ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ФЕКЛИСТОВ СЕРГЕЙ ВИКТОРОВИЧ

О ФЕНОМЕНЕ ГАРТОГСА ДЛЯ ПОЧТИ ОДНОРОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ КОМПАКТИФИКАЦИЕЙ

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ
(физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
канд.физ.-мат.наук
Щуплев Алексей Валерьевич

Красноярск – 2023

Оглавление

Введение

В конце 19 века многие результаты одномерного комплексного анализа были перенесены на случай многих комплексных переменных. Однако эти результаты не были столь сильными, чтобы выделить теорию функций многих комплексных переменных в самостоятельную полноценную область исследований. Теория функций многих комплексных переменных выделилась в отдельную область исследований благодаря работам Гартогса, Ока, Картана (30-40-е гг. XX в) и получила развитие в работах Бенке, Туллена, Штейна, Грауэрта, Реммерта.

Работа Гартогса [46] стала основой теории аналитического продолжения функций многих комплексных переменных и существенно отличается от соответствующей теории в одном переменном.

Один из основных результатов Гартогса — это утверждение о стирании компактных особенностей голоморфных функций в областях комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, где $(n > 1)$ [46].

Теорема. *Пусть* Ω *— область в* $\mathbb{C}^n, n > 1$, K *— компакт в* Ω *такой, что* $\Omega \setminus K$ *является связным. Тогда каждая голоморфная функция* $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ *голоморфно продолжается в* Ω.

Наиболее известное доказательство этой теоремы использует теорию интегральных представлений Бохнера и Мартинелли [18, 61, 62]. Другое известное доказательство основано на работе Эренпрайза о разрешении $\bar{\partial}$-задачи с компактными носителями для $\mathbb{C}^n$ [36] (см. также [49, с. 30]). Еще одно доказательство было дано Фичера в 1957 году, в котором использовалось решение задачи Дирихле для голоморфных функций нескольких переменных [37]. Существует также геометрическое доказательство теоремы Гартогса, основанное на методах теории Морса [63].

Существует несколько направлений для обобщения классической теоремы Гартогса:

1. Голоморфное продолжение CR-объектов (к примеру, CR-функций, определенных на границе области в $\mathbb{C}^n$) (см., к примеру, [5, 6, 24, 28, 32, 54, 58]).

2. Продолжение решений систем дифференциальных уравнений (см. [36, 45, 52, 73, 74]).

3. Голоморфное продолжение голоморфных отображений (см. [3, 4, 44, 90]).

4. Продолжение сечений аналитических пучков на комплексных аналитических пространствах (к примеру, пучков голоморфных функций) (см. краткий обзор со ссылками в главе 1, параграф 1.1).

В диссертации исследуется феномен устранения компактных особенностей для голоморфных функций в некоторых комплексных аналитических пространствах. Введем следующие общие определения:

Определение 1.1. *Пусть X — некомпактное связное комплексное аналитическое пространство и $\mathcal{O}_X$ — пучок голоморфных функций на X.*

- *Пусть $W \subset X$ — открытое и связное множество (т.е. область) и $K \subset W$ — компакт. Назовем пару (K, W) парой Гартогса, если $W \setminus K$ связно.*

- *Будем говорить, что пара Гартогса (K, W) допускает феномен Гартогса, если гомоморфизм ограничения*

$$\mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_X(W \setminus K)$$

является изоморфизмом.

- *Будем говорить, что комплексное пространство X допускает феномен Гартогса, если каждая пара Гартогса (K, W) допускает феномен Гартогса.*

Кроме того, в работе рассматриваются только приведенные, неприводимые комплексные аналитические пространства, которые будем кратко называть комплексными аналитическими многообразиями (кроме того, допускаются особенности).

Возникает естественный вопрос: при каких условиях связное некомпактное комплексное аналитическое многообразие допускает феномен Гартогса?

Ж.-П. Серр (в 1953 году) сформулировал когомологическое условие при котором многообразие X допускает феномен Гартогса, а именно, тривиальность $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$ — первой группы когомологий с компактными носителями с коэффициентами в структурном пучке [83]. В работе Серра рассматривались только неособые многообразия Штейна, но используемая когомологическая техника допускает обобщение на более общую ситуацию. В работах Харви [47] (1969) и в работе Банич и Станасила [16, 15] (1969, 1976) используется данная когомологическая техника для доказательства некоторых утверждений об устранении компактных особенностей сечений когерентных аналитических пучков на многообразиях Штейна.

В случае структурного пучка на неособом комплексном многообразии когомологическое условие Серра допускает трактовку в терминах $\bar{\partial}$-задачи, так как $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) \cong H^{0,1}_c(X)$ (где справа стоит группа когомологий Дольбо с компактными носителями). Это позволяет применить технику Эренпрайза для устранения компактных особенностей голоморфных функций (см. к примеру, [49]). Если комплексное многообразие имеет особенности, то также можно применить метод Эренпрайза, но с некоторыми изменениями и с дополнительными условиями на многообразие. Существует несколько подходов и соответствующих результатов в этом направлении:

1. Разрешение особенностей нормальных когомологически $(n-1)$-полных многообразий и применение некоторых стандартных теорем о поведении пучков и их групп когомологий при собственных голоморфных отображениях [29, 30, 80, 81] (2008-2009).

2. Применение L^2-теории для $\bar{\partial}$-операторов на нормальных когомологически $(n-1)$-полных многообразиях [78, 79, 72] (2011-2014) и на кэлеровых многообразиях [69, 70, 71] (2007-2012).

3. Использование метода интегральных формул Коппельмана и теории вычетных потоков для $\bar{\partial}$-уравнений на многообразиях Штейна [9, 10] (2011-2012).

Отметим также, что уже конечномерность (не обязательно тривиальность) группы когомологий Дольбо $H_c^{0,1}(X)$ на неособом комплексном многообразии X влечет устранение компактных особенностей голоморфных функций (см. работу Андреотти и Хилла [12, Corollary 4.3], где используется точная последовательность относительных когомологий, или работу Хенкина и Лайтерера [50, Theorem 20.11], где используется обобщение $\bar{\partial}$-техники Эренпрайза).

В случае нормальных многообразий Штейна существует также метод специальных аналитических полиэдров Бишопа и оболочек голоморфности (Росси [77] (1963 год), Лауфер [55] (1966)). Кроме того, Меркер и Портен использовали метод аналитических дисков и теорию Морса в случае нормальных $(n-1)$-полных многообразий [64] (2007-2009 г.)

Помимо комплексных многообразий с q-выпуклой или q-полной структурой, феномен Гартогса изучался в расслоениях, в торических и сферических многообразия. К примеру, в работе [34] Двилевич изучает феномен Гартогса и $\bar{\partial}$-задачу в комплексных локально тривиальных расслоениях, а в [35] он полностью описал векторные расслоения над комплексным тором, в которых имеет место феномен Гартогса. В торических многообразиях вопрос об устранении компактных особенностей голоморфных функций, вероятно, впервые изучался в работах Марчиняк [59, 60] (2009-2011). Позже в 2021 году, в работе автора (совместно с А. В. Щуплевым)[107] был получен выпукло-геометрический критерий для произвольных торических многообразий. В 2022 году этот результат был обобщен автором до случая сферических многообразий в работе [106].

Целью диссертации является изучение феномена продолжения Гартогса для нормальных (1,0)-компактифицируемых почти однородных комплексных алгебраических G-многообразий (где G – редуктивная группа Ли), а также получение выпукло-геометрического критерия в сферических многообразиях, и в таких частных случаях, как орисферические многообразия, торические многообразия.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Используя методы комплексного анализа и гомологической алгебры, получить когомологический критерий феномена Гартогса для некоторого специального класса комплексных аналитических многообразий (в частности, для $(1,0)$-компактифицируемых комплексных многообразий).

2. Используя свойства линейных представлений комплексных редуктивных и

вещественных компактных групп Ли, получить критерий феномена Гартогса в алгебро-геометрических терминах для нормальных $(1, 0)$-компактифицируемых почти однородных комплексных алгебраических G-многообразий (где G — редуктивная группа Ли).

3. При помощи методов выпуклой геометрии получить выпукло-геометрический критерий феномена Гартогса в сферических многообразиях и в таких частных случаях, как орисферические многообразия, торические многообразия.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми. Введено понятие (b, σ)-компактифицируемых многообразий, получен когомологический критерий феномена Гартогса для некоторых класса комплексных многообразий (в частности, для $(1, 0)$-компактифицируемых многообразий), получен выпукло-геометрический критерий феномена Гартогса для сферических многообразий.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные автором, являются теоретическими. Их ценность состоит в том, что они могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, в комплексной аналитической и алгебраической геометрии.

Практическое применение полученных результатов состоит в их внедрении в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов по современным проблемам многомерного комплексного анализа кафедры теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы комплексного и функционального анализа (теорема единственности для голоморфных функций, теорема Хариш-Чандра о разложении в ряд Фурье в пространствах Фреше), методы гомологической алгебры и теории пучков (точная последовательность относительных групп когомологий, лемма вырезания, точная последовательность групп когомологий для пары пространств), методы теории представлений редуктивных групп Ли (каноническое разложение алгебры регулярных функций на неприводимые представления), методы выпуклой геометрии (решетки, системы корней, конус нормирований, цветные вееры).

Основные результаты:

1. Получен когомологический критерий феномена Гартогса в некомпактных связных на границе комплексных аналитических многообразиях, допускающих открытое вложение в некоторое паракомпактное топологическое пространство, причем структурный пучок является сужением некоторого пучка абелевых групп с нулевой иррегулярностью. В частности, установлен критерий феномена Гартогса для $(1,0)$-компактифицируемых комплексных многообразий.

2. В случае нормальных $(1,0)$-компактифицируемых почти однородных алгебраических G-многообразий, где G — редуктивная группа Ли, получен критерий в терминах доминантных характеров максимального алгебраического тора группы G.

3. В случае сферических многообразий получен выпукло-геометрический критерий в терминах цветных вееров. Также рассмотрен случай орисферических и торических многообразий.

Достоверность полученных результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

1) на VIII школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 27 января – 1 февраля 2020);

2) на семинаре по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина) (Москва, 10 марта 2021, 2 марта 2022);

3) на десятой летней математической школе «Алгебра и геометрия» (Ярославль, 24 – 31 июля 2021);

4) на Конференции международных математических центров мирового уровня. Секция «Комплексный анализ» (Сочи, 9 – 13 августа 2021);

5) на IX школа-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, 21 – 26 августа 2021);

6) на Второй конференции Математических центров России. Секция «Алгебраическая геометрия» (Москва, 7 – 11 ноября 2022);

7) на Конференции по математическому анализу и дифференциальным уравнениям (Армения, г. Цахкадзор, 19 – 23 сентября 2022);

8) на Красноярском городском семинаре по многомерному комплексному анализу и алгебраической геометрии (Красноярск, 18 февраля 2021, 29 сентября 2022).

Публикации. Основные результаты опубликованы в двух научных статьях и 5 тезисах докладов. Статья [107] опубликована в журнале, индексируемом в наукометрической базе данных SCOPUS и Web of Sciences. Ее результаты получены в соавторстве с А.В. Щуплевым, в диссертации это частные случаи Теоремы

1.1 и Теоремы 3.6 для торических многообразий (частный случай Теоремы 3.6 оформлен в тексте как Следствие 3.10). Все остальные результаты диссертации получены автором самостоятельно, в том числе опубликованные в [106] в издании из Перечня рекомендованных ВАК.

Положения, выносимые на защиту.

1. Когомологический критерий феномена Гартогса для некомпактных связных на границе комплексных аналитических многообразий, допускающих открытое вложение в некоторое паракомпактное топологическое пространство, причем структурный пучок является сужением некоторого пучка абелевых групп с нулевой иррегулярностью.

2. Критерий феномена Гартогса для нормальных (1,0)-компактифицируемых почти однородных алгебраических G-многообразий в терминах весового моноида, где G — редуктивная группа Ли.

3. Выпукло-геометрический критерий для сферических многообразий в терминах цветных вееров.

Финансовая поддержка. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 97 страниц, включая 6 рисунков. Список литературы содержит 107 наименования.

В **первой главе** приведен краткий обзор результатов со ссылками на необходимую литературу о классической теореме Гартогса и ее обобщениях, введены все необходимые определения и доказывается когомологический критерий феномена Гартогса. Полученные результаты применяются к $(1,0)$-компактифицируемым многообразиям.

Основными инструментами первой главы являются точная последовательность относительных групп когомологий, лемма вырезания (см. [15] или [42]), теорема единственности для голоморфных функций.

Прежде всего напомним два определения.

Определение 1.2. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Иррегулярностью пучка $\mathcal{F}$ называется число*

$$\sigma(X, \mathcal{F}) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{F}).$$

Если X — комплексное аналитическое многообразие, то его иррегулярностью называется число $\sigma(X) := \sigma(X, \mathcal{O}_X)$.

Далее, для каждого компакта $K \subset X$ определим его топологическую оболочку $\mu(K)$ как объединение компакта K со всеми связными относительно компактными компонентами в $X \setminus K$ (см. [98], [41, Chapter VII, Section D], [66, pp. 234-236]).

Определение 1.3. *Комплексное аналитическое многообразие X называется связным на границе, если для каждого компакта $K \subset X$ множество $X \setminus \mu(K)$ является связным (т.е. $(\mu(K), X)$ — пара Гартогса).*

Сформулируем первый основной результат диссертации.

Теорема 1.1. *Пусть X — некомпактное комплексное аналитическое многообразие. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) *X связно на границе;*

2) *$\mathcal{O}_X = i^{-1}\mathcal{F}'$ для некоторого открытого вложения $i\colon X \hookrightarrow X'$ в паракомпактное топологическое пространство X' и некоторого пучка $\mathcal{F}'$ на X' с нулевой иррегулярностью.*

Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Данная теорема доказывается в несколько этапов. Во-первых, используя точную последовательность относительных групп когомологий и теорему единственности, из тривиальности группы когомологий $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$ выводится, что пара Гартогса вида (K, X) допускает феномен Гартогса (лемма 1.2). Во-вторых, если выполняется условие 2 в теореме выше, то простые рассуждения с коммутативными диаграммами позволяют из тривиальности $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$ получить, что X допускает феномен Гартогса (лемма 1.3). Для того, чтобы выполнялось обратное утверждение, необходимо выполнение одновременно двух условий 1 и 2.

Далее полученные результаты применяются к $(1, 0)$-компактифицирумым многообразиям. Вначале введем определение. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая подкатегория категории комплексных аналитических многообразий (например, подкатегория многообразий с нормальными особенностями или подкатегория G-многообразий).

Определение 1.4. *Пусть X — некомпактное комплексное аналитическое многообразие из категории $\mathcal{C}$. Пусть X' — компактное комплексное аналитическое многообразие из категории $\mathcal{C}$. Будем говорить, что многообразие X является (b, σ)-компактифицируемым при помощи X', если в категории $\mathcal{C}$ существует биголоморфизм $i\colon X \cong U$ на открытое комплексное подмногообразие $U \subset X'$, причем выполняются следующие условия:*

1) $X' \setminus U$ — собственное аналитическое подмножество, имеющее b связных компонент;

2) $\sigma(X') = \sigma$.

В той или иной форме, понятие компактифицируемого многообразия хорошо известно. К примеру в работе [53] (1977 г.) вводится понятие меромофрной структуры на некомпактном комплексном многообразии (это класс бимероморфной эквивалентности неособых компактификаций этого многообразия); некомпатное многообразие вместе с мероморфной структурой называется компактифицируемым комплексным многообразием. А в работе [94] (2010 г.) вводится понятие аналитической и алгебраической компактификации поверхности и понятие компактифицируемой поверхности.

Заметим, что в категории всех алгебраических многообразий любое многообразие допускает компактификацию (теорема Нагаты, см. [67]); более того, если многообразие является неособым, то разрешение особенностей позволяет выбрать компактификацию неособой. Пусть $\mathcal{C}$ — категория всех алгебраических многообразий, оснащенных алгебраическим действием алгебраической группы G. В некоторых ситуациях задача о компактифицируемости многообразий в категории $\mathcal{C}$ также решена. К примеру, если группа G является редуктивной, то нормальное G-многообразие допускает нормальную G-эквивариантную компактификацию (Сумихиро, см. [91]). Если G — произвольная группа, то нормальное квазипроективное G-многообразие допускает нормальную G-эквивариантную компактификацию (Брион, см. [22]).

Как правило, мы не будем упоминать выбранную категорию $\mathcal{C}$, но примем следующее соглашение: если X является нормальным (соответственно неособым, соответственно G-многообразием), то X' также является нормальным (соответственно неособым, соответственно G-многообразием) и в случае G-многообразий — отображение i является G-эквивариантным.

Иногда мы будем писать «(b, σ)-компактифицируемость» вместо «(b, σ)-компактифицируемость при помощи», если не имеет значения, при помощи какого многообразия производится компактификация, либо если это ясно из контекста.

Для (1,0)-компактифицируемых многообразий получаем следующий результат, являющийся следствием длинной точной последовательности групп когомологий для пары пространств [23, Chapter II, Section 10.3]:

Следствие 1.2. *Пусть X — $(1,0)$-компактифицируемое комплексное аналитическое многообразие, X' — соответствующая компактификация. Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_{X'}(Z) \cong \mathbb{C}$, где $Z := X' \setminus X$.*

Вторая глава посвящена нормальным (1,0)-компактифицируемым почти однородным алгебраическим G-многообразиям и феномену Гартогса в них. В ней приводятся необходимые сведения из теории редуктивных и компактных групп Ли и их рациональных представлений.

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, и G — связная комплексная группа Ли, действующая голоморфно на X. Многообразие X с заданной на нем структурой голоморфного действия группы G будем называть комплексным аналитическим G-многообразием.

Определение 2.5. *Комплексное аналитическое G-многообразие X называется почти однородным, если X имеет открытую G-орбиту Ω.*

Отметим, что открытая G-орбита является единственной и связной, а дополнение $E = X \setminus \Omega$ является аналитическим подмножеством в X [7, Section 1.7, Proposition 4].

Понятие почти однородного комплексного аналитического G-многообразия было введено Реммертом и ван де Веном [76], которое является обобщением понятия однородных G-многообразий (для последних, $E = \varnothing$).

Далее рассматриваются только нормальные почти однородные алгебраические G-многообразия, на которых алгебраически действует связная комплексная редуктивная группа Ли G (заметим, что всякая связная комплексная редуктивная группа Ли имеет единственную структуру линейной алгебраической группы с тривиальным унипотентным радикалом).

Пусть G — связная комплексная редуктивная группа Ли с вещественной компактной формой K, Ω — комплексное алгебраическое однородное G-многообразие и $\mathbb{C}[\Omega]$ — алгебра регулярных функций на Ω. Пусть $W \subset \Omega$ — K-инвариантная область. Тогда теорема Хариш-Чандра о разложении в ряд Фурье [7, Section 5.1, Theorem 5] влечет, что алгебра $\mathbb{C}[\Omega]$ всюду плотна в $\mathcal{O}_\Omega(W)$ (см. [7, Section 5.3, Theorem 2]). Этот факт допускает следующее обобщение на случай почти однородных многообразий.

Лемма 2.6. *Пусть W — K-инвариантная область в нормальном почти однородном алгебраическом G-многообразии X, пересекающая каждый G-стабильный дивизор X. Тогда пространство $\mathbb{C}[X]$ всюду плотно в $\mathcal{O}_X(W)$.*

Отметим, что если X не имеет G-стабильных дивизоров, то $codim(X \backslash \Omega) \geq 2$. Поэтому $\mathbb{C}[X] \cong \mathbb{C}[\Omega]$, $\mathcal{O}_X(W) \cong \mathcal{O}_X(W \cap \Omega)$, и лемма также справедлива.

