Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра высшей и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______________/ С.Г. Мысливец
«____» ___________ 2022 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ЗАДАЧ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ЗНАКОВЫХ ГРАФОВ

Направление 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Магистерская программа 01.04.02.01 Математическое моделирование

Руководитель	доцент, кандидат физико-математических наук	Д.В. Семенова
Выпускник		Э.И. Ибрагимова
Нормоконтролер		Т.Н. Шипина

Красноярск 2022

АННОТАЦИЯ

Цель работы — разработка и исследование алгоритмов для задач сбалансированности знаковых графов.

В результате исследования сформулированы основные задачи знакового баланса, установлена их вычислительная сложность, разработаны алгоритмы и программы для их решения.

Ключевые слова: сбалансированность знаковых графов, задачи знакового баланса, кластеризация знакового графа.

ABSTRACT

The purpose of the work — development and research of algorithms for signed graph balancing problems.

As a result of the research, the main tasks of the sign balance are formulated, their computational complexity is established, algorithms and programs for their solution are developed.

Keywords: signed graph balance, sign balance problems, signed graph clustering.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

С ростом размерности графов, которые моделируют реальные объекты, процессы и сети, не угасает интерес к задачам кластеризации графов, в том числе специального вида, и разработке алгоритмов, решающих эти задачи за реальное время. В частности, в последнее время растет количество исследований, которые расширяют класс задач, решаемых с помощью знаковых графов. Задачи k-сбалансированности знаковых графов, в частности, 2-сбалансированности, активно исследуются начиная с 50-х годов XX века [21]. Это обусловлено тем, что знаковые графы, возникшие при исследовании проблем социальной психологии, исторически являются удобным инструментом для моделирования систем управления человеческими ресурсами. На практике задачи знакового баланса находят свое применение при анализе мультиагентных систем [2, 15], социальных сетей [13] и тематическом моделировании текстов [25]. Также представление сетевых матриц в виде знаковых графов позволяет ускорить решение задач линейного программирования [18,20]. Исследование данных графов в моделировании систем различной физической и социальной природы требует разработки новых алгоритмов для решения различных задач.

Степень разработанности темы исследования

Знаковым называется граф, каждое ребро которого помечено знаком «+» или «-». Важнейшие результаты в исследовании знаковых графов были получены такими учеными как F. Harary [21,22], T. Zaslavsky [27], P. Doreian [14,17] и многими другими. В работах этих авторов исследовались следующие задачи знакового баланса:

1. распознавание 2- и k-сбалансированности (необходимо проверить, является ли граф сбалансированным);
2. поиск наибольшего по мощности 2-сбалансированного подграфа (MBSP);
3. установление знакового баланса (необходимо найти минимальное подмножество ребер, изменение знаков которых преобразует граф в 2-сбалансированный);

4. вычисление меры 2-сбалансированности (определяется насколько сбалансирован знаковый граф);
5. кластеризация знакового графа.

Наиболее полный обзор возможных задач знакового баланса приведен в работе [27].

Знаковые графы возникли в социальной психологии в теории структурного баланса Хайдера. В теории структурного баланса изучается система P-O-X, где P и O — субъекты, а X — некоторый объект. Отношения между данными субъектами могут быть положительными или отрицательными. Если P имеет отношение приязни к O, и O ответственен за X, то у P будет наблюдаться тенденция одобрять X. Но если сам O не одобряет X, то вся система P-O-X оказывается в состоянии дисбаланса и будет стремиться исправить это. Состояние баланса достигается изменением отношения приязни между P и O, ответственности между O и X или оценки между P и X.

Задача разбиения (кластеризации) знакового графа была иссследована в работах [14, 17]. Вид решения задачи кластеризации существенно зависит от выбора функционала качества кластеризации или функционала ошибки. Выделяют следующие вариации задачи. Когда количество кластеров k задано, то k может выступать параметром кластеризации, тогда решается задача о разбиении ровно на k кластеров или не более (не менее) чем на k кластеров. Когда количество кластеров k не задано, то оно является решением задачи [10]. В данной работе рассматривается случай, когда количество кластеров является решением задачи. В общем виде задача кластеризации знакового графа является NP-полной [25]. В работе [14] предложены эвристические методы для ее решения. Основная идея предложенных методов решения этой задачи состоит в следующем. Изначально выбирается некоторое начальное разбиение множества вершин графа. Далее вершины, выбранные случайным образом, перемещаются из одного кластера в другой, также выбранный случайным образом, либо две случайные вершины из разных кластеров меняются местами. Процесс осуществляется до тех пор, пока не будет минимизирована функция суммарной ошибки. В зависимости от метода меняется правило, по которому выбираются перемещаемые вершины и кластеры.

