Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«**СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

________________О.В.Непомнящий

«_____»________________ 20___г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Комплекс программ для методического обеспечения математических дисциплин

Руководитель	___________	_________	доц., канд. техн. наук	Н. А. Никулин
	подпись	*дата*	*должность, ученая степень*	
Выпускник	___________	_________	____________________	А. П. Кузьмин
	подпись	*дата*		
Нормоконтролер	___________	_________	доц., канд. техн. наук	Н. А. Никулин
	подпись	*дата*	*должность, ученая степень*	

Красноярск 2022

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«**СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

_____________О. В. Непомнящий

«____»________________ 20___г.

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ

в форме бакалаврской работы

Студенту Кузьмину Александру Павловичу
Фамилия, имя, отчество

Группа КИ18-08Б **Направление** 09.03.01
номер *код*

Информатика и вычислительная техника
наименование

Тема выпускной квалификационной работы

Комплекс программ для методического обеспечения математических дисциплин

Утверждена приказом по университету № 7914/с от 26.05.22

Руководитель ВКР Н. А. Никулин, канд. техн. наук, доцент НУЛ САПР каф.
инициалы, фамилия, должность, учёное звание, место работы

ВТ ИКИТ СФУ

Исходные данные для ВКР

Методические указания руководителя ВКР, публикации по теме работы.

Перечень разделов ВКР

Анализ предметной области, постановка задачи исследования, выбор методов исследования и инструментальных средств, разработка алгоритмов и их программная реализация, тестирование разработанной системы.

Перечень графического материала

Слайды презентации с математическими моделями, схемами алгоритмов и результатами работы разработанной системы.

Руководитель ВКР ____________________ Н. А. Никулин
подпись

Задание принял к исполнению ____________________ А. П. Кузьмин
подпись

«____» __________ 20____г.

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа на тему «Комплекс программ для методического обеспечения математических дисциплин» выполнена в научно-учебной лаборатории систем автоматизированного проектирования кафедры вычислительной техники института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета. Содержит 53 страницы текстового документа, 27 иллюстраций, 6 приложений, 12 использованных источников.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА, MATHCAD, УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС

Цель работы — алгоритмизация и программная реализация отдельных математических методов, используемых при изучении математических дисциплин для применения их в качестве методического материала.

Результатом работы является комплекс программных модулей, иллюстрирующих использование математических методов для отдельных разделов математических учебных дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Дискретная математика».

Значение разработки — повышение эффективности изучения студентами математических учебных дисциплин, выработка умений решения конкретных математических задач, получение навыков алгоритмизации и программирования, в том числе в MathCAD, для применения этих навыков при изучении других учебных дисциплин.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Преподавание математических учебных дисциплин связано с изучением большого числа разнообразных вычислительных задач, методов их решения и конкретных математических формул. Недостатком традиционных способов преподавания является то, что весь материал представляется в виде условных обозначений, за которыми студенты не видят их вычислительного смысла. Вычисления в ручном режиме (с помощью калькулятора) не позволяет студентам до конца понять смысл изучаемых формул и ограничивает задачи простейшими примерами, чтобы иметь возможность решить их вручную. Например, при изучении матриц используют матрицы второго или третьего порядка. Применительно к студентам информационных специальностей недостатком является также то, что ориентация на ручные расчёты не позволяет им вырабатывать умения и навыки в алгоритмизации и программировании.

В настоящее время имеется другой подход к изучению математических дисциплин, который основывается на использовании программирования при изучении математических дисциплин. В рамках этого подхода используются различные языки программирования (Pascal, C++, Python и др.) или готовые программные среды (MathCAD, Matlab, Maple, Excel и др.).

Анализ соответствующей литературы показал, что применение языков программирования не вполне целесообразно, так как математические дисциплины изучаются на первом курсе одновременно с изучением языков программирования. Языки программирования обычно содержат минимальное число готовых решений, связанных с вводом-выводом, графическим представлением результатов и т. п. Кроме того, некоторый опыт владения языками программирования формируется только к концу первого курса и не у всех студентов. Поэтому их использование при изучении математических дисциплин только усложнит процесс обучения.

Гораздо более эффективным является использование готовых программных сред, к которых реализованы многие вспомогательные функции: графической представление результатов расчётов, продуманные процессы ведения диалога и др. Поэтому при изучении математики чаще используют именно программные среды.

Выбор конкретной программной среды обусловлен многими обстоятельствами: достаточные функциональные возможности, наличие в составе лицензионного программного обеспечения вуза, перспективы её использования в других учебных дисциплинах, возможность установить на собственном компьютере, возможность самостоятельного обучения с минимальными усилиями (чтобы уделять внимание математике, а не изучению программной среды).

С учётом указанных критериев представляется целесообразным использовать программную среду MathCAD14, которая имеется на всех компьютерах СФУ и обладает всеми необходимыми качествами.

Программная среда MathCAD содержит встроенную библиотеку процедур, охватывающую многие разделы математики, работу с файлами, построение графиков, обработку звука и много другое. Но большинство этих процедур реализует сравнительно простые математические действия. Для изучения математических методов требуется расширить библиотеку в соответствии с теми методами, которые изучаются в соответствующих учебных дисциплинах.

В данной работе учитывается содержание двух учебных математических дисциплин, изучаемых студентами направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» в ИКИТ: «Алгебра и геометрия» и «Дискретная математика». В существующей литературе по применению MathCAD в учебном процессе отсутствуют готовые решения для данного случая.

Поэтому имеется актуальная задача разработки комплекса программ для методического обеспечения указанных математических дисциплин.

Объект исследования — процесс обучения математическим дисциплинам в вузе.

Предмет исследования — математическое, алгоритмическое и программное обеспечение для методического обеспечения преподавания математических дисциплин в ИКИТ для направления подготовки «Информатика и вычислительная техника».

Объект разработки — комплекс программ в среде MathCAD14 для методического обеспечения математических дисциплин.

Цель работы — алгоритмизация и программная реализация отдельных математических методов, используемых при изучении математических дисциплин для применения их в качестве методического материала.

Задачи работы:

1) анализ содержания учебных дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Дискретная математика» и выделение методов и алгоритмов для последующей программной реализации;

2) программная реализация выбранного математического обеспечения;

3) тестирование разработанных программ.

Значение разработки — повышение эффективности изучения студентами математических учебных дисциплин, выработка умений решения конкретных математических задач, получение навыков алгоритмизации и программирования, в том числе в MathCAD, для применения этих навыков при изучении других учебных дисциплин.

1 Анализ содержания математических учебных дисциплин

1.1 Анализ содержания учебной дисциплины «Алгебра и геометрия»

Общие принципы отбора материала для его изучения с применением программы MathCAD заключаются в следующем.

Этот материал:

1) является основой для изучения последующего материала по рассматриваемой дисциплине;

2) используется далее в других учебных дисциплинах;

3) даёт навыки решения практических задач, возможно не связанных с другими дисциплинами, но относящихся к профессиональной области;

4) расширяет научный и инженерный кругозор.

В настоящее время существует рабочая программа дисциплины «Алгебра и геометрия», в которой приведено содержание этой дисциплины в общем виде. Этот документ может являться основой для выявления методов, для которых необходимо выполнить алгоритмизацию и программную реализацию.

Учебная дисциплина «Алгебра и геометрия» содержит следующие разделы:

1 Линейная алгебра.

2 Векторная алгебра.

3 Аналитическая геометрия.

Линейная алгебра.

Основное содержание линейной алгебры — матричное исчисление. В этом разделе вводится обобщённое понятие матрицы как таблицы, имеющей определённое количество строк и столбцов. Рассматриваются основные виды матриц: прямоугольная (с разным числом строк и столбцов), квадратная (с одинаковым числом строк и столбцов), матрица-строка и матрица-столбец.

Рассматриваются основные операции с матрицами:

− суммирование матриц;

− перемножение матриц;

– умножение матриц на число.

Рассматриваются составляющие:

– миноры;

– алгебраические дополнения.

Изучаются основные операции:

– транспонирование;

– нахождение определителя матрицы

– нахождение обратной матрицы.

Изучаются разновидности матриц:

– особенные матрицы (определитель равен нулю, обратная матрица отсутствует);

– треугольные матрицы;

– нулевая матрица;

– единичная матрица.

Рассматривается применение матричного исчисления для решения систем алгебраических уравнений.

Многие рассмотренные функции реализованы в процедурах из встроенной библиотеки MathCAD. Но желательно, чтобы студенты сами могли такие функции реализовать программно. Кроме того, ряд функций не реализован встроенными процедурами.

В рамках ВКР разработан комплекс из нескольких процедур.

Это — следующие операции:

1) умножение матрицы на число;

2) транспонирование матрицы;

3) сложение матриц;

4) умножение матриц;

5) замена элементов одной матрицы на элементы другой матрицы;

6) формирование обычной матрицы из блочной матрицы;

7) формирование блочной матрицы из обычной;

8) перемножение элементов матриц;

9) выделение матрицы из линейной системы скалярных уравнений;

Большинство этих операций реализованы в программе MathCAD с помощью функций встроенной библиотеки. Но там не понятно, как производятся вычисления. Специалисты в области вычислительной техники должны знать и уметь программно реализовать соответствующие алгоритмы. Это может быть необходимо, например, при разработке оригинального программного обеспечения на других языках программирования.

Но наличие встроенных функций с аналогичными действиями позволяют проверять корректность разработанных функций.

Важной областью алгебры является решение систем алгебраических уравнений. Для этого используются как методы обратных матриц, так и другие методы, в частности метод Гаусса.

Особенностью учебного процесса в данном случае также является то, что необходимо не только применять методы решения систем алгебраических уравнений, но также понимать суть преобразований внутри метода. Поэтому соответствующие функции должны разрабатываться так, чтобы демонстрировать последовательность выполняемых операций.

Геометрия. При изучении геометрии студенты рассматривают аналитические методы построения различных кривых, прежде всего на плоскости. Для программистов это необходимо с точки зрения последующего использования при разработке программного обеспечения, например, при создании графических программ или организации графических диалоговых интерфейсов. При программировании в дальнейшем используются соответствующие библиотеки, например, для C++. Но необходимо знать, как можно строить простые геометрические фигуры и чертежи. В рамках дисциплины «Алгебра и геометрия» на первом курсе в первом семестре рассматриваются только простейшие построения фигур на плоскости, объединение нескольких фигур в одну фигуру. Именно с этой точки зрения следует рассматривать учебный материал в области геометрии. Часть операций выполняется с помощью встроенных функций и графика MathCAD. Но необходимо продемонстрировать примеры их реализации.

1.2 Анализ содержания учебной дисциплины «Дискретная математика»

Дискретная математика — это раздел математики, который включает в себя комбинаторику, теорию графов, алгебру логики и другой материал.

Многие сложные понятия предпочтительнее рассматривать с применением встроенных средств MathCAD — функций встроенной библиотеки и средств визуализации в виде двумерных и трёхмерных графиков.

Для разработки в ВКР выбраны некоторые разделы дискретной математики, которые н представлены в MathCAD, но изучаются, и предполагают необходимость алгоритмизации и программной реализации.

В рамках данной ВКР были рассмотрены некоторые методы, связанные с комбинаторикой. В частности, лексикографический метод генерирования перестановок.

В рамках этого метода приходится решать разнообразные задачи, в том числе в процессе разработки оригинального программного обеспечения.

Это:

1) физическое выполнение всех вариантов перестановок (т. е. перебор всех вариантов каких-то действий или объектов);

2) оценка разработанных программ с точки зрения сложности алгоритмов;

3) поиск необходимого варианта и его места среди всех других вариантов — номер комбинации по порядку, вид предшествующей комбинации и вид последующей, расстояние между двумя комбинациями перестановок и др.

Это требует, как программной реализации лексикографического алгоритма, так и понимания сущности его работы.

Выводы по разделу 1

На основании рассмотрения содержания учебных дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Дискретная математика» выбран материал для последующей проработки с созданием комплекса программных модулей.

2 Комплекс программных модулей для учебной дисциплины «Алгебра и геометрия»

В рамках учебного курса «Алгебра и геометрия» для студентов направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» ИКИТ преподаются материалы, рассмотренные в рамках данной ВКР в подразделе 1.1.

2.1 Матричная алгебра

Важнейшей частью курса является матричная алгебра. Предлагается, чтобы студенты алгоритмизировали и запрограммировали все основные матричные операции. Большинство матричных операций уже включены во встроенную библиотеку MathCAD, но для пользователя сама организация вычислений полностью скрыта. А для специалистов в области информатики и вычислительной техники важно как раз уметь алгоритмизировать любые операции.

Матричные операции хороши тем, что некоторые простейшие из них требуют минимального понимания основных программистских операций, преимущественно организации массивов и циклов.

Матричные операции представлены на рабочих листах MathCAD (Приложение А).

В разделе «Матричные операции» имеется несколько подразделов.

В подразделе «Матрицы и их элементы, встроенные возможности» приводятся кратко матричные операции, которые далее будут реализованы в виде оригинальных функций, а также использоваться при проверке корректности разработанных функций.

Перечень разработанных функций приведён ниже на рисунках.

Каждая функция проверяется аналогичной функцией из встроенной библиотеки MathCAD, если такая существует.

