

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

В.А. Кулагин
«__» июня 2022 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Исследование трехмерного конвективного течения слоя жидкости

на локально нагретой подложке

13.04.01 – Теплоэнергетика и теплотехника

13.04.01.01 – Энергетика теплотехнологий

Научный руководитель

подпись, дата

доцент, к.т.н.

ученая степень

А.А. Пьяных

инициалы, фамилия

Выпускник

подпись, дата

Ш.К. Эшонов

инициалы, фамилия

Рецензент

подпись, дата

доцент, к.т.н.

ученая степень

А.С. Кузнецов

инициалы, фамилия

Красноярск 2022

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация на тему «Математическое моделирование термокапиллярной конвекции» содержит 59 страниц текстового документа, 17 иллюстраций, 40 использованных источника.

Исследование трехмерного конвективного течения слоя жидкости на локально нагретой подложке.

Цель диссертации: Построение математической модели процесса термокапиллярной конвекции при различных условиях, путем решения одномерной и двумерной задачи.

Задачи: Выполнить сравнение точного решения уравнений одномерного и двумерного стационарного течения свободной конвекции для плоского горизонтального слоя жидкости с постоянным градиентом температуры на нижней границе слоя и свободной верхней границей с коэффициентом поверхностного натяжения зависимым от температуры. Определить погрешность одномерного точного решения при различных степенях стеснения потока и числах Марангони, путем сравнения с численным двумерным решением.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. Описание и применения методов конечных объёмов.....	7
1.1 Описание используемого программного продукта Ansys	8
1.1.2. Метод конечных объёмов	11
1.1.3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ.....	11
1.1.4. РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ.....	12
1.1.5. МНОГОЧЕЛНЫ ЧЕБЫШЁВА.....	13
1.1.6. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ.....	13
1.2 Численное дифференцирование и интегрирование	14
1.2.1 Радиационный нагрев поверхности раздела газ-жидкость....	16
1.2.2 Термокапиллярная конвекция в движущемся слое.....	19
1.2.3 Регулярные структуры, возникающие при локальном нагреве стекающей пленки жидкости.....	22
Глава 2. Уравнения тепловой конвекции (уравнения Буссинеска, приближение Буссинеска).....	27
2.1 Постановка задачи	27
2.2. Давление на поверхность	28
2.3. Коэффициент теплового расширения.....	29
2.4. Конвекция в случае, когда верхняя граница слоя свободна....	29
Глава Численное моделирование тепловой газогидродинамики при нагревательных полей на нагретой подложке	33
3.1. Постановка задачи со свободной границей уравнения Обербека- Буссинеска и аналитическое решение	33
ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ	56
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	57

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Процессы в пленках жидкости широко используются в различных технологических системах, так как обеспечивают высокую интенсивность тепломассопереноса и значительную поверхность контакта фаз при малых удельных расходах жидкости. Тонкие пленки жидкости могут также возникать при движении двухфазных потоков в каналах испарительно-конденсационных систем. Пленочные течения специально создаются в различных аппаратах химической технологии, пищевой, фармацевтической промышленности, в криогенной индустрии.

Совместное движение газа и жидкости имеет место в различных аппаратах химической промышленности и энергетике, например, при кольцевом режиме течения двухфазного потока в трубах или на стадии подготовки топлива в камерах сгорания.

Перспективным является использование тонких пленок жидкости, движущихся под действием газового потока, в системах охлаждения микроэлектронного оборудования, как в земных условиях, так и в условиях микрогравитации [Sherwood and Cray, 1992, Bar-Cohen et al., 1995, Kabov et al., 2004]. В таких системах процесс спутного течения пленки и газа происходит в микро или миниканалах. Характерная высота рассматриваемых каналов варьируется от 50 до 3000 мкм. При этом движение газа и жидкости как правило имеет ламинарный характер. Перспективными рабочими жидкостями для таких систем охлаждения является вода при давлениях ниже атмосферного, а также диэлектрическая жидкость FC-72. Вода позволяет снимать наиболее высокие тепловые потоки, но опасность разгерметизации ограничивает ее применение. FC-72 обладает относительно низким коэффициентом теплопроводности и теплотой фазового перехода. В работе выполнены расчеты для обеих жидкостей.

Существенную роль при движении двухфазных потоков в мини и микроканалах играет поверхностное натяжение. В условиях интенсивного тепло и массообмена возникают термокапиллярные силы, вызываемые наличием

градиента температуры на поверхности раздела газ-жидкость и концентрационнокапиллярные силы, вызываемые градиентом концентрации при течении многокомпонентных жидкостей.

Термокапиллярная конвекция в пленке жидкости, нагреваемой снизу, широко исследовалась в течение последних десятилетий. Тем не менее, вопрос о влиянии газовой фазы на поверхностные явления остается не до конца изученным. В большинстве статей изучение взаимодействия испарения и термокапиллярного эффекта проводится в предположении, что жидкость соприкасается только с собственным паром [Burelbach et al., 1988, Oron et al., 1997, Ајаев, 2004]. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что присутствие неконденсируемой компоненты в фазе пара сильно стимулирует появление поверхностной неустойчивости испаряющегося жидкого слоя [Haut and Colinet, 2004].

В 1994 г. в Институте теплофизики СО РАН д.ф.-м.н. О.А. Кабовым были обнаружены регулярные структуры в тонкой движущейся под действием гравитации пленке жидкости при ее локальном нагреве со стороны подложки. Структуры представляют собой вал жидкости в области верхней кромки нагревателя, из которого с определенной периодичностью стекают струи жидкости и тонкая пленка между ними. В лаборатории интенсификации процессов теплообмена Института теплофизики (зав. лаб. Кабов О.А.) ведется эксперимент, в котором предполагается получить и исследовать подобные регулярные структуры при совместном течении пленки жидкости и газа, как в земных условиях, так и в условиях микрогравитации. Было предложено теоретически изучить процессы в пленке жидкости, движущейся и под действием газового потока.

Устойчивость совместного движения неизотермической пленки жидкости и газа является сложной до конца не исследованной проблемой (Актаршев and Alekseenko 1996, Gambaryan-Roisman and Stepban 2004). Касательные и нормальные напряжения на границе раздела газ-жидкость вызываемые потоком газа, а также термокапиллярными силами, ответственны за нелинейные

деформации, которые могут оказывать существенное влияние на интенсивность теплообмена и разрушение пленки.

Цель работы – исследование трехмерного конвективного течения слоя жидкости на локально нагретой подложке

Предмет исследования – процесс термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости при различных условиях.

Новые научные результаты:

Детальный анализ процесса термокапиллярной конвекции путем решения стационарной двумерной задачи процесса термокапиллярной конвекции, ранее не существовавшей.

Методы исследований. Для решения поставленных задач будут использованы как теоретические методы исследования, так и практические. В качестве теоретических методов будут использоваться анализ и оценка в рамках магистерской диссертации. В качестве практических методов рассматриваются математические модели процессов.

Практическая значимость работы заключается в том, что полученные результаты представляют собой новый этап в теоретическом изучении закономерностей пленочного течения, поскольку разработка и решение стационарной двумерной задачи даст возможность еще более точно проанализировать процессы термокапиллярной конвекции. Ряд выводов о характерных особенностях течения получены в общем виде аналитически, что может иметь особую ценность не только при тестировании применяемых численных алгоритмов, но и для формирования целостных физических представлений об изучаемом сложном явлении. Полученные результаты позволяют более целенаправленно и углубленно планировать эксперименты.

Глава 1. Описание и применения методов конечных объёмов

Весьма и весьма динамичная история практического применения методов вычислительной гидрогазодинамики насчитывает всего полвека. За это время многостороннее развитие получил метод конечных разностей (МКР), основы которого были заложены еще до появления быстродействующих ЭВМ, возник и достиг высокого совершенства метод конечных объемов (МКО), сформировалось отдельное направление, связанное с приложением к задачам динамики жидкости и газа метода конечных элементов (МКЭ), созданного изначально для решения проблем механики деформируемого твердого тела. Не претендуя на полноту, охарактеризуем различные методы с единственной целью прояснить причины лидирующего положения МКО в разработках вычислительных средств, ориентированных на решение задач гидрогазодинамики и конвективного теплообмена в областях сложной геометрии. Метод конечных разностей основан на аппроксимации входящих в исходные дифференциальные уравнения производных их дискретными (разностными) аналогами. Несомненными достоинствами МКР являются высокая эффективность и простота реализации, а также наглядность процедуры дискретизации, дающая возможность построения схем высокого порядка точности. Однако эти достоинства реализуются лишь при использовании достаточно «хорошей» регулярной (структурированной) сетки – почти ортогональной и с плавно меняющимися размерами ячеек. Как следствие, подавляющее большинство приложений МКР ограничено случаями сравнительно простых по геометрии расчетных областей. В определенной степени решение проблемы моделирования течений в областях сложной геометрии было найдено в 1970-х гг., когда для дискретизации уравнений гидродинамики стал широко применяться метод конечных объемов. Отправной точкой МКО является интегральная формулировка законов сохранения массы, импульса, энергии и др. Балансовые соотношения записываются для небольшого контрольного объема; их дискретный аналог получается суммированием по всем

граням выделенного объема потоков массы, импульса и т.д., вычисленных по каким-либо квадратурным формулам. Поскольку интегральная формулировка законов сохранения не накладывает ограничений на форму контрольного объема, МКО пригоден для дискретизации уравнений гидрогазодинамики как на структурированных, так и на неструктурированных сетках с различной формой ячеек, что, в принципе, полностью решает проблему сложной геометрии расчетной области.