Данная лемма обобщает известный факт из многомерного комплексного анализа о том, что голоморфные функции в области Рейнхарта $W \subset \mathbb{C}^n$ допускают разложение в степенные ряды вида $\sum\limits_{I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_I z^I$, равномерно сходящиеся на компактах в этой области (здесь $I = (i_1, \cdots, i_n)$, $z^I = z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$).

Пусть X — некомпактное нормальное почти однородное алгебраическое G-многообразие, G — комплексная редуктивная алгебраическая группа. По теореме Сумихиро [91] и по свойству универсальности нормализации, многообразие X допускает нормальную G-эквивариантную компактификацию X'. Обозначим $Z := X' \setminus X$ и предположим, что X является (1,0)-компактифицируемым при помощи X'. Как уже упоминалось выше (см. следствие 1.2), вопрос о феномене

Гартогса в почти однородном многообразии X сводится к изучению пространства $\mathcal{O}_{X'}(Z)$. В действительности достаточно изучить лишь алгебру регулярных функций в некоторой алгебраической окрестности множества Z. Опишем это подробнее.

Пусть $\mathcal{G}(X')$ — множество G-стабильных простых дивизоров X'. Теперь определим следующее многообразие

$$Y_0 := X' \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{G}(X'), D \subset X} D \tag{2.1}$$

Очевидно, что многообразие Y_0 является нормальным открытым по Зарисскому алгебраическим подмногообразием в X', являющееся почти однородным относительно группы G. Заметим также, что $Z \subset Y_0$.

Пусть $\mathbb{C}[Y_0]$ — алгебра регулярных функций на Y_0. Используя лемму 2.6 и факт существования базы системы окрестностей множества Z, состоящей из K-инвариантных открытых множеств (лемма 2.5), получаем, что канонический гомоморфизм

$$\mathbb{C}[Y_0] \to \mathcal{O}_{X'}(Z)$$

является инъективным и имеет всюду плотный образ.

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть G — связная комплексная редуктивная группа Ли, X — нормальное (1,0)-компактифицируемое почти однородное алгебраическое G-многообразие, X' — соответствующая компактификация, Y_0 — многообразие, определенное формулой (2.1). Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}[Y_0] = \mathbb{C}$.*

Сформулируем весовой критерий феномена Гартогса. Напомним, что рациональное представление V редуктивной группы G допускает следующее разложение на неприводимые представления:

$$V \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}_+(T)} V_\lambda^{(B)} \otimes V(\lambda),$$

где $\mathfrak{X}_+(T)$ — множество доминантных характеров максимального алгебраического тора $T \subset B \subset G$ (B — некоторая фиксированная борелевская подгруппа), $V(\lambda)$ — неприводимое представление группы G, соответствующее характеру λ, $V_\lambda^{(B)} := \{v \in V \mid b.v = \lambda(b)v\}$ — множество B-полуинвариантов, соответствующих характеру λ (см. раздел 2.2.1). Подпространство векторов, инвариантных относительно B, обозначим стандартным образом: V^B.

Так как алгебра регулярных функций $\mathbb{C}[Y_0]$ является рациональным представлением группы G [20, Lemma 1.5], то получаем следующее каноническое разложение

$$\mathbb{C}[Y_0] \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}_+(T)} \mathbb{C}[Y_0]_\lambda^{(B)} \otimes V(\lambda).$$

Напомним определение весового моноида многообразия.

Определение 2.8. *Пусть X — почти однородное алгебраическое G-многообразие, где G — комплексная редуктивная группа Ли. Определим весовой моноид многообразия X следующим образом:*

$$\Lambda_+(X) := \{\lambda \in \mathfrak{X}_+(T) \mid \mathbb{C}[X]_\lambda^{(B)} \neq 0\}.$$

Другими словами, весовой моноид многообразия X состоит из тех доминантных характеров, соответствующее неприводимое представление которых входит в рациональное представление $\mathbb{C}[X]$ с ненулевой кратностью.

Тогда получаем второй основной результат диссертации.

Теорема 2.4. *Пусть G — связная комплексная редуктивная группа Ли, X — нормальное (1,0)-компактифицируемое почти однородное алгебраическое*

G-многообразие, X' — соответствующая компактификация, Y_0 — многообразие, определенное формулой (2.1). Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $\Lambda_+(Y_0) = 0$, и $\mathbb{C}[Y_0]^B = \mathbb{C}$.

Помимо многообразия Y_0, получающегося из компактного многообразия X' выбрасыванием компактных в X дивизоров, полезно также рассматривать многообразие Y_1, которое получается из X' выбрасыванием всех орбит положительной коразмерности, чье замыкание лежит в X. А именно, пусть $\mathcal{OG}_k(X')$ — множество всех G-орбит в X' коразмерности k, и

$$\mathcal{OG}(X') := \bigcup_{k=1}^{\dim X'} \mathcal{OG}_k(X').$$

Тогда определим

$$Y_1 := X' \setminus \bigcup_{O \in \mathcal{OG}(X'), \overline{O} \subset X} O, \tag{2.2}$$

где $\overline{O}$ — замыкание O в X'.

Многообразие Y_1 также является открытым по Зарисскому в X' и является нормальным почти однородными G-многообразием, кроме того, $Z \subset Y_1$.

С точки зрения регулярных функций и множества всех простых B-стабильных дивизоров, многообразия Y_0 и Y_1 неразличимы, т.е. имеется канонический изоморфизм $\mathbb{C}[Y_0] \cong \mathbb{C}[Y_1]$ и каноническая биекция между множествами простых B-стабильных дивизоров: $\mathcal{B}(Y_0) = \mathcal{B}(Y_1)$. Все доказанные выше утверждения для Y_0 справедливы также для Y_1.

В **третьей главе** используются результаты главы 2 (а именно, теорема 2.4) для получения выпукло-геометрического критерия феномена Гартогса в сферических многообразиях. Также этот критерий применяется к некоторым орисферическим и торическим многообразиям.

Сферическое G-многообразие — это нормальное почти однородное алгебраическое G-многообразие, где G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, причем борелевская подгруппа $B \subset G$ действует на X с открытой орбитой.

К сферическим многообразиям относятся: аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ (однородно относительно общей аффинной группы GA_n), проективное пространство $\mathbb{P}^n$ (однородно относительно GL_{n+1}), сфера $S^n = SO_n/SO_{n-1}$, грассманианы $Gr_k(\mathbb{P}^n)$ и многообразия флагов (однородны относительно GL_{n+1}), пространство невырожденных коник $Q_n = PGL_{n+1}/PO_{n+1}$, пространство $(m \times n)$-матриц ранга r (однородно относительно $GL_m \times GL_n$). Отметим, что сферические однородные многообразия естественным образом возникают в теории представлений компактных групп Ли [1] и в исчислительной геометрии [96]. Подробнее о сферических многообразиях, другие ссылки и связанные с ними темы см. в [2, 57, 95, 96].

Открытой орбите Ω соответствует весовая решетка M, которая определяется следующим образом:

$$M := \{\lambda \in \mathfrak{X}(T) \mid \mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_\lambda \neq 0\},$$

и двойственная весовая решетка $N := Hom(M, \mathbb{Z})$. Положим также $M_\mathbb{R} := M \otimes \mathbb{R}$ и $N_\mathbb{R} := N \otimes \mathbb{R}$.

Определим следующую мультипликативную подгруппу в $\mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\}$:

$$\mathbb{C}(\Omega)^{(B)} := \{f \in \mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathfrak{X}(T) : b.f = \lambda(b)f, \forall b \in B\}.$$

Тогда имеет место изоморфизм групп $\mathbb{C}(\Omega)^{(B)}/\mathbb{C}^* \cong M$, определяемый формулой $\mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_\lambda \ni f \to \lambda \in M$.

Определим конус нормирований (подробности см. [40, Sections 4, 10] или [95, Chapter 4 and Appendix B]). Пусть $v\colon \mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ — дискретное $\mathbb{Q}$-значное нормирование. Нормирование v называется G-инвариантным, если $v(g.f) = v(f)$ для всех $f \in \mathbb{C}(\Omega)$ и $g \in G$. Множество G-инвариантных нормирований поля $\mathbb{C}(\Omega)$ обозначается через $\mathcal{V}(\Omega)$.

Можно рассматривать множество $\mathcal{V}(\Omega)$ как подмножество в $N_{\mathbb{Q}}$ [40, Corollary 4.9]. Оно является конечно-порожденным выпуклым рациональным конусом максимальной размерности [40, Corollary 10.6] и называется конусом нормирований Ω. Обозначим через $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$ конус, порожденный множеством $\mathcal{V}(\Omega)$ в $N_{\mathbb{R}}$.

Каждое сферическое многообразие с открытой G-орбитой Ω кодируется цветным веером — набором строго выпуклых конусов (цветные конусы) в вещественном векторном пространстве, которые имеют общую вершину и пересекаются в пределах конуса нормирований только вдоль общих граней (подробности см. в разделе 3.1). Будем обозначать через Σ_X цветной веер, соответствующий многообразию X, а через X_Σ сферическое многообразие, соответствующее цветному вееру Σ.

Многие свойства сферических многообразий могут быть сформулированы на языке цветных вееров. Перечислим некоторые примеры этого соответствия ([40, 95, 96]):

1. Существует биекция между множеством G-орбит многообразия X_Σ и множеством цветных конусов соответствующего цветного веера Σ.

2. Свойство компактности многообразия X_Σ эквивалентно полноте соответствующего веера (т.е. носитель $|\Sigma| := \bigcup\limits_{(\sigma,\mathcal{F})\in\Sigma} \sigma$ содержит конус $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$).

3. Эквивариантная компактификация многообразия X_Σ соответствует пополнению цветного веера Σ цветными конусами до некоторого полного цветного веера Σ'.

4. Если $X_{\Sigma'}$ — эквивариантная компактификация X_Σ, то множество

$$Z := X_{\Sigma'} \setminus X_\Sigma$$

допускает описание на языке вееров (лемма 3.7). Если $O(\sigma, \mathcal{F})$ — G-орбита, соответствующая цветному конусу $(\sigma, \mathcal{F}) \in \Sigma'$, то имеем:

$$Z = \bigcup_{(\sigma,\mathcal{F}) \in \Sigma' \setminus \Sigma} O(\sigma, \mathcal{F}).$$

Так как для компактного сферического многообразия $X_{\Sigma'}$ группа когомологий $H^1(X_{\Sigma'}, \mathcal{O}_{X'_\Sigma})$ тривиальна [21, Corollaire 1], то любое сферическое G-многообразие X_Σ является $(b,0)$-компактифицируемым при помощи $X_{\Sigma'}$ для некоторого полного цветного веера Σ', где b число связных компонент дополнения $X_{\Sigma'} \setminus X_\Sigma$. Заметим, что $b = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно (лемма 3.8). Следовательно, получаем

Предложение 3.2. *Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие с цветных веером Σ. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) X_Σ является (1,0)-компактифицируемым;

2) $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно.

Рассмотрим сферическое многообразие Y_1, определенное выше (по формуле (2.2)). Цветной веер этого многообразия устроен следующим образом (лемма 3.9):

$$\Sigma_{Y_1} = \{(\tau, \mathcal{F}') \in \Sigma' \mid (\tau, \mathcal{F}') \text{ — цветная грань некоторого цветного конуса из } \Sigma' \setminus \Sigma\}.$$

Носитель цветного веера Σ_{Y_1} в пределах конуса нормирований устроен следующим образом (лемма 3.10):

$$|\Sigma_{Y_1}| \cap \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) = \overline{\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus |\Sigma|}.$$

Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие с открытой G-орбитой Ω и открытой B-орбитой O, причем $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно. Пусть $X_{\Sigma'}$ — компактное сферическое G-многообразие, являющееся компактификацией X_Σ.

Опишем весовой моноид $\Lambda_+(Y_1)$ многообразия Y_1. Во-первых, каждому B-стабильному дивизору $D \in \mathcal{B}(Y_1)$ соответствует нормирование

$$v_D \colon \mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}.$$

В свою очередь, нормирование v_D определяет точку в двойственной весовой решетке $a_D \in N = Hom(M, \mathbb{Z})$ по формуле $\langle a_D, \lambda \rangle := v_D(f)$ для $f \in \mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_\lambda$.

Рассмотрим конус $L := \{\lambda \in M_\mathbb{R} \mid \langle a_D, \lambda \rangle \geq 0, \forall D \in \mathcal{B}(Y_1)\}$. Описание множества B-полуинвариантных векторов алгебры $\mathbb{C}[Y_1]$ (лемма 3.11) влечет, что

$$\Lambda_+(Y_1) = L \cap M.$$

Теперь определим конус C в пространстве $N_\mathbb{R}$ следующим образом

$$C := \mathbb{R}_{\geq 0} \big\langle a_D \mid D \in \mathcal{B}(Y_1) \big\rangle.$$

Несложно проверить, что $C^\vee = L$, где $C^\vee$ — двойственный конус к конусу C.

Следующая лемма описывает конус C в терминах носителя веера Σ и векторов, соответствующих B-стабильным дивизорам открытой G-орбиты Ω.

Лемма 3.12. $C = \mathbb{R}_{\geq 0} \big\langle \overline{\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|} \cup \{a_D \mid D \in \mathcal{B}(\Omega)\} \big\rangle$.

Наконец, получаем следующий выпукло-геометрический критерий, являющийся третьим основным результатом.

Теорема 3.6. *Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие с открытой G-орбитой Ω и с цветным веером Σ таким, что $\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ является связным множеством. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \langle \overline{\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|} \cup \{a_D \mid D \in \mathcal{B}(\Omega)\} \rangle = N_\mathbb{R}.$$

В частности, пусть X_Σ — некомпактное орисферическое многообразие с открытой G-орбитой Ω. Пусть U — унипотентный радикал борелевской подгруппы B, S — множество простых корней относительно B и $S^\vee$ — множество двойственных простых корней. Пусть H — стабилизатор некоторой точки $o \in \Omega$, причем $H \supset U^-$. Рассмотрим параболическую подгруппу $P \supset B$ такую, что $P^- = N_G(H)$. Напомним, что параболические подгруппы, содержащие фиксированную борелевскую подгруппу B, параметризуются подмножествами простых корней $I \subset S$. Пусть I — подмножество S, соответствующее параболической подгруппе P.

Инъективное отображение $\iota\colon M_\mathbb{R} \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \otimes \mathbb{R}$ индуцирует сюръективное отображение

$$\iota^*\colon \mathfrak{X}^*(T) \otimes \mathbb{R} \twoheadrightarrow N_\mathbb{R} := N \otimes \mathbb{R}.$$

Так как $\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) = \mathbb{N}_\mathbb{R}$ и $\{a_D \mid D \in \mathcal{B}(\Omega)\} = \{\iota^*(\alpha^\vee) \mid \alpha \in S \setminus I\}$ (см. [95, Section 28.1]), то получаем следующее утверждение.

Следствие 3.6. *Пусть X_Σ — некомпактное орисферическое G-многообразие с открытой G-орбитой Ω и с цветным веером Σ таким, что $N_\mathbb{R} \setminus |\Sigma|$ является связным множеством. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle \overline{N_\mathbb{R} \setminus |\Sigma|} \cup \iota^*((S \setminus I)^\vee)\rangle = N_\mathbb{R},$$

где $(S \setminus I)^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in S \setminus I\}$.

Кроме того, почти все однородные сферические G-многообразия допускают феномен Гартогса. А именно,

Следствие 3.7. *Любое некомпактное сферическое однородное G-многообразие допускает феномен Гартогса, за исключением $\mathbb{C}^* \times G/P^-$.*

Наиболее простой вариант выпукло-геометрического критерия доставляет теория торических многообразий. Торические многообразия являются орисферическими многообразиями. В этом случае $G = T$ — алгебраический тор, $B = T$, $U = \{e\}$, $H = \{e\}$, $\Omega = G/H = T$, $S = \emptyset$, $N = \mathfrak{X}(T), M = \mathfrak{X}^*(T)$. Так как множество $\mathcal{B}(T) = \emptyset$ и $\mathcal{V}(T) = N_{\mathbb{Q}}$, то цветной конус и цветной веер называют обычно просто конусом и веером, соответственно. Тогда получаем

Следствие 3.10. *Пусть X_Σ — некомпактное торическое многообразие с веером Σ таким, что $N_{\mathbb{R}} \setminus |\Sigma|$ является связным множеством. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{N_{\mathbb{R}} \setminus |\Sigma|}\rangle = N_{\mathbb{R}}.$$

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Щуплеву Алексею Валерьевичу за постановку задачи и внимание к работе. Автор признателен постоянным участникам Красноярского городского семинара по многомерному комплексному анализу и алгебраической геометрии за многократные полезные обсуждения и замечания о результатах диссертации.

Глава 1.

Феномен Гартогса в комплексных аналитических многообразиях

В данной главе рассматривается классическая теорема Гартогса и краткий обзор известных результатов. Вводятся понятия пары Гартогса, феномена Гартогса и (b, σ)-компактифицируемых многообразий. Применяя точную последовательность относительных групп когомологий для структурного пучка, доказывается достаточное условие феномена Гартогса. При некоторых дополнительных топологических условиях это условие оказывается также необходимым. Полученный критерий применяется к $(1, 0)$-компактифицируемым многообразиям.

1.1 Классическая теорема Гартогса и ее обобщения

Напомним формулировку классической теоремы Гартогса:

Теорема. *Пусть* Ω *— область в* $\mathbb{C}^n, n > 1$, K *— компакт в* Ω *такой, что* $\Omega \setminus K$ *является связным. Тогда каждая голоморфная функция* $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ *голоморфно продолжается в* Ω.

Классическая теорема Гартогса обобщалась в различных направлениях. Ниже приведен краткий обзор результатов в одном из таких направлений. См также обзор [75].

Внедрение теоретико-пучковых и когомологических методов в анализ (50-60-е года) позволило сформулировать следующую задачу. А именно, справедлив ли аналог теоремы Гартогса, если вместо $\mathbb{C}^n$ рассмотреть некоторое комплексное аналитическое многообразие (необязательно неособое), а вместо пучка голоморфных функций рассмотреть произвольный когерентный аналитический пучок?

Ж.-П. Серр в работе [83] (1953 год) сформулировал когомологическое условие при котором на неособом комплексном многообразии справедлива теорема Гартогса. Этим условием оказалось обращение в нуль группы когомологий $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$. В работе Серра рассматривались неособые многообразия Штейна. Как известно, на неособом многообразии Штейна X группы когомологий $H^q_c(X, \Omega^p)$ тривиальны при $q \neq n, p \geq 0$ [83]. Одним из приложений этого результата является утверждение об устранении компактных особенностей глобальных голоморфных функций в неособых многообразиях Штейна размерности $n > 1$ [83].

В 60-х годах когомологическое условие Серра стало широко известно благодаря работе Эренпрайза [36] (1961 год), который переоткрыл его в терминах существования решения в классе C^∞_c уравнения $\bar{\partial} u = f$, где f — замкнутая гладкая $(0, 1)$-форма с компактным носителем (см. также [49]). Отметим, что $\bar{\partial}$-задача играет важную роль в комплексном анализе, которая имеет глубокие следствия в алгебраической геометрии, теории ДУ в частных производных. Существование решения $\bar{\partial}$-задачи зависит главным образом от геометрии области, на которой эта задача рассматривается. Разрешимость $\bar{\partial}$-задачи влечет за собой, к примеру, различные интегральные формулы, принудительные голоморфные продолжения, голоморфные аппроксимации, обращения в нуль некоторых групп когомологий.