Умножение матрицы на число — простейшая матричная операция (Рисунок 2.1).

Транспонирование матрицы часто используется при других матричных операциях (Рисунок 2.2).

```
FMatrNum(x, A) := | NA ← rows(A)
                  | MA ← cols(A)
                  | for k ∈ 1.. NA
                  |   for j ∈ 1.. MA
                  |     Z[k,j] ← x·A[k,j]
                  | Z
```

Рисунок 2.1 — Умножение матрицы на число

```
FMatrTransp(A) := | N ← rows(A)
                  | for k ∈ 1.. N
                  |   for j ∈ 1.. N
                  |     Z[k,j] ← A[j,k]
                  | Z
```

Рисунок 2.2 — Транспонирование матрицы

Суммирование матриц предлагается без проверки их размерности (Рисунок 2.3, а) и с проверкой размерности (Рисунок 2.3, б).

```
FMatrSum(A, B) := | NA ← rows(A)
                  | MA ← cols(A)
                  | for k ∈ 1.. NA
                  |   for j ∈ 1.. MA
                  |     Z[k,j] ← A[k,j] + B[k,j]
                  | Z
```

а) без проверки размерности

```
FMatrSum2(A, B) := | NA ← rows(A)
                   | MA ← cols(A)
                   | NB ← rows(B)
                   | MB ← cols(B)
                   | return "Матрицы не совместимы"  if (NA ≠ NB) ∨ (MA ≠ MB)
                   | for k ∈ 1.. NA
                   |   for j ∈ 1.. MA
                   |     Z[k,j] ← A[k,j] + B[k,j]
                   | Z
```

б) с проверкой размерности

Рисунок 2.3 — Суммирование матриц

Перемножение матриц — первая матричная операция, представляющая для студентов определённую сложность, и поэтому очень важно её алгоритмизировать и реализовать программно (Рисунок 2.4).

Важной операцией является нахождение обратной матрицы. Такая операция одна из самых востребованных при решении систем алгебраических уравнений. В частности, она применяется при решении задач в курсе «Электротехника и электроника».

При реализации алгоритма нахождения обратной матрицы необходимо вычислить подматрицы, получающиеся путём вычёркивания столбцов и строк, на пересечении которых располагается ведущий элемент. Для этого разработана соответствующая функция (Рисунок 2.5).

```
FMatrProd(A,B) := | NA ← rows(A)
                  | MA ← cols(A)
                  | MB ← cols(B)
                  | for i ∈ 1..NA
                  |   for j ∈ 1..MB
                  |     | Z[i,j ← 0
                  |     | for k ∈ 1..MA
                  |     |   Z[i,j ← Z[i,j + A[i,k·B[k,j
                  | Z
```

Рисунок 2.4 — Перемножение матриц

```
FMin(A,bk,bj) := | N ← rows(A)
                 | kk ← 0
                 | for k ∈ 1..N
                 |   if k ≠ bk
                 |     | kk ← kk + 1
                 |     | jj ← 0
                 |     | for j ∈ 1..N
                 |     |   if j ≠ bj
                 |     |     | jj ← jj + 1
                 |     |     | Z[kk,jj ← A[k,j
                 | Z
```

Рисунок 2.5 — Нахождение подматрицы для вычисления минора

Сами обратные матрицы вычисляются с использованием этой функции двумя способами (Рисунок 2.6, а) и (Рисунок 2.6, б).

Первая функция (Рисунок 2.6, а) использует вышеупомянутую функцию (Рисунок 2.5). Вторая функция (Рисунок 2.6, б) включает алгоритм этой функции внутри себя.

```
FMatrInv1(A) := | N ← rows(A)
                | D ← |A|
                | for k ∈ 1..N
                |   for j ∈ 1..N
                |     B[k,j ← |FMin(A,k,j)|·(−1)^(j+k)
                | Z ← B^T / D
```

а)

```
FMatrInv2(A) := | N ← rows(A)
                | det ← |A|
                | for bk ∈ 1..N
                |   for bj ∈ 1..N
                |     | kk ← 0
                |     | for k ∈ 1..N
                |     |   if k ≠ bk
                |     |     | kk ← kk + 1
                |     |     | jj ← 0
                |     |     | for j ∈ 1..N
                |     |     |   if j ≠ bj
                |     |     |     | jj ← jj + 1
                |     |     |     | H[kk,jj ← A[k,j
                |     | B[bk,bj ← |H|·(−1)^(bk+bj)
                | Z ← B^T / det
```

б)

Рисунок 2.6 — Нахождение обратной матрицы двумя вариантами функции

Ниже рассматривается сущность единичной матрицы с использованием как встроенных функций MathCAD, так и с использованием собственных разработанных функций, демонстрируя их корректную работу.

При работе с матрицами часто приходится использовать блочные матрицы — т. е. матрицы, элементами которых являются также матрицы. Это широко практикуется в MathCAD, но здесь матрицы могут быть любого размера.

При решении задач методами матричной алгебры может встретиться необходимость представить обычную матрицу в виде совокупности блоков или, наоборот, объединить несколько блочных матриц в одну общую.

Такие операции требуют определённых соотношений между размерами матриц. Ниже рассматривается созданная функция, объединяющая четыре матрицы в одну (Рисунок 2.7). Также разработана функция, разбивающая общую матрицу на несколько блоков (Рисунок 2.8).

```
BlockMatr(A) := | M ← cols(A)
                | N ← rows(A)
                | for j ∈ 1..N
                |   | B_j ← A_j,1
                |   | for k ∈ 1..M − 1   if M > 1
                |   |   B_j ← augment(B_j, A_j,k+1)
                | Z ← B_1
                | for j ∈ 1..N − 1   if N > 1
                |   Z ← stack(Z, B_j+1)
                | Z
```

Рисунок 2.7 — Формирование общей матрицы из блочных матриц

```
MatrBlock(A, Pos) := | N ← rows(Pos)
                     | for i ∈ 1..N
                     |   | k1 ← Pos_i,1
                     |   | j1 ← Pos_i,2
                     |   | k2 ← Pos_i,3
                     |   | j2 ← Pos_i,4
                     |   | Z_i ← submatrix(A, k1, k2, j1, j2)
                     | Z
```

Рисунок 2.8 — Формирование блочной матрицы из обычной матрицы

Иногда может возникнуть необходимость в более редких операциях, например, в процессе вписывания части матрицы в имеющуюся матрицу в указанных границах (Рисунок 2.9).

Программа MathCAD имеет в своём составе символьный процессор. Его использование — отдельная задача, которая может также решаться в рамках рассматриваемых математических учебных дисциплин. В данной ВКР его возможности не рассматриваются, но используются в одной функции — для выделения матрицы коэффициентов из системы линейных скалярных уравнений (Рисунок 2.10).

Пример работы всех перечисленных функций приведён на листах MathCAD.

```
ENmatr(A,B,x1,y1,x2,y2) := | nx ← x2 − x1 + 1
                           | ny ← y2 − y1 + 1
                           | for ix ∈ 1.. nx
                           |   for iy ∈ 1.. ny
                           |     A[iy+y1−1, ix+x1−1] ← B[iy, ix]
                           | A
```

Рисунок 2.9 — Вписывания элементов одной матрицы в другую матрицу

```
MElimin (A,Nx) := | NA ← rows(A(x))
                  | for j ∈ 1.. Nx
                  |   | for k ∈ 1.. Nx
                  |   |   x[k] ← 0
                  |   | x[j] ← 1
                  |   | for k ∈ 1.. NA
                  |   |   z[k,j] ← A(x)[k]
                  | z
```

Рисунок 2.10 — Формирование матрицы из системы уравнений

На рабочих листах вместе с приведённым функциями приводятся также тестовые примеры, которые показывают их корректное функционирование.

2.2 Решение системы алгебраических уравнений методом Гаусса

Существует несколько методов решения систем алгебраических уравнений, часть из них представлена соответствующими функциями во встроенной библиотеке MathCAD. Но необходимо, чтобы студенты понимали внутреннее устройство алгоритмов этих функций. Метод обратной матрицы реализован выше (Рисунок 2.6).

Также интерес представляет метод Гаусса (Приложение Б).

Поскольку основной задачей является изучение алгоритма работы метода Гаусса, на рабочем листе продемонстрированы все соответствующие вычисления для взятой в качестве примера матрицы. Каждый шаг сопровождается вычислениями, которые позволяют понять работу алгоритма. В конечном счёте этот алгоритм реализуется программно в виде функции Gauss1( ) (Рисунок 2.11, а).

Тут же эта функция тестируется на том же примере, который рассматривался при ручных выкладках.

Ещё одна функция, реализующая метод Гаусса Gauss2( ) (Рисунок 2.11, а), немного модифицирует расчёты, обеспечивая расположение по диагонали рассчитанных матриц 1.

Особенностью алгоритма Гаусса является наличие последовательности пошаговых преобразований, в результате чего исходная матрица постепенно трансформируется в треугольную.

Разработанные функции реализованы так, что все эти промежуточные состояния матрицы фиксируются и запоминаются. После окончания вычислений они могут быть выведены, что и выполняется в тестовом примере. Это позволяет выполнить сравнение пошаговых вычислений с автоматическими — они оказываются идентичными друг другу.

```
Gauss1(A, U) := | N ← rows(A)
                | H ← augment(A, U)^T
                | i ← 0
                | for  k ∈ 1 .. N − 1
                |   for  j ∈ k .. N − 1
                |     | H^⟨j+1⟩ ← (H^⟨k⟩)_k · H^⟨j+1⟩ − (H^⟨j+1⟩)_k · H^⟨k⟩
                |     | i ← i + 1
                |     | S_i ← H^T
                | S
```

а)

```
Gauss2(A, U) := | N ← rows(A)
                | H ← augment(A, U)^T
                | for  k ∈ 1 .. N − 1
                |   for  j ∈ k .. N − 1
                |     H^⟨j+1⟩ ← [(H^⟨k⟩)_k · H^⟨j+1⟩ − (H^⟨j+1⟩)_k · H^⟨k⟩]
                | for  k ∈ 1 .. N
                |   H^⟨k⟩ ← H^⟨k⟩ / (H^⟨k⟩)_k
                | H^T
```

б)

Рисунок 2.11 — Решение системы алгебраических уравнений методом Гаусса

Но для более точной фиксации всех изменений в матрицах разработаны ещё две функции GaussSolv( ) (Рисунок 2.12, а) и GaussProcess( ) (Рисунок 2.12, б).

Эти варианты функций демонстрируют различные способы реализации алгоритма Гаусса с точки зрения формирования и передачи наружу промежуточных вычислений. Каждая функция выполняет свои действия, но внимательное рассмотрение её состава позволяет выявить возможности самого MathCAD.

```
GaussSolv(A, U) :=  | N ← rows(A)
                    | H ← augment(A, U)^T
                    | for k ∈ 1..N − 1
                    |   for j ∈ k..N − 1
                    |     H^⟨j+1⟩ ← [(H^⟨k⟩)_k·H^⟨j+1⟩ − (H^⟨j+1⟩)_k·H^⟨k⟩]
                    | for k ∈ 1..N
                    |   H^⟨k⟩ ← H^⟨k⟩ / (H^⟨k⟩)_k
                    | W ← H^T
                    | for k ∈ 1..N
                    |   | x_(N−k+1) ← (W^⟨N+1⟩)_(N−k+1)
                    |   | W^⟨N−k+1⟩ ← x_(N−k+1)·W^⟨N−k+1⟩
                    |   | W^⟨N+1⟩ ← W^⟨N+1⟩ − W^⟨N−k+1⟩
                    | x
```

```
GaussProcess(A, U) :=  | N ← rows(A)
                       | H ← augment(A, U)^T
                       | i ← 0
                       | for k ∈ 1..N − 1
                       |   for j ∈ k..N − 1
                       |     | H^⟨j+1⟩ ← (H^⟨k⟩)_k·H^⟨j+1⟩ − (H^⟨j+1⟩)_k·H^⟨k⟩
                       |     | i ← i + 1
                       |     | S_i ← H^T
                       | for k ∈ 1..N
                       |   H^⟨k⟩ ← H^⟨k⟩ / (H^⟨k⟩)_k
                       | W ← H^T
                       | for k ∈ 1..N
                       |   | x_(N−k+1) ← (W^⟨N+1⟩)_(N−k+1)
                       |   | W^⟨N−k+1⟩ ← x_(N−k+1)·W^⟨N−k+1⟩
                       |   | W^⟨N+1⟩ ← W^⟨N+1⟩ − W^⟨N−k+1⟩
                       |   | for j ∈ 1..N
                       |   |   (W^⟨N−k+1⟩)_j ← 0
                       |   | Z_k ← W
                       | (x  S  Z)^T
```

а) б)

Рисунок 2.12 — Решение системы алгебраических уравнений методом Гаусса с фиксацией промежуточных изменений матрицы

В результате создано методическое для изучения различных способов решения систем линейных уравнений и в целом для изучения операций с матрицами.

2.3 Аналитическая геометрия

Вторая часть курса — геометрия. В рамках данной ВКР выделены вопросы, связанные с инженерной графикой, т. е. с построением элементарных фигур заданного размера и в заданной точке плоскости (Приложение В), а также использование этих методических наработок для построения чертежей (Приложение Г).