1.1 Описание используемого программного продукта Ansys

ANSYS CFX – инструмент для оптимизации процесса разработки и технологической подготовки в области вычислительной динамики жидкостей и газов. ANSYS CFX совмещает в себе передовую технологию решателя с современным пользовательским интерфейсом и адаптивной архитектурой, что делает этот инструмент доступным как для разработчиков, владеющих общими инженерными знаниями, так и для специалистов в области гидродинамики, работающими с моделью и ее свойствами на глубоком уровне. CFX позволяет детально изучить оборудование и процессы изнутри, повысить эффективность, увеличить срок службы и оптимизировать процессы.

Модуль ANSYS CFX полностью интегрирован в расчетную среду ANSYS Workbench - платформу, объединяющую все инструменты инженерного моделирования компании ANSYS. Адаптивная архитектура позволяет пользователю выполнять любые действия от стандартного анализа течения жидкости или газа до обработки сложных взаимодействующих систем. Пользователи могут легко оценить производительность во множественных расчетных точках или сравнить несколько альтернативных конструкций. Для решения задач из различных расчетных дисциплин в рамках платформы ANSYS Workbench можно получить доступ к общим для всех расчетов инструментам, таким как инструменты для работы с геометрией ANSYS DesignModeler и с сеткой ANSYS Meshing.

Геометрия создаётся в модуле ANSYS DesignModeler, специально разработанном для создания геометрии, ее подготовки к моделированию. Эта полностью параметрическая среда является простой в использовании, обладает прямыми и двусторонними связями со всеми основными CAD-пакетами и используется как средство согласования и ввода геометрии во все программные продукты ANSYS для последующих инженерных расчетов.

Для получения точных результатов расчетов в области вычислительной динамики жидкостей и газов необходима самая совершенная технология создания сетки. ANSYS Meshing предоставляет множество технологий построения сетки в одном приложении. Это дает возможность выбрать наиболее подходящий способ построения сетки на основе применения подхода последовательного построения сетки на каждой из деталей сборки.

Физический препроцессор ANSYS CFX -это современный, интуитивно понятный интерфейс для подготовки к моделированию динамики жидкостей или газов. В дополнение к основному режиму работы встроенный мастер помогает пользователю пройти процесс подготовки общих расчетов течения жидкостей или газов.

Мощный язык программирования дает возможность задать описание проблемы в числовом виде, как в случае со сложными граничными условиями, авторскими моделями материалов или дополнительными уравнениями переноса. Адаптивная архитектура CFX-Pre также позволяет пользователю создавать собственные панели графического пользовательского интерфейса, чтобы стандартизировать ввод для выбранных приложений.

Сердцем модуля решателя Ansys CFX Solver является передовой алгебраический многосеточный сопряженный решатель, использующий технологию Coupled Algebraic Multigrid, являющуюся ключом к получению точных результатов в короткие сроки. Параметры решателя, граничные условия могут быть скорректированы во время выполнения расчета, при этом нет необходимости останавливать решатель. Решатель ANSYS CFX использует

схему дискретизации второго порядка по умолчанию, обеспечивая получение максимально точных результатов.

Использование технологии сопряженных решателей ANSYS CFX дает значительные преимущества при проведении любого расчета и позволяет получить устойчивые и масштабируемые решения для задач динамики жидкостей и газов.

Описание результатов графического и количественного анализа, полученных в ANSYS CFX, выполняется в ANSYS CFD-Post. Возможность написания сценариев, полная автоматизация, генерация отчетов, дают пользователю максимальное количество информации, полученной в результате расчетов.

Ansys CFX и Ansys FLUENT – это основные продукты для задач гидрогазодинамики общего назначения, предлагаемые компанией ANSYS, Inc. Оба решателя разрабатывались в течение десятилетий независимо друг от друга и обладают несколькими существенными отличиями, несмотря на некоторые схожие черты. Оба модуля основаны на методе контрольных объемов, дающем высокую точность, и используют решатель по давлению, что позволяет применять эти продукты для решения широкого круга инженерных задач. Основные отличия состоят в способе интегрирования уравнений течения жидкостей и в стратегиях решения уравнений.

Решатель ANSYS CFX использует сетку конечных элементов (числовые значения в узлах сетки), схожую с теми, что используется в анализе прочности, для дискретизации области. В отличие от ANSYS CFX, решатель ANSYS FLUENT использует сетку конечных объемов (числовые значения в центрах ячеек). В итоге оба подхода формируют уравнения для конечных объемов, которые обеспечивают сохранение значений потока, что является необходимым условием для точных решений задач гидрогазодинамики. В ANSYS CFX особый упор сделан на решение основных уравнений движения (сопряженная алгебраическая сетка), а ANSYS FLUENT предлагает несколько подходов к решению (метод на основе плотности, расщепленный метод на основе давления,

сопряженный метод на основе давления). Оба решателя содержат в себе самые ценные возможности физического моделирования для получения максимально точных результатов. [3]

1.1.2. Метод конечных объёмов

(В русскоязычной литературе метод контрольных объёмов) численный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных. Выбирается некоторая замкнутая область течения жидкости или газа, для которой производится поиск полей макрокочических величин (например, скорости, давления), описывающих состояние среды во времени и удовлетворяющих определенным законам, сформулированным математически. Наиболее используемыми являются закон сохранения в Эйлеровых переменных. Для любой величины, в каждой точке пространства, окруженной некоторым замкнутым конечным объемом, в момент времени существует следующая зависимость: общее количество величины в объеме может изменяться за счет следующих факторов:

– транспорт количества этой величины через поверхность, ограничивающую контрольный объем поток;

– генерация (уничтожение) некоторого количества величины внутри контрольного объема. Другими словами, при формулировке МКО используется физическая интерпретация исследуемой величины. Например, при решении задач переноса тепла используется закон сохранения тепла в каждом контрольном объеме.

1.1.3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (U_{\varphi}) - \nabla \cdot (D_{\varphi} \nabla \varphi) + \varphi = s_{\varphi}, \quad (1.1)$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ – скорость изменения некоторой физической величины φ ;

$\cdot \varphi$ – реактивное слагаемое в абстрактном законе сохранения физической величины φ ;

$\cdot \nabla \cdot (U_\varphi)$ – конвективное слагаемое в абстрактном законе сохранения физической величины φ ;

$\cdot \nabla \cdot (D_\varphi \nabla_\varphi)$ – диффузное слагаемое в абстрактном законе сохранения величины φ ;

S_φ – источниковое слагаемое в абстрактном законе сохранения физической величины φ .

Этот метод применяется, в частности, при моделировании задач гидрогазодинамики в свободном пакете OpenFOAM, а также коммерческих кодах, таких как: ANSYS.

1.1.4. РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При решении практических задач необходимо многократно вычислять значения заданной функции, что в общем случае является ресурсоёмкой операцией. Возникает необходимость нахождения функции наилучшего равномерного приближения. Для приближения функции в линейном нормированном пространстве образуют подпространство размерности всевозможных линейных комбинаций, для которых определена норма и существует её точная нижняя грань. Элемент, в котором эта грань достигается называют элементом наилучшего приближения, или проекцией. Можно доказать, что в подпространстве всегда существует элемент наилучшего приближения, а при условии строгой нормированности пространства такой элемент является единственным. В пространстве непрерывных функций с нормой также существует элемент наилучшего приближения, но условием его

единственности является наличие не более различных нулей обобщённого многочлена на отрезке (Многочлены Чебышёва).

1.1.5. МНОГОЧЛНЫ ЧЕБЫШЁВА

Теория функций применима к системе степенных функций, так как она является системой Чебышёва на любом отрезке. Согласно теореме Вейерштрасса, при увеличении размерности подпространства) разность между проекцией и заданной функцией стремится к нулю. Порядок этого приближения зависит от структурных особенностей функции, его можно определить с помощью многочленов Бернштейна. Система тригонометрических функций также обладает свойствами системы Чебышёва на отрезке для неё также разность между проекцией и заданной функцией стремится к нулю.

Несмотря на показанное существование многочлена наилучшего приближения, способов его точного построения не существует. Вместо этого используют несколько способов приближённого построения многочленов наилучшего равномерного приближения.

1.1.6. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Во многих случаях требование равномерного приближения является избыточным и достаточно «интегральной» близости функций, кроме того значения приближённых функций, полученные из эксперимента, несут на себе случайные погрешности, а требовать совпадения приближающей и приближаемой функции, если последняя содержит неточности, нецелесообразно. Метод среднеквадратичного приближения принимает за меру близости следующую величину что позволяет отказаться от интерполяции подынтегральной функции и требования непрерывности, сохранив только требования интегрируемости с квадратом.