Андреотти и Грауэрт изучали вопросы о тривиальности и конечномерности групп когомологий аналитических пучков на q-выпуклых и q-вогнутых аналитических пространствах [13] (1962 год). Ими получен результат о продолжении когомологических классов когерентных аналитических пучков [13, Théorème 15].

В работе 1969 года по теории гиперфункций и их приложениям Р. Харви доказывает теорему двойственности Сато для когерентных аналитических пучков на многообразиях Штейна [47, Theorem 2.8]. Одним из приложений которой является результат о продолжении голоморфных линейных расслоений. А именно, линейное расслоение, определенное в дополнении к голоморфно выпуклому компакту открытого множества, всегда может быть продолжено на все открытое множество, если размерность не меньше 4, и при некоторых дополнительных условиях в размерностях 2 и 3 [47, Theorem 2.5]. Если компакт не является голоморфно выпуклым, то это неверно. Контрпример построен в работе [25] (2018 год). Другими приложениями являются результаты о препятствиях к продолжению когомологических классов [47, Corollaries 2.9, 2.10, Theorem 2.13]. В обоих случаях применяется стандартная когомологическая техника, а именно, длинная точная последовательность для относительных когомологий и лемма вырезания (см. к примеру [42]).

В работе [16] (1969 год) Банич и Станасила изучают когомологии с компактными носителями когерентных аналитических пучков (см. также их монографию [15] (1976 год)). Ими получены, независимо от работы Харви [47], две теоремы двойственности на многообразиях Штейна [16, Section 1] и рассмотрено их применение к проблемам Кузена [16, Corollaries a.3.4, a.3.5], к феномену устранения компактных особенностей [16, Corollaries a.3.2, a.3.3], к изучению границ штейновых пространств [16, Corollaries b.3.1, b.3.3] и к категории когерентных аналитических пучков, определенных вблизи границы [16, Theorem c.3.2].

В случае неособых комплексных аналитических многообразий тривиальность группы когомологий $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$ равносильна разрешимости $\bar\partial$-задачи. Это позволяет применить $\bar\partial$-технику Эренпрайза для устранения компактных особенностей голоморфных функций. А именно, искомым голоморфным продолжением функции $f \in \mathcal{O}(D \setminus K)$ является функция $F = (1-\chi)f - v$, где $\chi \in C^\infty_c(D)$ равная 1 в окрестности K и 0 вне некоторой большей окрестности, и $\bar\partial v = -f\bar\partial\chi$. Заметим, что конечномерность группы когомологий Дольбо $H^{0,1}_c(X)$ также влечет устранение компактных особенностей глобальных голоморфных функций (в работах [12, Corollary 4.3] или [50, Theorem 20.11] представлено доказательство для $(n-1)$-выпуклых неособых комплексных многообразий).

В случае комплексных аналитических многообразий с особенностями также можно применить технику Эренпрайза, но с некоторыми изменениями. Существует несколько подходов в этом направлении.

Первый подход основан на разрешении особенностей комплексных аналитических пространств (см. к примеру [14]). Несколько работ по этой теме принадлежит Руппенталю и Колою [29, 30, 80, 81]. В 2008 году Руппенталь получил доказательство теоремы Гартогса для пространств Штейна с изолированными особенностями [80]. В этом же году Руппенталь и Колою представили (независимо) доказательство теоремы Гартогса для нормальных когомологически $(n-1)$-полных комплексных многообразий [30, 81]. Позже этот результат был представлен в их совместной работе [29] (2009 год). Основная идея состоит в следующем. Пусть $\pi\colon M \to X$ — разрешение особенностей X. Так как $R^q\pi_*\Omega_M^{\dim M} = 0$ (см. [93]), то спектральная последовательность Лере, изоморфизм Дольбо, теорема

Грауэрта о прямом образе и двойственность Серра позволяют заключить, что $H^1_c(M, \mathcal{O}_M) = 0$. Поэтому на M можно применить технику Эренпрайза, но так как π является собственным отображением, а X имеет нормальные особенности, то это позволяет заключить, что в любой области в X компактные особенности голоморфных функций устранимы.

Другой подход основан на применении L^2-теории для $\bar{\partial}$-оператора. Однако в случае многообразий с особенностями не совсем очевидно какой тип дифференциальных форм и операторов нужно рассматривать. К примеру, в работах Руппенталя (см. например [78, 79] (2014 год)) рассматриваются дифференциальные формы, определенные на неособой части комплексного многообразия и являющиеся класса L^2 всюду (вплоть до сингулярной части). В его работах доказывается L^2-версия двойственности Серра для комплексных аналитических многообразий с произвольными особенностями [78, Theorem 4.1]. Затем, используя этот вариант двойственности, доказывается теорема об обращении в нуль групп когомологий [78, Theorem 4.3], и в качестве одного из следствий получается теорема Гартогса для связных нормальных когомологически $(n-1)$-полных комплексных аналитических многообразий [78, Theorem 5.1]. См. также работу [72] (2011 год) в данном направлении.

Андерссон и Самуэльсон в работах [9, 10] (2011-2012) развивают теорию интегральных формул Коппельмана для $\bar{\partial}$-уравнений на произвольных комплексных аналитических пространствах, которые позволяют построить $\bar{\partial}$-резольвенту структурного пучка, состоящую из некоторых тонких пучков потоков (называемые $\mathcal{A}$-пучками). На регулярной части эти пучки совпадают с пучками гладких форм, а соответствующая резольвента структурного пучка превращается в резольвенту Дольбо. Они также использовали формулы Коппельмана для решения $\bar{\partial}$-задачи с компактными носителями; это привело к результату об устранимости компактных особенностей глобальных голоморфных функций в произвольных связных многообразиях Штейна [10, Theorem 1.4].

Осава получил некоторые результаты об устранимости компактных особенностей голоморфных функций для некоторых областей в кэлеровых многообразиях, используя L^2-методы для решения $\bar{\partial}$-задачи [69, 70, 71]. А именно, для ограниченных областей с C^2-гладкой границей, которая не является всюду Леви-плоской; и для дополнения в компактном кэлеровом многообразии к эффективному дивизору с полуположительным нормальным расслоением, при условии что форма кривизна не равна тождественно нулю.

Перечислим некоторые другие подходы к задаче об устранении компактных особенностей.

Росси доказал устранимость компактных особенностей глобальных голоморфных функций в нормальных пространствах Штейна размерности не меньше 2, используя метод специальных аналитических полиэдров Бишопа и свойства собственных голоморфных отображений между аналитическими пространствами [77, Theorem 6.6] (1963 год). Лауфер улучшил результат Росси (а именно, он доказал устранимость компактных особенностей в произвольных областях нормального пространства Штейна), используя технику оболочек голоморфности римановых областей [55, Theorem 3] (1966).

Меркер и Портен доказали классическую теорему Гартогса используя метод аналитических дисков и теорию Морса для глобального контроля монодромии [63] (2007 год). Метод аналитических дисков появился из работ Леви, Гурвица и Гартогса [56, 51, 46], которые использовали его для доказательства некоторых частных (модельных) случаев теоремы Гартогса. Суть метода аналитических дисков хорошо описан в работе Форнеса [38] (1998) (или в ее обзоре [17]). Позже (в 2009 году), было опубликовано доказательство Меркера и Портена теоремы Гартогса для $(n-1)$-полных нормальных комплексных пространства, используя тот же метод [64].

Заметим, что все вышеперечисленные результаты относятся к многообразиям или областям с некоторой выпуклой структурой (штейновость, q-выпуклость и q-вогнутость, локальная псевдовыпуклость). Феномен устранения компактных особенностей также изучался в голоморфных расслоениях, и в многообразиях с заданным на нем голоморфным действием комплексной группы Ли.

В работе [33] (2006) Двилевич изучает аддитивную проблему Римана-Гильберта в линейных расслоениях над проективной прямой, и получает некоторые результаты о разрешимости $\bar{\partial}$-задачи с компактными носителями и результаты о продолжении типа Гартогса голоморфных функций и CR-функций. В [34] (2006) он рассматривает более общую ситуация, изучает феномен Гартогса и $\bar{\partial}$-задачу в комплексных локально тривиальных расслоениях (в частности, в комплексных векторных расслоениях). В работе 2013 года [35] Двилевич полностью охарактеризовал векторные расслоения над комплексным тором в которых имеет место феномен одновременного голоморфного продолжения CR-функций, используя теорию тета-функций.

В торических многообразиях вопрос об устранении компактных особенностей голоморфных функций вероятно впервые изучался в работах Марчиняк [59, 60] (2009 и 2011 год). Торические многообразия классифицируются выпукло-геометрическими объектами — веерами [31, 39, 68]. Веер — это набор строго выпуклых конусов с общей вершиной и с правильным примыканием. Многие свойства торических многообразий допускают описание в выпукло-геометрических терминах.

Марчиняк рассматривала торические многообразия размерности 2 и торические линейные расслоения с компактной базой; для них получено достаточное условие устранимости компактных особенностей глобальных голоморфных функций в выпукло-геометрических терминах. Позже в 2021 году, в работе [103] был получен выпукло-геометрический критерий для произвольных торических многообразий. В 2022 году этот результат был обобщен до случая сферических многообразий в работе [106].

См. также некоторые другие работы [8, 11, 26, 27, 65, 82, 86, 87, 88, 89, 92, 97, 98, 100]

1.2 Пара Гартогса и феномен Гартогса

Напомним определения пары Гартогса и феномена Гартогса.

Определение 1.1. *Пусть X — некомпактное связное комплексное аналитическое пространство и $\mathcal{O}_X$ — пучок голоморфных функций на X.*

- *Пусть $W \subset X$ — открытое и связное множество (т.е. область) и $K \subset W$ — компакт. Назовем пару (K, W) парой Гартогса, если $W \setminus K$ связно.*
- *Будем говорить, что пара Гартогса (K, W) допускает феномен Гартогса, если гомоморфизм ограничения*

$$\mathcal{O}_X(W) \to \mathcal{O}_X(W \setminus K)$$

является изоморфизмом.

- *Будем говорить, что комплексное пространство X допускает феномен Гартогса, если каждая пара Гартогса (K, W) допускает феномен Гартогса.*

Для компактных аналитических пространств понятие феномена Гартогса в указанной формулировке не имеет смысла. Действительно, пусть X — компактное аналитическое пространство, (K, X) — пара Гартогса, причем $U = X \setminus K$ является многообразием Штейна. Тогда по теореме Картана A [43, Theorem 3.5], $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(U) = \infty$, а по теореме Картана-Серра [43, Theorem 4.2], $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(X) < \infty$. Таким образом, гомоморфизм ограничения

$$\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X \setminus K)$$

не может быть изоморфизмом по соображениям размерности.

Отметим также, что феномен Гартогса имеет многомерную природу. В случае размерности 1 данное явление не наблюдается (например, можно взять $W = \mathbb{C}, K = \{0\}$, а в качестве функции взять $f = \frac{1}{z}$). В дальнейшем размерность многообразий всегда больше 1.

В работе рассматриваются только приведенные, неприводимые комплексные аналитические пространства, которые будем кратко называть комплексными аналитическими многообразиями (необязательно неособые).

1.3 Применение точной последовательности относительных когомологий

Цель данного параграфа состоит в получении когомологического условия, при котором многообразие X допускает феномен Гартогса относительно пары Гартогса. Основным инструментом является длинная точная последовательность относительных когомологий.

Пусть X — некомпактное комплексное аналитическое многообразие, $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок. Существует следующая длинная точная последовательность групп когомологий (см. [15] или [42]):

$$0 \to H^0_K(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{r_K} \mathcal{O}_X(X \setminus K) \xrightarrow{c_K} H^1_K(X, \mathcal{O}_X) \to \cdots$$

где r_K — гомоморфизм ограничения, а c_K — связывающий гомоморфизм.

Откуда видно, что группа $H^1_K(X, \mathcal{O}_X)$ является препятствием к устранению компактных особенностей сечений пучка $\mathcal{O}_X$, а группа $H^0_K(X, \mathcal{O}_X)$ является препятствием к единственности этого продолжения. В действительности, из теоремы единственности следует, что $H^0_K(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Для формулировки и доказательства когомологического условия необходимо несколько лемм.

Лемма 1.1. *Пусть X — комплексное аналитическое многообразие и (K, W) — пара Гартогса. Тогда (K, X) — пара Гартогса.*

Доказательство. По условию, открытые множества $X, W, W \setminus K$ являются связными. Необходимо доказать, что $X \setminus K$ тоже является связным. Для этого рассмотрим длинную точную последовательность Майера-Вьеториса для когомологий с комплексными коэффициентами:

$$0 \to H^0(X, \mathbb{C}) \to H^0(X \setminus K, \mathbb{C}) \oplus H^0(W, \mathbb{C}) \to H^0(W \setminus K, \mathbb{C}) \to \cdots .$$

Тогда

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^0(X \setminus K, \mathbb{C}) \oplus H^0(W, \mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{C}}(H^0(X, \mathbb{C})) =$$
$$= \dim_{\mathbb{C}}(H^0(X \setminus K, \mathbb{C})) + 1 - 1 \leq \dim_{\mathbb{C}}(H^0(W \setminus K, \mathbb{C})) = 1.$$

Откуда следует, что $X \setminus K$ связно. □

Следующая лемма дает достаточное условие того, что многообразие X допускает феномен Гартогса относительно любой пары Гартогса вида (K, X).

Лемма 1.2. *Пусть X — некомпактное комплексное аналитическое многообразие. Если $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$ тогда каждая пара Гартогса вида (K, X) допускает феномен Гартогса.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{r_K} \mathcal{O}_X(X \setminus K) \xrightarrow{c_K} H^1_K(X, \mathcal{O}_X) \to \cdots \tag{1.1}$$

Если $S, T \subset X$ — компактные множества, тогда вложение $S \subset T$ индуцирует канонический гомоморфизм $\phi_{ST} \colon H^q_S(X, \mathcal{O}_X) \to H^q_T(X, \mathcal{O}_X)$. Более того, существует канонический изоморфизм:

$$\varinjlim_S H^q_S(X, \mathcal{O}_X) \cong H^q_c(X, \mathcal{O}_X),$$

где индуктивный предел берется по семейству всех компактов $S \subset X$ (или по кофинальной части этого семейства) [15].

Теперь перейдем к индуктивному пределу по всем компактам в последовательности 1.1, введя обозначение $\varinjlim_S H^0(X \setminus S, \mathcal{O}_X) =: \mathcal{O}_X(\partial X)$. Получаем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\quad r \quad} \mathcal{O}_X(\partial X) \xrightarrow{\quad c \quad} H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0 \to \cdots \tag{1.2}$$

Индуцированный гомоморфизм $r \colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(\partial X)$ является изоморфизмом.

Пусть $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus K)$. Пусть $t_K \colon \mathcal{O}_X(X \setminus K) \to \mathcal{O}_X(\partial X)$ — естественный гомоморфизм в прямой предел. Существует сечение $\widehat{f} \in \mathcal{O}_X(X)$ такое, что $r(\widehat{f}) = t_K(f)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \arrow[rr, "r_K"] \arrow[dr, "r_{K'}"] \arrow[ddr, "r"'] & & \mathcal{O}_X(X \setminus K) \arrow[dl, "r_{KK'}"'] \arrow[ddl, "t_K"] \\
& \mathcal{O}_X(X \setminus K') \arrow[d, "t_{K'}"] & \\
& \mathcal{O}_X(\partial X) &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Тогда существует компакт $K' \subset X$ такой, что $K' \supset K$ и $\widehat{f}|_{X \setminus K'} = f|_{X \setminus K'}$ (см. диаграмму 1.3). По теореме единственности, получаем $\widehat{f}|_{X \setminus K} = f$. $\square$

1.4 Когомологический критерий феномена Гартогса

При некоторых дополнительных условиях можно полулокализовать утверждение леммы 1.2. Более того, накладывая некоторое топологическое условие, можно доказать обратное утверждение.

Вначале введем следующие определения.

Определение 1.2. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Иррегулярностью пучка $\mathcal{F}$ называется число*

$$\sigma(X, \mathcal{F}) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{F}).$$

Если X — комплексное аналитическое многообразие, то его иррегулярностью называется число $\sigma(X) := \sigma(X, \mathcal{O}_X)$.

Пример 1.1. *1. $\sigma(X) = 0$: проективные пространства и их произведения, многообразия флагов.*

2. $\sigma(X) \neq 0$: абелевы многообразия, комплексные торы.

3. Пусть $X = \mathbb{CP}^1$ *и* $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$, *тогда известно, что*

$$\sigma(X, \mathcal{F}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \geq -1; \\ -n-1, & \text{если } n < -1. \end{cases}.$$

Лемма 1.3. *Пусть* X *— некомпактное комплексное аналитическое многообразие. Предположим, что* $\mathcal{O}_X = i^{-1}\mathcal{F}'$ *для некоторого открытого вложения* $i\colon X \hookrightarrow X'$ *в некоторое паракомпактное топологическое пространство* X' *и некоторого пучка* $\mathcal{F}'$ *на* X' *с нулевой иррегулярностью. Если* $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$, *то* X *допускает феномен Гартогса.*

Доказательство. Пусть $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и (K, W) — пара Гартогса. По лемме 1.1, (K, X) — пара Гартогса. Тогда по лемме 1.2 гомоморфизм ограничения

$$\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X \setminus K)$$

является изоморфизмом.

Для четверки $K \subset W \subset X \subset X'$ имеем следующую коммутативную диаграмму с точными строками.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}'(X') \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \mathcal{F}'(X' \setminus K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_K(X', \mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & H^1(X', \mathcal{F}') = 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "r_2"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X \setminus K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_K(X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "h_2"] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(W) \arrow[r, "r_3"] & \mathcal{O}_X(W \setminus K) \arrow[r] & H^1_K(W, \mathcal{O}_X) &
\end{tikzcd}$$

Так как r_2 — изоморфизм и $X \setminus K = (X' \setminus K) \cap X$, то r_1 — сюръекция. В таком случае, $H^1_K(X', \mathcal{F}') = 0$. По свойству вырезания [15], h_1 и h_2 — канонические изоморфизмы. Поэтому $H^1_K(W, \mathcal{O}_X) = 0$.

□

Заметим, что в качестве X' можно взять одноточечную компактификацию, а в качестве пучка $\mathcal{F}'$ можно взять продолжение нулем $(\mathcal{O}_X)^{X'}$ пучка $\mathcal{O}_X$. Напомним, что пучок $(\mathcal{O}_X)^{X'}$ однозначно определяется условиями [23, Section I.2]:

$$(\mathcal{O}_X)^{X'}|_X = \mathcal{O}_X, (\mathcal{O}_X)^{X'}|_{X' \setminus X} = 0.$$

Таким образом, имеем следующее

Следствие 1.1. *Пусть X — некомпактное комплексное аналитическое многообразие. Если $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то X допускает феномен Гартогса.*

Доказательство. Заметим, что $H^1(X', (\mathcal{O}_X)^{X'}) \cong H^1_c(X', (\mathcal{O}_X)^{X'}) \cong H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$. Первый изоморфизм следует из компактности X', а второй следует из [23, Theorem 10.1]. Далее, так как $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то $H^1(X', (\mathcal{O}_X)^{X'}) = 0$. Тем самым оказываемся в условиях леммы 1.3. □

Накладывая некоторые дополнительные условия топологического характера на многообразие X, удается обратить утверждение леммы 1.3. Для этого потребуется понятие связного на границе многообразия.