Цели и задачи работы. Целью данной работы является разработка и исследование алгоритмов для задач сбалансированности знаковых графов.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи.

1. Разработать и исследовать алгоритм решения задачи распознавания k-сбалансированности знакового графа.
2. Разработать и исследовать алгоритмы для решения задач кластеризации знакового графа.
3. Создать комплекс программ, реализующий разработанные алгоритмы, для проверки результативности алгоритмов на случайных знаковых графах.

Структура и объем магистерской диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, 4 приложений. Общий объем составляет 59 страниц, включая 4 приложения; иллюстративный материал представлен 9 рисунками и 5 таблицами; список литературы содержит 26 наименований.

В главе 1 приведены основные определения и постановки задач 2-сбалансированности знакового графа. В главе 2 приведены постановки задач k-сбалансированности знакового графа. В главе 3 представлены результаты вычислительных экспериментов.

1 Задачи сбалансированности знаковых графов

1.1 Основные определения и обозначения теории знаковых графов

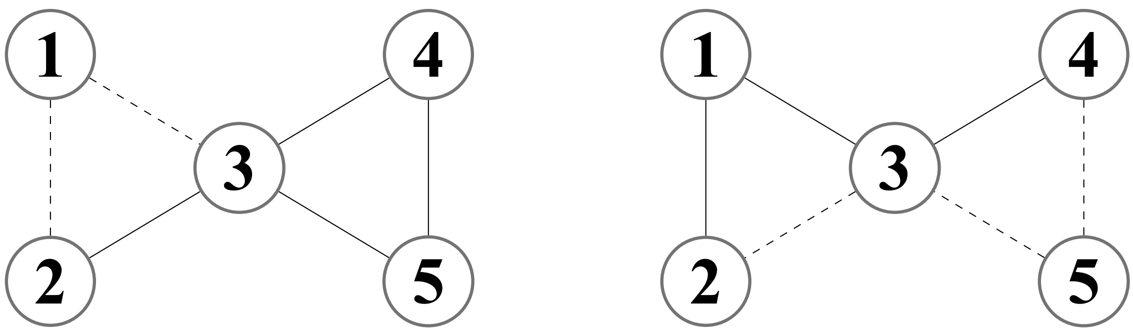
В работе используются следующие определения и обозначения [3, 21].

Определение 1.1. Знаковым графом называется пара $\Sigma = (G, \sigma)$, где $G = (V, E)$ является неориентированным графом, на ребрах которого задана функция знака $\sigma: \ E \to \{+, \ -\}$, $n = |V| \geq 2$, $m = |E| \geq 1$.

Знак цикла определяется как произведение знаков рёбер, образующих этот цикл. Цикл графа положительный, если он содержит четное число отрицательных ребер, и отрицательный, если он содержит нечетное число отрицательных ребер.

Определение 1.2 ([22]). Знаковый граф $\Sigma = (G, \ \sigma)$ называется 2-сбалансированным, если любой его простой цикл положительный.

Пример 1.1. *Граф, изображенный на рисунке 1.1 а) является 2-сбалансированным, потому что оба его простых цикла положительны, а граф б) несбалансирован, так как цикл* $(1, 2, 3)$ *отрицательный.*



а) б)

Рисунок 1.1 — а) 2-сбалансированный граф, б) несбалансированный граф

Множество отрицательных ребер графа Σ обозначим E^-, а E^+ — множество положительных ребер, полагая $E^- \cap E^+ = \oslash$, $E^- \cup E^+ = E$.

Обозначим через $\Sigma^- = (V, E^-, \sigma)$ подграф, состоящий из отрицательных ребер, а через $\Sigma^+ = (V, \ E^+, \ \sigma)$ — подграф, состоящий из положительных ребер.

Определение 1.3. Окрестностью вершины u называется множество $\Gamma(u)$, состоящее из всех вершин v, смежных с u. Замкнутая окрестность — это множество $\Gamma[u] = \Gamma(u) \cup \{u\}$.