1.2 Численное дифференцирование и интегрирование

Уравнение вида, определённое на функциональном пространстве, может содержать операторы дифференцирования и, для которых невозможно найти точное решение. Методы численного дифференцирования и интегрирования основаны на интерполяции.

Основной функции считают приближённо равной производной интерполирующей функции, при этом производная остаточного члена интерполяционной формулы может быть велика, особенно для производных высших порядков. Формулы численного дифференцирования во многом основаны на непосредственном дифференцировании интерполяционных формул Ньютона, Гаусса, Стирлинга и Бесселя, построенных на распределённых разностях, но есть и безразностные формулы. В частности, когда для численного дифференциала используется непосредственно формула Лагранжа для равных промежутков метод неопределённых коэффициентов, и другие.

В случае интегрирования, само определение интеграла говорит о возможности его замены интегральной суммой, но этот приём обладает медленной сходимостью и мало пригоден. Интеграл от основной функции считают приближённо равным интегралу от интерполирующей функции и в дальнейшем используют интерполяционные формулы с кратными узлами. Использование в качестве подынтегрального выражения интерполяционного многочлена-Лагранжа для равных промежутков приводит к и её частным случаям, формуле трапеций, когда кривая подынтегрального выражения заменяется хордой и интеграл равен площади трапеции, и формуле Симпсона, когда кривая подынтегрального выражения заменяется параболой, проходящей через три точки. Отказавшись от требования равных промежутков с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа можно получить более точные формулы численного интегрирования, в частности формулы Гаусса, формулы Эрмита, формулы Маркова, формулы Чебышёва. Квадратурные процессы, построенные на интерполяционных формулах Гаусса, всегда

сходятся, в то время как формулы Ньютона— Котеса этим свойствам в общем случае не обладают.

Существуют и другие способы численного интегрирования, основным из которых является использование формул Эйлера, в которых замена переменных и последующее интегрирование по частям приводят к формуле численного интегрирования трапецией и поправочного члена, к которому повторно применяется замена переменных и интегрирование по частям. В общем случае формула Эйлера использует в качестве коэффициентов числа и многочлены Бернулли. Вопрос применения того или иного метода численного интегрирования зависит от таких факторов, как вычислительные средства, требуемая точность, способ задания подынтегральной функции. Для ручных вычислений рекомендуется использовать формулы, содержащие разности, в то время как при автоматических вычислениях — безразностные формулы, в особенности формулы Гаусса.

Для приближённого вычисления кратных интегралов повторно применяют формулы численного интегрирования однократных интегралов, при этом в зависимости от особенностей функции для разных интегралов можно использовать разные формулы. При использовании данного метода необходимо вычислять подынтегральную функцию в большом числе точек, поэтому целесообразно использовать формулы Гаусса и Чебышёва, которые являются более точными. Другим способом является замена подынтегральной функции интерполяционным многочленом от двух или нескольких переменных. Люстерник и Диткин предложили использовать формулы Маклорена для приближённого вычисления кратного интеграла. Вместе с тем, при увеличении кратности интеграла резко растёт число точек, для которых необходимо знать значения подынтегральной функции, чтобы пользоваться методами, основанными на интерполяции. Для вычисления кратных интегралов чаще пользуются вероятностными методами Монте-Карло, при этом необходимость получения равновозможных последовательностей создает дополнительные погрешности, которые трудно оценить.

1.2.1 Радиационный нагрев поверхности раздела газ-жидкость

На свободной поверхности жидкости создается неравномерное поле температур посредством локального лазерного или теплового излучения [Ostrach and Pradhan 1975, Shevtsova 1990, Индейкина и др. 1991, Shevtsova and Indeikina 1993, Kamotani et al. 1995, 1996]. Данные исследования имеют практическое приложение в сварке, зонной плавке, а также для метода фотохромной визуализации. При прохождении импульса ультрафиолетового лазерного излучения с энергией 0,08 Дж через горизонтальный слой этилового спирта толщиной 0,5 мм была зафиксирована скорость термокапиллярного движения на границе раздела до 3,5 см/с [Альварес-Суарес и Рязанцев 1986]. В работе [Растопов и Суходольский 1987] предложено использовать лазерно-индуцированный эффект Марангони для получения профиля поверхности жидкости с наперед заданной конфигурацией.

Также термокапиллярное явление наблюдается, когда жидкость нагревается посредством расположенного в ней тела [Ostrach and Kamotani 1996, Kamotani et al. 1995, 1996].

Термокапиллярное движение в тонких нагреваемых снизу слоях жидкости. Нагрев или охлаждение жидкости происходит через подложку, на которой располагается слой жидкости [Hershey 1939, Пшеничников и Токменина 1983, Van Hook et al. 1996].

[Pearson 1958] исследовал механизм термокапиллярной неустойчивости в тонком, нагреваемом снизу, горизонтальном бесконечном слое жидкости. Поверхность раздела считалась недеформируемой. Получены аналитические выражения для критического числа Марангони, определяющие границу термокапиллярной неустойчивости в зависимости от безразмерного волнового числа ($k = 2\pi h / \Lambda$) и числа Био ($Bi = ah / \lambda_w$)

$$Mn_{cr} = \frac{8k(k \cdot chk + Bi \cdot shk)(shk \cdot chk - k)}{sh^3k - k^3chk}, \quad (1.2)$$

(при усл. на стенке $T_w = const$)

$$Mn_{cr} = \frac{8k(k \cdot chk + Bi \cdot shk)(shk \cdot chk - k)}{sh^2 k \cdot chk - 2k \cdot shk + k^2 chk - k^3 shk}, \quad (1.3)$$

(при усл. на стенке $q_w = const$)

Кривые $T_{sur} Mn_{cr}(k)$ имеют минимум при $h = k_m$. С ростом Bi минимальное

критическое число Марангони возрастает, а минимум смещается в область коротких волн. Термокапиллярная неустойчивость не связана с действием гравитации и, в частности, может вызывать ячеистые течения в стекающих пленках.

[10] исследовал устойчивость горизонтального слоя с учетом термокапиллярных и подъемных сил. Численно была найдена связь между Ra_{cr} , Mn_{cr} и k на границе устойчивости. Установлено, что при $T_w = const$ и $Bi=0$ $Ra_{cr} = 669$ и $Mn_{cr} = 79,6$ соответственно для случаев, когда неустойчивость обусловлена только термогравитационным или только термокапиллярным механизмами. Вдоль кривой устойчивости критическое значение волнового числа равно $k_{cr} \approx 2$. Показано, что природа неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости, со свободной границей зависит от его толщины. При $h \ll h_{hl}$ граница неустойчивости определяется числом Марангони. В работах [Scriven and Sterling 1964, Smith 1966] показано, что учет деформируемости свободной поверхности приводит к понижению устойчивости.

[24] приводят результаты экспериментальных исследований динамики многообразных диссипативных структур, образующихся на поверхности раздела фаз в результате эффектов Марангони, обусловленных протеканием процессов тепло-и массопереноса при испарении. Имеет место спектр пространственно-периодических структур типа циркуляционных ячеек.

Существуют релаксационные колебания с различными периодами и различными подструктурами, неподвижные и движущиеся мелкомасштабные ячейки, медленно двигающиеся цилиндрические ячейки, крупномасштабные ячейки нескольких типов с подструктурой из двигающихся циркуляционных ячеек или движущихся релаксационных колебаний. В последнее десятилетие данное направление исследований интенсивно развивается. Формирование ячеистых структур приводит к существенной интенсификации теплообмена и массообмена []. Различные типы ячеистых течений изучены в работах [27]

В работе [21] выполнено экспериментальное исследование термокапиллярной конвекции в горизонтальных слоях этилового спирта толщиной 0,1-1,5 мм. Жидкость помещалась в металлические кюветы прямоугольной формы (102x40x20 мм), либо цилиндрической формы (диаметр 90 мм). К дну цилиндрической кюветы прижимался нагреватель диаметром 6 мм. Нагреватель и стенки кювет поддерживались при определенной температуре с помощью термостатов. Разность температур между нагреваемой и охлаждаемой поверхностями составляла 10-30 К. Деформация поверхности составляла до 0,7 мм. Угол наклона поверхности достигал до 1,4 градусов. Для $h=0,4-0,5$ мм при $\Delta T = 20-30$ К было зафиксировано оголение нагретых участков.

Разработана теоретическая модель термокапиллярного движения в тонком слое жидкости с деформируемой поверхностью. Рассматривалось плоское ползущее движение жидкости, нелинейными членами пренебрегали. Продольную компоненту скорости U с толщиной жидкого слоя $\xi(x)$ связывает уравнение (1.4):

$$\frac{\partial^2 U}{dY^2} = \frac{d\xi}{dX} - \frac{d^3 \xi}{dX^3}, \quad (1.4)$$

здесь $\xi = h/l_\sigma, Y = y/l_\sigma, U = u/(\sigma/\mu), x, y \sim$ координаты вдоль и поперек жидкого слоя соответственно. Граничные условия для скорости U имеют вид (1.5):

$$U(Y=0) = 0, \quad \left. \frac{dU}{dY} \right|_{Y=\xi} = -\frac{\varepsilon}{3} \frac{d\mathcal{G}}{dX}, \quad \varepsilon = \frac{3\Delta T}{\sigma_0} \left| \frac{d\sigma}{dT} \right| = -3Cr, \quad (1.5)$$

здесь $\mathcal{G}(x) = (T - T_2) / \Delta T$ — температура на поверхности жидкости;

$\Delta T = (T_1 - T_2) / 2$ — полуразность между нагревателем и холодильником.