Для каждого компакта $K \subset X$ определим так называемую топологическую оболочку $\mu(K)$, которая есть объединение компакта K со всеми связными относительно компактными компонентами множества $X \setminus K$ (см. [98], [41, Chapter VII, Section D], [66, pp. 234-236]).

Определение 1.3. *Комплексное аналитическое многообразие X называется связным на границе, если для каждого компакта $K \subset X$ множество $X \setminus \mu(K)$ является связным (т.е. $(\mu(K), X)$ — пара Гартогса).*

Выделим класс комплексных аналитических многообразий, для которых условие тривиальности группы $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы X допускало феномен Гартогса.

Теорема 1.1. *Пусть X — некомпактное комплексное аналитическое многообразие. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) X связно на границе;

2) $\mathcal{O}_X = i^{-1}\mathcal{F}'$ для некоторого открытого вложения $i\colon X \hookrightarrow X'$ в паракомпактное топологическое пространство X' и некоторого пучка $\mathcal{F}'$ на X' с нулевой иррегулярностью.

Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Доказательство. Достаточность доказана в лемме 1.3. Теперь допустим, что X допускает феномен Гартогса.

Для любой пары Гартогса (K, X) рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}'(X') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}'(X' \setminus K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_K(X', \mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X', \mathcal{F}') = 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X \setminus K) \arrow[r] & H^1_K(X, \mathcal{O}_X) &
\end{tikzcd}$$

Определим

$$E^0(\mathcal{F}') := \varinjlim_{K} \mathcal{F}'(X' \setminus K),$$

и

$$E^1_c(\mathcal{F}') := \varinjlim_{K} H^1_K(X', \mathcal{F}')$$

где индуктивный предел берется по всем компактам K в X (заметим, что не каждый компакт в X' является компактом в X). Свойство вырезания (см. [15]) влечет, что

$$E^1_c(\mathcal{F}') \cong H^1_c(X, \mathcal{O}_X).$$

Так как для каждого компакта $K \subset X$ множество $X \setminus \mu(K)$ связно, то гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X \setminus \mu(K))$ является изоморфизмом. Поэтому гомоморфизм $\mathcal{F}'(X') \to \mathcal{F}'(X' \setminus \mu(K))$ сюръективен.

Имеем следующую точную последовательность:

$$\mathcal{F}'(X') \xrightarrow{\quad r_1 \quad} E^0(X') \xrightarrow{\qquad} E^1_c(X') \longrightarrow H^1(X', \mathcal{F}') = 0$$

где r_1 сюръективно. Следовательно, $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$. □

1.5 $(1,0)$-Компактифицируемые многообразия

В этом разделе рассматривается случай когда открытое вложение i, рассмотренное в разделе 1.4, является компактификацией. В этом случае помимо иррегулярности пучка, возникает еще одна числовая характеристика — число связных компонент $X' \setminus X$.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая подкатегория категории комплексных аналитических многообразий (например, подкатегория многообразий с нормальными особенностями или подкатегория G-многообразий).

Определение 1.4. *Пусть X — некомпактное комплексное аналитическое многообразие из категории $\mathcal{C}$. Пусть X' — компактное комплексное аналитическое многообразие из категории $\mathcal{C}$. Будем говорить, что многообразие X является (b, σ)-компактифицируемым при помощи X', если в категории $\mathcal{C}$ существует биголоморфизм $i\colon X \cong U$ на открытое комплексное подмногообразие $U \subset X'$, причем выполняются следующие условия:*

1) $X' \setminus U$ — собственное аналитическое подмножество, имеющее b связных компонент;

2) $\sigma(X') = \sigma$.

В той или иной форме, понятие компактифицируемого многообразия хорошо известно. К примеру, в работе [53] (1977 г.) вводится понятие меромофрной структуры на некомпактном комплексном многообразии (это класс бимероморфной эквивалентности неособых компактификаций этого многообразия); некомпатное многообразие вместе с мероморфной структурой называется компактифицируемым комплексным многообразием. В работе [94] (2010 г.) вводится понятие аналитической и алгебраической компактификации поверхности и понятие компактифицируемой поверхности. В определении выше, помимо обычной аналитической компактицируемости, требуется, чтобы иррегулярность компактификации была равна фиксированному числу σ, а число связных компонент «границы» равно фиксированному числу b; кроме того, многообразие, его компактификация и компактифицирующее вложение должны быть из одной фиксированной категории $\mathcal{C}$.

Одно и тоже многообразие может быть компактифицировано разными способами. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.2. *Пусть* $\mathcal{C}$ *— категория всех алгебраических многообразий. Одномерный комплексный алгебраический тор* $\mathbb{C}^*$ *можно компактифицировать следующим образом:*

1. *многообразие* $\mathbb{C}^*$ *является* $(2,0)$*-компактифицируемым при помощи проективной прямой* $\mathbb{CP}^1$*.*

2. *многообразие* $\mathbb{C}^*$ *является* $(1,1)$*-компактифицируемым при помощи некоторой проективной кубической кривой. Действительно, рассмотрим проективную кубическую кривую* X' *(«декартов лист») заданную уравнением*

$z_1^3 + z_2^3 - z_0 z_1 z_2 = 0$. *Тогда вложение* $\phi\colon \mathbb{C}^* \to X'$ *задается по формуле* $\phi(k) = [(1+k^3) : k : k^2]$. *В этом случае* $b = 1$. *Покажем, что* $\sigma = 1$. *Пусть* H *— дивизор гиперплоскости (заданной уравнением* $z_0 = 0$*),* $\mathcal{I}$ *— пучок идеалов кривой* X' *(в действительности,* $\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(-3H)$*, так как кривая* X' *имеет степень 3). Заметим, что каноническое расслоение устроено следующим образом:* $K_{\mathbb{CP}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(-3H)$. *Из точной последовательности* $0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}/\mathcal{I} \to 0$*, двойственности Серра и факта* $H^i(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}) = 0, \forall i > 0$*, получаем*

$$\sigma = \dim_{\mathbb{C}}(H^1(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}/\mathcal{I})) = \dim_{\mathbb{C}}(H^2(\mathbb{CP}^2, \mathcal{I})) = \\ = \dim_{\mathbb{C}}(H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{I}^* \otimes K_{\mathbb{CP}^2})) = \dim_{\mathbb{C}}(H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}) = 1 \quad (1.4)$$

Пусть $\mathcal{C}$ *— категория всех неособых алгебраических многообразий. Тогда одномерный комплексный алгебраический тор* $\mathbb{C}^*$ *можно компактифицировать только при помощи проективной прямой* $\mathbb{CP}^1$.

Замечание 1.1. *Заметим, что в категории всех алгебраических многообразий, любое многообразие допускает компактификацию (теорема Нагаты, см. [67]); более того, если многообразие неособое, то разрешение особенностей позволяет выбрать компактификацию неособой. Пусть* $\mathcal{C}$ *— категория всех алгебраических многообразий, оснащенных алгебраическим действием алгебраической группы* G*. В некоторых ситуациях задача о компактифицируемости многообразий в категории* $\mathcal{C}$ *также решена. К примеру, если группа* G *является редуктивной, то нормальное* G*-многообразие допускает нормальную* G*-эквивариантную компактификацию (Сумихиро, см. [91]). Если* G *— произвольная группа, то нормальное квазипроективное* G*-многообразие допускает нормальную* G*-эквивариантную компактификацию (Брион, см. [22]).*

Как правило, мы не будем упоминать выбранную категорию $\mathcal{C}$, но примем следующее **соглашение**: если X является нормальным (соответственно неособым, соответственно G-многообразием), то X' также является нормальным (соответственно неособым, соответственно G-многообразием) и в случае G-многообразий — отображение i является G-эквивариантным.

Иногда будем писать «(b,σ)-компактифицируемость» вместо «(b,σ)-компактифицируемость при помощи», если не имеет значения, при помощи какого многообразия производится компактификация, либо если это ясно из контекста.

Приведем примеры (b,σ)-компактифицируемых многообразий.

Пример 1.3. *1. При $n > 1$ многообразия $\mathbb{C}^n$, $(\mathbb{C}^*)^n$ являются $(1,0)$-компактифицируемыми многообразиями (при помощи проективного пространства $\mathbb{CP}^n$).*

2. $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ является $(2,0)$-компактифицируемым многообразием (при помощи проективного пространства $\mathbb{CP}^n$).

3. Рассмотрим $X' = \mathbb{C}^\sigma/\Lambda$ — комплексный тор и Z — аналитическое множество, имеющее b связных компонент. Тогда $X' \setminus Z$ является (b,σ)-компактифицируемым многообразием (при помощи X').

Ограничиваясь случаем $(1,0)$-компактифицируемости многообразия X, получаем следующее следствие из теоремы 1.1.

Следствие 1.2. *Пусть X — $(1,0)$-компактифицируемое комплексное аналитическое многообразие, X' — соответствующая компактификация. Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_{X'}(Z) \cong \mathbb{C}$, где $Z := X' \setminus X$.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1.1 и из длинной точной последовательности пары [23, Chapter II, Section 10.3]. А именно, имеем точную последовательность

$$0 \to H^0_c(X, \mathcal{O}_X) = 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}(X') = \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}(Z) \to$$

$$\longrightarrow H^1_c(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) = 0 \to \cdots$$

Откуда получаем требуемое. □

Таким образом, X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда в достаточно малой окрестности множества Z отсутствуют непостоянные голоморфные функции.

Глава 2.

Почти однородные алгебраические G-многообразия

Цель данной главы — изучить феномен Гартогса в почти однородных $(1,0)$-компактифицируемых алгебраических G-многообразиях.

2.1 Почти однородные G-многообразия

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие и G — связная комплексная группа Ли, действующая голоморфно на X. Многообразие X с заданной на нем структурой голоморфного действия группы G будем называть комплексным аналитическим G-многообразием.

Определение 2.5. *Комплексное аналитическое G-многообразие X называется почти однородным, если X имеет открытую G-орбиту Ω.*

Отметим, что открытая G-орбита является единственной и связной, а дополнение $E = X \setminus \Omega$ является аналитическим подмножеством в X [7, Section 1.7, Proposition 4].

Понятие почти однородного комплексного аналитического G-многообразия было введено Реммертом и ван де Веном [76], которое является обобщением понятия однородного G-многообразия (для последних, $E = \varnothing$). К их числу относятся: комплексные многообразия, на котором группа G действует с конечным числом орбит (например, сферические многообразия (см. главу 3)); комплексные симметрические пространства, введенные Борелем [19].

2.2 Редуктивные группы Ли и их представления

В данной секции напомним определение редуктивной группы Ли и необходимые сведения из теории представлений и систем корней (подробности см. в [7, 20, 48, 84]).

Пусть G — связная комплексная группа Ли. Пусть $\mathfrak{g} = Lie(G)$ — алгебра Ли группы G.

Определение 2.6. *Группа G называется редуктивной, если существует компактная вещественная форма K группы G (т.е. компактная вещественная подгруппа Ли $K \subset G$ такая, что $Lie(G) \cong Lie(K) \otimes \mathbb{C}$).*

Другими словами, G является редуктивной, если ее максимальная вещественная компактная подгруппа (однозначно определенная с точностью до сопряжения) является вполне вещественным подмногообразием в G.

Это определение тесно связано с соответствующим определением для связных линейных алгебраических групп G (необязательно над полем $\mathbb{C}$). Напомним, что унипотентный радикал $R_u(G)$ группы G — это максимальная связная унипотентная нормальная подгруппа (эквивалентно, подгруппа унипотентных элементов максимальной нормальной разрешимой подгруппы G (т.е. радикала $R(G)$ группы G)). Связная линейная алгебраическая группа G называется редуктивной, если ее унипотентный радикал $R_u(G)$ тривиален.

Оказывается, что комплексная редуктивная линейная алгебраическая группа является редуктивной в смысле определения 2.6. Обратно, каждая связная редуктивная комплексная группы Ли допускает единственную структуру комплексной редуктивной линейной алгебраической группы. Таким образом, можно рассматривать подалгебру регулярных функций $\mathbb{C}[G]$ в алгебре голоморфных функций $\mathcal{O}(G)$.

2.2.1 Рациональные представления редуктивных групп Ли

Пусть G — связная редуктивная комплексная группа Ли, $B \subset G$ — борелевская подгруппа и $T \subset B$ — максимальный алгебраический тор с решеткой характеров $\mathfrak{X}(T)$. Для алгебры Ли существует корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha,$$

относительно присоединенного представления $Ad \colon T \to GL(\mathfrak{g})$, где $R \subset \mathfrak{X}(T)$ — система корней группы G.

Пусть $R_+ \subset R$ — множество положительных корней. Это множество однозначно определяется следующим условием

$$Lie(B) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Обозначим через S множество простых корней и через $S^\vee$ — множество двойственных простых корней (относительно формы Киллинга на подпространстве $\mathbb{R}\langle \alpha \mid \alpha \in S \rangle \subset \mathfrak{X}(T) \otimes \mathbb{R}$). Напомним, что $S^\vee$ лежит в решетке $\mathfrak{X}^*(T)$ однопараметрических подгрупп.

Через C_+ обозначим доминантную камеру Вейля. Напомним, что

$$C_+ := \{t \in \mathfrak{X}(T) \otimes \mathbb{R} \mid \langle t, \alpha^\vee \rangle \geq 0, \forall \alpha \in S\}.$$

Определим множество доминантных характеров $\mathfrak{X}_+(T)$ как $\mathfrak{X}(T) \cap C_+$.

Замечание 2.2. *Перечислим необходимые факты о представлениях редуктивных групп [20, 48]).*

1. *Существует взаимнооднозначное соответствие между множеством $\mathfrak{X}_+(T)$ доминантных характеров и множеством $\widehat{G}$ классов изоморфизма неприводимых представлений группы G.*

2. *Для каждого рационального представления V редуктивной группы G (т.е. каждый вектор $v \in V$ содержится в конечномерном G-стабильном подпространстве на котором G действует алгебраически) существует каноническое разложение*
$$V \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}_+(T)} V_\lambda^{(B)} \otimes V(\lambda)$$
где $V_\lambda^{(B)} := \{v \in V \mid b.v = \lambda(b)v\}$ — множество B-полуинвариантов веса λ (здесь $b.v$ обозначает действие элемента b на векторе v).

2.2.2 Параболические подгруппы

Пусть G — комплексная редуктивная группа Ли, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный алгебраический тор, U — унипотентный радикал B. Пусть также W — группа Вейля группы G относительно тора T (т.е. $W = N_G(T)/T$), R — система корней (G, T), а S — множество простых корней относительно B. Группа W содержит отражения r_α ($\alpha \in R$), действующие на $\mathfrak{X}(T)$ по правилу $r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, и порождается отражениями, соответствующих простым корням [48].

Параболические подгруппы, содержащие данную борелевскую подгруппу B, параметризуются подмножествами простых корней $I \subset S$, а именно, подмножеству $I \subset S$ соответствует подгруппа $P_I = BW_IB$, где W_I — подгруппа в W порожденная отражениями $r_\alpha, \alpha \in I$. В частности, $P_S = G$ (разложение Брюа группы G), $P_\emptyset = B$. Алгебра Ли соответствующей параболической подгруппы $P = P_I$ имеет вид

$$Lie(P) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_+ \cup R_I} \mathfrak{g}_\alpha$$

где $R_I \subset R$ — подсистема корней, порожденная множеством I. Таким образом, система корней (P_I, T) состоит из множества всех положительных корней R_+ и множества тех отрицательных корней (элементов R_-), которые представимы в виде $\mathbb{Z}$-линейной комбинации элементов множества I [48].

Существует однозначно определенное разложение Леви $P = P_u \rtimes L$, где P_u — унипотентный радикал P, а $L = L_I \subset P_I$ — однозначно определенная подгруппа Леви, содержащая максимальный тор $T \subset B$. Алгебра Ли подгруппы P_u есть

$$Lie(P_u) = \bigoplus_{\alpha \in R_+ \setminus R_I} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Алгебра Ли параболической подгруппы $P = P_I$ предствима в виде прямой суммой

$$Lie(P) = \mathfrak{l} \oplus Lie(P_u),$$

где подалгебра $\mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}_\alpha$ является алгеброй Ли подгруппы Леви L_I. Подгруппа Леви является редуктивной группой Ли и система корней (L_I, T) есть R_I [48].

Более явно подруппу Леви $L_I \subset P_I$ можно описать несколькими способами [48]. К примеру, $L_I = B'W_IB'$ (разложение Брюа для L_I), где $B' = B^- \cap P_I$ (здесь B^- — борелевская подгруппа G, противоположная B относительно T). С другой стороны, L это централизатор $C_G(Z)$ подгруппы $Z = (\bigcap_{\alpha \in I} \ker \alpha)^0$. Наконец, пусть U_α — связная подгруппа в G, инвариантная относительно T с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_\alpha$; тогда L_I — это подгруппа, порожденная T и всеми группами U_α для $\alpha \in R_I$.

Противоположная параболическая подгруппа $P^- = P_I^- \supset B^-$, соответствующая I, пересекает P_I по подгруппе L_I и имеет разложение Леви $P^- = P_u^- \rightthreetimes L$, где P_u^- — унипотентный радикал группы P^-.

2.2.3 Теорема Хариш-Чандра и ее приложения

Напомним необходимые сведения из теории представлений компактных групп Ли (подробности см. [7, 84]).

Пусть F — комплексное линейное пространство Фреше, K — компактная группа Ли и $\rho\colon K \to Aut(F)$ — непрерывное представление (т.е. ρ — гомоморфизм и для любого $f \in F$ отображение $K \to F, g \to \rho(g)f$ непрерывно).

Определим следующие K-инвариантные подпространства в F.

Определение 2.7. *1. Подпространство всех K-конечных векторов:*

$$F^0 := \{f \in F \mid \dim span\langle \rho(k)f \mid k \in K\rangle < \infty\}$$

2. Подпространство всех K-дифференцируемых векторов:

$$F^\infty := \{f \in F \mid K \to F, k \mapsto \rho(k)f \text{ — \textit{дифференцируемо}}\}$$

Пусть $\widehat{K}$ — множество классов эквивалентности конечномерных неприводимых линейных представлений K. Каждому классу $\delta \in \widehat{K}$ сопоставляется непрерывный линейный оператор

$$E_\delta\colon F \to F, E_\delta(f) := \int\limits_K \overline{\chi_\delta(k)}\rho(k) f d\mu(k)$$

где $\frac{1}{\dim(\delta)}\chi_\delta$ — характер представления в классе δ ($\dim(\delta)$ — размерность представления в классе δ), μ — мера Хаара на компактной группе Ли K.

Этот оператор обладает следующими свойствами ([7, Section 5.1, Theorem 3]):

1) E_δ — непрерывный проектор;

2) $E_\delta E_{\delta'} = 0$, если $\delta \neq \delta'$;

3) $\rho(k)E_\delta = E_\delta \rho(k)$ для всех $k \in K$.

Обозначим $F_\delta := E_\delta(F)$. Оказывается, что F_δ является замкнутым K-инвариантным подпространством в F для каждого $\delta \in \widehat{K}$ и $F^0 = \bigoplus\limits_{\delta \in \widehat{K}} F_\delta$. Более того, F_δ является изотипической компонентой F типа δ ([7, Section 5.1, Theorem 4]).

Сформулируем наконец теорему Хариш-Чандра (доказательство см. в [7, Section 5.1, Theorem 5]).

Теорема 2.2. *Каждый вектор $f \in F^\infty$ допускает разложение в ряд*

$$f = \sum_{\delta \in \widehat{K}} E_\delta f,$$

где сходимость является абсолютной относительно каждой непрерывной полунормы в F.