Далее будем использовать следующие обозначения:
- $\Gamma^{-}(u) = \{j \in V | (i,\ j) \in \Gamma(u) \cap E^{-}\}$ — вершины, с которыми вершина u соединена отрицательными рёбрами,
- $\Gamma^{+}(u) = \{j \in V | (i,\ j) \in \Gamma(u) \cap E^{+}\}$ — вершины, с которыми вершина u соединена положительными рёбрами.

Пример 1.2. *Окрестность вершины. Рассмотрим граф, изображенный на рисунке 1.2. На рисунке а) темным выделены вершины из окрестности вершины 4, а на б) темным выделены из замкнутой окрестности вершины 4.*

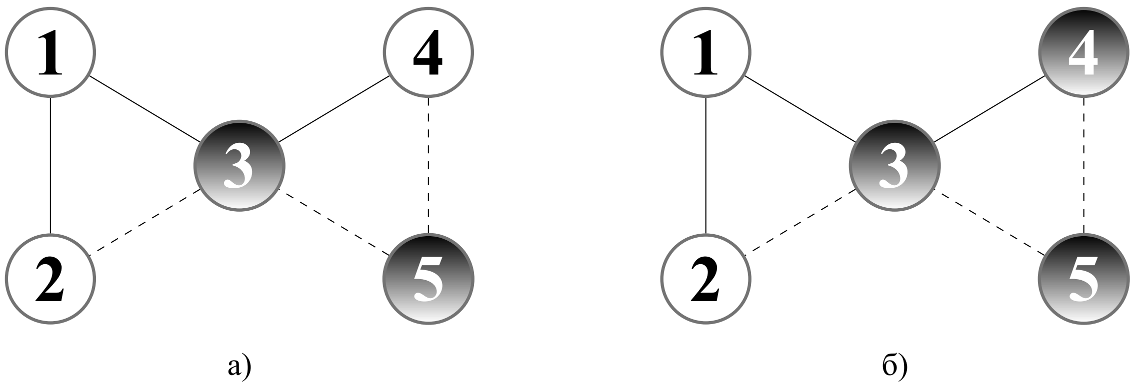


Рисунок 1.2 — а) Темным цветом выделена окрестность вершины 4, б) темным цветом выделена замкнутая окрестность вершины 4

Определение 1.4. Граф G называется полным, если любые две его вершины смежны.

Определение 1.5. Если множество вершин подграфа H графа G есть U, а множество его ребер совпадает с множеством всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат U, то H называется подграфом, порожденным(или индуцированным) множеством U, и обозначается через $G[U]$.

Необходимое и достаточные условие 2-сбалансированности знакового графа устанавливает следующая теорема [22].

Теорема 1.1 (Картрайт-Харари)**.** *Знаковый граф $\Sigma = (G, \sigma)$ 2-сбалансирован тогда и только тогда, когда множество его вершин V можно разбить на* *две доли A и B, одна из которых может быть пустой, таким образом, что $A \cup B = V$, $A \cap B = \varnothing$, и любое ребро, соединяющее вершины из одной доли, имеет знак «$+$», а любое ребро, соединяющее вершины из разных долей, имеет знак «$-$».*

Другими словами, граф 2-сбалансирован, если и только если для любых двух вершин u, v любой путь между ними имеет один и тот же знак [21]. Такое разделение графа на две доли единственно тогда и только тогда, когда граф связен. Таким образом, сбалансированность знакового графа — аналог двудольности обыкновенного графа [22].

Теорема Картрайта-Харари обобщает критерий двудольности графа (Кениг, 1936): для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины [3].

Также из теоремы 1.1 следуют условия согласованности рёбер.

Определение 1.6. Будем называть ребро согласованным, если оно соединяет вершины из одной доли (или A, или B) и является положительным, или, если соединяет вершины из разных подмножеств (A и B) и является отрицательным.

