук
В.И. Кузоватов

Выпускник
23.06.2023



А.С. Бушкова

Нормоконтролер
23.06.2023



Т.Н. Шипина

Красноярск 2023