Учитывая, что в стационарном режиме поток через поперечное сечение слоя равен нулю, для толщины слоя получено уравнение (1.6):

$$\xi^2 + \xi'^2 - 2\xi\xi'' = -\varepsilon\mathcal{G}(x) + C. \quad (1.6)$$

Решение уравнения найдено в виде ряда по степеням малого параметра ε для случая, когда на краях прямоугольной кюветы ($x = \pm B$), уровень жидкости остается постоянным и равен средней толщине слоя H . При $H > 0,5$ мм теоретический расчет хорошо описывает полученные экспериментальные данные. Теоретические и экспериментальные исследования динамики термокапиллярного движения в тонком нагреваемом от подложки слое жидкости выполнено также в работах [Pimputkar and Ostrach 1980, Van Hook et al. 1996].

1.2.2 Термокапиллярная конвекция в движущемся слое

В [9] теоретически и экспериментально рассмотрена устойчивость плоскопараллельного течения пленки по вертикальной жесткой поверхности при наличии на ней градиента температур. Поверхностное натяжение в слое линейно зависело от температуры. В уравнениях Навье-Стокса не учитывались инерционные члены, поэтому теоретические результаты оказываются даже

качественно неадекватными экспериментальным наблюдениям тех же авторов. В работе [Демехин, Потапов, 1989] впервые рассмотрена устойчивость вышеуказанного течения в полной постановке. Получены решения задачи как аналитические в длинноволновом приближении, так и численные в общем случае. Показано существование критического числа Марангони Ma_c , являющегося функцией только числа

Прандтля, и такого, что при $Ma \in (0, Ma_c)$ в пленке реализуется волновой режим течения, при $Ma > Ma_c$, этот режим сменяется безволновым. В работе [Miladinova et al. 2002] рассматривается задача о влиянии неоднородного нагрева подложки на течение пленки жидкости. Линейный анализ устойчивости течения пленки в длинноволновом приближении показывает, что уменьшение температуры подложки вдоль течения приводит к стабилизации течения (амплитуда возмущений на поверхности пленки уменьшается) по сравнению со случаем однородного нагрева. При нарастании температуры подложки вдоль течения, течение, наоборот, дестабилизируется. Отмечается, что в рамках двумерной модели, термокапиллярные эффекты влияют только на форму волн, не вызывая локального утончения.

[Tto et al. 1995] исследовали влияние нагрева стенки на неустойчивость течения пленки по вертикальной поверхности. На стенке выполнялось условие $q_w = const$. На границе раздела рассматривалось два условия: 1) теплоизоляции ($q_i = 0$) и 2) $q_i = q_w = const$. Была получена зависимость для критического расхода жидкости, требуемого для начала развития неустойчивости (1.7):

$$\frac{2}{15} \frac{g}{\nu} \Gamma v_{cr} = \frac{\sigma k_{\Lambda}^2}{\rho} + \frac{\sigma_i (d\sigma / dT) q_w}{\rho \lambda} \left(\frac{g}{3\nu \Gamma \Gamma_{Cr}} \right)^{1/3}. \quad (1.7)$$

Расчеты для $\Lambda = 10-30$ мм, показали, что существует два критических расхода жидкости. Для "больших" расходов имеет место гидродинамическая неустойчивость. Для "малых" расходов неустойчивость появляется вследствие

влияния эффекта Марангони. Экспериментальные исследования проведены при течении воды по вертикальной обогреваемой по всей длине трубе высотой 1,5 м ($D=24$ мм).

В [Joo et al. 1996] проводится теоретический анализ движения тонкого слоя жидкости по однородно нагреваемой наклонной поверхности. Показано что нелинейное взаимодействие гравитационно-капиллярных волн и термокапиллярной неустойчивости приводит к образованию массива ривулет ориентированных вдоль по потоку (рис. 1).

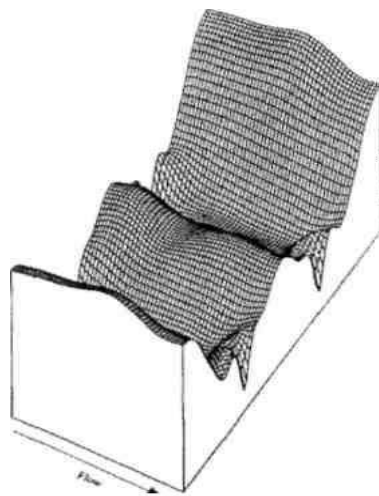


Рисунок 1 – Деформация поверхности в виде ривулет при стекании пленки жидкости по нагреваемой поверхности [19]

Выполнено численное интегрирование эволюционного уравнения. Предполагается, что температура подложки имеет постоянную температуру. Расчеты эволюции формы поверхности выполнены для значения числа Био $Bi = 1$, когда проявление термокапиллярной неустойчивости максимально. Для водяной пленки толщиной 100 мкм Bi при коэффициенте теплоотдачи равном 6040. Такое большое значение коэффициента конвективной теплоотдачи возможно только при интенсивном испарении, а в таком случае необходимо учитывать массообмен [Кабов, 1999, Марчук, 2000]. Авторы указывают на отсутствие экспериментов, подтверждающих их теорию. Регулярные структуры, полученные в экспериментах Кабова, данной теорией не описываются, поскольку длина волны структур не зависит от Bi .

1.2.3 Регулярные структуры, возникающие при локальном нагреве стекающей пленки жидкости.

В 1994 г. в Институте теплофизики СО РАН д.ф.-. м.н О.А. Кабовым было обнаружено явление формирования пространственной самоорганизующейся структуры в тонкой движущейся под действием гравитации пленке жидкости при ее локальном нагреве со стороны подложки. Нагрев пленки приводит к формированию в верхней области нагревателя горизонтального вала жидкости, который при пороговом значении плотности теплового потока теряет устойчивость и распадается на струи, стекающие с определенной длиной волны, и тонкую пленку между ними (рис. 2, 3).

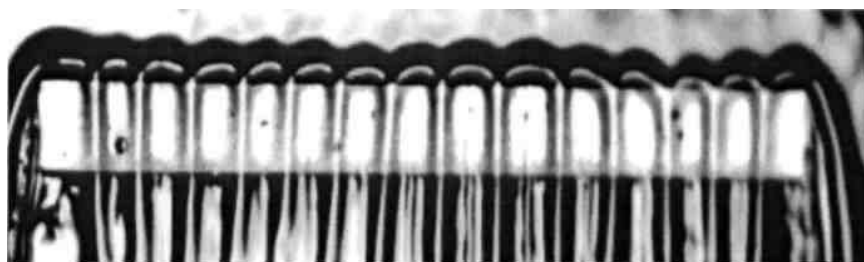


Рисунок 2 – Регулярные структуры, 10 % раствор этилового спирта в воде

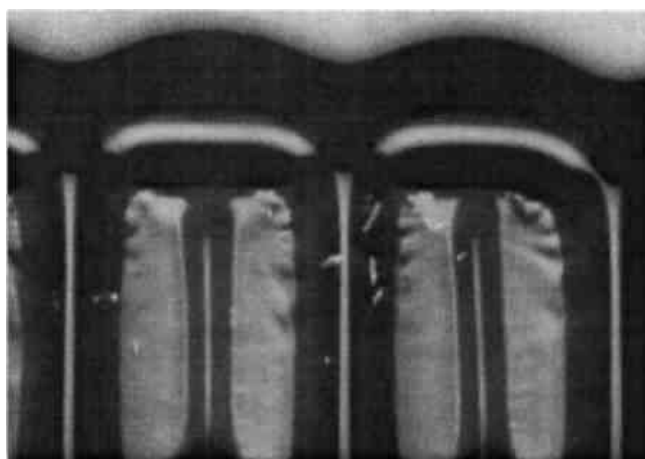


Рисунок 3 - Снимки процесса формирования регулярных структур, полученные с помощью Шлирен метода, 25 % раствор этилового спирта в воде

На основании измерений температуры поверхности пленки с помощью инфракрасного сканера была доказана термокапиллярная природа возникновения вала и структур [Кабов 1999]. В [Kabov et al. 1996] при помощи Шлирей метода было установлено, что значение критической толщины вала, при которой формируются регулярные структуры, составляет $h/h_0=1,32$. Шлирей метод позволял измерять только относительно небольшие углы наклона поверхности пленки, поэтому деформации в пленке после возникновения регулярных структур измерить не удалось. В [Кабов, 1998] предложен критерий формирования горизонтального вала жидкости. С использованием гипотезы вихревого спирального движения жидкости внутри вала, вызванного неоднородностью температуры подложки в поперечном направлении, сформулирована физическая модель формирования цепи регулярных структур.