Пример 1.3. *На рисунке 1.3 проиллюстрированы условия согласованности ребер.*

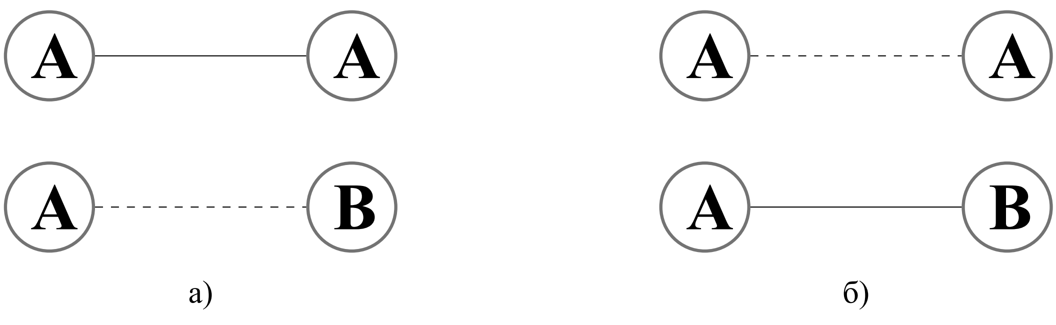


Рисунок 1.3 — а) Случаи, когда условия согласованности выполняются, б) случаи, когда условия согласованности не выполняются

Определение 1.7. Степень вершины графа — число инцидентных вершине ребер.

Определение 1.8. Степень графа Δ — максимальная степень вершины графа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы представлены ниже.

- Разработан и теоретически обоснован алгоритм $KBalance$ для решения задачи распознавания k-сбалансированности знакового графа.
- Разработан и теоретически обоснован алгоритм $SGClust0$ для решения задачи кластеризации знакового графа при $\alpha = 0$. Вычислительная сложность алгоритма $SGClust0$ установлена в теореме 2.1.
- Разработан и теоретически обоснован алгоритм $SGClust1$ для решения задачи кластеризации знакового графа при $\alpha = 1$. Вычислительная сложность алгоритма $SGClust1$ установлена в теореме 2.2.
- Разработан и теоретически обоснован алгоритм $SGClust\alpha$ для решения задачи кластеризации знакового графа при любом α. Алгоритм позволяет найти приближенное решение задачи кластеризации при заданном параметре α. Вычислительная сложность алгоритма $SGClust\alpha$ установлена в теореме 2.3.
- Создан комплекс программ, реализующий разработанные алгоритмы, для проверки их результативности на случайных графах.

Результаты работы опубликованы в шести работах [4–9] и докладывались на следующих конференциях:

- ▷ XIX Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020)» (Томск, диплом победителя)
- ▷ XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Проспект Свободный — 2021» (Красноярск, 1-е место).
- ▷ VIII Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем — 2021» (Томск, диплом).
- ▷ VI Всероссийский молодёжный научный форум «Наука будущего - наука молодых» (Москва, 2-е место).
- ▷ XX Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование — 2021» (Томск, ди-

плом победителя).

- IV Всероссийская с международным участием научно-практическая конференция студентов, аспирантов и работников образования и промышленности «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование — 2022» (Омск, диплом).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: монография / М. Гэри, Д. Джонсон. — М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. Дорогов, А. Ю. Математические основы методов оптимальной частичной балансировки знаковых графов / А. Ю. Дорогов. // СПб: С.-Петербург. гос. электротехн. ун-т "ЛЭТИ 2007. – 33 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.07.2007, №760-В2007.
3. Емеличев, В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев. — М.: Наука, 1990. – 383 с.
4. Ибрагимова, Э. И. Исследование 2-сбалансированных знаковых графов / Э. И. Ибрагимова, Д. В. Семенова // Материалы Международной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информацонных, технических и экономических систем». – 2020. – с. 40–45.
5. Ибрагимова, Э. И. Исследование 2-сбалансированных знаковых графов / Э. И. Ибрагимова // Материалы VII Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информацонных, технических и экономических систем». – 2019. – с. 276–281.
6. Ибрагимова, Э. И. Модификация алгоритма $SGClust\alpha$ для задачи кластеризации знакового графа / Э. И. Ибрагимова, Д. В. Семенова, А. А. Солдатенко // Материалы IV Всероссийской с международным участием научно-практической конференции студентов, аспирантов и работников образования и промышленности «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование». – 2022. В печати.
7. Ибрагимова, Э. И. О двух задачах кластеризации знакового графа / Э. И. Ибрагимова // Материалы VIII Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информацонных, технических и экономических систем». – 2021. – с. 38–41.
8. Ибрагимова Э. И. Распознавание k-кластеризуемости знаковых графов / Э. И. Ибрагимова, Д. В. Семенова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020). Материалы XIX Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. – 2020. –с. 468–472.