Пусть X — комплексное аналитическое K-многообразие, где K — связная компактная группа Ли, действующая голоморфно на X. Тогда получаем непрерывное представление K в пространстве Фреше $F = \mathcal{O}_X(X)$. Оказывается, что каждая голоморфная функция на X является K-дифференцируемой, т.е. $F = F^\infty$ ([7, Section 5.2, Proposition]).

Пусть G — связная редуктивная группа Ли с вещественной компактной формой K. Пусть Ω — комплексное алгебраическое однородное G-многообразие и $\mathbb{C}[\Omega]$ — алгебра регулярных функций на Ω. Пусть $W \subset \Omega$ — это K-инвариантная область. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 2.4. *Каждая голоморфная функция $f \in \mathcal{O}_\Omega(W)$ допускает разложение в ряд*

$$f = \sum_{\delta \in \widehat{K}} E_\delta f,$$

где сходимость является абсолютной относительно каждой непрерывной полунормы в $\mathcal{O}_\Omega(W)$ и $E_\delta f \in \mathbb{C}[\Omega]$.

Доказательство. См. [7, Section 5.3, Theorem 2]. □

Другими словами, каждая голоморфная функция $E_\delta f$ продолжается до регулярной функции на Ω и алгебра $\mathbb{C}[\Omega]$ всюду плотна в $\mathcal{O}_\Omega(W)$.

2.3 Феномен Гартогса в (1,0)-компактифицируемых почти однородных многообразиях

Как известно, из теоремы Нагаты о компактификации (см. [67]) следует, что почти однородное алгебраическое многообразие допускает компактификацию в категории всех алгебраических многообразий. Однако в некоторых ситуациях компактификация существует в категории почти однородных алгебраических многообразий. К примеру, любое некомпактное нормальное алгебраическое G-многообразие, где G — связная линейная алгебраическая группа, допускает G-эквивариантную компактификацию (см. [91, Theorem 3]). Используя свойство универсальности нормализации, можно выбрать нормальную G-эквивариантную компактификацию.

Пусть G — связная редуктивная группа Ли с вещественной компактной формой K. Пусть X — некомпактное нормальное почти однородное комплексное алгебраическое G-многообразие. Если X является $(1,0)$-компактифицируемым при помощи X', то следствие 1.2 из теоремы 1.1 влечет, что вопрос о феномене Гартогса в многообразии X сводится к изучению голоморфных функций на бесконечно-удаленном множестве к X (т.е. к изучению пространства $\mathcal{O}_{X'}(Z)$). Оказывается, в данном случае достаточно изучить алгебру регулярных функций в некоторой алгебраической окрестности множества Z.

Прежде чем перейти к формулировке утверждения, докажем две леммы. Первая лемма позволяет представить пространство $\mathcal{O}_{X'}(Z)$ как индуктивный предел пространств $\mathcal{O}_{X'}(U_n)$ по достаточно хорошей системе окрестностей $\{U_n\}$ множества Z.

Лемма 2.5. *Существует кофинальная система окрестностей $\{U_n\}$ множества Z такая, что каждое U_n является K-инвариантной открытой окрестностью.*

Доказательство. Заметим, что X метризуемо. Пусть ρ — метрика, согласованная с топологией X. Пусть μ — мера Хаара на компактной группе Ли K. Определим

$$\rho_K(x, y) := \int\limits_K \rho(k.x, k.y) d\mu(k)$$

Очевидно, ρ_K является метрикой. Так как μ лево-право-инвариантна, то

$$\rho_K(s.x, s.y) = \int\limits_K \rho((ks).x, (ks).y) d\mu(k) = \int\limits_K \rho(k.x, k.y) d\mu(k) = \rho_K(x, y).$$

Пусть U — относительно компактная окрестность множества Z. Так как $\rho(k.x, k.y)$ является непрерывной функцией на компакте $K \times \overline{U} \times \overline{U}$, то $\rho_K(x, y)$ непрерывна на $U \times U$ относительно метрики ρ. Следовательно, функция расстояния $dist(x, Z) := \inf\limits_{z \in Z} \rho_K(x, z)$ является непрерывной функцией на U (относительно метрики ρ).

Пусть $U_n := \{x \in U \mid dist(x, Z) < \frac{1}{n}\}$. Это открытая окрестность множества Z относительно метрики ρ. Далее, для всех $x \in U_n$ и для всех $k \in K$ имеем

$$\inf_{z \in Z} \rho_K(k.x, z) = \inf_{z \in Z} \rho_K(x, k^{-1}.z) = \inf_{z \in Z} \rho_K(x, z) < \frac{1}{n}.$$

Из этого следует, что U_n является K-инвариантной окрестностью Z. Теперь пусть V — произвольная окрестность Z. Так как существует n такое, что $\frac{1}{n} < \inf\limits_{z \in Z, x \in X \setminus V} \rho_K(x, z)$, то $U_n \subset V$. □

Замечание 2.3. *Другое доказательство этой леммы основано на следующем факте (см. [7, Section 2.2, Lemma 2]). Пусть K — компактная группа, действующая непрерывно на хаусдорфовом топологическом пространстве X. Тогда для каждого открытого множества $U \subset X$ пересечение $U' = \bigcap\limits_{k \in K} k.U$ также открыто.*

Через $\mathcal{G}(X')$ обозначим множество G-стабильных простых дивизоров X'. Определим следующее многообразие

$$Y_0 := X' \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{G}(X'), D \subset X} D. \tag{2.1}$$

Очевидно, что многообразие Y_0 является открытым по Зарисскому алгебраическим подмногообразием в X', которое является нормальным и почти однородным относительно группы G. Заметим также, что $Z \subset Y_0$.

Пусть $\mathbb{C}[Y_0]$ — алгебра регулярных функций на Y_0.

Замечание 2.4. *Множество $\{D \in \mathcal{G}(X'), D \subset X\}$ может оказаться пустым. К примеру, это имеет место в ситуации, когда $X = \mathbb{C}^2, X' = \mathbb{CP}^2$, $G = (\mathbb{C}^*)^n$, и действие G на X' торическое. В этом случае $Y_0 = X'$ и $\mathbb{C}[Y_0] = \mathbb{C}$.*

Следующая лемма является обобщением леммы 2.4.

Лемма 2.6. *Пусть W — K-инвариантная область в нормальном почти однородном алгебраическом G-многообразии X, пересекающая каждый G-стабильный дивизор X. Тогда пространство $\mathbb{C}[X]$ всюду плотно в $\mathcal{O}_X(W)$.*

Отметим, что если X не имеет G-стабильных дивизоров, то $codim(X\backslash\Omega) \geq 2$. Поэтому $\mathbb{C}[X] \cong \mathbb{C}[\Omega]$, $\mathcal{O}_X(W) \cong \mathcal{O}_X(W \cap \Omega)$, и лемма также справедлива.

Доказательство. Рассмотрим пространство Фреше $\mathcal{O}_X(W)$. Из теоремы 2.2 получаем, что каждый вектор $f \in \mathcal{O}_X(W)$ имеет представление в виде ряда

$$f = \sum_{\delta \in \widehat{K}} E_\delta f,$$

где сходимость является равномерной на компактах в W. Из леммы 2.4 получаем, что $E_\delta f \in \mathbb{C}[\Omega]$ (то есть продолжается до регулярной функции на Ω).

Так как $f \in \mathcal{O}_X(W)$ и W пересекает каждый простой G-стабильный дивизор X, тогда функция $E_\delta(f)$ локально ограничена на каждом G-стабильном дивизоре X. В силу нормальности X, функция $E_\delta f$ продолжается до регулярной функции на X, т.е. $E_\delta(f) \in \mathbb{C}[X]$. $\square$

Данная лемма обобщает следующий известный факт из многомерного комплексного анализа: голоморфные функции в области Рейнхардта $W \subset \mathbb{C}^n$ допускают разложение в степенные ряды вида $\sum\limits_{I \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_I z^I$, равномерно сходящиеся на компактах в этой области (здесь $I = (i_1, \cdots, i_n)$, $z^I = z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$).

Из последних двух лемм получаем следующий результат.

Предложение 2.1. *Канонический гомоморфизм*

$$\mathbb{C}[Y_0] \to \mathcal{O}_{X'}(Z)$$

является инъективным и имеет всюду плотный образ.

Доказательство. Из леммы 2.5 следует, что существует кофинальная система окрестностей $\{U_n\}$ множества Z, причем каждое U_n является K-инвариантным. Более того, каждое U_n пересекает каждый G-стабильный дивизор на Y_0 (если таковые имеются). Из леммы 2.6 следует, что $\mathbb{C}[Y_0]$ является всюду плотным подпространством в пространстве Фреше $\mathcal{O}_{X'}(U_n)$.

Очевидно, что канонический гомоморфизм $\mathbb{C}[Y_0] \to \mathcal{O}_{X'}(Z)$ инъективен. Рассмотрим элемент $[f] \in \mathcal{O}_{X'}(Z)$, который представляется функцией $f \in \mathcal{O}_{X'}(U_n)$ для некоторого n. Так как $\mathbb{C}[Y_0]$ всюду плотно в $\mathcal{O}_{X'}(U_n)$, существует последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in \mathbb{C}[Y_0]$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ в $\mathcal{O}_{X'}(U_n)$. Из непрерывности канонического отображения

$$\mathcal{O}_{X'}(U_n) \to \mathcal{O}_{X'}(Z), f \mapsto [f]$$

следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} [f_n] = [f]$. Таким образом, $\mathbb{C}[Y_0] \to \mathcal{O}_{X'}(Z)$ имеет всюду плотный образ.

$\square$

Таким образом, получаем следующий результат о феномене Гартогса.

Теорема 2.3. *Пусть G — связная комплексная редуктивная группа Ли, X — нормальное (1,0)-компактифицируемое почти однородное алгебраическое G-многообразие, X' — соответствующая компактификация, Y_0 — многообразие, определенное формулой (2.1). Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}[Y_0] = \mathbb{C}$.*

Сформулируем весовой критерий феномена Гартогса. Для этого отметим, что алгебра регулярных функций $\mathbb{C}[Y_0]$ является рациональным представлением группы G [20, Lemma 1.5]. Тогда получаем следующее каноническое разложение (см. раздел 2.2.1)

$$\mathbb{C}[Y_0] \cong \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{X}_+(T)} \mathbb{C}[Y_0]^{(B)}_{\lambda} \otimes V(\lambda).$$

Напомним определение весового моноида многообразия.

Определение 2.8. *Пусть X — почти однородное алгебраическое G-многообразие, где G — комплексная редуктивная группа Ли. Определим весовой моноид многообразия X следующим образом:*

$$\Lambda_+(X) := \{\lambda \in \mathfrak{X}_+(T) \mid \mathbb{C}[X]^{(B)}_\lambda \neq 0\}.$$

Другими словами, весовой моноид многообразия X состоит из тех доминантных характеров, что соответствующее неприводимое представление входит в рациональное представление $\mathbb{C}[X]$ с ненулевой кратностью.

Тогда получаем следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть G — связная комплексная редуктивная группа Ли, X — нормальное (1,0)-компактифицируемое почти однородное алгебраическое G-многообразие, X' — соответствующая компактификация, Y_0 — многообразие, определенное формулой (2.1). Многообразие X допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $\Lambda_+(Y_0) = 0$, и $\mathbb{C}[Y_0]^B = \mathbb{C}$.*

Замечание 2.5. *В случае сферических G-многообразий (см. раздел 3.1), условие $\mathbb{C}[Y_0]^B = \mathbb{C}$ автоматически выполняется.*

Помимо многообразия Y_0, получающегося из компактного многообразия X' выбрасыванием компактных в X дивизоров, полезно также рассматривать многообразие Y_1, которое получается из X' выбрасыванием всех орбит положительной коразмерности, чье замыкание лежит в X.

А именно, пусть $\mathcal{OG}_k(X')$ — множество всех G-орбит в X' коразмерности k, и

$$\mathcal{OG}(X') := \bigcup_{k=1}^{\dim X'} \mathcal{OG}_k(X').$$

Тогда определим

$$Y_1 := X' \setminus \bigcup_{O \in \mathcal{OG}(X'), \overline{O} \subset X} O, \tag{2.2}$$

где $\overline{O}$ — замыкание O в X'.

Многообразие Y_1 также является открытым по Зарисскому в X' и является нормальным почти однородными G-многообразием. Кроме того, $Z \subset Y_1$.

Так как $\mathcal{G}(X') = \{\overline{O} \mid O \in \mathcal{OG}_1(X')\}$, то $Y_1 \subset Y_0$ и $codim(Y_0 \setminus Y_1) > 1$. Следовательно, имеется канонический изоморфизм

$$\mathbb{C}[Y_0] \cong \mathbb{C}[Y_1]$$

и все доказанные выше утверждения справедливы также для Y_1.

Обозначим через $\mathcal{B}(X)$ множество всех простых B-стабильных дивизоров на произвольном почти однородном G-многообразии X.

Замечание 2.6. *Множество $\mathcal{B}(X)$ является объединением множества всех простых G-стабильных дивизоров на X и множества всех простых B-стабильных, но не G-стабильных дивизоров на X.*

Рассмотрим почти однородное алгебраическое G-многообразие X с открытой орбитой Ω. И пусть Y — открытое G-стабильное подмногообразие в X (например, открытая G-орбита Ω). Для каждого $D \in \mathcal{B}(Y)$ обозначим через $\overline{D}$ замыкание D в X. Так как $v_D = v_{\overline{D}}$ (после отождествления $\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(X)$), то можно отождествить множество $\mathcal{B}(Y)$ с подмножеством $\{\overline{D} \mid D \in \mathcal{B}(Y)\}$ в $\mathcal{B}(X)$. Если теперь Y_0 и Y_1 как выше, тогда $\mathcal{B}(Y_0) = \mathcal{B}(Y_1)$.

Глава 3.

Феномен Гартогса в сферических многообразиях

Цель данной главы — изучить феномен Гартогса в сферических многообразиях. Получен выпукло-геометрический критерий в терминах цветного веера сферического многообразия. Также рассмотрены примеры применения этого критерия к некоторыми орисферическим и торическим многообразиям.

3.1 Сферические многообразия

В данном разделе напомним некоторые факты из теории сферических многообразий (подробности см. [40, 95, 96]).

Пусть G — комплексная связная редуктивная группа Ли, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, $T \subset B$ — максимальный алгебраический тор.

Определение 3.9. *Нормальное почти однородное алгебраическое G-многообразие с открытой орбитой Ω называется сферическим, если Ω содержит открытую B-орбиту O.*

Замечание 3.7. *1. Открытая B-орбита O является аффинным многообразием [95, Theorem 3.5].*

2. Нормальное алгебраическое G-многообразие X является сферическим тогда и только тогда, когда $\mathbb{C}(X)^B = \mathbb{C}$ [40, Theorem 2.8] тогда и только тогда X содержит конечное число B-орбит [40, Theorem 2.11].

Открытой орбите Ω соответствует весовая решетка M, которая определяется следующим образом:

$$M := \{\lambda \in \mathfrak{X}(T) \mid \mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_{\lambda} \neq 0\}.$$

и двойственная весовая решетка $N := Hom(M, \mathbb{Z})$.

Положим также $M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}$ и $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$.

Замечание 3.8. *1. Весовая решетка M является подрешеткой решетки характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T.*

2. Пусть $U = R_u(B)$ (унипотентный радикал борелевской подгруппы B). Так как $B = TU$ и так как $\mathfrak{X}(U) = \{1\}$, то $\mathfrak{X}(B) = \mathfrak{X}(T)$.

Определим следующую мультипликативную подгруппу в $\mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\}$:

$$\mathbb{C}(\Omega)^{(B)} := \{f \in \mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathfrak{X}(T) : b.f = \lambda(b) f, \forall b \in B\}.$$

Замечание 3.9. *Имеет место изоморфизм групп $\mathbb{C}(\Omega)^{(B)}/\mathbb{C}^* \cong M$, определяемый формулой $\mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_{\lambda} \ni f \to \lambda \in M$.*

Определим конус нормирований (подробнее см. [40, Sections 4, 10] или [95, Chapter 4 and Appendix B]).

Пусть $v\colon \mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ — дискретное $\mathbb{Q}$-значное нормирование. Нормирование v называется G-инвариантным, если $v(g.f) = v(f)$ для всех $f \in \mathbb{C}(\Omega)$ и

$g \in G$. Множество G-инвариантных нормирований поля $\mathbb{C}(\Omega)$ обозначается через $\mathcal{V}(\Omega)$.

Замечание 3.10. *Каждое G-инвариантное нормирование v определяет точку $a_v \in N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$ по правилу $\langle a_v, \lambda \rangle := v(f)$ для некоторого $f \in \mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_{\lambda}$.*

Можно рассматривать множество $\mathcal{V}(\Omega)$ как подмножество в $N_{\mathbb{Q}}$ [40, Corollary 4.9]. Оно является конечно-порожденным выпуклым рациональным конусом максимальной размерности [40, Corollary 10.6] и называется конусом нормирований Ω. Обозначим через $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$ конус порожденный множеством $\mathcal{V}(\Omega)$ в $N_{\mathbb{R}}$.

Теперь напомним определение цветного веера.

Определение 3.10.

- *Цветной конус — это пара $(\sigma, \mathcal{F})$ с $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\Omega)$, удовлетворяющая следующим свойствам:*
  - *σ является выпуклым конусом, порожденным множеством $\{a_D \mid D \in \mathcal{F}\}$ и конечным числом элементов из $\mathcal{V}(\Omega)$;*
  - *относительная внутренность σ пересекает $\mathcal{V}(\Omega)$ нетривиально;*
  - *σ не содержит прямых и $0 \notin \{a_D \mid D \in \mathcal{F}\}$.*
- *Цветная грань цветного конуса $(\sigma, \mathcal{F})$ — это пара $(\sigma', \mathcal{F}')$ такая, что σ' есть грань σ, относительная внутренность σ' пересекает $\mathcal{V}(\Omega)$ нетривиально и $\mathcal{F}' = \{D \in \mathcal{F} \mid a_D \in \sigma'\}$;*
- *Цветной веер — это конечное множество Σ цветных конусов со следующими свойствами:*
  - *каждая цветная грань цветного конуса из Σ лежит в Σ;*

– *для каждого* $v \in \mathcal{V}(\Omega)$ *существует не более одного конуса* $(\sigma, \mathcal{F})$ *такого, что* v *лежит в относительной внутренности* σ.

- *Носитель цветного веера* Σ *— это множество* $|\Sigma| := \bigcup_{(\sigma,\mathcal{F})\in\Sigma} \sigma$.
- *Множество цветов цветного веера* Σ *— это множество* $\mathcal{F}(\Sigma)$, *являющееся объединением всех подмножеств* $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\Omega)$ *таких, что* $(\sigma, \mathcal{F}) \in \Sigma$.

Пусть X — сферическое G-многообразие с открытой G-орбитой Ω. Для каждой G-орбиты $R \subset X$ рассмотрим G-стабильное подмножество $X_R := \{x \in X \mid \overline{G.x} \supset R\}$ (оно является G-стабильным открытым подмногообразием в X которое содержит единственную замкнутую G-орбиту R). Пусть $D_1, \cdots, D_m$ — G-стабильные дивизоры X_R, а $\mathcal{F}$ — множество B-стабильных, но не G-стабильных дивизоров D в X, содержащих замкнутую орбиту многообразия X_R. Пусть σ — конус в $N_\mathbb{R}$ порожденный точками a_v для $v \in \mathcal{F}$ и точками $a_{D_i} \in N$ для $i \in \{1, \cdots, m\}$. Получаем цветной конус $(\sigma, \mathcal{F})$. Более того, множество цветных конусов построенные таким образом, образуют цветной веер Σ_X [40].