В качестве элементарных фигур выбраны квадрат (Рисунок 2.13, а), прямоугольник (Рисунок 2.13, б) и круг (Рисунок 2.14, а). Для них созданы соответствующие функции. Устанавливаются параметры фигур и затем они объединяются с помощью функции Skemo( ) (Рисунок 2.14, б).

```
Kvadrat(P, N) := | x0 ← P1
                 | y0 ← P2
                 | d ← P3
                 | h ← d/N
                 | for j ∈ 1..N + 1
                 |   | x1_j ← x0
                 |   | x2_j ← (j − 1)·h + x0
                 |   | x3_j ← x0 + d
                 |   | x4_j ← (j − 1)·h + x0
                 | for j ∈ 1..N + 1
                 |   | y1_j ← (j − 1)·h + y0
                 |   | y2_j ← y0
                 |   | y3_j ← (j − 1)·h + y0
                 |   | y4_j ← y0 + d
                 | z<1> ← stack(x1, x2, x3, x4)
                 | z<2> ← stack(y1, y2, y3, y4)
                 | z
```

а)

```
Rektangul(P, N) := | x0 ← P1
                   | y0 ← P2
                   | dx ← P3
                   | dy ← P4
                   | hx ← dx/N
                   | hy ← dy/N
                   | for j ∈ 1..N + 1
                   |   | x1_j ← x0
                   |   | x2_j ← (j − 1)·hx + x0
                   |   | x3_j ← x0 + dx
                   |   | x4_j ← (j − 1)·hx + x0
                   | for j ∈ 1..N + 1
                   |   | y1_j ← (j − 1)·hy + y0
                   |   | y2_j ← y0
                   |   | y3_j ← (j − 1)·hy + y0
                   |   | y4_j ← y0 + dy
                   | z<1> ← stack(x1, x2, x3, x4)
                   | z<2> ← stack(y1, y2, y3, y4)
                   | z
```

б)

Рисунок 2.13 — Функции для реализации элементарных фигур:

а) квадрат, б) прямоугольник

В данной работе используются простейшие приёмы объединения нескольких фигур в одно изображение (одну схему). Для этого все фигуры просто соединяются вместе, и им задаются параметры каждой фигуры.

В профессиональных программах задание параметров, объединение фигур и построение изображений будет иное. Но в данном случае показывается сама возможность программной реализации этих действий. Уровень реализации соответствует начальным представлениям о программировании у студентов первого курса.

```
Krug(P, N) := | x0 ← P1
              | y0 ← P2
              | R ← P3
              | h ← 2·R / N
              | for j ∈ 1.. N + 1
              |   | s ← R − (j − 1)·h
              |   | x1_j ← s
              |   | x2_(N+2−j) ← s
              |   | y1_j ← y0 + √(R^2 − s^2)
              |   | y2_(N+2−j) ← y0 − √(R^2 − s^2)
              | z^⟨1⟩ ← stack(x1 + x0, x2 + x0)
              | z^⟨2⟩ ← stack(y1, y2)
              | z
```

а)

```
Skemo(N, P) := | Z ← P1
               | V1 ← Kvadrat(Z, N)
               | Z ← P2
               | V2 ← Rektangul(Z, N)
               | Z ← P3
               | V3 ← Krug(Z, N)
               | z^⟨1⟩ ← stack(V1^⟨1⟩, V2^⟨1⟩, V3^⟨1⟩)
               | z^⟨2⟩ ← stack(V1^⟨2⟩, V2^⟨2⟩, V3^⟨2⟩)
               | z
```

б)

Рисунок 2.14 — Функции для реализации элементарных фигур:
а) круг, б) объединения нескольких фигур в одну схему

После объединения фигур в одну схему выполняется расчёт всех точек для каждой фигуры и их объединение в выходном массиве. После чего можно на графике MathCAD построить изображение (Рисунок 2.15).

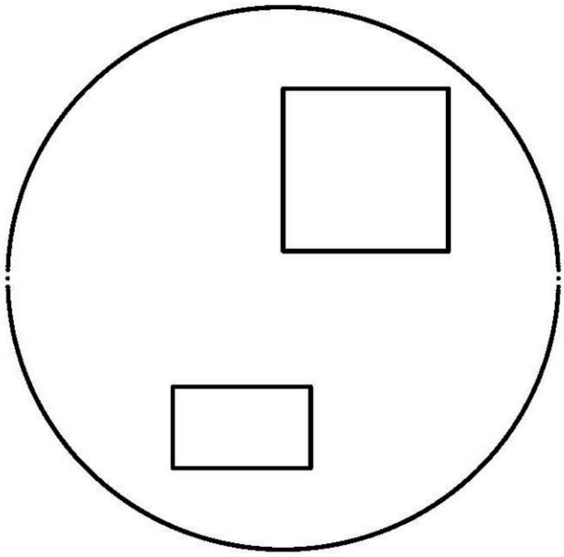


Рисунок 2.15 — Построение изображение из нескольких элементарных фигур

Для первого курса этот уровень вполне достаточен.

Другая область применения геометрии — вычерчивание реальных чертежей каких-либо деталей более или менее сложной формы. В данной работе для этого выбраны две детали двигателя переменного тока — его статорная и роторная пластины (Приложение Г). Они изготавливаются из листов электротехнической стали методом штамповки. Сложность этих деталей в наличии большого числа зубцов. Эти зубцы должны формироваться и изображаться автоматически.

Были разработаны три функции: для изображения дуги (Рисунок 2.16), для изображения зубцов (Рисунок 2.17), для изображения прямоугольника с закруглёнными углами (Рисунок 2.18).

$$\mathrm{FDuga}(N, R, x_0, y_0, alf_1, alf_2) := \left| \begin{array}{l} d \leftarrow \dfrac{\left|alf_1 - alf_2\right|}{N} \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{break if } (j-1)\cdot d > \left|alf_2\right| \\ z_{j,1} \leftarrow x_0 + R\cdot\cos\left[(j-1)\cdot d + \left|alf_1\right|\right] \\ z_{j,2} \leftarrow y_0 + R\cdot\sin\left[(j-1)\cdot d + \left|alf_1\right|\right] \end{array} \right. \\ z \end{array} \right.$$

Рисунок 2.16 — Построение изображение дуги

Объединение отдельных изображений осуществляется на рабочем листе MathCAD, а не какой-либо дополнительной функции. Это сделано потому, что в данном случае не ставится цель разработки готовых функций для геометрических построений, а решается задача пояснить студентам, как это можно делать. В этом случае используются возможности особого программирования прямо на рабочем листе MathCAD.

```
FZub(Z, R1, R2, N, θ) := | β ← π / Z
                         | d ← (R1 − R2) / N
                         | i ← 0
                         | for k ∈ 1 .. 2·Z
                         |   if ceil(k/2)·2 ≠ k
                         |     T ← "Для нечётного зубца расчёт от начала к концу"
                         |     for j ∈ 1 .. N
                         |       i ← i + 1
                         |       z[i,1] ← [R2 + (j − 1)·d]·cos[(k − 1)·β + θ]
                         |       z[i,2] ← [R2 + (j − 1)·d]·sin[(k − 1)·β + θ]
                         |     for j ∈ 1 .. N
                         |       i ← i + 1
                         |       z[i,1] ← R1·cos[(j − 1)·β/(N + 1) + (k − 1)·β + θ]
                         |       z[i,2] ← R1·sin[(j − 1)·β/(N + 1) + (k − 1)·β + θ]
                         |   otherwise
                         |     T ← "Для чётного зубца расчёт от конца к началу"
                         |     for j ∈ 1 .. N
                         |       i ← i + 1
                         |       z[i,1] ← [R1 − (j − 1)·d]·cos[(k − 1)·β + θ]
                         |       z[i,2] ← [R1 − (j − 1)·d]·sin[(k − 1)·β + θ]
                         |     for j ∈ 1 .. N
                         |       i ← i + 1
                         |       z[i,1] ← R2·cos[(j − 1)·β/(N + 1) + (k − 1)·β + θ]
                         |       z[i,2] ← R2·sin[(j − 1)·β/(N + 1) + (k − 1)·β + θ]
                         | z
```

Рисунок 2.17 — Построение изображения зубцов

Сложность алгоритма заключается в том, что в нём заложена возможность задания произвольных значений для ряда параметров: числа зубцов, их размеров и т. п.

```
Вычерчивание прямоугольной пластины с закруглениями по углам
FKvarRond(N, Lx, Ly, x0, y0, R) :=
    dx ← (Lx − 2·R) / N
    dy ← (Ly − 2·R) / N
    NR ← N
    T ← "Левое нижнее закругление"
    w ← FDuga[NR, R, (x0 − Lx/2 + R), (y0 − Ly/2 + R), π, π/2]
    z ← w
    k ← rows(z)
    T ← "Нижняя линия"
    for j ∈ 1..N
        k ← k + 1
        z[k,1] ← x0 − Lx/2 + R + (j − 1)·dx
        z[k,2] ← y0 − Ly/2
    T ← "Правое нижнее закругление"
    w ← FDuga[NR, R, (x0 + Lx/2 − R), (y0 − Ly/2 + R), 3·π/2, π/2]
    z ← stack(z, w)
    k ← rows(z)
    T ← "Правая линия"
    for j ∈ 1..N
        k ← k + 1
        z[k,1] ← x0 + Lx/2
        z[k,2] ← y0 − Ly/2 + R + (j − 1)·dy
    T ← "Правое верхнее закругление"
    w ← FDuga[NR, R, (x0 + Lx/2 − R), (y0 + Ly/2 − R), 0, π/2]
    z ← stack(z, w)
    T ← "Верхняя линия"
    k ← rows(z)
    for j ∈ 1..N
        k ← k + 1
        z[k,1] ← x0 + Lx/2 − R − (j − 1)·dx
        z[k,2] ← y0 + Ly/2
    T ← "Левое верхнее закругление"
    w ← FDuga[NR, R, (x0 − Lx/2 + R), (y0 + Ly/2 − R), π/2, π]
    z ← stack(z, w)
    T ← "Левая линия"
    k ← rows(z)
    for j ∈ 1..N
        k ← k + 1
        z[k,1] ← x0 − Lx/2
        z[k,2] ← y0 + Ly/2 − R − (j − 1)·dy
    z
```

Рисунок 2.18 — Построение изображения скруглённого прямоугольника

По результатам работы рассмотренных функций строится чертёж сравнительно сложной фигуры (Рисунок 2.19).

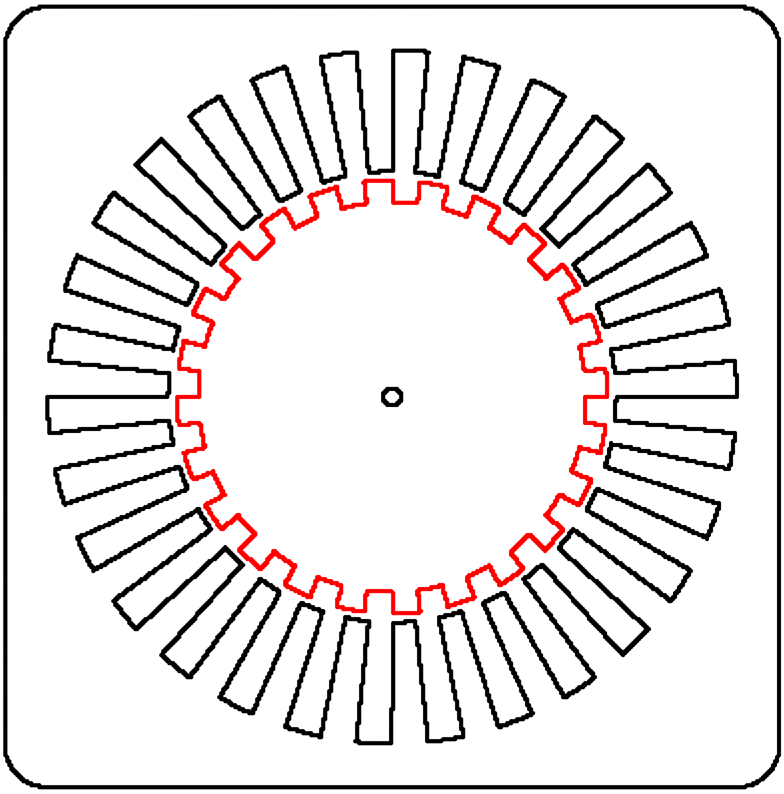


Рисунок 2.19 — Построение чертежа из двух деталей

Выводы по разделу 2

В результате работ в данном разделе изучение студентами отдельных функций и некоторых теоретических знаний аналитической геометрии приводит к построению чертежей.

3 Комплекс программных модулей для учебной дисциплины «Дискретная математика»

В рамках учебного курса «Дискретная математика» для студентов направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» ИКИТ преподаются материалы, рассмотренные в подразделе 1.2.

Одной из трудных для понимания частей дискретной математики является комбинаторика, в частности, рассматривающая операцию перестановок. Для генерации все возможных перестановок используются различные методы, в том числе лексикографический метод. С одной стороны, при его использовании вручную, требуется большое внимание, и при этом возможны ошибки. С другой стороны, он хорошо поддаётся алгоритмизации. Наконец, он применяется в программировании при необходимости осуществления полного перебора возможных вариантов. Поэтому он рассмотрен в ВКР. Здесь существует две проблемы. С одной стороны, необходимо разработать функцию, которая просто осуществляет все перестановки. С другой стороны, необходимо, чтобы студенты поняли, как функционирует алгоритм и как его реализовать программно.