С целью объяснения возникновения регулярных структур, а также термокапиллярного вала в последние годы выполнен ряд работ. В [32] рассчитана двумерная стационарная задача, как с учетом температурной зависимости вязкости, так и без ее учета, в приближении тонкого слоя:

$$0 = \sigma_0 h_{xxx} - \rho g \cos \theta h_x + \rho g \sin \theta + (\mu(x, y) u_y)_y \quad (1.8)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.9)$$

$$u T_x + v T_y = a T_{yy} \quad (1.10)$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (1.11)$$

$$[\mu u_y](x, h(x)) = \sigma_Y T_S(x) \quad (1.12)$$

$$\int_0^{h(x)} \rho u(x, y) dy = \Gamma \quad (1.13)$$

$$T(-\infty, y) = T_0 \quad (1.14)$$

$$T_y(x, h(x)) = 0 \quad (1.15)$$

$$-\lambda T_y(x, 0) = q(x)(\chi(x) - \chi(x - L)) \quad (1.16)$$

Эксперименты и численные расчеты с учетом зависимости вязкости и поверхностного натяжения от температуры показали, что при малых числах Рейнольдса в области верхней кромки нагревательного элемента существует деформация пленки в виде вала уже при малых тепловых потоках. Проведено сравнение экспериментальных данных и расчетных, наилучшее соответствие наблюдается, когда учитывается температурная зависимость вязкости и поверхностного натяжения. Отмечено, что выше вала по потоку систематически наблюдается утончение пленки на 3 % его толщины. Формирование структур происходит при некоторой практически постоянной относительной толщине вала, не зависящей от числа Re пленки, эта величина составляет $1,32 \pm 0,07$.

Обзор экспериментальных и теоретических работ по локально нагреваемой пленке жидкости, стекающей под действием гравитации выполнен в [Frank & Kabov, 2006].

В [Sharupov and Medvedko, 2000] проделан линейный анализ устойчивости двумерного стационарного решения по отношению к трехмерным возмущениям в длинноволновом приближении, $Re \ll 1$ и при заданной температуре поверхности T_{sur} .

В [Kuznetsov, 2000] получено стационарное решение двумерной задачи в приближении тонкого слоя. Проведен линейный анализ устойчивости двумерного решения в длинноволновом приближении в [Skotheim et al., 2003],

причем конвективными членами в уравнении энергии пренебрегается. [Kalliadasis et al, 2003] проделан линейный анализ устойчивости двумерного решения к возмущениям в поперечном направлении, причем распределение температуры на поверхности пленки предполагается заданным экспоненциально, используется модель «интегрального пограничного слоя», предложенная Шкадовым, используются профили скоростей, полученные в [Демехин, Потапов, 1989]. [Frank, 2003] провел впервые прямые численные расчеты трехмерной задачи в полной постановке методом частиц, численно получены регулярные структуры, которые качественно и количественно соответствуют экспериментам Кабова и др.. Серия работ по стекающей пленке жидкости для нагревателей большого размера выполнена Чинновым и др. [Chinnov et al. 2004, Чиннов и Кабов, 2004].

Вывод к главе

Заключение В современной вычислительной гидрогазодинамике МКО является самым популярным способом пространственной дискретизации уравнений, что связано с его гибкостью в отношении используемых сеток, технологичностью программной реализации, физической ясностью основных принципов. Использование блочно-структурированных сеток является сравнительно простым и, вместе с тем, эффективным средством решения проблемы моделирования течений в областях сложной геометрии. Применение неструктурированных сеток открывает более широкие возможности и является более удобным для пользователя, но требует больших дополнительных затрат на разработку программного обеспечения, что доступно лишь достаточно крупным компаниям. Благодаря ориентации на применение МКО и блочно-структурированных сеток. ANSYS, Обеспечивающий моделирование до- и сверхзвуковых, ламинарных и турбулентных, стационарных и нестационарных течений в областях сложной геометрии с учетом сил плавучести, в условиях сопряженного тепло- и массообмена, во вращающейся и неподвижной системе

отсчета. В комплексе ANSYS доступен широкий спектр моделей турбулентности, использованы высокоточные численные схемы и эффективные алгоритмы, реализованы возможности параллельных вычислений, что позволяет ему по ряду позиций успешно конкурировать с современными коммерческими программами. Программный комплекс ANSYS опробован на большом числе тестовых и модельных задач и с успехом применяется для расчета сложных течений в промышленных и энергетических устройствах с учетом их реальной геометрии.

Анализ литературы показывает, что большинство экспериментальных и теоретических исследований по гидродинамике, нагреву и испарению движущихся пленок выполнено для области средних и больших значений числа Рейнольдса жидкости ($Re=10-10^4$), считающейся практически важной [Wilke 1962, Гимбутис 1988, Гогонин и др. 1993, Алексеенко и др., 1992, Демехин, 1990]. Работы, в которых исследуется теплообмен при $Re < 10$ крайне ограничены. Отсутствуют работы, посвященные исследованию совместного влияния термокапиллярного эффекта, испарения, а также динамического воздействия газа на тонкую пленку жидкости. Исследование влияния размера канала на динамику и теплообмен пленки жидкости при числах Рейнольдса меньших 5 началось только в последние пять лет, но в основном они посвящены однофазному течению. Обобщающие закономерности отсутствуют. Исследования динамики гравитационно стекающих пленок [Marchuk and Kabov 1998] показали, что при интенсивных локальных нагревах для процесса теплопереноса одинаково существенны оба механизма - конвективный и коидуктивный.

Общей целью работы является исследование гидродинамики, теплообмена в локально нагреваемой пленке жидкости, движущейся под действием газового потока в канале в условиях определяющего влияния термокапиллярных сил.

Глава 2. Уравнения тепловой конвекции (уравнения Буссинеска, приближение Буссинеска)

2.1 Постановка задачи

Основная идея приближения состоит в особенности учёта зависимости плотности от температуры именно, в системе уравнений конвекции данная зависимость учитывается только при массовых силах:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial t} + (\vec{\vartheta} \cdot \nabla) \vec{\vartheta} \right) &= -\nabla P + \eta \Delta \vec{\vartheta} + \rho(T) \vec{g}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\vartheta} \cdot \nabla T &= x \Delta T, \\ \operatorname{div} \vec{\vartheta} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\vec{\vartheta}$ – скорость течения;

T – абсолютная температура;

P – давление;

η – динамическая вязкость;

x – коэффициент температуропроводности;

g – ускорение свободного падения.

Часто для зависимости плотности от температуры применяется линейная аппроксимация:

$$p(T) = p_0(1 - \beta\theta). \tag{2.2}$$

где β – коэффициент объёмного расширения;

$\theta = T - T_0$ – отклонение температуры от равновесного состояния;

p_0 – плотность жидкости при некоторой равновесной температуре T_0 – поскольку β и отклонение температуры обычно относительно невелико, то

линейное приближение обладает приемлемой точностью в большинстве исследуемых задач.

Подстановка линейной зависимости плотности и перенормировка давления позволяют исключить слагаемое. Окончательно задача конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} - \beta \theta \vec{g}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta &= \chi \Delta \theta, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

здесь ν — кинематическая вязкость.

Приведённая задача конвекции в различных постановках неоднократно исследовалась. Наиболее широко известна задача Рэля — Бенара о конвекции в плоском слое жидкости. При определённых условиях возможно точное решение задачи, например, для ламинарной конвекции в вертикальном слое при подогреве сбоку (иногда встречается под названием «задача Гершуни»).

2.2 Давление на поверхность

Давления на поверхность интенсивная физическая величина, численно равная силе, действующей на единицу площади поверхности перпендикулярно этой поверхности. В данной точке давление определяется как отношение нормальной составляющей силы, dF_n действующей на малый элемент поверхности, к его площади ds

$p = \frac{dF_n}{ds}$ — Среднее давление по всей поверхности есть отношение нормальной составляющей силы F_n , действующей на данную поверхность, к её площади S :

2.3 Коэффициент теплового расширения

Физическая величина, характеризующая относительное изменение объёма или линейных размеров тела с увеличением 1 К при постоянном давлении. Имеет размерность обратной температуры. Различают коэффициенты объёмного и линейного расширения.

Коэффициент объёмного теплового расширения

$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dT} \right)$, $\text{К}^{-1}(\text{°С}^{-1})$ — относительное изменение объёма тела, происходящее в результате изменения его температуры на 1 К при постоянном давлении.

2.4 Конвекция в случае, когда верхняя граница слоя свободна

Рассмотрим теперь движение жидкости в случае, когда верхняя граница слоя свободна. На свободной поверхности жидкости сумма всех сил, действующих на единичную площадку поверхности, должна обращаться в нуль. Кроме силы трения, определяемой тензором вязких напряжений, на свободной поверхности действуют капиллярные силы, вызванные неоднородностью коэффициента поверхностного натяжения. Условие равновесия сил может быть записано в виде:

$$\rho V \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=h} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.4)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, который будем считать линейно зависящим от температуры.