Сформулируем теорему Луны-Вюста о классификации Ω-вложений [40].

Теорема 3.5. *Отображение* $X \to \Sigma_X$ *является биекцией между множеством классов изоморфизмов сферических* G*-многообразий (с фиксированным* Ω*) и множеством цветных вееров.*

Многие свойства сферических многообразий могут быть сформулированы на языке цветных вееров. Сформулируем некоторые из них ([40, 95, 96]).

Замечание 3.11. *Пусть* X_Σ *— сферическое многообразие с открытой* G*-орбитой* Ω *и цветным веером* Σ.

1. *Многообразие* X_Σ *компактно тогда и только тогда, когда веер* Σ *полный (т.е.* $|\Sigma| \supset \mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega)$*).*

2. *Существует взаимно-однозначное соответствие между G-орбитами в X_Σ и цветными конусами в Σ.*

3. *Если W_1, W_2 — G-орбиты с соответствующими конусами $(\sigma_1, \mathcal{F}_1)$, $(\sigma_2, \mathcal{F}_2)$, тогда $W_1 \subset \overline{W_2}$ тогда и только тогда, когда $(\sigma_2, \mathcal{F}_2)$ является цветной гранью цветного конуса $(\sigma_1, \mathcal{F}_1)$.*

По теореме об эквивариантной компактификации [91, Theorem 3], каждое некомпактное сферическое G-многообразие X_Σ с цветным веером Σ и открытой G-орбитой Ω допускает G-эквивариантную компактификацию, которая является компактным сферическим многообразием $X_{\Sigma'}$ с полным цветным веером Σ' и открытой G-орбитой Ω. На языке цветных вееров это означает пополнение веера Σ цветными конусами до полного веера Σ'.

Дополнение $Z := X_{\Sigma'} \setminus X_{\Sigma'}$ является объединением G-орбит и допускает описание на языке цветных конусов. Через $O(\sigma, \mathcal{F})$ обозначим G-орбиту, соответствующую цветному конусу $(\sigma, \mathcal{F}) \in \Sigma'$.

Лемма 3.7. $Z = \bigcup\limits_{(\sigma,\mathcal{F})\in\Sigma'\setminus\Sigma} O(\sigma, \mathcal{F})$.

Доказательство. Орбита $O(\sigma, \mathcal{F})$ содержится в X_Σ тогда и только тогда, когда цветной конус $(\sigma, \mathcal{F})$ содержится в Σ. $\square$

Отсюда получаем критерий связности множества Z.

Лемма 3.8. *Множество Z связно тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega)\setminus|\Sigma|$ связно.*

Доказательство. Лемма следует из следующих четырех эквивалентных утверждений.

- Z связно;

- Для любых двух G-орбит $V = O(\sigma, \mathcal{F}), V' = O(\sigma', \mathcal{F}')$ таких, что

$$(\sigma, \mathcal{F}), (\sigma', \mathcal{F}') \in \Sigma' \setminus \Sigma$$

  существует последовательность G-орбит $\{V_i = O(\sigma_i, \mathcal{F}_i)\}_{i=0}^{n}$ со следующими свойствами:

  1. $V_0 = V, V_n = V'$;
  2. $(\sigma_i, \mathcal{F}_i) \in \Sigma' \setminus \Sigma$;
  3. $\overline{V_i} \cap \overline{V_{i+1}} \neq \emptyset$.

- Для любых двух цветных конусов $(\sigma, \mathcal{F}), (\sigma', \mathcal{F}') \in \Sigma' \setminus \Sigma$ существует последовательность цветных конусов $\{C_i = (\sigma_i, \mathcal{F}_i)\}_{i=0}^{n}$ со следующими свойствами:

  1. $C_0 = (\sigma, \mathcal{F}), C_n = (\sigma', \mathcal{F}')$;
  2. $C_i = (\sigma_i, \mathcal{F}_i) \in \Sigma' \setminus \Sigma$;
  3. для конусов σ_i и σ_{i+1} существует цветной конус $(\sigma_{i,i+1}, \mathcal{F}_{i,i+1}) \in \Sigma' \setminus \Sigma$ такой, что σ_i и σ_{i+1} являются его гранями.

- $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно.

$\square$

Так как группа когомологий $H^1(X_{\Sigma'}, \mathcal{O}_{X'_{\Sigma}})$ тривиальна [21, Corollaire 1], получаем, что любое сферическое G-многообразие X_Σ является $(b, 0)$-компактифицируемым при помощи $X_{\Sigma'}$ для некоторого полного цветного веера Σ', где b — число связных компонент дополнения $X_{\Sigma'} \setminus X_\Sigma$. Для случая $b = 1$ получаем следующий результат.

Предложение 3.2. *Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие с цветных веером Σ. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) X_Σ является (1,0)-компактифицируемым;

2) $\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно.

Рассмотрим сферическое многообразие Y_1 определенное в разделе 2.3 формулой 2.2 и вычислим его веер Σ_{Y_1}.

Лемма 3.9.

$$\Sigma_{Y_1} = \{(\tau, \mathcal{F}') \in \Sigma' \mid (\tau, \mathcal{F}') \text{ — \textit{цветная грань цветного конуса из} } \Sigma' \setminus \Sigma\}.$$

Доказательство. Рассмотрим цветной конус $(\tau, \mathcal{F}') \in \Sigma'$ и пусть $O = O(\tau, \mathcal{F}')$ — соответствующая G-орбита. Напомним, что множество $Z = X_{\Sigma'} \setminus X_\Sigma$ является объединением G-орбит, а именно:

$$Z = \bigcup_{(\sigma,\mathcal{F}) \in \Sigma' \setminus \Sigma} O(\sigma, \mathcal{F}).$$

Получаем следующие эквивалентные утверждения:

1) $(\tau, \mathcal{F}') \in \Sigma_{\widehat{Y}}$;

2) $\overline{O} \cap Z \neq \emptyset$;

3) Существует цветной конус $(\sigma, \mathcal{F}) \in \Sigma' \setminus \Sigma$ такой, что $(\tau, \mathcal{F}')$ является цветной гранью некоторого цветного конуса $(\sigma, \mathcal{F})$.

Лемма доказана. □

Следующая лемма о том, как устроен носитель веера в пределах конуса нормирований.

Лемма 3.10. $|\Sigma_{Y_1}| \cap \mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) = \overline{\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|}$.

Доказательство. Носитель веера Σ_{Y_1} устроен следующим образом:

$$|\Sigma_{Y_1}| = \bigcup_{(\sigma,\mathcal{F})\in\Sigma'\setminus\Sigma} \sigma.$$

Точка $p \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$ принадлежит множеству $\overline{\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus |\Sigma|}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{p_n\}$ точек $p_n \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)\setminus|\Sigma|$ таких, что $p_n \to p$ как только $n \to \infty$. Можно считать, что все p_n лежат в $\sigma \cap \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$ для некоторого цветного конуса $(\sigma, \mathcal{F}) \in \Sigma' \setminus \Sigma$. Получаем, что $p_n \in |\Sigma_{Y_1}| \cap \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Так как $|\Sigma_{Y_1}| \cap \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$ замкнуто, то $p \in |\Sigma_{Y_1}| \cap \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Лемма доказана. □

3.1.1 Выпукло-геометрический критерий феномена Гартогса

Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие с открытой G-орбитой Ω и открытой B-орбитой O, причем $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно. Пусть $X_{\Sigma'}$ — компактное сферическое G-многообразие, являющееся компактификацией X_Σ.

Опишем весовой моноид $\Lambda_+(Y_1)$ многообразия Y_1, определенного в разделе 2.3 формулой (2.2).

Каждому B-стабильному дивизору $D \in \mathcal{B}(Y_1)$ соответствует нормирование

$$v_D \colon \mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}.$$

В свою очередь, нормирование v_D определяет точку в двойственной весовой решетке $a_D \in N = Hom(M, \mathbb{Z})$ по формуле $\langle a_D, \lambda\rangle := v_D(f)$ для $f \in \mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_\lambda$.

Рассмотрим конус

$$L := \{\lambda \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle a_D, \lambda\rangle \geq 0, \forall D \in \mathcal{B}(Y_1)\}.$$

Получаем следующее описание множества B-полуинвариантных векторов алгебры $\mathbb{C}[Y_1]$.

Лемма 3.11. $\mathbb{C}[Y_1]^{(B)}_\lambda = \begin{cases} \mathbb{C}[O]^{(B)}_\lambda \neq 0, & \text{\textit{если} } \lambda \in L \cap M; \\ 0, & \text{\textit{если} } \lambda \notin L \cap M. \end{cases}$

В частности, $\Lambda_+(Y_1) = L \cap M$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbb{C}[Y_1]^{(B)}_\lambda = \{f \in \mathbb{C}[O]^{(B)}_\lambda \mid \langle a_D, \lambda\rangle = v_D(f) \geq 0, \forall D \in \mathcal{B}(Y_1)\}.$$

Если $\lambda \in L$, тогда для каждого $f \in \mathbb{C}[O]^{(B)}_\lambda$ получаем, что $\langle a_D, \lambda\rangle \geq 0$ для всех $D \in \mathcal{B}(Y_1)$. Это дает $\mathbb{C}[Y_1]^{(B)}_\lambda = \mathbb{C}[O]^{(B)}_\lambda$.

По определению M, имеем $\mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_\lambda \neq 0$ для всех $\lambda \in M$. Так как

$$\mathbb{C}[Y_1]^{(B)}_\lambda \cong \mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_\lambda$$

для $\lambda \in L$, то $\mathbb{C}[Y_1]^{(B)}_\lambda \neq 0$.

Теперь пусть $\lambda \notin L$ и предположим, что существует функция $f \in \mathbb{C}[Y_1]^{(B)}_\lambda$ такая, что $f \neq 0$. Тогда существует $D \in \mathcal{B}(Y_1)$ такой, что $v_D(f) < 0$. Получили противоречие; лемма доказана. □

Таким образом, получаем выпукло-геометрический критерий в терминах весов.

Следствие 3.3. *Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие, причем $\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $L = 0$.*

Переформулируем данный критерий в терминах двойственной весовой решетки N. Определим конус C в пространстве $N_\mathbb{R}$ следующим образом

$$C := \mathbb{R}_{\geq 0}\big\langle a_D \mid D \in \mathcal{B}(Y_1)\big\rangle.$$

Получаем следующий критерий.

Следствие 3.4. *Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие, причем $\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|$ связно. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда $C = N_\mathbb{R}$.*

Доказательство. Так как $C^\vee = L$, где $C^\vee$ — двойственный конус к конусу C, то $C = N_\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $L = 0$. Следствие доказано. $\square$

Данный критерий можно переформулировать в терминах цветного веера Σ, соответствующего некомпактному сферическому многообразию X_Σ.

Следующая лемма описывает конус C в терминах носителя веера Σ и векторов, соответствующих B-стабильным дивизорам открытой G-орбиты Ω.

Лемма 3.12. $C = \mathbb{R}_{\geq 0}\left\langle \overline{\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|} \cup \{a_D \mid D \in \mathcal{B}(\Omega)\}\right\rangle$.

Доказательство. Напомним, что $\mathcal{B}(Y_1)$ является объединением множества $\mathcal{G}(Y_1)$ простых G-стабильных дивизоров на Y_1 и множества $\{\overline{D} \mid D \in \mathcal{B}(\Omega)\}$, где $\overline{D}$ — замыкание в Y_1 простого B-стабильного дивизора $D \subset \Omega$.

Рассмотрим множество цветов $\mathcal{F}(\Sigma_{Y_1})$ цветного веера Σ_{Y_1}. Получаем следующие равенства:

$$C = \mathbb{R}_{\geq 0}\left\langle a_D \mid D \in \mathcal{B}(Y_1)\right\rangle = \mathbb{R}_{\geq 0}\left\langle \{a_D \mid D \in \mathcal{G}(Y_1) \cup \mathcal{F}(\Sigma_{Y_1})\} \cup \{a_D \mid D \in \mathcal{B}(\Omega)\}\right\rangle.$$

Далее, существует разложение (с учетом леммы 3.10)

$$|\Sigma_{Y_1}| = (|\Sigma_{Y_1}| \cap \mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega)) \cup \overline{|\Sigma_{Y_1}| \setminus \mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega)} = \overline{\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|} \cup \overline{|\Sigma_{Y_1}| \setminus \mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega)}.$$

Так как множество порождающих всех цветных конусов веера Σ_{Y_1} есть множество

$$\{a_D \mid D \in \mathcal{G}(Y_1) \cup \mathcal{F}(\Sigma_{Y_1})\},$$

то

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\left\langle a_D \mid D \in \mathcal{G}(Y_1) \cup \mathcal{F}(\Sigma_{Y_1})\right\rangle = \mathbb{R}_{\geq 0}\left\langle |\Sigma_{Y_1}| \right\rangle = \mathbb{R}_{\geq 0}\left\langle \overline{\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega) \setminus |\Sigma|} \cup \overline{|\Sigma_{Y_1}| \setminus \mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega)}\right\rangle.$$

Если луч $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle a_D\rangle$ пересекается с $N_{\mathbb{R}}\setminus\mathcal{V}(\Omega)$, то D не является G-стабильным, и поэтому $D\in\mathcal{F}(\Sigma_{Y_1})\subset\mathcal{B}(\Omega)$.

Получаем следующие равенства:

$$C=\mathbb{R}_{\geq 0}\Big\langle\{a_D\mid D\in\mathcal{G}(Y_1)\cup\mathcal{F}(\Sigma_{Y_1})\}\cup\{a_D\mid D\in\mathcal{B}(\Omega)\}\Big\rangle=$$
$$=\mathbb{R}_{\geq 0}\Big\langle\overline{\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)\setminus|\Sigma|}\cup\overline{|\Sigma_{Y_1}|\setminus\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)}\cup\{a_D\mid D\in\mathcal{B}(\Omega)\}\Big\rangle=$$
$$=\mathbb{R}_{\geq 0}\Big\langle\overline{\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)\setminus|\Sigma|}\cup\{a_D\mid D\in\mathcal{B}(\Omega)\}\Big\rangle.$$

Лемма доказана. □

Наконец, получаем следующий выпукло-геометрический критерий.

Теорема 3.6. *Пусть X_Σ — некомпактное сферическое G-многообразие с открытой G-орбитой Ω и с цветным веером Σ таким, что $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)\setminus|\Sigma|$ является связным множеством. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)\setminus|\Sigma|}\cup\{a_D\mid D\in\mathcal{B}(\Omega)\}\rangle=N_{\mathbb{R}}.$$

Для сферических однородных G-многообразий получаем следующий результат.

Следствие 3.5. *Любое сферическое однородное G-многообразие Ω, за исключением случая $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)=N_{\mathbb{R}}$ и $rk(N)=1$ допускает феномен Гартогса.*

Доказательство. Цветной веер Ω имеет вид $\Sigma=\{(0,\emptyset)\}$. Так как $Y=X_{\Sigma'}$ и $\mathbb{C}[Y]=\mathbb{C}$, то $L=0$ и поэтому $C=N_{\mathbb{R}}$. Условие связности $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)\setminus\{0\}$ автоматически выполняется, за исключением случая $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)=N_{\mathbb{R}}$ и $rk(N)=1$. По теореме 3.6 получаем требуемое. □

Случай $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega)=N_{\mathbb{R}}$ и $rk(N)=1$ рассматривается в следующем разделе 3.2.

3.2 Орисферические многообразия

Напомним определение орисферического многообразия.

Определение 3.11.

- *Однородное G-многообразие Ω называется орисферическим, если стабилизатор некоторой точки в Ω содержит максимальную унипотентную подгруппу группы G.*
- *Нормальное почти однородное комплексное алгебраическое G-многообразие с открытой орбитой Ω называется орисферическим, если Ω является орисферическим.*

Заметим, что орисферическое многообразие является сферическим в смысле определения 3.9 (см. [95]).

Пусть H — стабилизатор некоторой точки $o \in \Omega$; тогда $G/H \cong \Omega, g \mapsto g.o$. Без ограничения общности, можно считать, что $H \supset U^-$.

Пусть $P \supset B$ — параболическая подгруппа, причем $P^- = N_G(H)$, P_u — унипотентный радикал P, L — подгруппа Леви (см. раздел 2.2.2). Тогда $H = P_u^- \leftthreetimes L_0$, где L_0 — подгруппа Леви такая, что $L \supset L_0 \supset L'$ (где L' — коммутаторная подгруппа группы L) (см. [95, Lemma 7.4]). Можно также считать, что $L \supset T$.

Замечание 3.12. *Пусть $\mathfrak{l}_0$ — алгебра Ли подгруппы Леви L_0. Отождествим $\mathfrak{X}(T) = \mathfrak{t}^*, \mathfrak{X}^*(T) = \mathfrak{t}$. В обозначениях раздела 2.2.2 имеем*

$$\mathfrak{l}' = \bigoplus_{\alpha \in R_I^+} [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in R_I^+} \mathbb{C}\langle \alpha^\vee \rangle \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{C}\langle \alpha^\vee \rangle \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Заметим, что $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} \mathbb{C}\langle \alpha^\vee \rangle$ подалгебра в $\mathfrak{t} = \bigoplus\limits_{\alpha \in S} \mathbb{C}\langle \alpha^\vee \rangle \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$.

Условие $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{l}_0 \supset \mathfrak{l}'$ *означает, что* $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}_\alpha$, *причем* $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0 \supset \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{C}\langle \alpha^\vee \rangle$.

Напомним, что инъективное отображение $\iota\colon M_\mathbb{R} \hookrightarrow \mathfrak{X}(T) \otimes \mathbb{R}$ индуцирует сюръективное отображение

$$\iota^*\colon \mathfrak{X}^*(T) \otimes \mathbb{R} \twoheadrightarrow N_\mathbb{R} := N \otimes \mathbb{R}.$$

Замечание 3.13. *Перечислим некоторые факты об орисферических однородных* G*-многообразиях (см. [95, Section 28.1]).*

- $M \cong \mathfrak{X}(A)$, *где* $A \cong P^-/H \cong L/L_0 \cong T/(T \cap L_0)$.
- $\mathcal{V}(\Omega) = N_\mathbb{Q}$.
- B*-стабильные дивизоры на* Ω *имеют вид* $D_\alpha = \overline{Br_\alpha o}$, $\alpha \in S \setminus I$, *где* $I \subset S$ *— множество простых корней группы* L. *Кроме того,* $\iota^*(\alpha^\vee) = a_{D_\alpha}$.

Замечание 3.14. *С учетом двух предыдущих замечаний, имеем*

$$M = \{l \in \mathfrak{t}^* \mid l|_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0} = 0\}, N = \mathfrak{t}/\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0.$$

Откуда видим, что если $\alpha \in I$, *то* $\alpha^\vee \in \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{C}\langle \alpha^\vee \rangle \subset \mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0$. *Следовательно,* $\iota^*(\alpha^\vee) = 0$ *для всех* $\alpha \in I$.

Предположим, что $\iota^*((S \setminus I)^\vee) = 0$, *тогда* $\alpha^\vee \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0$ *для всех* $\alpha \in S$. *Поэтому* $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0 \supset \bigoplus_{\alpha \in S} \mathbb{C}\langle \alpha^\vee \rangle$. *Следовательно,* $\mathfrak{t}/\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})/(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$.