Поэтому задача решалась двумя способами.

Во-первых, продемонстрировано пошаговое вычисление на основе применения лексикографического алгоритма. Попутно для каждого шага разработана свой функция.

Во-вторых, все функции сведены воедино и получена общая функция для генерирования перестановок по лексикографическому алгоритму.

Пошаговые вычисления подробно описаны на рабочих листах MathCAD (Приложение Д). Ниже рассмотрены отдельные функции, использованные на этих шагах.

Суть лексикографического алгоритма организации последовательности перестановок сводится к следующему.

Постановка задачи. Задаётся исходная последовательность. Это могут быть любые объекты, но они пронумерованы и поэтому задаются их комбинации номеров. Необходимо осуществить перебор всех возможных комбинаций без повторения.

Шаг 1. Задаётся число объектов и их начальная комбинация в виде {1, 2, …, N}.

Шаг 2. Определяется граница слева — граничный элемент должен быть больше элемента справа.

Шаг 3. Весь подмассив справа от граничного элемента выделяется.

Шаг 4. Выделенный подмассив инвертируется (элементы в нём меняют свое расположение справа налево).

Шаг 5. Проинвертированный подмассив записывается на место предыдущего подмассива.

Шаг 6. Граничный левый элемент меняется местом с правым от него элементом.

Затем операции повторяются в цикле с шага 1 до тех пор, когда появится последняя комбинация — полностью инверсная относительно первой комбинации. Весь описанный процесс реализации лексикографического алгоритма представлен на рабочих листах MathCAD (Приложение Д).

Определение номера заданной перестановки по её виду

```
NumPerestanovka(v) := | n ← rows(v)
                      | for i ∈ 1..n − 1
                      |   | a_i ← 0
                      |   | for j ∈ i..n − 1
                      |   |   a_i ← a_i + 1  if v_i > v_j
                      | z ← Σ_{j=1}^{n−1} [a_j·(n − j)!] + 1
```

Рисунок 3.1 — Процедура определения номера заданной перестановки по её виду

Шаг 2:

```
Просматривает массив справа налево и
определяет первый элемент, меньший очередного
Граница(v,n) := | k ← 0
                | for i ∈ 1..n − 1
                |   if v[n−i] < v[n−i+1]
                |     | k ← n − i
                |     | break
                | k
```

Рисунок 3.2 — Процедура нахождения точки перестановки

Шаг 3:

```
Выделяет подмассив справа от выбранного элемента
Подмассив(v,n,k) := | j ← 0
                    | for i ∈ k + 1..n
                    |   if v[i] > v[k]
                    |     | j ← j + 1
                    |     | d[j,1] ← v[i]
                    |     | d[j,2] ← i
                    | d
```

Рисунок 3.3 — Процедура выделения подмассива справа от выбранного элемента

Шаг 4:

```
Находит в выделенном подмассиве минимальный элемент
МинЭлемент(d,m) := | min ← 1
                   | for i ∈ 2..m                    if m > 1
                   |   min ← i  if d[i,1] < d[min,1]
                   | min
```

Рисунок 3.4 — Процедура нахождения минимального элемента в выделенном подмассиве

Шаг 5:

```
Меняет опорный элемент с минимальным в подмассиве
Обмен(v,k,d,min) := | q ← d_(min,2)
                    | h ← v_q
                    | v_q ← v_k
                    | v_k ← h
                    | v
```

Рисунок 3.5 — Процедура замены элемента в подмассиве

Шаг 6:

```
Инверсия оставшегося подмассива и дописывание его
Инверсия(z,n,k) := | w ← z
                   | if k > 0
                   |    | i ← n + 1
                   |    | for j ∈ k + 1 .. n
                   |    |    | i ← i − 1
                   |    |    | w_j ← z_i
                   | w
```

Рисунок 3.6 — Процедура инверсии в оставшемся подмассиве

Все действия, соответствующие работе этих функций, отображены на рабочих листах MathCAD (Приложение Д).

Эти функции использованы далее при реализации лексикографического алгоритма в виде одной функции (Рисунок 3.7).

Справа от функции показан массив изменения комбинаций для случая 4 объектов.

Эта функция используется тоже для демонстрации работы алгоритма, а не для использования в готовом программном обеспечении.

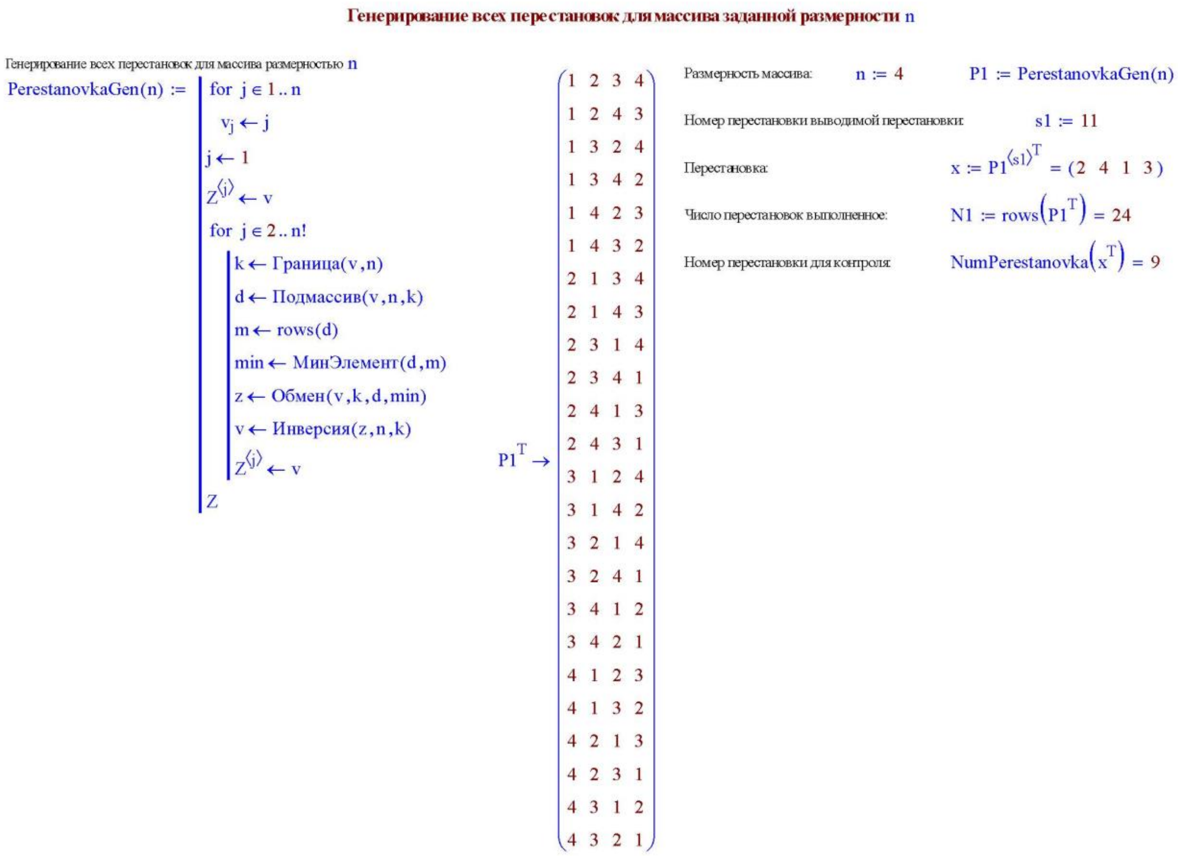


Рисунок 3.7 — Готовая функция генерирования перестановок

Таким образом, в рамках учебной дисциплины рассмотрен и реализован в различных видах лексикографический алгоритм генерирования перестановок.

Разработана также ещё одна функции, относящиеся к лексикографическому алгоритму (Рисунок 3.8).

Эта функция обеспечивает генерирование заданного количества перестановок после указанной комбинации.

Это может быть необходимо, чтобы просмотреть не все комбинации, а только некоторые из них. При этом задается только первая комбинация и число следующих, которые будут сгенерированы. Так, в частности, можно искать подходящую комбинацию без расчёта всех комбинаций, если общее число перестановок значительное (например, для десятков объектов).

```
PerestanovkaSekv(v,sekv) := | n ← rows(v)
                            | j ← 1
                            | Z⟨j⟩ ← v
                            | for j ∈ 2..sekv + 1
                            |    | k ← Граница(v,n)
                            |    | d ← Подмассив(v,n,k)
                            |    | m ← rows(d)
                            |    | min ← МинЭлемент(d,m)
                            |    | z ← Обмен(v,k,d,min)
                            |    | v ← Инверсия(z,n,k)
                            |    | Z⟨j⟩ ← v
                            | Z
```

Рисунок 3.8 — Генерирование следующих перестановок после указанной комбинации

Выводы по разделу 3

В данном разделе в части дискретной математики был рассмотрен только лексикографический алгоритм генерирования перестановок, но сделано это весьма подробно с применением различных вариантов программной реализации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках выпускной квалификационной работы на основе рассмотрения содержания учебных дисциплин «Алгебра и геометрия» и «Дискретная математика» выделены некоторые части изучаемого материала, для которого создано соответствующее программное обеспечение с применением программы MathCAD14.

Применительно к учебной дисциплине «Алгебра и геометрия» проработан материал по матричным операциям.

Применительно к учебной дисциплине «Дискретная математика» созданы процедуры для реализации некоторых методов комбинаторики.

Полученные результаты могут служить основой для реорганизации курсов соответствующих учебных дисциплин.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Акимов, О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О. Е. Акимов. – 2-е изд., дополн. – Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 376 с. – ISBN 5-93208-025-6.

2 Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2008 с. – 496 с. – ISBN 978-5-8114-0811-5.

3 Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов : учеб. пособие / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : изд-во "Лань", 2010. – ISBN 978-5-8114-0906-8.

4 Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. – Москва : ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с. – ISBN 5-89492-0 (ФИМА). – ISBN 5-94057-230-8 (МЦНМО).

5 Ефимов, Н. В. Квадратичные формы и матрицы. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 108 с. – ISBN 978-5-9221-1049-5.

6 Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие / Б. Н. Иванов. – Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 288 с. – ISBN 5-93208-093-0.

7 Клиот-Дашинский, М. И. Алгебра матриц и векторов / М. И. Клиот-дашинский. – 3-е изд., стереотип. – Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2001. – 158 с.

8 Колчин, В. Ф. Случайные графы / В. Ф. Колчин. – 2-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 256 с. – ISBN 5-9221-0486-1.

9 Попов, С. В. Прикладная логика / С. В. Попов, Н. Л. Брошков. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 216 с. – ISBN 978-5-9221-1340-3.

10 Салимов, Р. Б. Математика для инженеров и технологов / Р. Б. Салимов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 484 с. – ISBN 978-5-9221-1156-0.

11 Судоплатов, С. В. Дискретная математика : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинников. – 2-е изд., перераб. – Москва : ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-

во НГТУ, 2007. – 256 с. – ISBN 5-16-002299-6 (ИНФРА-М); ISBN 5-7782-0466-3 (НГТУ).

12 Тыртышников, Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 480 с. – ISBN 978-5-9221-0778-5.

13 Кол_ссылок 13

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Рабочие листы MathCAD.