9. Ибрагимова, Э. И. Сбалансированные знаковые графы и их применение / Э. И. Ибрагимова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Часть 2, – 2019. – с. 15–20.
10. Ильев В. П. Алгоритм приближенного решения одной задачи кластеризации графа / В. П. Ильев, С. Д. Ильева, А. И. Моршиин Прикладная дискретная математика. – 2019. – Vol. 45. – P. 64–77.
11. Липский, В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. — Москва «Мир», 1998. – 200 с.
12. Шварц, Д. А. О мере сбалансированности полных знаковых графов / Д. А. Шварц. — Издательский дом Высшей школы экономики, 2013. – 20 с.
13. Aparna Sankaran Srinath BullyNet: Unmasking Cyberbullies on Social Networks / Aparna Sankaran Srinath, Hannah Johnson, Gaby G. Dagher, Min LongIEEE Transactions On Computational Social Systems. – April 2021. Vol. 8. № 2. – P. 332–344.
14. Brusco M. J. Partitioning signed networks using relocation heuristics, tabu search, and variable neighbor-hood search / M. J. Brusco, P. Doreian Social Networks. – 2019. – № 56. – P. 70–80.
15. Bo Liu Observability of Leader-Based Discrete-Time Multi-Agent Systems Over Signed Networks / Bo Liu, Housheng Su, Licheng Wu, Xixi Shen IEEE Transactions On Network Science And Engineering. – January-March 2021. – Vol. 8. № 1. – P. 25–39.
16. Doreian P. A partitioning approach to structural balance / P. Doreian, A. Mrvar Social Networks. – 1996. – № 18. – P. 149–168.
17. Doreian P. Structural balance and partitioning signed graphs / P. Doreian, A. Mrvar // In A. Ferligoj & A. Kramberger (Eds.), Developments in data analysis (Metodoloskizvezki 12, P. 195–208). Ljubljana, Slovenia: FDV.
18. Figueiredo, R. The maximum balanced subgraph of a signed graph: Applications and solution approaches / R. Figueiredo, Y. Frota // European Journal of Operational Research 236. – 2014. – P. 473–487.

19. Garey, M. Some simplified NP-complete graph problems / M. Garey, D. Johnson, L. Stockmeyer // Theoretical Computer Sciense. – 1976. – P. 237–267.
20. Gulpinar, N. Extracting pure network submatrices in linear programs using signed graphs / N. Gulpinar, G. Gutin, G. Mitra, A. Zverovitch. // Discrete Applied Mathematics 137. — 2004. – P. 359–372.
21. Harary, F. Structural Balance: A Generalization of Heider's Theory / F. Harary // Psychological Review. – 1956. – Vol.63(5). – P. 227–293.
22. Harary, F. On the notion of balance of a signed graph / F. Harary // Michigan Math. J. 2. –1953. – no. 2. – P. 143–146.
23. Harary, F Structural models: An Introduction to the Theory of Girected Graphs / F. Harary, R. Z. Norman, D. Cartwright. — John Wiley & Sons, Inc., 1966. – 415 p.
24. Kartwright D., Harary F. Structural balance: a generalization of Heider's theory /D. Kartwright, F. Harary // The Psychological Review. 1956. Vol. 63. № 5. P. 277–293.
25. Nikhil Bansal Correlation clustering / Nikhil Bansal, Avrim Blum, Shuchi Chawla Machine Learning. – 2004. – Vol. 56. – P. 89–113.
26. Zaslavsky T. Balance and clustering in signed graphs /T. Zaslavsky Unpublished manuscript, New York. – 2010.
27. Zaslavsky, T. Negative (and positive) circles in signed graphs: A problem collection / T. Zaslavsky // AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 15. –2018. – P. 31–48.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра высшей и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
__________/ С.Г. Мысливец
«_17_» _июня_ 2022 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ЗАДАЧ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ЗНАКОВЫХ ГРАФОВ

Направление 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Магистерская программа 01.04.02.01 Математическое моделирование

Руководитель 17.06.22 доцент, кандидат физико-математических наук Д.В. Семенова

Выпускник 17.06.22 Э.И. Ибрагимова

Нормоконтролер 24.06.22 Т.Н. Шипина

Красноярск 2022