Таким образом, получаем следующий выпукло-геометрический критерий для орисферических многообразий.

Следствие 3.6. *Пусть* X_Σ *— некомпактное орисферическое* G*-многообразие с открытой* G*-орбитой* Ω *и с цветным веером* Σ *таким, что* $N_\mathbb{R} \setminus |\Sigma|$ *является* *связным множеством. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{N_\mathbb{R} \setminus |\Sigma|} \cup \iota^*((S \setminus I)^\vee)\rangle = N_\mathbb{R},$$

где $(S \setminus I)^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in S \setminus I\}$.

Используя следствие 3.6 или следствие 3.5 получаем, что каждое орисферическое однородное G-многообразие Ω ранга больше 1 (т.е. $rk(N) > 1$) допускает феномен Гартогса. Для орисферических однородных G-многообразий Ω ранга 1 (т.е. $rk(N) = 1$) имеем два случая.

Если $\iota^*((S \setminus I)^\vee) \neq \{0\}$, то всегда существует сферическое вложение $X \supset \Omega$, причем $N_\mathbb{R} \setminus |\Sigma_X|$ связно и $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{N_\mathbb{R} \setminus |\Sigma_X|} \cup \iota^*((S \setminus I)^\vee)\rangle = N_\mathbb{R}$. В этом случае, так как X допускает феномен Гартогса, тогда Ω тоже допускает феномен Гартогса.

Если $\iota^*((S\setminus I)^\vee) = \{0\}$, тогда $\Omega = \mathbb{C}^* \times \Omega_0$, где Ω_0 является компактным сферическим однородным G-многообразием (а именно, $\Omega_0 \cong G/P^-$). Действительно, из замечания 3.14 следует, что

$$P^-/H = Z(G)/(H \cap Z(G)),$$

где $Z(G)$ — центр редуктивной группы Ли G (являющийся алгебраическим тором). В частности, получаем разложение $P^- = HZ(G)$. По условию имеем, что $Z(G)/(H \cap Z(G)) \cong \mathbb{C}^*$. С другой стороны,

$$G/H = (G_{ss}Z(G))/H \cong (G_{ss}/(H \cap G_{ss})) \times (Z(G)/(H \cap Z(G)))$$

и $G/P^- \cong G_{ss}/(H \cap G_{ss})$ (где G_{ss} — полупростая подгруппа группы G). Таким образом, $G/H \cong G/P^- \times \mathbb{C}^*$. В этом случае Ω не допускает феномен Гартогса.

Таким образом, получаем

Следствие 3.7. *Любое некомпактное сферическое однородное G-многообразие допускает феномен Гартогса, за исключением $\mathbb{C}^* \times G/P^-$.*

3.3 $(SL(2)\times\mathbb{C}^*)/U^-$-вложения

В данном разделе рассматриваются орисферические многообразия с открытой орбитой $(SL(2)\times\mathbb{C}^*)/U^-$, где U^- — максимальная унипотентная подгруппа в $SL(2)\times\mathbb{C}^*$, состоящая из нижнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали.

Для $\Omega = G/U^-$ имеем $I=\emptyset$ и $N=\mathfrak{X}^*(T)$. Получаем следующее следствие.

Следствие 3.8. *Пусть X_Σ — орисферическое G-многообразие с открытой G-орбитой $\Omega = G/U^-$ и цветным веером Σ, причем $(\mathfrak{X}^*(T)\otimes\mathbb{R})\setminus|\Sigma|$ связно. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{(\mathfrak{X}^*(T)\otimes\mathbb{R})\setminus|\Sigma|}\cup\iota^*(S^\vee)\rangle = \mathfrak{X}^*(T)\otimes\mathbb{R}.$$

3.3.1 Некоторые вычисления для $(SL(2)\times\mathbb{C}^*)/U^-$

Пусть $G = SL(2)\times\mathbb{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix} \mid a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1, a_{33}\in\mathbb{C}^*\right\}$, и борелевская подгруппа

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix} \mid a_{11}a_{22}=1, a_{33}\in\mathbb{C}^*\right\}.$$

Рассмотрим следующие подгруппы в G:

- максимальный тор:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix} \mid a_{11}a_{22}=1, a_{33}\in\mathbb{C}^*\right\}$$

- противоположная борелевская подгруппа:

$$B^- = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix} \mid a_{11}a_{22}=1, a_{33}\in\mathbb{C}^*\right\}$$

- максимальная унипотентная подгруппа:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

- противоположная максимальная унипотентная подгруппа:

$$U^- = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

Заметим, что $\mathfrak{X}(T) = \mathbb{Z}^2$. Обозначая $t = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{smallmatrix}\right)$ получаем, что каждый характер $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ задается по правилу $\lambda(t) = t_1^l t_3^m$ для некоторого $(l, m) \in \mathbb{Z}^2$.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g} = Lie(G)$ имеем корневое разложение:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{12}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{21}},$$

где

- $\mathfrak{g}_{\alpha_{12}} = \mathbb{C}E_{12}$, где $E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $\alpha_{12} \in \mathfrak{X}(T)$ задается по формуле

$$\alpha_{12}(t) = t_1^2, \text{ т.е. } \alpha_{12} = (2, 0).;$$

- $\mathfrak{g}_{\alpha_{21}} = \mathbb{C}E_{21}$, где $E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $\alpha_{21} \in \mathfrak{X}(T)$ задается по формуле

$$\alpha_{12}(t) = t_1^{-2}, \text{ т.е. } \alpha_{21} = (-2, 0).$$

Система корней G есть $R = \{\alpha_{12}, \alpha_{21}\}$. Так как $Lie(B) = \mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}E_{12}$, то подмножество простых корней относительно B есть $S = \{\alpha_{12}\}$.

Группой Вейля группы G относительно T является $W = N_G(T)/T = \{e, r_{12}\}$, где r_{12} — отражение, представляющееся матрицей $U = E_{12} - E_{21} + E_{33} \in N_G(T)$.

Теперь рассмотрим однородное G-многообразие G/U^-. Имеем изоморфизм $\phi\colon G/U^- \cong \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^*$ индуцированный отображением

$$G \to \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^*, \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{smallmatrix}\right) \mapsto (a_{12}, a_{22}, a_{33}).$$

Изоморфизм ϕ является G-эквивариантным относительно действия G на G/U^- левыми умножениями и стандартного действия G на $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^*$.

При помощи изоморфизма ϕ, B-орбиты многообразия G/U^- описываются следующим образом:

- единственный B-стабильный дивизор:

$$D_{12} = \{(x_1, x_2, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^*) \mid x_2 = 0\};$$

- открытая B-орбита:

$$O = \{(x_1, x_2, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^* \mid x_2 \neq 0\}.$$

Вычислим весовую решетку. Алгебра регулярных функций на Ω имеем вид

$$\mathbb{C}[\Omega] = \mathbb{C}[\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^*] = \bigoplus_{(i,j,k)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2\times\mathbb{Z}} \mathbb{C}x_1^i x_2^j w^k.$$

Откуда следует, что $x_2^l w^{-m} \in \mathbb{C}(\Omega)^{(B)}_{(l,m)}$, где $\lambda = (l,m) \in \mathfrak{X}(T) = \mathbb{Z}^2$.

Следовательно, $M = \mathfrak{X}(T)$ (заметим, что этот факт также следует из замечания 3.13; в этом случае, $P = B, H = U^-$ и $A \cong T$).

Заметим, что B-стабильный дивизор D_{12} определяет дискретное нормирование

$$v_{12} \colon \mathbb{C}(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$$

и точку $a_{D_{12}} \in N$ по формуле $\langle a_{D_{12}}, (l,m)\rangle := v_{D_{12}}(x_2^l w^{-m}) = l$. Это означает, что $a_{D_{12}} = (1,0)$.

Пусть $(,)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathfrak{X}(T)\otimes\mathbb{R}$. Двойственный простой корень $\alpha_{12}^\vee \in \mathfrak{X}^*(T)\otimes\mathbb{R}$ определяется по формуле

$$\langle \alpha_{12}^\vee, \lambda\rangle = \frac{2(\alpha_{12}, \lambda)}{(\alpha_{12}, \alpha_{12})}$$

для всех $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$. Отсюда следует, что $\alpha_{12}^\vee = (1,0)$. Таким образом, $\alpha_{12}^\vee = a_{D_{12}}$ (на самом деле, это также следует из замечания 3.13).

3.3.2 Феномен Гартогса в $(SL(2)\times\mathbb{C}^*)/U^-$-вложениях

Из следствия 3.8 получаем следующий критерий.

Следствие 3.9. *Пусть X_Σ — орисферическое многообразие с открытой орбитой $(SL(2)\times\mathbb{C}^*)/U^-$ и цветным веером Σ, причем $\mathbb{R}^2\setminus|\Sigma|$ связно. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{\mathbb{R}^2\setminus|\Sigma|}\cup\{\alpha_{12}^\vee\}\rangle=\mathbb{R}^2.$$

Теперь построим примеры орисферических многообразий и соответствующие цветные вееры.

Замечание 3.15. *Стандартное действие $G = SL(2)$ на $\mathbb{C}^2$ индуцирует действие $SL(2)$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^2=\mathbb{P}(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^2)$, которое задается по формуле*

$$\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right).[z_0:z_1:z_2]:=[z_0:(a_{11}z_1+a_{12}z_2):(a_{21}z_1+a_{22}z_2)].$$

Через B обозначим подгруппу в G, состоящую из верхнетреугольных матриц.

Заметим, что G-орбиты этого действия устроены следующим образом:

- *G-орбита $H_\infty=\{[z_0:z_1:z_2]\in\mathbb{P}^2\mid z_0=0\}$. Это единственный G-стабильный дивизор;*
- *G-орбита $H_0=\{[1:0:0]\}$;*
- *открытая G-орбита $\mathbb{P}^2\setminus(H_\infty\cup H_0)\cong\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$.*

Также имеем B-стабильный, но не G-стабильный дивизор

$$H_{12}=\{[z_0:z_1:z_2]\in\mathbb{P}^2\mid z_2=0\}.$$

Заметим, что открытая B-орбита есть $\mathbb{P}^2\setminus(H_\infty\cup H_0\cup H_{12})\cong\mathbb{C}^2\setminus\{x_2=0\}$ (где $x_2=\frac{z_2}{z_0}$).

Замечание 3.16. *Рассмотрим торическое действие тора* $\mathbb{C}^*$ *на* $\mathbb{P}^1$, *которое задается по формуле*

$$t.[w_0 : w_1] = [w_0 : tw_1].$$

В этом случае, имеем следующие $\mathbb{C}^*$*-орбиты:*

- *открытой* $\mathbb{C}^*$*-орбитой является* $\mathbb{P}^1 \setminus \{[1:0],[0:1]\} \cong \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{w = 0\}$ *(где* $w = \frac{w_1}{w_0}$*);*
- $\mathbb{C}^*$*-дивизоры есть* $[1:0],[0:1]$.

Теперь рассмотрим компактное многообразие $X' = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ на котором действует $SL(2) \times \mathbb{C}^*$ по формуле

$$\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{smallmatrix}\right).([z_0 : z_1 : z_2],[w_0 : w_1]) =$$
$$= ([z_0 : (a_{11}z_1 + a_{12}z_2) : (a_{21}z_1 + a_{22}z_2)],[w_0 : a_{33}w_1]).$$

В этом случае, открытой $SL(2) \times \mathbb{C}^*$-орбитой является

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{C}^* \cong SL(2) \times \mathbb{C}^*/U^-,$$

а открытой B-орбитой является $\mathbb{C}^2 \setminus \{(x_2 = 0)\} \times \mathbb{C}^*$.

Имеем следующие малые $SL(2) \times \mathbb{C}^*$-орбиты:

- 0-мерные: $H_0 \times [1:0]$, $H_0 \times [0:1]$;
- 1-мерные: $H_\infty \times [1:0], H_\infty \times [0:1]$, $H_0 \times \mathbb{C}^*$;
- 2-мерные: $H_\infty \times \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times [1:0]$, $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \times [0:1]$;

Кроме того, имеем следующие B-стабильные дивизоры:

- $SL(2) \times \mathbb{C}^*$-стабильные дивизоры: $D_\infty := H_\infty \times \mathbb{P}^1, D_{10} := \mathbb{P}^2 \times [1:0], D_{01} := \mathbb{P}^2 \times [0:1]$;

- не $SL(2)\times\mathbb{C}^*$-стабильный дивизор: $D_{12} := H_{12}\times\mathbb{P}^1$.

Вычислим точки $a_{D_\infty}, a_{D_{10}}, a_{D_{01}}, a_{D_{12}}$ в $N=\mathbb{Z}^2$, соответствующие B-стабильным дивизорам $D_\infty, D_{10}, D_{01}, D_{12}$.

Рассмотрим характер $\lambda=(l,m)\in M=\mathbb{Z}^2$. Получаем следующее:

- $\langle a_{D_\infty},(l,m)\rangle = v_{D_\infty}(x_2^l w^{-m}) = v_{D_\infty}((\frac{z_2}{z_0})^l w^{-m}) = -l$; поэтому $a_{D_\infty}=(-1,0)$;
- $\langle a_{D_{10}},(l,m)\rangle = v_{D_{10}}(x_2^l w^{-m}) = v_{D_{10}}(x_2^l(\frac{w_1}{w_0})^{-m}) = m$; поэтому $a_{D_{10}}=(0,1)$
- $\langle a_{D_{01}},(l,m)\rangle = v_{D_{01}}(x_2^l(\frac{w_1}{w_0})^{-m}) = -m$; поэтому $a_{D_{10}}=(0,-1)$
- $\langle a_{D_{12}},(l,m)\rangle = v_{D_{12}}(x_2^l w^{-m}) = v_{D_{12}}((\frac{z_2}{z_0})^l w^{-m}) = l$; поэтому $a_{D_{12}}=(1,0)=\alpha_{12}^\vee$;

Таким образом, получаем цветной веер Σ' многообразия X', состоящий из следующих цветных конусов (см. рисунок 1):

- 0-мерный конус: $((0,0),\emptyset)$;
- 1-мерные конусы: $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(-1,0)\rangle,\emptyset)$, $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(0,-1)\rangle,\emptyset)$, $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(0,1)\rangle,\emptyset)$, $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(1,0)\rangle, D_{12})$;
- 2-мерные конусы: $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(-1,0),(0,1)\rangle,\emptyset)$, $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(-1,0),(0,-1)\rangle,\emptyset)$, $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(1,0),(0,1)\rangle, D_{12})$, $(\mathbb{R}_{\geq 0}\langle(1,0),(0,-1)\rangle, D_{12})$;

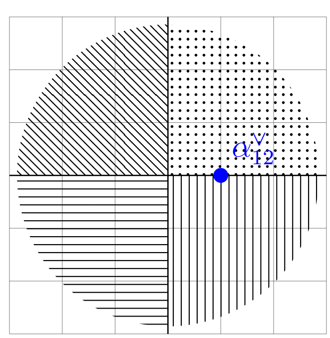

Рисунок 1 — Цветной веер Σ' для $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1$.

Теперь применим выпукло-геометрический критерий (см. следствие 3.9) к некомпактным орисферическим многообразям X, полученным из X' удалением некоторых $SL(2) \times \mathbb{C}^*$-стабильных дивизоров.

- Для $X := X' \setminus D_\infty \cong \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ получаем цветной веер Σ как на рисунке 2. Так как $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{\mathbb{R}^2 \setminus |\Sigma|} \cup \{\alpha_{12}^\vee\}\rangle = \mathbb{R}^2$, то X допускает феномен Гартогса.

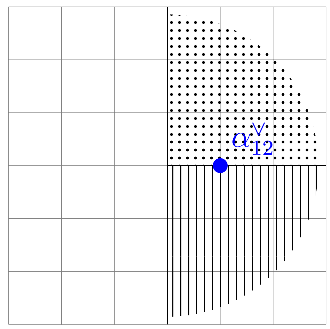

Рисунок 2 — Цветной веер Σ для $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$.

- Для $X := X' \setminus D_{10} \cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^1$ получаем цветной веер Σ как на рисунке 3. Так как $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{\mathbb{R}^2 \setminus |\Sigma|} \cup \{\alpha_{12}^\vee\}\rangle \neq \mathbb{R}^2$, то X не допускает феномен Гартогса.

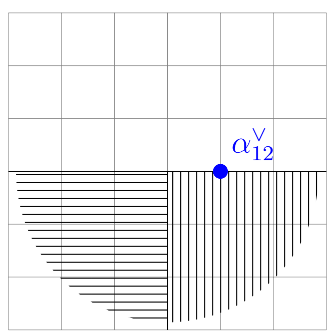

Рисунок 3 — Цветной веер Σ для $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}$.

3.4 Торические многообразия

Торические многообразия образуют подкласс в классе орисферических многообразий. В этом случае $G = T$ — алгебраический тор, $B = T$, $U = \{e\}$, $H = \{e\}$,

$\Omega = G/H = T$, $S = \emptyset$, $N = \mathfrak{X}(T), M = \mathfrak{X}^*(T)$. Так как множество $\mathcal{B}(T) = \emptyset$ и $\mathcal{V}(T) = N_{\mathbb{Q}}$, то цветной конус и цветной веер называют обычно просто конусом и веером, соответственно. Тогда выпукло-геометрический критерий принимает наиболее простую форму:

Следствие 3.10. *Пусть X_Σ — некомпактное торическое многообразие с веером Σ таким, что $N_{\mathbb{R}} \setminus |\Sigma|$ является связным множеством. Многообразие X_Σ допускает феномен Гартогса тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{N_{\mathbb{R}} \setminus |\Sigma|)}\rangle = N_{\mathbb{R}}.$$

Замечание 3.17. *В работе автора (совместно с Щуплевым А. В.) [107] компонента связности C дополнения к носителю веера Σ, удовлетворяющая свойству $\mathbb{R}_{\geq 0}\langle\overline{C}\rangle = N_{\mathbb{R}}$, называется вогнутой (в нашем случае, $C = N_{\mathbb{R}} \setminus |\Sigma|$). Это понятие (однако без четкого определения) восходит к работе Марчиняк [59], в которой она сформулировала следующую гипотезу: если X_Σ — гладкое торическое многообразие и дополнение к носителю веера $|\Sigma|$ имеет по крайней мере одну вогнутую компоненту, то X_Σ допускает феномен Гартогса.*

В качестве примеров рассмотрим тотальные пространства некоторых линейных расслоений над проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

- Тривиальное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ не допускает феномен Гартогса. Веер этого многообразия изображен на рисунке 4.

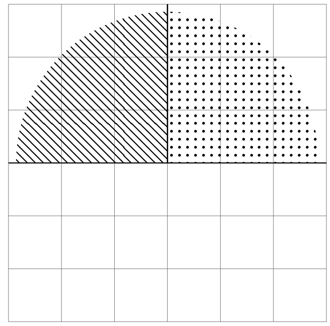

Рисунок 4 — Веер для $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

- Тавтологическое расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ допускает феномен Гартогса. Веер этого многообразия изображен на рисунке 5.

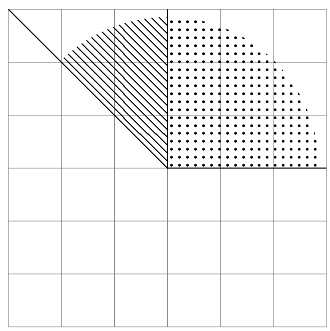

Рисунок 5 — Веер для $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

- Расслоение гиперплоскости $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ не допускает феномен Гартогса. Веер этого многообразия изображен на рисунке 6.