Алгебра и геометрия. Матричные операции

ORIGIN ≡ 1

Алгебра и геометрия

Матричные операции

Матрицы и их элементы, встроенные возможности

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 110 & 120 & 130 & 140 \\ 210 & 220 & 230 & 240 \\ 310 & 320 & 330 & 340 \end{pmatrix} \qquad B1 := \begin{pmatrix} 1.1 & 2.1 & 3.1 \\ 1.2 & 2.2 & 3.2 \\ 1.3 & 2.3 & 3.3 \\ 1.4 & 2.4 & 3.4 \end{pmatrix}$$

Элемент матрицы: $A_{2,4} = 24 \quad k := 3 \quad j := 4 \quad A_{k,j} = 34 \quad z := A_{k,j} \quad z = 34$

Столбец матрицы: $A^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \end{pmatrix} \quad k := 3 \quad V := A^{\langle k \rangle} \quad V = \begin{pmatrix} 13 \\ 23 \\ 33 \end{pmatrix}$

Умножение матрицы на число: $5 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 60 & 65 & 70 \\ 105 & 110 & 115 & 120 \\ 155 & 160 & 165 & 170 \end{pmatrix} \quad b := 5 \quad C := b \cdot A = \begin{pmatrix} 55 & 60 & 65 & 70 \\ 105 & 110 & 115 & 120 \\ 155 & 160 & 165 & 170 \end{pmatrix}$

Сложение матриц: $A + B = \begin{pmatrix} 121 & 132 & 143 & 154 \\ 231 & 242 & 253 & 264 \\ 341 & 352 & 363 & 374 \end{pmatrix} \quad C := A + B \quad C = \begin{pmatrix} 121 & 132 & 143 & 154 \\ 231 & 242 & 253 & 264 \\ 341 & 352 & 363 & 374 \end{pmatrix} \quad B - A = \begin{pmatrix} 99 & 108 & 117 & 126 \\ 189 & 198 & 207 & 216 \\ 279 & 288 & 297 & 306 \end{pmatrix}$

Перемножение матриц: $A \cdot B1 = \begin{pmatrix} 63 & 113 & 163 \\ 113 & 203 & 293 \\ 163 & 293 & 423 \end{pmatrix}$

Умножение матриц на число

```
FMatrNum(x, A) := | NA ← rows(A)
                  | MA ← cols(A)
                  | for k ∈ 1..NA
                  |   for j ∈ 1..MA
                  |     Z[k,j ← x·A[k,j
                  | Z
```

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad b := 5 \quad C := FMatrNum(b, A) = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 25 & 20 & 15 & 10 \\ 5 & 30 & 35 & 40 \end{pmatrix} \quad b \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 25 & 20 & 15 & 10 \\ 5 & 30 & 35 & 40 \end{pmatrix}$

Суммирование матриц

```
FMatrSum(A, B) := | NA ← rows(A)
                  | MA ← cols(A)
                  | for k ∈ 1..NA
                  |   for j ∈ 1..MA
                  |     Z[k,j ← A[k,j + B[k,j
                  | Z
```

```
FMatrSum2(A, B) := | NA ← rows(A)
                   | MA ← cols(A)
                   | NB ← rows(B)
                   | MB ← cols(B)
                   | return "Матрицы не совместимы"  if (NA ≠ NB) ∨ (MA ≠ MB)
                   | for k ∈ 1..NA
                   |   for j ∈ 1..MA
                   |     Z[k,j ← A[k,j + B[k,j
                   | Z
```

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Проверка: $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 2 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$

$C := FMatrSum(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 2 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$

C := FMatrSum2(A, B1) = "Матрицы не совместимы"

Транспонирование матрицы

```
FMatrTransp(A) := | N ← rows(A)
                  | for k ∈ 1..N
                  |   for j ∈ 1..N
                  |     Z[k,j] ← A[j,k]
                  | Z
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad C := FMatrTransp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Перемножение матриц

```
FMatrProd(A,B) := | NA ← rows(A)
                  | MA ← cols(A)
                  | MB ← cols(B)
                  | for i ∈ 1..NA
                  |   for j ∈ 1..MB
                  |     | Z[i,j] ← 0
                  |     | for k ∈ 1..MA
                  |     |   Z[i,j] ← Z[i,j] + A[i,k]·B[k,j]
                  | Z
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad C := FMatrProd(A,B) = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 66 \\ 30 & 54 & 66 \\ 66 & 66 & 150 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 66 \\ 30 & 54 & 66 \\ 66 & 66 & 150 \end{pmatrix}$

Обратная матрица

Минор

```
FMin(A,bk,bj) := | N ← rows(A)
                 | kk ← 0
                 | for k ∈ 1..N
                 |   if k ≠ bk
                 |     | kk ← kk + 1
                 |     | jj ← 0
                 |     | for j ∈ 1..N
                 |     |   if j ≠ bj
                 |     |     | jj ← jj + 1
                 |     |     | Z[kk,jj] ← A[k,j]
                 | Z
```

Матрица обратная

```
FMatrInv1(A) := | N ← rows(A)
                | D ← |A|
                | for k ∈ 1..N
                |   for j ∈ 1..N
                |     B[k,j] ← |FMin(A,k,j)|·(−1)^(j+k)
                | Z ← B^T / D
```

Матрица обратная

```
FMatrInv2(A) := | N ← rows(A)
                | det ← |A|
                | for bk ∈ 1..N
                |   for bj ∈ 1..N
                |     | kk ← 0
                |     | for k ∈ 1..N
                |     |   if k ≠ bk
                |     |     | kk ← kk + 1
                |     |     | jj ← 0
                |     |     | for j ∈ 1..N
                |     |     |   if j ≠ bj
                |     |     |     | jj ← jj + 1
                |     |     |     | H[kk,jj] ← A[k,j]
                |     | B[bk,bj] ← |H|·(−1)^(bk+bj)
                | Z ← B^T / det
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ainv2 := FMatrInv1(A) = \begin{pmatrix} -0.086 & -0.309 & -7.194 \times 10^{-3} & 0.835 & -1.072 \\ -0.561 & 0.489 & 0.453 & -0.576 & 0.532 \\ -0.137 & 0.094 & 0.072 & -0.345 & 0.719 \\ 0.374 & 7.194 \times 10^{-3} & -0.302 & 0.05 & -0.022 \\ 0.158 & -0.266 & 0.18 & 0.137 & -0.201 \end{pmatrix}$$

$$Ainv3 := FMatrInv2(A) = \begin{pmatrix} -0.086 & -0.309 & -7.194 \times 10^{-3} & 0.835 & -1.072 \\ -0.561 & 0.489 & 0.453 & -0.576 & 0.532 \\ -0.137 & 0.094 & 0.072 & -0.345 & 0.719 \\ 0.374 & 7.194 \times 10^{-3} & -0.302 & 0.05 & -0.022 \\ 0.158 & -0.266 & 0.18 & 0.137 & -0.201 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.086 & -0.309 & -7.194 \times 10^{-3} & 0.835 & -1.072 \\ -0.561 & 0.489 & 0.453 & -0.576 & 0.532 \\ -0.137 & 0.094 & 0.072 & -0.345 & 0.719 \\ 0.374 & 7.194 \times 10^{-3} & -0.302 & 0.05 & -0.022 \\ 0.158 & -0.266 & 0.18 & 0.137 & -0.201 \end{pmatrix}$

Единичная матрица

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{FMatrInv1}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{FMatrTransp}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{FMatrProd}(A,E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{FMatrProd}(E,A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathrm{FMatrInv1}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обычная матрица из блочной

Формирование общей матрицы из блочной

```
BlockMatr(A) := | M ← cols(A)
                | N ← rows(A)
                | for j ∈ 1..N
                |   | B_j ← A_j,1
                |   | for k ∈ 1..M − 1   if M > 1
                |   |   B_j ← augment(B_j, A_j,k+1)
                | Z ← B_1
                | for j ∈ 1..N − 1   if N > 1
                |   Z ← stack(Z, B_j+1)
                | Z
```

$$Q_{1,1} := \begin{pmatrix} 11.11 & 11.12 \\ 11.21 & 11.22 \\ 11.31 & 11.32 \end{pmatrix} \quad Q_{1,2} := \begin{pmatrix} 12.11 & 12.12 & 12.13 \\ 12.21 & 12.22 & 12.23 \\ 12.31 & 12.32 & 12.33 \end{pmatrix}$$

$$Q_{2,1} := \begin{pmatrix} 21.11 & 21.12 \\ 21.21 & 21.22 \\ 21.31 & 21.32 \\ 21.41 & 21.42 \\ 21.51 & 21.43 \end{pmatrix} \quad Q_{2,2} := \begin{pmatrix} 4.11 & 4.12 & 4.13 \\ 4.21 & 4.22 & 4.23 \\ 4.31 & 4.32 & 4.33 \\ 4.41 & 4.42 & 4.43 \\ 4.51 & 4.52 & 4.53 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \{3,2\} & \{3,3\} \\ \{5,2\} & \{5,3\} \end{pmatrix}$$

$$V := \mathrm{BlockMatr}(Q) = \begin{pmatrix} 11.11 & 11.12 & 12.11 & 12.12 & 12.13 \\ 11.21 & 11.22 & 12.21 & 12.22 & 12.23 \\ 11.31 & 11.32 & 12.31 & 12.32 & 12.33 \\ 21.11 & 21.12 & 4.11 & 4.12 & 4.13 \\ 21.21 & 21.22 & 4.21 & 4.22 & 4.23 \\ 21.31 & 21.32 & 4.31 & 4.32 & 4.33 \\ 21.41 & 21.42 & 4.41 & 4.42 & 4.43 \\ 21.51 & 21.43 & 4.51 & 4.52 & 4.53 \end{pmatrix}$$

Блочная матрица из обычной

Формирование блочной матрицы из обычной