На нижней границе слоя будем по-прежнему требовать исчезновения скорости жидкости, т. е:

$$v = 0 \text{ при } x = -h \quad (2.5)$$

Используя (2.4), (2.5) вместе с (29), из (32) и (33) получим:

$$v = \frac{v}{h} \cdot \left[\frac{G}{24} \cdot (-4\xi^3 + 3\xi^2 + 6\xi - 1) + \frac{G_\sigma}{24} \cdot (3\xi^2 + 2\xi - 1) \right] \quad (2.6)$$

$$T = Ah \cdot \left[\frac{GP}{480} \cdot (4\xi^5 - 5\xi^4 - 20\xi^3 + 10\xi^2 + 16\xi - 5) + \frac{G_\sigma P}{288} \cdot (-3\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi - 3) - \frac{z}{h} \right] \quad (2.7)$$

здесь безразмерный параметр G_σ характеризует интенсивность капиллярного движения жидкости.

Отношение:

$$\frac{G_\sigma}{G} = \frac{3}{\rho g \beta h^2} \cdot \left(-\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \quad (2.8)$$

определяет, какая из двух сил — сила Архимеда или капиллярная сила — является доминирующей в конвекции.

На рисунке 5, приведенном ниже, представлено сравнение скорости конвекции в трех разных средах (вода, силиконовое масло, метиловый спирт), когда одна из границ слоя свободна.

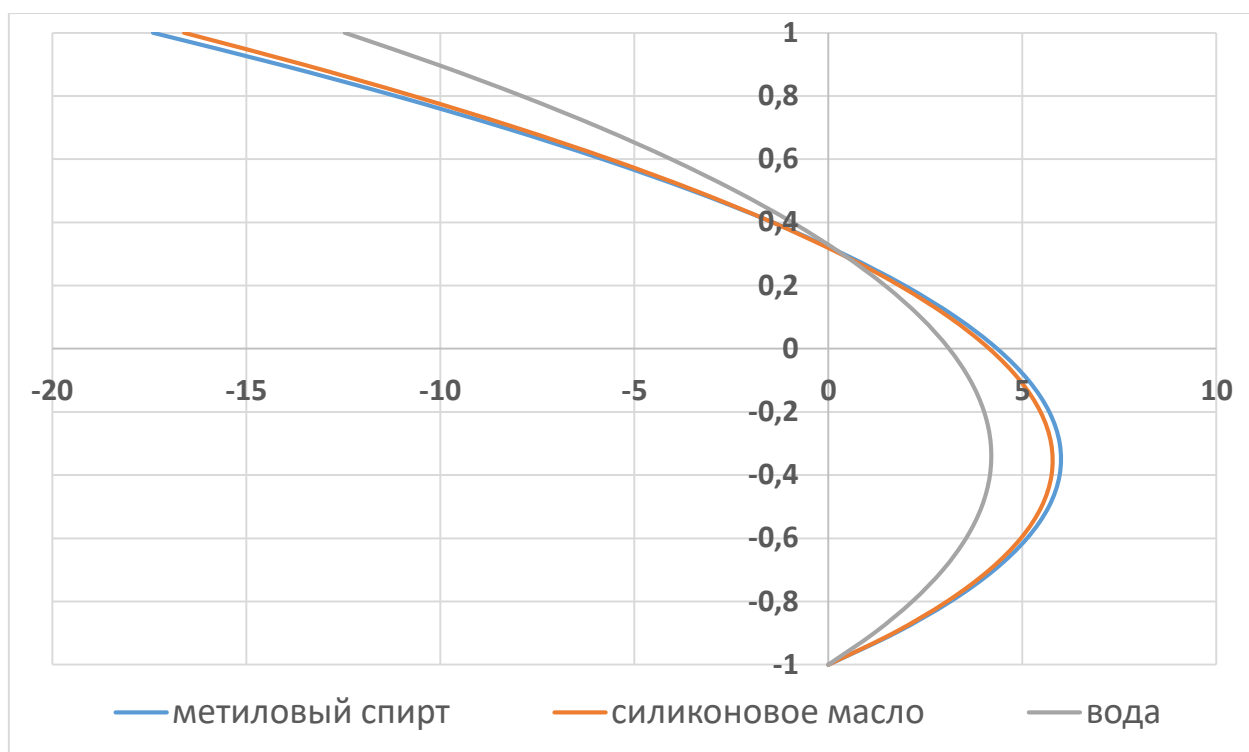


Рисунок 5 – Скорость конвекции в трех разных средах, в случае, когда одна из границ слоя свободна (ось абсцисс – скорость конвекции м/с; ось ординат – координата точки измерения)

Из графика видно, что среда, где происходит конвекция, влияет на скорость протекания данного процесса. Исходя из формулы 37, можно понять, что скорость процесса выше в метиловом спирте, так как тепловое расширение данной среды ниже в сравнение с другими средами, что приводит к увеличению числа Грасгофа. С увеличением данного показателя прямо пропорционально увеличивается и скорость протекания конвекции.

Выводы к главе

Проанализировав математическую модель процесса конвекции при разных граничных условиях, удалось найти точное решение уравнений свободной конвекции для плоского горизонтального слоя жидкости с постоянным градиентом температуры на границах слоя.

Результат показал зависимость скорости протекания свободной конвекции от среды, где происходит данный процесс. Так, в качестве примера, были приняты два вещества: водные пары, бензол. Расчет показал, в зависимости от происхождения и плотности жидкости, а также за счет разности температур границ. Различную скорость конвекции, а также диффузионные свойства жидкости от различных температур.

Глава 3. Численное моделирование тепловой газогидродинамики при нагревательных полях на нагретой подложке

Цель расчетов заключалась в определении контуров циркуляции и распределении температуры в слое различных по теплофизическим свойствам жидкостей.

3.1 Постановка задачи со свободной границей уравнения Обербека-Буссинеска и аналитическое решение

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + \vec{u} \nabla \vec{u} + \frac{1}{\zeta} \nabla p &= \nu \Delta \vec{u} + \vec{g} (1 - \beta T), \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \quad T_t + \vec{u} \cdot \nabla T = \lambda \Delta T \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\vec{u} = (u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t))$ – вектор скорости;

$p(x, y, z, t)$ – давление;

$T(x, y, z, t)$ – отклонение температуры от равновесной;

$\nu > 0, \lambda > 0$ – постоянная плотность и кинематическая вязкость;

$\vec{g} = (0, 0, -g)$, $g > 0$ – ускорения силы тяжести, см. Рис. 1.

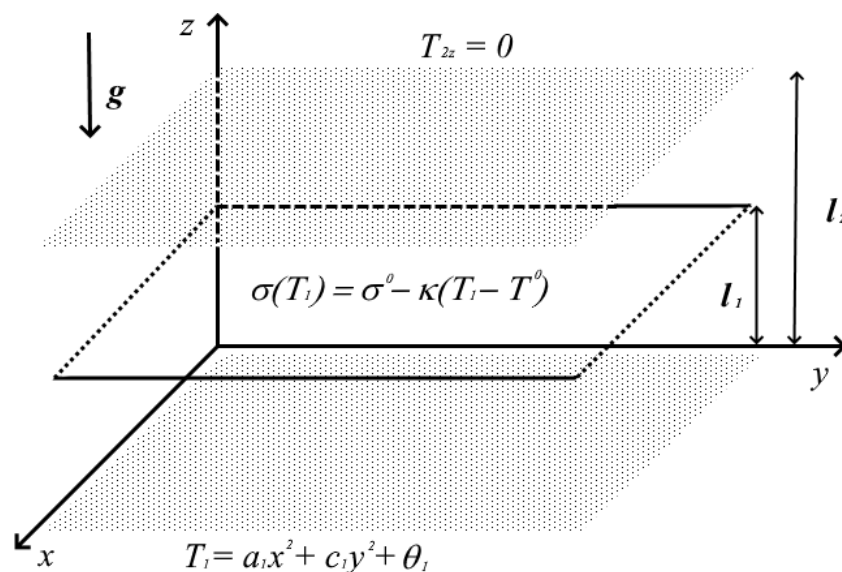


Рисунок – 6 Схема области течения в виде правильного параллелепипеда

Верхняя стенка $z = l$ является плоской свободной границей. На нижней стенке задано распределения температуры в виде:

$$T(x, y, z, t) = a_1(t)x^2 + b_1(t)y^2 + \theta_1(t). \quad (3.2)$$

С заданными $a_1(t), b_1(t), \theta_1(t)$.

На всех твердых стенках задано условие прилипания:

$$\vec{u} = 0 \quad (3.3)$$

На свободной границе задано динамическое условие:

$$P\vec{n}p_A\vec{n} = 2\sigma H\vec{h} + \nabla_{II}\sigma \quad (3.4)$$

$$P = -pI + 2\mu D(\vec{u}), \vec{n} = (0, 0, 1).$$

$$\sigma = \sigma_0 - \alpha T, \alpha > 0 = const$$

где $\mu = \rho\nu$ – динамическая вязкость.

Считается, что число Вебера $We = \sigma_0 l / \mu\nu$ верно, $We \gg 1$, так что проекция (4) на нормаль дает $H=0$, т.е. $z = l$. Другими словами, условие того, что свободная граница плоская, эквивалентно тому, что $We = \infty$ – очень большое поверхностное натяжение.