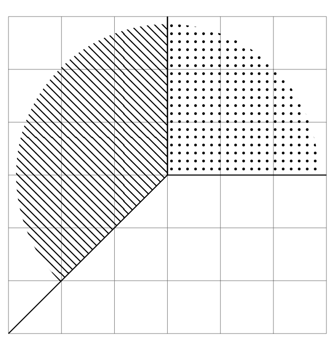

Рисунок 6 — Веер для $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Получен когомологический критерий феномена Гартогса в некомпактных связных на границе комплексных аналитических многообразиях, допускающих открытое вложение в некоторое паракомпактное топологическое пространство, причем структурный пучок является сужением некоторого пучка абелевых групп с нулевой иррегулярностью. В частности, установлен критерий феномена Гартогса для $(1, 0)$-компактифицируемых комплексных многообразий.

2. В случае нормальных $(1, 0)$-компактифицируемых почти однородных алгебраических G-многообразий, где G — редуктивная группа Ли, получен критерий в терминах доминантных характеров максимального алгебраического тора группы G.

3. В случае сферических многообразий получен выпукло-геометрический критерий в терминах цветных вееров. Также рассмотрен случай орисферических и торических многообразий.

Все полученные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами, опубликованы в 7 работах и могут быть использованы в комплексном анализе и алгебраической геометрии.

Сформулируем некоторые задачи, составляющие перспективу для дальнейшего исследования. А именно, изучить феномен продолжения Гартогса для голоморфных функций (или для сечений локально свободных пучков) в следующих ситуациях:

- в (b, σ)-компактифицируемых комплексных многообразиях, для $b > 1$ или $\sigma \neq 0$;
- в голоморфных локально тривиальных расслоениях;
- в произвольных почти однородных G-многообразиях.

Литература

[1] Винберг Э. В., Кимельфельд Б. Я. *Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли*//Функц. анализ и его прил., т. 12 (1978), № 3, с. 12 – 19.

[2] Винберг Э. В., Попов В. Л. *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*//Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 36 (1972), № 4, с. 749—764

[3] Ивашкович С. М. *Феномен Гартогса для голоморфно выпуклых кэлеровых многообразий*// Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 50 (1986), вып. 4, с. 866 – 873.

[4] Adaxi K., Suzuki M., Ioshida M. *Continuation of holomorphic mappings with values in complex Lie group* // Pacif. J. Math., v. 47 (1973), № 1, pp. 1 – 4.

[5] Ajzenberg L.A., Dautov Sh.A. *Differential forms orthogonal to holomorphic functions or forms, and their properties (russ.)*//Novosibirsk: Nauka 1975 [Engl. transl.: Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc. 1983].

[6] Ajrapetjan R.A., Henkin G.M. *Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-functions (russ.)*// Usp. Mat. Nauk, Vol. 39 (1984), pp. 39 – 106 [Engl. transl.: Russ. Math. Surv., Vol. 39, pp. 41 – 118 (1984)].

[7] Akhiezer D. *Lie Group Actions in Complex Analysis.* Aspects of Mathematics, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1995, vii+204 p.

[8] Alexandre W., Mazzilli E. *Extension of holomorphic functions defined on singular analytic spaces with growth estimates*//Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.(5).XIV (2015), pp. 293 – 330.

[9] Andersson M., Samuelsson H. *A Dolbeault-Grothendieck lemma on complex spaces via Koppelman formulas*//Invent. Math., Vol 190 (2012), № 2, pp. 261 – 297.

[10] Andersson M., Samuelsson H. *Weighted Koppelman formulas and the $\bar{\partial}$-equation on an analytic space*// Journal of Functional Analysis, Vol.261 (2011), № 3, pp. 777 – 802.

[11] Andrist R. B., Shcherbina N., Wold E. F. *The Hartogs extension theorem for holomorphic vector bundles and sprays*// Arkiv för Matematik, Vol. 54 (2016), pp. 299 – 319.

[12] Andreotti A., Hill C. D. *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part I: reduction to vanishing theorems*//Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Vol. 26 (1972), pp. 325 – 363; ibid Vol. 26 (1972), pp. 747 – 806.

[13] Andreotti A., Grauert H. *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*//Bull.Soc. Math. Fr., (1962), № 90, pp. 193 – 259.

[14] Aroca J. M., Hironaka H., Vicente J. L. *Complex Analytic Desingularization.* Springer Japan KK, part of Springer Nature, 2018, XXIX+330 p.

[15] Bănică, C., Stănăsilă O. *Algebraic Methods in the Global Theory of Complex Spaces.* New York: Wiley& Sons, 1976, 296 pp.

[16] Bănică, C., Stănăsilă O. *Some results on the extension of analytic entities defined out of a compact*//Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, (1971), № 25, pp. 347 – 376.

[17] Bedford E. Review of [38], Mathematical Reviews, available on MathScinet.

[18] Bochner S. *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*// Ann. of Math., Vol. 44 (1943), № 2, pp. 652-673.

[19] Borel A. *Kahlerian coset spaces of semisimple Lie groups*//Proc. Nat. Acad. Sci. USA., Vol. 40 (1954), № 12, pp. 1147 – 1151.

[20] Brion M. *Introduction to actions of algebraic groups*//Les cours du CIRM 1:1, 2010, pp. 1 – 22.

[21] Brion M. *Une extension du theóremè de Borel-Weil*//Math. Ann., (1990), № 286, pp. 655 – 660.

[22] Brion M. *Algebraic group actions on normal varieties*//Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 78 (2017), pp. 85 – 107.

[23] Bredon G. E. *Sheaf Theory.* Springer-Verlag, New York, 1997, 502 p.

[24] Brudnyi A. *Hartogs type theorems on coverings of Stein manifolds*//International Journal of Mathematics, Vol. 17 (2006), № 3, pp. 339 – 349.

[25] Chen Z. *A Counterexample to Hartogs' Type Extension of Holomorphic Line Bundles*//J. Geom. Anal., Vol. 28 (2018), pp. 2624 – 2643.

[26] Chen B.-Y. *Hardy-Sobolev type inequalities and their applications*// arXiv:1712.02044, 2018.

[27] Chen B.-Y *An L^2 Hartogs-type extension theorem for unbounded domains*//arXiv:2205.07458v1, 2022.

[28] Chirka E. M. *Analytic representation of CR-functions*//Mat.Sb., Vol. 98, (1975), № 4, pp. 591 – 623.

[29] Coltoiu M., Ruppenthal J. *On Hartogs' extension theorem on* $(n-1)$*-complete complex spaces*//J. reine angew. Math., (2009), № 637, pp. 41 – 47.

[30] Coltoiu M. *A supplement to a theorem of Merker and Porten: a short proof of Hartogs extension theorem for* $(n-1)$*-complete complex spaces*//Preprint 2008 arXiv:0811.2352, 3 p.

[31] Cox D., Little J., Schenck H.*Toric Varieties* AMS, 2011, 863 p.

[32] Dwilewicz R., Merker J. *On the Hartogs-Bochner Phenomenon for CR Functions in* $P_2(C)$ //Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 130 (2002), № 7, pp. 1975 – 1980.

[33] Dwilewicz R. *Additive Riemann–Hilbert Problem in Line Bundles Over* $\mathbb{CP}^1$//Canad. Math. Bull., Vol. 49 (2006), № 1, pp. 72 – 81.

[34] Dwilewicz R. *Holomorphic extensions in complex fiber bundles*//J. Math. Anal. Appl., Vol. 322 (2006), pp. 556 – 565.

[35] Dwilewicz R. *Holomorphic extensions and theta functions on complex tori*//Monatsh Math., (2013), № 169, pp. 145 – 160.

[36] Ehrenpreis L. *A new proof and an extension of Hartogs theorem*//Bull. Amer. Math. Soc., (1961), № 67, pp. 507 – 509.

[37] Fichera G. *Caratterizazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di pie variabili complesse*//Rend. Accad. Naz. Lincei.Vol. VIII, (1957), № 23, pp. 706 – 715.

[38] Fornæss J. E. *The disc method*//Math. Z., Vol. 227 (1998), № 4, pp. 705 – 709.

[39] Fulton W. *Introduction to Toric Varieties.* Princeton University Press, Princeton, 1993, 169 p.

[40] Gandini J. *Embeddings of Spherical Homogeneous Spaces*// Acta Mathematica Sinica, Vol. 24 (2018), № 3, pp. 299 – 340.

[41] Gunning R. C., Rossi H. *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1965, 329 p.

[42] Godement R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1998, 283 p.

[43] Grauert H., Peternell T., Remmert R. (Eds.) *Several Complex Variables VII. Sheaf-theoretical methods in complex analysis.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Vol. 74, 1994, 369 pp.

[44] Griffiths P. *Two Theorems on Extensions of Holomorphic Mappings*//Inventiones math., Vol. 14 (1971), p. 27 – 62.

[45] Grušin V. V. *Solutions with isolated singularities for partial differential equations with constant coefficients*// Tr. Mosk. Mat. Obs., Vol. 15. (1966), pp. 262 – 278.

[46] Hartogs F. *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*// Sitzungsber. Köngl. Bayer. Akad. Wissen, (1906), № 36, pp. 223 – 242.

[47] Harvey R. *The theory of hyperjunctions on totally real subset of a complex manifolds with applications to extension problems*//Am. J. of math., (1969), № 91, pp. 853 – 873.

[48] Humphreys J. E. *Linear algebraic groups*. Graduate Texts in Mathematics, 21, Springer-Verlag, New York Inc., 1998, 274 pp.

[49] Hörmander L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Comp., 1966, 279 p.

[50] Henkin G.M., Letterer J.: *Andreotti-Grauert theory by integral formulas* Berlin: Akademie- Verlag and Boston: Birkh iuser, 1988, 270 p.

[51] Hurwitz A. *Ober die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit*//in Proc. 1st International Congress of Mathematicians, Ziirich. 1897-1898, pp. 91 – 112.

[52] Kaneko A. *On Hartogs type continuation theorem for regular solution of linear partial differential equations with constant coefficients*//J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math. Vol. 35 (1988), pp 1 – 26.

[53] Kawamata Y. *On Deformations oI Compactifiable Complex Manifolds* //Proc. Japan Acad., Vol. 53 (1977), pp. 106 – 109.

[54] Kytmanov A., Myslivets S., Tarkhanov N. *Removable singularities of CR-functions on singular boundaries*//Math. Z. Vol. 242 (2002), pp. 491 – 515.

[55] Laufer H.B. *Some remarks about a theorem of Hartogs*//Proc. AMS., Vol. 17 (1966), № 6, pp. 1244 – 1249.

[56] Levi, E. E. *Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza diuna funzione analitica di due vadabili complesse*//Annali di Mat. serie 3, Vol. 18 (1911), pp. 69 – 79.

[57] Luna D., Vust Th. *Plongements d'espaces homogenes*//Comment. Math. Helv., Vol. 58 (1983), № 2, pp. 186 – 245.

[58] Lupacciolu G. *Some global results on extension of CR-objects in complex manifolds*//Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 321 (1990), pp. 761-774.

[59] Marciniak M. A. *Holomorphic extensions in toric varieties: Doctoral Dissertations, Ph. D. in Mathematics*//Missouri University of Science and Technology, 2009. — 147 p.

[60] Marciniak M. A. *Holomorphic extensions in smooth toric surfaces*//Mathematica Josephina, Inc., (2011), № 22, pp. 911 – 933.

[61] Martinelli E. *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di pie variabili complesse*// Mem. della R. Accad. d'ltalla., (1938), № 9, pp. 269 – 283.

[62] Martinelli E. *Sopra una dimostrazione di R. Fueterper un teorema di Hartogs*// Comm. Math. Helv., (1942/43), № 15, pp. 340 – 349.

[63] Merker J., Porten E. *A Morse-Theoretical Proof of the Hartogs Extension Theorem*//J. Geom. Anal., Vol. 17 (2007), № 3, pp. 513 – 546.

[64] Merker J. *The Hartogs extension theorem on* $(n-1)$*-complete spaces*//J. Reine. Angew. Math., (2009) № 637, pp. 23 – 39.

[65] Napier T., Ramachandran M. *The Bochner–Hartogs dichotomy for bounded geometry hyperbolic Kähler manifolds*//Annales de l'Institut Fourier, Vol. 66 (2016), № 1, pp. 239 – 270.

[66] Narasimhan R. *Analysis on real and complex manifolds.* North Holland; 2nd edition, 1985, p. 245.

[67] Nagata M. *Imbedding of an abstract variety in a complete variety*//Jour.of Math. Kyoto Univ. 2, 1962, pp. 1 – 10.

[68] Oda T. *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*Springer, 1988, 212 p.

[69] Ohsawa T. *Hartogs type extension theorems on some domains in Kähler manifolds*// Annales Polonici Mathematici., Vol. 106 (2012), № 1, pp. 243 – 254.

[70] Ohsawa T. *On the complement of effective divisors with semipositive normal bundle*// Kyoto J. Math., Vol. 52 (2012), pp. 503 – 515.

[71] Ohsawa T. *$\bar{\partial}$-cohomology and geometry of the boundaryof pseudoconvex domains*//Annales Polonici Mathematici., Vol. 91 (2007), № 2-3, pp. 249 – 262.

[72] Øvrelid N., Vassiliadou S. *Semiglobal results for $\bar{\partial}$ on complex spaces with arbitrary singularities, Part II*// Trans. Amer. Math. Soc.,(2011), № 363, pp. 6177 – 6196.

[73] Palamodov V.P. *Linear differential operators with constant coefficient.* NewYork-Berlin: Springer-Verlag, 1970, 448 pp.

[74] Palamodov V.P. *Hartogs Phenomenon for Systems of Differential Equations*//J. Geom Anal., Vol. 24 (2014), pp. 667 – 686.

[75] Range M. *Extension phenomena in multidimensional complex analysis: correction of the historical record*// Math. Intellig., Vol. 24 (2002), № 2, pp. 4 – 12.

[76] Remmert R., van de Ven A. *Zur Funktionentheorie homogener komplexer Mannigfaltigkeiten*//Topology, Vol. 2 (1963), № 2, pp. 137 – 157.

[77] Rossi H. *Vector fields on analytic spaces*//Ann. of Math. (1963), № 78, pp. 455 – 467.

[78] Ruppenthal J. *L^2-Serre Duality on Singular Complex Spaces and Applications*//Complex Analysis and Geometry. PROMS., Vol. 144 (2015), pp. 309 – 318.

[79] Ruppenthal J. *Serre duality and L2-vanishing theorems on singular spaces*//Preprint 2014,arXiv:1401.4563., 28 p.

[80] Ruppenthal J. A *$\bar{\partial}$-theoretical proof of Hartogs extension theorem on Stein spaces with isolated singularities*//J. Geom. Anal., Vol. 18 (2008), pp. 1127 – 1132.

[81] Ruppenthal, J.*A $\bar{\partial}$ theoretical proof of Hartogs extension theorem on $(n-1)$-complete spaces*//Preprint 2008 arXiv:0811.1963, 9 pp.

[82] Saracco A., Tomassini G. *Cohomology and removable subsets*// Forum Math., Vol. 23 (2011), pp. 1093 – 1112.

[83] Serre J. P. *Quelques problémes globaux rélatifs aux variétés de Stein*//Coll. Plus. Var. Bruxelles,(1953), pp. 57 – 68.

[84] Sepanski M. R. *Compact Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics, Springer Science+Business Media, LLC, New York, Vol. 235, 2007, 207 pp.

[85] Severi F. *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*//Rend. Reale Accad. Lincei.,(1931) № 23, pp. 795 – 804.

[86] Siu Y.-T. *A Hartogs Type Extension Theorem for Coherent Analytic Sheaves*//Annals of Mathematics, Second Series., Vol. 93 (1971), № 1, pp. 166 – 188.

[87] Siu Y.-T. *An Osgood type extension theorem for coherent analytic sheaves*//in Proceedings of the Conference on Several Complex Variables (College Park, Maryland, 1970), Springer-Verlag Lecture Notes.

[88] Siu Y.-T., Trautmann G. *Extension of coherent analytic sheaves*//Math. Ann., Vol. 188 (1970), pp. 128 – 142.

[89] Siu Y.-T. *Techniques of extension of analytic object* Lect. Notes Pure Appl.Math. — New York: Marcel Dekker, Vol. 8, 1974, 256 p.

[90] Shiffman B. *Extension of Holomorphic Maps into Hermitian Manifolds*//Math. Ann., Vol. 194 (1971), pp. 249 – 258.

[91] Sumihiro H. *Equivariant completion*//J. Math. Kyoto Univ., Vol. 14 (1974), № 1, pp. 1 – 28.

[92] Tavares J. *Local and Global Hartogs-Bochner Phenomenon in Tubes*//arXiv:1402.0360, 2014

[93] Takegoshi K. *Relative vanishing theorems in analytic spaces*//Duke Math. J., Vol. 51 (1985), № 1, pp. 273 – 279.

[94] Vo Van Tan *On a characterization of analytic compactifications for* $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ // Bull. Braz. Math. Soc., New Series Vol. 41 (2010), № 3, pp. 355 – 387

[95] Timashev D. A. *Homogeneous Spaces and Equivariant Embeddings*//Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 138, Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 2011, xxii+253 pp.

[96] Timashev D. A. *Equivariant embeddings of homogeneous spaces.* Surveys in geometry and number theory: reports on contemporary Russian mathematics, London Math. Soc. Lect. Note Ser., no. 338, Cambridge University Press, Cambridge (2007), pp. 226–278.

[97] Tomassini G. *Extension problems in Complex Analysis*// Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol. 25 (2005), pp. 175 – 184.

[98] Vîjîitu V. *On Hartogs' extension*//Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -), Vol. 201 (2022), pp. 487 – 498.

[99] Vîjîitu V. *Cohomology with compact supports for cohomologically q-convex spaces*// Arch. Math., Vol. 80 (2003), pp. 496 – 500.

[100] Wang X. *Bott-Chern cohomology and the Hartogs extension theorem for pluriharmonic functions* arXiv:2205.02494, 2022.

Работы автора по теме диссертации

[101] Феклистов С. В., Щуплев А. В. *О голоморфном продолжении функций в торических многообразиях*//Седьмое Российско-Армянское совещание по математическому анализу и смежным вопросам г. Ереван 9-15 сентября 2018. Ер.: Изд-во «Гитутюн», 2018 – с. 75 – 76.

[102] Феклистов С. В. *Феномен Гартогса в G-многообразиях* // Восьмая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов». Москва, Россия, 27 января – 1 февраля 2020 г. Тезисы докладов. — Москва: МЦНМО, 2020, с. 66 – 67.

[103] Феклистов С. В. *О феномене продолжения Гартогса в сферических многообразиях*// Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов: тезисы докладов Девятой школы-конференции, Самара, 21–26 августа 2021 года. – Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2021. – с. 57-59.

[104] Феклистов С. В. *Феномен Гартогса в торических многообразиях*//Конференция международных математических центров мирового

уровня: материалы конф. Сириус, 9–13 августа 2021 г. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2021. – с. 41 – 42.

[105] Феклистов С. В. *Феномен Гартогса и спектральная последовательность Лере* // Международная конференция по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. Сборник тезисов. г. Цахкадзор, Армения, 19-23 сентября 2022г.– Ереван: «Мекнарк», 2022.- с. 47 – 49.

[106] Феклистов С. В. *Феномен продолжения Гартогса в почти однородных алгебраических многообразиях*// Матем. сб., т. 213 (2022), № 12, с. 109 – 136.

[107] Feklistov S., Shchuplev A. *The Hartogs extension phenomenon in toric varieties*// J. Geom. Anal., Vol. 31 (2021), pp. 12034 – 12052.