```
MatrBlock(A, Pos) := | N ← rows(Pos)
                     | for i ∈ 1..N
                     |   | k1 ← Pos_i,1
                     |   | j1 ← Pos_i,2
                     |   | k2 ← Pos_i,3
                     |   | j2 ← Pos_i,4
                     |   | Z_i ← submatrix(A, k1, k2, j1, j2)
                     | Z
```

$$Pos := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MatrBlock}(V, Pos) = \begin{pmatrix} \{3,2\} \\ \{5,2\} \\ \{3,3\} \\ \{5,3\} \end{pmatrix}$$

Вписывание матрицы в матрицу

Вписывание матрицы:

$$ENmatr(A,B,x1,y1,x2,y2) := \left| \begin{array}{l} nx \leftarrow x2 - x1 + 1 \\ ny \leftarrow y2 - y1 + 1 \\ \text{for } ix \in 1..nx \\ \quad \text{for } iy \in 1..ny \\ \quad\quad A_{iy+y1-1,\,ix+x1-1} \leftarrow B_{iy,ix} \\ A \end{array} \right.$$

$$A1 := \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 & 1.5 & 1.6 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.4 & 2.5 & 2.6 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 & 3.4 & 3.5 & 3.6 \\ 4.1 & 4.2 & 4.3 & 4.4 & 4.5 & 4.6 \\ 5.1 & 5.2 & 5.3 & 5.4 & 5.5 & 5.6 \end{pmatrix} \qquad A2 := \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \end{pmatrix}$$

$x1 := 4 \qquad y1 := 4 \qquad x2 := 4 \qquad y2 := 5$

$$Z := ENmatr(A1, A2, x1, y1, x2, y2) = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 & 1.5 & 1.6 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.4 & 2.5 & 2.6 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 & 3.4 & 3.5 & 3.6 \\ 4.1 & 4.2 & 4.3 & 11 & 4.5 & 4.6 \\ 5.1 & 5.2 & 5.3 & 21 & 5.5 & 5.6 \end{pmatrix}$$

Выделение матрицы коэффициентов из системы скалярных линеных уравнений

Выделение матрицы из линейной системы уравнений

$$MElimin(A,Nx) := \left| \begin{array}{l} NA \leftarrow rows(A(x)) \\ \text{for } j \in 1..Nx \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..Nx \\ \quad x_k \leftarrow 0 \\ x_j \leftarrow 1 \\ \text{for } k \in 1..NA \\ \quad z_{k,j} \leftarrow A(x)_k \end{array} \right. \\ z \end{array} \right.$$

$$Sys(x) := \begin{pmatrix} 1.4 \cdot x_4 + 1.3 \cdot x_3 + 1.2 \cdot x_2 + 1.1 \cdot x_1 \\ 2.2 \cdot x_2 + 2.4 \cdot x_4 + 2.1 \cdot x_1 + 2.3 \cdot x_3 \\ 3.1 \cdot x_1 + 3.2 \cdot x_2 + 3.4 \cdot x_4 + 3.3 \cdot x_3 \\ 4.3 \cdot x_3 + 4.1 \cdot x_1 + 4.4 \cdot x_4 + 4.2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$MElimin(Sys, 4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.4 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 & 3.4 \\ 4.1 & 4.2 & 4.3 & 4.4 \end{pmatrix}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Рабочие листы MathCAD.

Алгебра и геометрия. Алгоритм решения линейных уравнений Гаусса

ORIGIN ≡ 1

Алгебра и геометрия

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса в ручном режиме

Задано: $A \cdot x = U$ $\quad A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ 7 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad U := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Расширенная матрица: $R := \mathrm{augment}(A, U) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

Транспонирование для удобства последующих выкладок: $H := R^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Шаг 1. Преобразование строк 2, 3, 4: исключение x_1:

$$H^{\langle 2\rangle} := \left(H^{\langle 1\rangle}\right)_1 \cdot H^{\langle 2\rangle} - \left(H^{\langle 2\rangle}\right)_1 \cdot H^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -32 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad P_1 := H^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 7 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H^{\langle 3\rangle} := \left(H^{\langle 1\rangle}\right)_1 \cdot H^{\langle 3\rangle} - \left(H^{\langle 3\rangle}\right)_1 \cdot H^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad P_2 := H^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 11 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H^{\langle 4\rangle} := \left(H^{\langle 1\rangle}\right)_1 \cdot H^{\langle 4\rangle} - \left(H^{\langle 4\rangle}\right)_1 \cdot H^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 24 \\ 32 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad P_3 := H^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 11 \\ 0 & 5 & 24 & 32 & 26 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Преобразование строк 3, 4: исключение x_2:

$$H^{\langle 3\rangle} := \left(H^{\langle 2\rangle}\right)_2 \cdot H^{\langle 3\rangle} - \left(H^{\langle 3\rangle}\right)_2 \cdot H^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \\ -40 \\ 55 \end{pmatrix} \qquad P_4 := H^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -30 & -40 & 55 \\ 0 & 5 & 24 & 32 & 26 \end{pmatrix}$$

$$H^{\langle 4\rangle} := \left(H^{\langle 2\rangle}\right)_2 \cdot H^{\langle 4\rangle} - \left(H^{\langle 4\rangle}\right)_2 \cdot H^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 280 \\ 115 \\ 95 \end{pmatrix} \qquad P_5 := H^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -30 & -40 & 55 \\ 0 & 0 & 280 & 115 & 95 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Преобразование строк 4: исключение x_3:

$$H^{\langle 4\rangle} := \left(H^{\langle 3\rangle}\right)_3 \cdot H^{\langle 4\rangle} - \left(H^{\langle 4\rangle}\right)_3 \cdot H^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.75 \times 10^3 \\ -1.825 \times 10^4 \end{pmatrix} \qquad P_6 := H^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -30 & -40 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 7.75 \times 10^3 & -1.825 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Приведение всех строк к единичному первому коэффициенту:

$$H^{\langle 1\rangle} := \frac{H^{\langle 1\rangle}}{\left(H^{\langle 1\rangle}\right)_1} \qquad H^{\langle 2\rangle} := \frac{H^{\langle 2\rangle}}{\left(H^{\langle 2\rangle}\right)_2} \qquad H^{\langle 3\rangle} := \frac{H^{\langle 3\rangle}}{\left(H^{\langle 3\rangle}\right)_3} \qquad H^{\langle 4\rangle} := \frac{H^{\langle 4\rangle}}{\left(H^{\langle 4\rangle}\right)_4} \qquad W := H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 1 & -6.4 & 1.8 & 1.4 \\ 0 & 0 & 1 & 1.333 & -1.833 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.355 \end{pmatrix}$$

Шаг 5. Выделение матриц:

$$B := \text{submatrix}(W,1,4,1,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 1 & -6.4 & 1.8 \\ 0 & 0 & 1 & 1.333 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V := \text{submatrix}(W,1,4,5,5) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.4 \\ -1.833 \\ -2.355 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$Bx^{\langle 1\rangle} := x_1 \cdot W^{\langle 1\rangle} \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Bx^{\langle 2\rangle} := x_2 \cdot W^{\langle 2\rangle} \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Bx^{\langle 3\rangle} := x_3 \cdot W^{\langle 3\rangle} \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} 0.6\cdot x_3 \\ -6.4\cdot x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Bx^{\langle 4\rangle} := x_4 \cdot W^{\langle 4\rangle} \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} 0.8\cdot x_4 \\ 1.8\cdot x_4 \\ 1.33\cdot x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad Wx := \text{augment}(Bx, V) \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0.6\cdot x_3 & 0.8\cdot x_4 & 0.4 \\ 0 & x_2 & -6.4\cdot x_3 & 1.8\cdot x_4 & 1.4 \\ 0 & 0 & x_3 & 1.33\cdot x_4 & -1.83 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & -2.35 \end{pmatrix}$$

Шаг 6. Вычисление переменных:

$$x_4 := \left(Wx^{\langle 5\rangle}\right)_4 \text{ float},3 \to -2.35 \qquad Wx := Wx \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x_4 = x_4 \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0.6\cdot x_3 & -1.88 & 0.4 \\ 0 & x_2 & -6.4\cdot x_3 & -4.23 & 1.4 \\ 0 & 0 & x_3 & -3.13 & -1.83 \\ 0 & 0 & 0 & -2.35 & -2.35 \end{pmatrix}$$

$$Wx^{\langle 5\rangle} := Wx^{\langle 5\rangle} - Wx^{\langle 4\rangle} \to \begin{pmatrix} 2.28 \\ 5.63 \\ 1.3 \\ 0.0 \end{pmatrix} \qquad Wx^{\langle 4\rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_1 := Wx \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0.6\cdot x_3 & 0 & 2.28 \\ 0 & x_2 & -6.4\cdot x_3 & 0 & 5.63 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 := \left(Wx^{\langle 5\rangle}\right)_3 \text{ float},3 \to 1.3 \qquad Wx := Wx \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x_3 = x_3 \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0.78 & 0 & 2.28 \\ 0 & x_2 & -8.32 & 0 & 5.63 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 & 1.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Wx^{\langle 5\rangle} := Wx^{\langle 5\rangle} - Wx^{\langle 3\rangle} \to \begin{pmatrix} 1.5 \\ 13.95 \\ 0.0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Wx^{\langle 3\rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 := Wx \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 13.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 := \left(Wx^{\langle 5\rangle}\right)_2 \text{ float},3 \to 13.9 \qquad Wx := Wx \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x_2 = x_2 \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 13.9 & 0 & 0 & 13.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Wx^{\langle 5\rangle} := Wx^{\langle 5\rangle} - Wx^{\langle 2\rangle} \to \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Wx^{\langle 2\rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 := Wx \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := \left(Wx^{\langle 5\rangle}\right)_1 \text{ float},3 \to 1.5 \qquad Wx := Wx \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x_1 = x_1 \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Wx^{\langle 5\rangle} := Wx^{\langle 5\rangle} - Wx^{\langle 1\rangle} \to \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Wx^{\langle 1\rangle} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_4 := Wx \text{ float},3 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 7. Проверки разными методами:

$$x = \begin{pmatrix}1.5\\13.9\\1.3\\-2.35\end{pmatrix} \quad A\cdot x - U = \begin{pmatrix}0\\-0.05\\0\\-0.1\end{pmatrix} \quad z := A^{-1}\cdot U = \begin{pmatrix}1.5\\14\\1.306\\-2.355\end{pmatrix} \quad A\cdot z - U = \begin{pmatrix}0\\-3.553\times10^{-15}\\0\\-3.553\times10^{-15}\end{pmatrix} \quad y := B^{-1}\cdot V = \begin{pmatrix}1.5\\14\\1.306\\-2.355\end{pmatrix} \quad A\cdot y - U = \begin{pmatrix}0\\1.776\times10^{-15}\\1.776\times10^{-15}\\3.553\times10^{-15}\end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса с ипользованием разаботанной функции

Преобразование системы уравнений к треугольному виду
с отображением последовательности преобразований

```
Gauss1(A,U) := | N ← rows(A)
               | H ← augment(A,U)^T
               | i ← 0
               | for k ∈ 1..N − 1
               |   for j ∈ k..N − 1
               |     | H^<j+1> ← (H^<k>)_k·H^<j+1> − (H^<j+1>)_k·H^<k>
               |     | i ← i + 1
               |     | S_i ← H^T
               | S
```

$G := \mathrm{Gauss1}(A, U)$ $\quad G = \begin{pmatrix}\{4,5\}\\\{4,5\}\\\{4,5\}\\\{4,5\}\\\{4,5\}\\\{4,5\}\end{pmatrix}$

$$G_1 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\7&0&3&4&5\\2&1&6&8&6\end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-6&-8&11\\2&1&6&8&6\end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-6&-8&11\\0&5&24&32&26\end{pmatrix}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-30&-40&55\\0&5&24&32&26\end{pmatrix} \quad G_5 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-30&-40&55\\0&0&280&115&95\end{pmatrix} \quad G_6 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-30&-40&55\\0&0&0&7.75\times10^3&-1.825\times10^4\end{pmatrix}$$

Проверка (сравнение с ранее полученными результатами в ручеом режиме):

$$P_1 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\7&0&3&4&5\\2&1&6&8&6\end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-6&-8&11\\2&1&6&8&6\end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-6&-8&11\\0&5&24&32&26\end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-30&-40&55\\0&5&24&32&26\end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-30&-40&55\\0&0&280&115&95\end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix}5&0&3&4&2\\0&5&-32&9&7\\0&0&-30&-40&55\\0&0&0&7.75\times10^3&-1.825\times10^4\end{pmatrix}$$

Преобразование системы уравнений к треугольному виду
и приведение к первому коэффициенту 1

$$Gauss2(A,U) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow rows(A) \\ H \leftarrow augment(A,U)^T \\ \text{for } k \in 1..N-1 \\ \quad \text{for } j \in k..N-1 \\ \quad\quad H^{\langle j+1\rangle} \leftarrow \left[\left(H^{\langle k\rangle}\right)_k \cdot H^{\langle j+1\rangle} - \left(H^{\langle j+1\rangle}\right)_k \cdot H^{\langle k\rangle}\right] \\ \text{for } k \in 1..N \\ \quad H^{\langle k\rangle} \leftarrow \dfrac{H^{\langle k\rangle}}{\left(H^{\langle k\rangle}\right)_k} \\ H^T \end{array} \right.$$

$$T := Gauss2(A,U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 1 & -6.4 & 1.8 & 1.4 \\ 0 & 0 & 1 & 1.333 & -1.833 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.355 \end{pmatrix} \qquad H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 1 & -6.4 & 1.8 & 1.4 \\ 0 & 0 & 1 & 1.333 & -1.833 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.355 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$GaussSolv(A,U) := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow rows(A) \\ H \leftarrow augment(A,U)^T \\ \text{for } k \in 1..N-1 \\ \quad \text{for } j \in k..N-1 \\ \quad\quad H^{\langle j+1\rangle} \leftarrow \left[\left(H^{\langle k\rangle}\right)_k \cdot H^{\langle j+1\rangle} - \left(H^{\langle j+1\rangle}\right)_k \cdot H^{\langle k\rangle}\right] \\ \text{for } k \in 1..N \\ \quad H^{\langle k\rangle} \leftarrow \dfrac{H^{\langle k\rangle}}{\left(H^{\langle k\rangle}\right)_k} \\ W \leftarrow H^T \\ \text{for } k \in 1..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{N-k+1} \leftarrow \left(W^{\langle N+1\rangle}\right)_{N-k+1} \\ W^{\langle N-k+1\rangle} \leftarrow x_{N-k+1} \cdot W^{\langle N-k+1\rangle} \\ W^{\langle N+1\rangle} \leftarrow W^{\langle N+1\rangle} - W^{\langle N-k+1\rangle} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$u := GaussSolv(A,U) \qquad u = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 14 \\ 1.306 \\ -2.355 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса (преобразование к треугольному виду)

Преобразование системы уравнений к треугольному виду
с отображением последовательности преобразований

```
GaussProcess(A, U) := | N ← rows(A)
                      | H ← augment(A, U)^T
                      | i ← 0
                      | for k ∈ 1..N − 1
                      |   for j ∈ k..N − 1
                      |     | H^<j+1> ← (H^<k>)_k · H^<j+1> − (H^<j+1>)_k · H^<k>
                      |     | i ← i + 1
                      |     | S_i ← H^T
                      | for k ∈ 1..N
                      |   H^<k> ← H^<k> / (H^<k>)_k
                      | W ← H^T
                      | for k ∈ 1..N
                      |   | x_{N−k+1} ← (W^<N+1>)_{N−k+1}
                      |   | W^<N−k+1> ← x_{N−k+1} · W^<N−k+1>
                      |   | W^<N+1> ← W^<N+1> − W^<N−k+1>
                      |   | for j ∈ 1..N
                      |   |   (W^<N−k+1>)_j ← 0
                      |   | Z_k ← W
                      | (x, S, Z)^T
```

$F := \mathrm{GaussProcess}(A, U)$ $\quad F = \begin{pmatrix} \{4,1\} \\ \{6,1\} \\ \{4,1\} \end{pmatrix}$ $\quad v := F_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 14 \\ 1.306 \\ -2.355 \end{pmatrix}$ $\quad D := F_2 = \begin{pmatrix} \{4,5\} \\ \{4,5\} \\ \{4,5\} \\ \{4,5\} \\ \{4,5\} \\ \{4,5\} \end{pmatrix}$ $\quad L := F_3 = \begin{pmatrix} \{4,5\} \\ \{4,5\} \\ \{4,5\} \\ \{4,5\} \end{pmatrix}$ $\quad u = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 14 \\ 1.306 \\ -2.355 \end{pmatrix}$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 7 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 11 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 11 \\ 0 & 5 & 24 & 32 & 26 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -30 & -40 & 55 \\ 0 & 5 & 24 & 32 & 26 \end{pmatrix} \quad D_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -30 & -40 & 55 \\ 0 & 0 & 280 & 115 & 95 \end{pmatrix} \quad D_6 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -32 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -30 & -40 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & 7.75\times10^{3} & -1.825\times10^{4} \end{pmatrix}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Рабочие листы MathCAD.

Алгебра и геометрия. Геометрические фигуры

$ORIGIN \equiv 1$

Алгебра и геометрия.
Геометрические фигуры

Библиотека элементарных фигур

Квадрат

```
Kvadrat(P,N) := | x0 ← P_1
                | y0 ← P_2
                | d ← P_3
                | h ← d/N
                | for j ∈ 1..N + 1
                |   | x1_j ← x0
                |   | x2_j ← (j − 1)·h + x0
                |   | x3_j ← x0 + d
                |   | x4_j ← (j − 1)·h + x0
                | for j ∈ 1..N + 1
                |   | y1_j ← (j − 1)·h + y0
                |   | y2_j ← y0
                |   | y3_j ← (j − 1)·h + y0
                |   | y4_j ← y0 + d
                | z^<1> ← stack(x1, x2, x3, x4)
                | z^<2> ← stack(y1, y2, y3, y4)
                | z
```

Прямоугольник