На боковых твердых стенках, кроме (3) считается, что $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$.

Условия теплового контакта при $z = l$:

$$K \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma(T - T_l) = 0. \quad (3.5)$$

Модельная задача о медленной конвекции в слое $(L, L_1 = \infty)$.

Ищем решение в виде:

$$\begin{aligned}
u_1 &= (f(z, t) + h(z, t))x, \\
u_2 &= (f(z, t) - h(z, t))y, \\
u_3 &= -2 \int_v^z f(z, t) dz; \\
T &= a(z, t)x^2 + b(z, t)y^2 + \theta(z, t).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подстановка в систему (1) вида решения (6) приводит к задаче:

$$\begin{aligned}
f_t + f^2 + h^2 - 2f_z \int_v^z f(z, t) dz &= \nu f_{zz} - \beta g \int_v^z [a(z, t) + b(z, t)] dz + n_1(t), \\
h_t + 2fh - 2h_z \int_v^z f(z, t) dz &= \nu f_{zz} - \beta g \int_v^z [a(z, t) - b(z, t)] dz + n_2(t),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$a_t + 2a(f + h) - 2a_z \int_v^z f(z, t) dz = \chi a_{zz},$$

$$b_t + 2b(f - h) - 2b_z \int_0^z f(z, t) dz = \chi b_{zz},$$

$$\theta_t + 2\theta_z \int_v^z f(z, t) dz - 2x(a + b) = x\theta_{zz},$$

$$z \in (0, l), \quad t \in [0, t_0]$$

Давление определяется квадратурой (3.8)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} p(x, y, z, t) &= \frac{x^2}{2} [g\beta \int_v^z a(z, t) dz + n_1(t) + n_2(t)] + \frac{y^2}{2} [g\beta \int_v^z b(z, t) dz + n_1(t) - n_2(t)] - \\
&- 2\nu f(z, t) - gz + g\beta \int_v^z \theta(z, t) dz + 2 \int_v^z (z - \xi) f_t(\xi, t) d\xi + 2 \left(\int_v^z f(z, t) dz \right)^2 + P_\nu(t)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Для касательных напряжений из (4), (6) имеем при $z = l$

$$\mu(f_z + h_z) = -2xa, \quad \mu(f_z - h_z) = -2xb, \quad \mu = \rho\nu. \tag{3.9}$$

Тепловое условие (3.9) дает:

$$ka_z + y(a - a_b) = 0, \quad kb_z + y(b - b_b) = 0 \quad (3.10)$$

Кроме того, кинематическое условие $u_3 = 0$ при $z = l$ дает равенство (3.11)

$$\int_0^l f(z, t) dz = 0 \quad (3.11)$$

Добавим к (3.11) условие

$$\int_0^l h(z, t) dz = 0 \quad (3.12)$$

Заданы начальные условия (3.13)

$$f(z, 0) = f_o(z), \quad h(z, 0) = h_o(z), \quad a(z, 0) = a_o(z), \quad b(z, 0) = b_o(z), \quad \theta(z, 0) = \theta_o(z). \quad (3.13)$$

и условия согласования (3.14)

$$\begin{aligned} \int_0^l f_{oz}(z) dz = 0, \quad \int_0^l h_{oz}(z) dz = 0, \quad ka_{oz} + y(a_o - a_{oA})|_{z=l} = 0, \quad kb_{oz} + y(b_o - b_{oA})|_{z=l} = 0, \\ k\theta_{oz} + y(\theta_o - \theta_{oA})|_{z=l} = 0. \\ \mu(f_{oz} + h_{oz}) = -2xa_o, \quad \mu(f_{oz} - h_{oz}) = -2xb_o. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Введем безразмерные параметры и функции (3.15)

$$z = \xi l, \quad t = \frac{l^2}{x} \tau, \quad f = \frac{l^2}{x} \bar{f}, \quad h = \frac{l^2}{x} \bar{h}, \quad n_d = \frac{x^2}{l^4} \bar{n}_d, \quad G = \frac{\beta g a^* l^5}{x^2}, \quad M = \frac{x a^* l^3}{\mu a},$$

$$p = \frac{v}{x}. \quad (3.15)$$

Задача (7), (9) – (14) переписывается так:

$$\begin{aligned} \bar{f}_\tau + \bar{f}^2 + \bar{h}^2 - 2\bar{f}_\xi \int_0^\xi \bar{f}(\xi, \tau) d\xi &= P\bar{f}_{\xi\xi} - G \int_0^\xi [\bar{a}(\xi, \tau) + \bar{c}(\xi, \tau)] d\xi + \bar{n}_1(\tau), \\ \bar{h}_\tau + 2\bar{f}\bar{h} - 2\bar{h}_\xi \int_0^\xi \bar{f}(\xi, \tau) d\xi &= P\bar{f}_{\xi\xi} - G \int_0^\xi [\bar{a}(\xi, \tau) - \bar{c}(\xi, \tau)] d\xi + \bar{n}_2(\tau). \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_\tau + 2\bar{a}(\bar{f} + \bar{h}) - 2\bar{a}_\xi \int_0^\xi \bar{f}(\xi, \tau) d\xi &= \bar{a}_{\xi\xi}, \\ \bar{b}_\tau + 2\bar{b}(\bar{f} - \bar{h}) - 2\bar{b}_\xi \int_0^\xi \bar{f}(\xi, \tau) d\xi &= \bar{b}_{\xi\xi}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\bar{\theta}_\tau - 2\bar{\theta}(\bar{f} - \bar{h}) - 2\bar{b}_\xi \int_0^\xi \bar{f}(\xi, \tau) d\xi = \bar{\theta}_{\xi\xi} + 2d^*(\bar{a} + \bar{b}) \quad (3.18)$$

$$\alpha^* = \frac{a^* l^2}{\theta^*}$$

В уравнениях (16) – (18) $\xi \in (0,1)$, $\tau \in [0, \tau_1]$

$$\alpha^* = \max_{\tau \in [0, \tau_1]} (|a(\tau)|, |b(\tau)|), \quad \theta^* = \max_{\tau \in [0, \tau_1]} |\theta(\tau)| \quad (3.19)$$

где величины $a(\tau)$, $b(\tau)$, $\theta(\tau)$ заданы, (задана температура на подложке $\xi = 0$).

Начальные условия (3.20), (3.21)

$$\bar{f}(\xi, 0) = \bar{f}_o(\xi),$$

$$\bar{h}(\xi, 0) = \bar{h}_o(\xi),$$

$$\bar{a}(\xi, 0) = \bar{a}_o(\xi),$$

$$\bar{b}(\xi, 0) = \bar{b}_o(\xi),$$

$$\bar{\theta}(\xi, o) = \bar{\theta}_o(\xi), \quad (3.20)$$

$$\xi \in [0, 1] \quad (3.21)$$

На твердой стенке (3.22)

$$\begin{aligned} \bar{f}(o, \tau) = 0, \quad \bar{h}(o, \tau) = 0, \quad \bar{a}(o, \tau) = \bar{a}(\tau), \quad \bar{b}(o, \tau) = \bar{b}(\tau), \quad \bar{\theta}(o, \xi) = \bar{\theta}(\xi), \\ \tau \in [o, \tau_1] \end{aligned} \quad (3.22)$$

На сводной границе (3.23)

$$\begin{aligned} \xi = 1 \\ \bar{a}_\xi + B(\bar{a} - \bar{a}_b) = 0, \\ \bar{b}_\xi + B(\bar{b} - \bar{b}_b) = 0, \\ \bar{\theta}_\xi + B(\bar{\theta} - \bar{\theta}_b) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$B = \frac{yl}{k} - \text{число Био}$$

$$\bar{f}_\xi + \bar{h}_\xi = -2M\bar{a}, \quad \bar{f} - \bar{h} = -2M\bar{b}. \quad (3.24)$$

Интегральные условия переопределения (3.25)

$$\int_0^1 \bar{f}(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad \int_0^1 \bar{h}(\xi, \tau) d\xi = 0. \quad (3.25)$$

Условия согласования гладкого решения (3.26)

$$\int_0^1 \overline{f_o}(\xi) d\xi = 0, \int_0^1 \overline{h_o}(\xi) d\xi = 0, \int_0^1 \overline{\theta_{o\xi}} + B(\overline{\theta_o} - \overline{\theta_{ob}}) \Big|_{\xi=1} = 0,$$

$$\overline{a_{o\xi}} + B(\overline{a_o} - \overline{a_{ob}}) \Big|_{\xi=1} = 0, \overline{b_{o\xi}} + B(\overline{b_o} - \overline{b_{ob}}) \Big|_{\xi=1} = 0. \quad (3.26)$$

$$B = \frac{yl}{k - \text{число Вуо}},$$

G – число Грасгофа,

M – число Марангони,

P – число Прандтл.

Заметим, что

$$G = PLM, \quad L = \frac{\rho\beta gl^2}{\chi}. \quad (3.27)$$

Для многих жидкостей как число Прандтля, так и число L – конечные.