```
Rektangul(P,N) := | x0 ← P_1
                  | y0 ← P_2
                  | dx ← P_3
                  | dy ← P_4
                  | hx ← dx/N
                  | hy ← dy/N
                  | for j ∈ 1..N + 1
                  |   | x1_j ← x0
                  |   | x2_j ← (j − 1)·hx + x0
                  |   | x3_j ← x0 + dx
                  |   | x4_j ← (j − 1)·hx + x0
                  | for j ∈ 1..N + 1
                  |   | y1_j ← (j − 1)·hy + y0
                  |   | y2_j ← y0
                  |   | y3_j ← (j − 1)·hy + y0
                  |   | y4_j ← y0 + dy
                  | z^<1> ← stack(x1, x2, x3, x4)
                  | z^<2> ← stack(y1, y2, y3, y4)
                  | z
```

Круг

```
Krug(P,N) := | x0 ← P_1
             | y0 ← P_2
             | R ← P_3
             | h ← 2·R/N
             | for j ∈ 1..N + 1
             |   | s ← R − (j − 1)·h
             |   | x1_j ← s
             |   | x2_(N+2−j) ← s
             |   | y1_j ← y0 + √(R² − s²)
             |   | y2_(N+2−j) ← y0 − √(R² − s²)
             | z^<1> ← stack(x1 + x0, x2 + x0)
             | z^<2> ← stack(y1, y2)
             | z
```

```
Skemo(N,P) := | Z ← P_1
              | V_1 ← Kvadrat(Z,N)
              | Z ← P_2
              | V_2 ← Rektangul(Z,N)
              | Z ← P_3
              | V_3 ← Krug(Z,N)
              | z^<1> ← stack(V_1^<1>, V_2^<1>, V_3^<1>)
              | z^<2> ← stack(V_1^<2>, V_2^<2>, V_3^<2>)
              | z
```

Задание параметров фигур

$N := 4000$ $d := 30$ $x1_0 := 10$ $y1_0 := 20$ $P_1 := \begin{pmatrix} x1_0 \\ y1_0 \\ d \end{pmatrix}$ $z := \mathrm{Kvadrat}(P_1, N)$

$dx := 25$ $dy := 15$ $x2_0 := -10$ $y2_0 := -20$ $P_2 := \begin{pmatrix} x2_0 \\ y2_0 \\ dx \\ dy \end{pmatrix}$ $w := \mathrm{Rektangul}(P_2, N)$

$R := 50$ $x3_0 := 10$ $y3_0 := 15$ $P_3 := \begin{pmatrix} x3_0 \\ y3_0 \\ R \end{pmatrix}$ $v := \mathrm{Krug}(P_3, N)$

$P := \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$

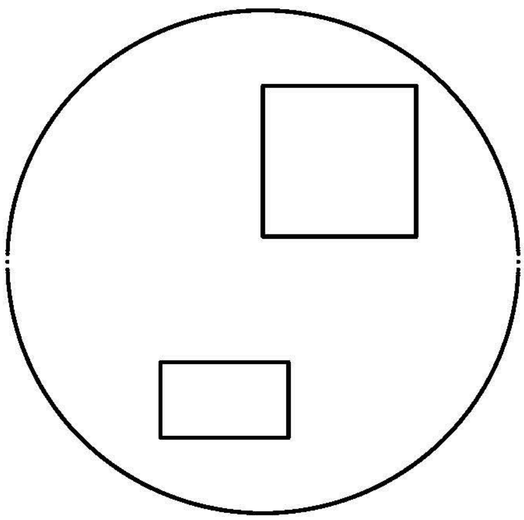
Расчёты и построение фигур

$N_1 := \mathrm{rows}(z) = 1.6 \times 10^4$ $N_2 := \mathrm{rows}(v) = 8.002 \times 10^3$

$j := 1..N_1$ $k := 1..N_2$ $\left(v^{\langle 1 \rangle}\right)_1 = 60$ $\left(v^{\langle 1 \rangle}\right)_{N_2} = 60$

$N := 4000$ $W := \mathrm{Skemo}(N, P)$ $N_x := \mathrm{rows}(W) = 4.001 \times 10^4$ $x := W^{\langle 1 \rangle}$ $y := W^{\langle 2 \rangle}$

$j := 1..N_x$



ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Рабочие листы MathCAD.

Алгебра и геометрия. Чертежи

ORIGIN ≡ 1

Построение чертежей

1 Библиотека процедур для геометрических построений

Вычерчивание пластины с зубцами: Z - число зубцов; R_1 - внешний радиус; R_2 - внутренний радиус; N - число точек; θ - угол поворота

$$
\begin{aligned}
FZub(Z,R_1,R_2,N,\theta) := \; & \beta \leftarrow \frac{\pi}{Z} \\
& d \leftarrow \frac{R_1 - R_2}{N} \\
& i \leftarrow 0 \\
& \text{for } k \in 1..2\cdot Z \\
& \quad \text{if } \operatorname{ceil}\left(\frac{k}{2}\right)\cdot 2 \neq k \\
& \quad\quad T \leftarrow \text{"Для нечётного зубца расчёт от начала к концу"} \\
& \quad\quad \text{for } j \in 1..N \\
& \quad\quad\quad i \leftarrow i + 1 \\
& \quad\quad\quad z_{i,1} \leftarrow \left[R_2 + (j-1)\cdot d\right]\cdot\cos[(k-1)\cdot\beta + \theta] \\
& \quad\quad\quad z_{i,2} \leftarrow \left[R_2 + (j-1)\cdot d\right]\cdot\sin[(k-1)\cdot\beta + \theta] \\
& \quad\quad \text{for } j \in 1..N \\
& \quad\quad\quad i \leftarrow i + 1 \\
& \quad\quad\quad z_{i,1} \leftarrow R_1\cdot\cos\left[(j-1)\cdot\frac{\beta}{N+1} + (k-1)\cdot\beta + \theta\right] \\
& \quad\quad\quad z_{i,2} \leftarrow R_1\cdot\sin\left[(j-1)\cdot\frac{\beta}{N+1} + (k-1)\cdot\beta + \theta\right] \\
& \quad \text{otherwise} \\
& \quad\quad T \leftarrow \text{"Для чётного зубца расчёт от конца к началу"} \\
& \quad\quad \text{for } j \in 1..N \\
& \quad\quad\quad i \leftarrow i + 1 \\
& \quad\quad\quad z_{i,1} \leftarrow \left[R_1 - (j-1)\cdot d\right]\cdot\cos[(k-1)\cdot\beta + \theta] \\
& \quad\quad\quad z_{i,2} \leftarrow \left[R_1 - (j-1)\cdot d\right]\cdot\sin[(k-1)\cdot\beta + \theta] \\
& \quad\quad \text{for } j \in 1..N \\
& \quad\quad\quad i \leftarrow i + 1 \\
& \quad\quad\quad z_{i,1} \leftarrow R_2\cdot\cos\left[(j-1)\cdot\frac{\beta}{N+1} + (k-1)\cdot\beta + \theta\right] \\
& \quad\quad\quad z_{i,2} \leftarrow R_2\cdot\sin\left[(j-1)\cdot\frac{\beta}{N+1} + (k-1)\cdot\beta + \theta\right] \\
& z
\end{aligned}
$$

Вычерчивание дуги: N - число точек; R - внешний радиус; x_0 - абсцисса центра скругления; y_0 - ордината центра скругления; alf_1 - угол начала скругления; alf_2 - окончания скругления

$$
\begin{aligned}
FDuga(N,R,x_0,y_0,alf_1,alf_2) := \; & d \leftarrow \frac{\left|alf_1 - alf_2\right|}{N} \\
& \text{for } j \in 1..N \\
& \quad \text{break if } (j-1)\cdot d > \left|alf_2\right| \\
& \quad z_{j,1} \leftarrow x_0 + R\cdot\cos\left[(j-1)\cdot d + \left|alf_1\right|\right] \\
& \quad z_{j,2} \leftarrow y_0 + R\cdot\sin\left[(j-1)\cdot d + \left|alf_1\right|\right] \\
& z
\end{aligned}
$$

Вычерчивание прямоугольной пластины с закруглениями по углам

$$FKvarRond(N, L_x, L_y, x_0, y_0, R) :=$$

$$d_x \leftarrow \frac{L_x - 2\cdot R}{N}$$

$$d_y \leftarrow \frac{L_y - 2\cdot R}{N}$$

$$N_R \leftarrow N$$

$T \leftarrow$ "Левое нижнее закругление"

$$w \leftarrow FDuga\left[N_R, R, \left(x_0 - \frac{L_x}{2} + R\right), \left(y_0 - \frac{L_y}{2} + R\right), \pi, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$z \leftarrow w$$

$$k \leftarrow rows(z)$$

$T \leftarrow$ "Нижняя линия"

$$\text{for } j \in 1..N$$

$$\quad k \leftarrow k + 1$$

$$\quad z_{k,1} \leftarrow x_0 - \frac{L_x}{2} + R + (j-1)\cdot d_x$$

$$\quad z_{k,2} \leftarrow y_0 - \frac{L_y}{2}$$

$T \leftarrow$ "Правое нижнее закругление"

$$w \leftarrow FDuga\left[N_R, R, \left(x_0 + \frac{L_x}{2} - R\right), \left(y_0 - \frac{L_y}{2} + R\right), \frac{3\cdot\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$z \leftarrow stack(z, w)$$

$$k \leftarrow rows(z)$$

$T \leftarrow$ "Правая линия"

$$\text{for } j \in 1..N$$

$$\quad k \leftarrow k + 1$$

$$\quad z_{k,1} \leftarrow x_0 + \frac{L_x}{2}$$

$$\quad z_{k,2} \leftarrow y_0 - \frac{L_y}{2} + R + (j-1)\cdot d_y$$

$T \leftarrow$ "Правое верхнее закругление"

$$w \leftarrow FDuga\left[N_R, R, \left(x_0 + \frac{L_x}{2} - R\right), \left(y_0 + \frac{L_y}{2} - R\right), 0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$z \leftarrow stack(z, w)$$

$T \leftarrow$ "Верхняя линия"

$$k \leftarrow rows(z)$$

$$\text{for } j \in 1..N$$

$$\quad k \leftarrow k + 1$$

$$\quad z_{k,1} \leftarrow x_0 + \frac{L_x}{2} - R - (j-1)\cdot d_x$$

$$\quad z_{k,2} \leftarrow y_0 + \frac{L_y}{2}$$

$T \leftarrow$ "Левое верхнее закругление"

$$w \leftarrow FDuga\left[N_R, R, \left(x_0 - \frac{L_x}{2} + R\right), \left(y_0 + \frac{L_y}{2} - R\right), \frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$z \leftarrow stack(z, w)$$

$T \leftarrow$ "Левая линия"

$$\begin{array}{|l} k \leftarrow rows(z) \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad \begin{array}{|l} k \leftarrow k+1 \\ z_{k,1} \leftarrow x_0 - \dfrac{L_x}{2} \\ z_{k,2} \leftarrow y_0 + \dfrac{L_y}{2} - R - (j-1)\cdot d_y \end{array} \\ z \end{array}$$

3 Общие параметры чертежа

3.1 Число фаз: $m := 3$

3.2 Число точек: $N := 500$

3.3 Число точек для ротора: $N_r := N$

3.4 Число точек для статора: $N_s := N$

4 Пластина статора

4.1 Радиус внешний: $R_{s1} := 8$

4.2 Радиус внутренний: $R_{s2} := 5.2$

4.3 Число зубцов на фазу: $z_s := 5$

4.4 Число зубцов: $Z_s := z_s \cdot 2 \cdot m = 30$

4.5 Угол поворота статора: $b_s := \dfrac{\pi}{180} \cdot 0$

4.6 Расчёт пластины статора $v_s := FZub(Z_s, R_{s1}, R_{s2}, N_s, b_s)$

4.7 Массив абсцисс: $x_s := v_s^{\langle 1 \rangle}$

4.8 Массив ординат: $y_s := v_s^{\langle 2 \rangle}$

4.9 Радиус внешний: $R_L := 1$

4.10 Число точек для статора: $N_L := 500$

4.11 Расчёт пластины статора: $L_x := 18$ $L_y := 18$ $v_L := FKvarRond(N_L, L_x, L_y, 0, 0, R_L)$

4.12 Массив абсцисс: $x_L := v_L^{\langle 1 \rangle}$

4.13 Массив ординат: $y_L := v_L^{\langle 2 \rangle}$

5 Пластина ротора

5.1 Радиус внешний: $R_{r1} := 5$

5.2 Радиус внутренний: $R_{r2} := 4.5$

5.3 Число зубцов: $Z_r := (z_s - 1) \cdot 2 \cdot m = 24$

5.4 Угол поворота ротора: $b_r := \dfrac{\pi}{180} \cdot 30$

5.5 Расчёт пластины ротора: $v_r := FZub(Z_r, R_{r1}, R_{r2}, N_r, b_r)$

5.6 Массив абсцисс: $x_r := v_r^{\langle 1 \rangle}$

5.7 Массив ординат: $y_r := v_r^{\langle 2 \rangle}$

6 Центр пластин (отверстие)

6.1 Радиус отверстия: $R_C := 0.2$

6.2 Число точек: $N_C := 1000$

6.3 Расчёт отверстия: $v_C := \mathrm{FDuga}(N_C, R_C, 0, 0, 0, 2\cdot\pi)$

6.4 Массив абсцисс: $x_C := v_C^{\langle 1 \rangle}$

6.5 Массив ординат: $y_C := v_C^{\langle 2 \rangle}$

7 Построение чертежа

7.1 Абсцисса чертежа левая: $x_{min} := -12$

7.2 Абсцисса чертежа правая: $x_{max} := 12$

7.3 Ордината чертежа нижняя: $y_{min} := -12$

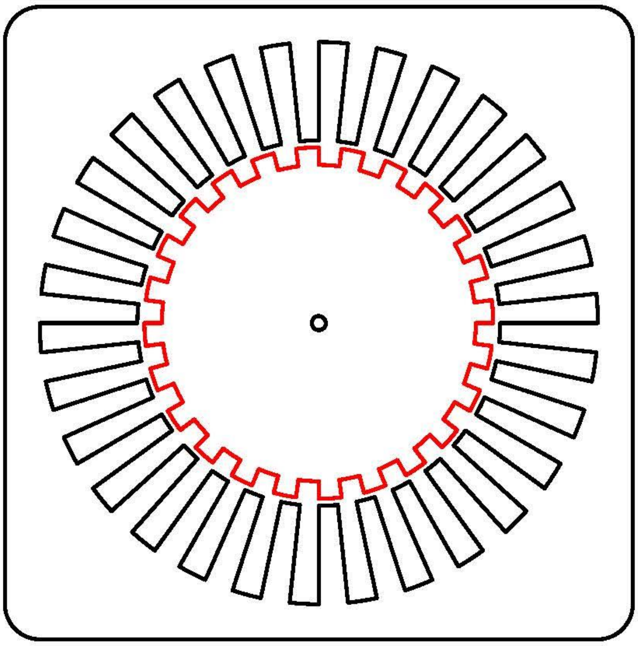
7.4 Ордината чертежа верхняя: $y_{max} := 12$

7.5 Построение пластины статора: $k := 1..\mathrm{rows}(x_s)$

7.6 Построение палстины ротора: $j := 1..\mathrm{rows}(x_r)$

7.7 Построение внешнего контура: $n := 1..\mathrm{rows}(x_L)$

7.8 Построение отверстия: $i := 1..\mathrm{rows}(x_C)$



ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Рабочие листы MathCAD.

Дискретная математика. Перестановки — пошаговые выкладки

$ORIGIN \equiv 1$

Дискретная математика

Кобинаторика

Лексикографический метод генерирования перестановок

Определение номера перестановки по её виду

$u3 := (2\ \ 1\ \ 3)^T$

$u4 := (3\ \ 1\ \ 2\ \ 4)^T$

$u5 := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)^T$

$u6 := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$

$u7 := (4\ \ 6\ \ 5\ \ 3\ \ 7\ \ 2\ \ 1)^T$

$u8 := (6\ \ 1\ \ 2\ \ 8\ \ 7\ \ 5\ \ 4\ \ 1)^T$

$u9 := (6\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 7\ \ 8)^T$

```
NumPerestanovka(v) := | n ← rows(v)
                      | for i ∈ 1..n
                      |   | a_i ← 0
                      |   | for j ∈ i..n
                      |   |   a_i ← a_i + 1  if  v_i > v_j
                      | z ← Σ_{j=1}^{n} [a_j·(n − j)!]
```

$N := NumPerestanovka(u4) = 12$

$N := NumPerestanovka(u9) = 25320$

$u1 := (7\ \ 2\ \ 4\ \ 3\ \ 6\ \ 5\ \ 1)^T$ $\qquad n_1 := NumPerestanovka(u1) = ■$

$u2 := (7\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 1\ \ 3\ \ 6)^T$ $\qquad n_2 := NumPerestanovka(u2) = ■$

Генерирование последовательности перестановок пошагово

Исходные векторы: $v := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad v := \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}$ $\quad v := \begin{pmatrix}1\\5\\3\\4\\2\end{pmatrix}$ $\quad v := u8 = ■$ $\quad v := u9 = ■$

Шаг := 1

$n := rows(v)$ $\qquad Z^{\langle Шаг \rangle} := v$ $\qquad Z^T = (1\ \ 5\ \ 3\ \ 4\ \ 2)$

Шаг := Шаг + 1 = 2

```
Граница(v,n) := | k ← 0
                | for i ∈ 1..n − 1
                |   if v_{n−i} < v_{n−i+1}
                |     | k ← n − i
                |     | break
                | k
```

$k := Граница(v,n) = 3$

$$\text{Подмассив}(v,n,k) := \left| \begin{array}{l} j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in k+1..n \\ \quad \text{if } v_i > v_k \\ \qquad \left| \begin{array}{l} j \leftarrow j+1 \\ d_{j,1} \leftarrow v_i \\ d_{j,2} \leftarrow i \end{array} \right. \\ d \end{array} \right.$$

$d := \text{Подмассив}(v,n,k) = (4 \quad 4)$

$m := \text{rows}(d) = 1$

$$\text{МинЭлемент}(d,m) := \left| \begin{array}{l} min \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 2..m \qquad \text{if } m > 1 \\ \quad min \leftarrow i \ \text{ if } d_{i,1} < d_{min,1} \\ min \end{array} \right.$$

$min := \text{МинЭлемент}(d,m) = 1$

$$\text{Обмен}(v,k,d,min) := \left| \begin{array}{l} q \leftarrow d_{min,2} \\ h \leftarrow v_q \\ v_q \leftarrow v_k \\ v_k \leftarrow h \\ v \end{array} \right.$$

$z := \text{Обмен}(v,k,d,min)$

$Z^T = (1 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 2)$

$z^T = (1 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2)$

$$\text{Инверсия}(z,n,k) := \left| \begin{array}{l} w \leftarrow z \\ \text{if } k > 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow n+1 \\ \text{for } j \in k+1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \leftarrow i-1 \\ w_j \leftarrow z_i \end{array} \right. \end{array} \right. \\ w \end{array} \right.$$

$v := \text{Инверсия}(z,n,k)$

$Z^{\langle \text{Шаг} \rangle} := v \qquad Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$N = 25320$

$N_{шаг2} := \text{NumPerestanovka}(v) = 22$

$\text{Шаг} := \text{Шаг} + 1 = 3$

$k := \text{Граница}(v,n) = 4$

$d := \text{Подмассив}(v,n,k) = (3 \quad 5)$

$m := \text{rows}(d) = 1$

$min := \text{МинЭлемент}(d,m) = 1 \qquad d_{min,2} = 5$

$z := \text{Обмен}(v,k,d,min) \qquad z^T = (1 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2)$

$v := \text{Инверсия}(z,n,k) \qquad Z^{\langle \text{Шаг} \rangle} := v \qquad Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$N = 25320 \qquad N_{шаг3} := \text{NumPerestanovka}(v) = 23$

$\text{Шаг} := \text{Шаг} + 1 = 4$

$d := \text{Подмассив}(v,n,k) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$m := \text{rows}(d) = 4$

$min := \text{МинЭлемент}(d,m) = 4$ $\qquad d_{min,2} = 5$

$z := \text{Обмен}(v,k,d,min)$ $\qquad z^T = (2\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 1)$

$v := \text{Инверсия}(z,n,k)$ $\qquad Z^{\langle \text{Шаг} \rangle} := v$ $\qquad Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\text{Шаг} := \text{Шаг} + 1 = 5$

$k := \text{Граница}(v,n) = 4$

$d := \text{Подмассив}(v,n,k) = (5\ \ 5)$

$m := \text{rows}(d) = 1$

$min := \text{МинЭлемент}(d,m) = 1$ $\qquad d_{min,2} = 5$

$z := \text{Обмен}(v,k,d,min)$ $\qquad z^T = (2\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 4)$

$v := \text{Инверсия}(z,n,k)$ $\qquad Z^{\langle \text{Шаг} \rangle} := v$ $\qquad Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\text{Шаг} := \text{Шаг} + 1 = 6$

$k := \text{Граница}(v,n) = 3$

$d := \text{Подмассив}(v,n,k) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$m := \text{rows}(d) = 2$

$min := \text{МинЭлемент}(d,m) = 2$ $\qquad d_{min,2} = 5$

$z := \text{Обмен}(v,k,d,min)$ $\qquad z^T = (2\ \ 1\ \ 4\ \ 5\ \ 3)$

$v := \text{Инверсия}(z,n,k)$ $\qquad Z^{\langle \text{Шаг} \rangle} := v$ $\qquad Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Рабочие листы MathCAD.

Дискретная математика. Перестановки — функция

$ORIGIN \equiv 1$

Комбинаторика

Лексикографический метод генерирования перестановок

Генерирование перестановок: библиотека функций

Просматривает массив справа налево и определяет первый элемент, меньший очередного

```
Граница(v,n) := | k ← 0
                | for i ∈ 1..n − 1
                |   if v[n−i] < v[n−i+1]
                |     | k ← n − i
                |     | break
                | k
```

Выделяет подмассив справа от выбранного элемента

```
Подмассив(v,n,k) := | j ← 0
                    | for i ∈ k + 1..n
                    |   if v[i] > v[k]
                    |     | j ← j + 1
                    |     | d[j,1] ← v[i]
                    |     | d[j,2] ← i
                    | d
```

Находит в выделенном подмассиве минимальный элемент

```
МинЭлемент(d,m) := | min ← 1
                   | for i ∈ 2..m                    if m > 1
                   |   min ← i  if d[i,1] < d[min,1]
                   | min
```

Меняет опорный элемент с минимальным в подмассиве

```
Обмен(v,k,d,min) := | q ← d[min,2]
                    | h ← v[q]
                    | v[q] ← v[k]
                    | v[k] ← h
                    | v
```

Инверсия оставшегося подмассива и дописывание его

```
Инверсия(z,n,k) := | w ← z
                   | if k > 0
                   |   | i ← n + 1
                   |   | for j ∈ k + 1..n
                   |   |   | i ← i − 1
                   |   |   | w[j] ← z[i]
                   | w
```

Определение номера заданной перестановки по её виду

```
NumPerestanovka(v) := | n ← rows(v)
                      | for i ∈ 1..n − 1
                      |   | a[i] ← 0
                      |   | for j ∈ i..n − 1
                      |   |   a[i] ← a[i] + 1  if v[i] > v[j]
                      | z ← Σ_{j=1}^{n−1} [a[j]·(n − j)!] + 1
```

$$z \leftarrow \sum_{j=1}^{n-1}\left[a_j\cdot(n-j)!\right]+1$$

Генерирование всех перестановок для массива заданной размерности n

Генерирование всех перестановок для массива размерностью n

```
PerestanovkaGen(n) := | for j ∈ 1..n
                      |   v_j ← j
                      | j ← 1
                      | Z^<j> ← v
                      | for j ∈ 2..n!
                      |   | k ← Граница(v,n)
                      |   | d ← Подмассив(v,n,k)
                      |   | m ← rows(d)
                      |   | min ← МинЭлемент(d,m)
                      |   | z ← Обмен(v,k,d,min)
                      |   | v ← Инверсия(z,n,k)
                      |   | Z^<j> ← v
                      | Z
```

Размерность массива: $n := 4$ $P1 := PerestanovkaGen(n)$

Номер перестановки выводимой перестановки: $s1 := 11$

Перестановка: $x := P1^{\langle s1 \rangle T} = (2\ \ 4\ \ 1\ \ 3)$

Число перестановок выполненное: $N1 := rows\left(P1^T\right) = 24$

Номер перестановки для контроля: $NumPerestanovka\left(x^T\right) = 9$

$$P1^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Генерирование последующих sekv перестановок после заданной

Формирование sekv следующих перестановок

$$
\text{PerestanovkaSekv}(v, sekv) := \left|
\begin{array}{l}
n \leftarrow \text{rows}(v) \\
j \leftarrow 1 \\
Z^{\langle j \rangle} \leftarrow v \\
\text{for } j \in 2..sekv + 1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow \text{Граница}(v, n) \\
d \leftarrow \text{Подмассив}(v, n, k) \\
m \leftarrow \text{rows}(d) \\
min \leftarrow \text{МинЭлемент}(d, m) \\
z \leftarrow \text{Обмен}(v, k, d, min) \\
v \leftarrow \text{Инверсия}(z, n, k) \\
Z^{\langle j \rangle} \leftarrow v
\end{array}
\right. \\
Z
\end{array}
\right.
$$

61324578

Заданная перестановка: $p := (6\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 7\ \ 8)^T$

Число последующих перестановок: $sekv := 3$

Генерирование последующих перестановко: $P := \text{PerestanovkaSekv}(p, sekv)$

Номер просматриваемой перестановки (1 - исходная): $k := 3$

Следующая перестановка: $p_k := P^{\langle k \rangle}$

$P^{\langle k \rangle T} = (6\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ \ 7\ \ 5\ \ 8)$

Номер исходной перестановки: $n_1 := \text{NumPerestanovka}\left(P^{\langle 1 \rangle}\right) = 25321$

Номер просматриваемой перестановки: $n_k := \text{NumPerestanovka}\left(P^{\langle k \rangle}\right) = 25323$

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт космических и информационных технологий
Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
__________ О.В.Непомнящий
«20» 06 2022 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Комплекс программ для методического обеспечения математических дисциплин

Руководитель	подпись	дата	доц., канд. техн. наук должность, ученая степень	Н. А. Никулин
Выпускник	подпись	дата		А. П. Кузьмин
Нормоконтролер	подпись	дата	доц., канд. техн. наук должность, ученая степень	Н. А. Никулин

Красноярск 2022