Например, для силиконового масла $\rho = 956 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\beta = 9,5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{°C}}$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$,

$$\chi = 6.4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Н}}{\text{м} \cdot \text{°C}}, \quad l = 10^{-2} \text{ м}$$

$$\text{Имеем } \chi = 0.0675 \cdot 10^{-6}, \quad \nu = 2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow L \sim 13.2 \quad P \sim 29.4.$$

Для воды $\rho = 998 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\chi = 15.14 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \text{К}}$, $\beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/°C}$ получим $L = 2$.

$$\nu = 1,004 \cdot 10^{-6}, \quad \chi = 0,143 \cdot 10^{-6}, \quad p = 7$$

Для трансформаторного масла при 408 данные токовый $\rho = 868,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

$$\beta = 7 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{°C}}, \quad \chi = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{°C}}$$
 находим $L = 0,3$, $X = 0.121 \cdot 10^{-6}$

$$\nu = 18,49 \cdot 10^{-6}, \quad P \sim 152,8 \text{ ищем решение в виде}$$

$$\overline{F} = M F, \quad \overline{h} = M H, \quad \overline{n_i} = M N_i, \quad \tilde{a} = A, \quad (3.28)$$

Система (1.8) - (1.10) переписывается так

$$F_\tau + [F^2 + H^2 - 2F(\xi, \tau)d\xi] = PF_{\xi\xi} - PL \int_0^\xi [A(\xi, \tau) + C(\xi, \tau)d\xi + N_1(\tau),$$

$$H_\tau + M[2FH - 2H \int_0^\xi F(\xi, \tau)d\xi] = PH_{\xi\xi} - PL \int_0^\xi [A(\xi, \tau) - C(\xi, \tau)d\xi + N_2(\tau),$$

$$A_\tau + 2M[A(F + H) - A_\xi \int_0^\xi F(\xi, \tau)d\xi] = A_{\xi\xi},$$

$$C_\tau + 2M[C(F - H) - C_\xi \int_0^\xi F(\xi, \tau)d\xi] = C_{\xi\xi},$$

$$D_\tau + 2MD_\xi \int_0^\xi F(\xi, \tau)d\xi = D_{\xi\xi} + 2d^*(A + C).$$

Начальные уравнения $F(\xi, \tau) = F_0(\xi), H(\xi, \tau) = H_0(\xi), A(\xi, \tau) = A_0(\xi),$
 $C(\xi, \tau) = C_0(\xi), D(\xi, \tau) = D_0(\xi).$

На твердой стенке

$$\begin{aligned} F(0, \tau) = 0, \quad H(0, \tau) = 0, \quad A(0, \tau) = A_1(\tau), \\ C(0, \tau) = C_1(\tau), \quad D(0, \tau) = D_1(\tau). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Свободной границе $\xi = 1.$

$$\begin{aligned} F_\xi + H_\xi = -2A, \quad F_\xi - H_\xi = -2C, \\ A_\xi + B(A - A_b) = 0, \quad C_\xi + B(C - C_b) = 0, \\ D_\xi + B(D - D_0) = 0 \end{aligned}$$

Пусть $M \ll 1$ и $F^1, H^1, A^1, C^1, D^1, N_j^1$, тогда

$$A^1 a_1 \xi + \beta_1, C^1 a_2 \xi + \beta_2. \quad (3.30)$$

причем

$$F(0, \tau) = 0,$$

$$F(0, \tau) = 0, H(0, \tau) = 0, A(0, \tau) = A_1(\tau),$$

$$C(0, \tau) = C_1(\tau), D(0, \tau) = D_1(\tau).$$

$$\beta_1 = A_2, \beta_2 = C_2, \quad (3.31)$$

Постоянные α_j находится из. (30)

$$\alpha_1 = \frac{B(A_b - A_1^3)}{1+B}, \alpha_1 = \frac{B(C_B - C_1^3)}{1+B}. \quad (3.32)$$

Делаем из последовательно уравнения (27)

$$D^s = -d \left[(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\xi^3}{3} + (A_1^s + C_1^s) \xi^2 \right] + \alpha_3 \xi + D_1 \quad (3.33)$$

где учтено, что $D^s(0) = D_1^s$. Постоянная α_3 находить из (30).

$$a_1 = \frac{B[D_b - D_1^s d^* (\frac{a_1 + a_2}{3} + A_1^s + C_1^s)]}{1+B}. \quad (3.34)$$

$$\text{Из (33) } \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{B}{1+B} (A_6 + C_6 - A_1^s - C_1^s).$$

Первое уравнение система (27) таково

$$\begin{aligned}
 F_{\xi\xi}^s &= L \int_0^\xi [A^s(\xi) + C^s(\xi)]d\xi - \frac{1}{p} N_1^s = \\
 &= L \left[(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\xi^2}{2} + (A_1^s + C_1^s)\xi \right] - \frac{1}{p} N_1^s \\
 F_\xi^s &= L \left[(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\xi^3}{6} + (A_1^s + L_1^s) \frac{\xi^2}{2} \right] - \frac{1}{p} N_1^s \xi + \alpha_4, \\
 F^s &= L \left[(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\xi^4}{24} + (A_1^s C_1^s) \frac{\xi^3}{6} \right] - \frac{1}{2p} N_1^s \xi^2 + \alpha_4 \xi
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

С учетом равенство $F^s(0)=v$ постоянная N_1^s находится из равенство (3.36)

$$\int_0^1 F^s(\xi)d\xi = 0 \text{ и } N_1^s = PL \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{20} + \frac{A_1^s + C_1^s}{3} \right) + 3P\alpha_4 \tag{3.36}$$

С пока неизвестной α_4 . Уравнение для $H^s(\xi)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 H_{\xi\xi}^s &= L \int_0^\xi [(\alpha_1 - \alpha_2)\xi + A_1^s - C_1^s]d\xi - \frac{1}{p} N_2^s = L[(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\xi^2}{2} + (A_1^s - \\
 &- C_1^s)\xi] - \frac{1}{p} N_2^s, \text{ отсюда } (\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{B}{1+B} (A_b - C_b + C_1^s - A_1^s)
 \end{aligned}$$

$$H^s = L \left[(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\xi^4}{24} + (A_1^s - C_1^s) \frac{\xi^3}{6} \right] - \frac{1}{2p} N_2^s \xi^2 + \alpha_5 \xi. \tag{3.37}$$

$$\text{По сколку } \int_0^1 H^s(\xi)d\xi = 0, \text{ то } N_2^s = PL \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{20} + \frac{A_1^s - C_1^s}{3} \right) + 3P\alpha_5. \tag{3.38}$$

Для нахождения α_4 и α_5 надо обратиться к первым двум условиям (30):

$$F_{\xi}^3(1) + H_{\xi}^s(1) = -2A^s(v, F_{\xi}^s(1) - H_{\xi}^s(1) = -2C^s(1)$$

$$L\left(\frac{\alpha_1}{3} + A_1^s\right) - \frac{1}{p}(N_1^s + N_2^s)\alpha_4 + \alpha_5 = -2(\alpha_1 + A_1^s),$$

$$L\left(\frac{\alpha_2}{3} + A_2^s\right) - \frac{1}{p}(N_1^s N_2^s) + \alpha_4 - \alpha_5 = -2((\alpha_2 + A_2^s)).$$

Складывая и вычитая эти равенство находим

$$\alpha_4 = \frac{1}{p}N_1^s - (\alpha_1 + \alpha_2 + A_1^s + A_2^s) - L\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{3} + A_1^s + A_2^s\right) \quad (3.39)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{p}N_1^s - (\alpha_1 - \alpha_2 + A_2^s) - L\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3} + A_1^s + A_2^s\right)$$

12 стр

Подставляя в (3.39) равенство (3.36) и (3.38) получим (3.40)

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 + A_1^s + A_2^s) \frac{L}{6} \left[\frac{17}{20}(\alpha_1 - \alpha_2) + 2(A_1^s + C_1^s) \right]. \quad (3.40)$$

Таким образом функции $F^s(\xi), H^s(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$ и постоянные N_1^s, N_2^s , плотность определим. Частной случай 1. $A_1^s = C_1^s$ – радиальное распределение температуры на подложке) типа $\alpha_1 = \alpha_2 (A_B = C_B)$, значит

$$\alpha_5 = 0, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + A_1^s + \frac{L}{3} \left(\frac{17}{20} \alpha_1 + 4A_1^s \right)$$

$$N_2^s = 0, N_2^s = P \left[3\alpha_1 + 3A_1^s + L \left(\frac{17}{20} \alpha_1 + 4A_1^s + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{2}{3} A_1^s \right) \right] = P \left[\left(3 + \frac{9}{5} L \right) \alpha_1 + \left(3 + \frac{14}{3} L \right) A_1^s \right]$$

2. $A_1^s = -C_2^s$ – гиперболические распределения температуры на подложке

:X

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \alpha_4 = 0, N_1^s = 0, N_2^s = p[3\alpha_1 + 3A_1^s +$$

$$+L\left(\frac{17}{10}\alpha_1 + 4A_1^s\right) + L\left(\frac{\alpha_1}{10} + \frac{2}{3}A_1^s\right)] = P\left[\left(3 + \frac{9}{5}L_1\right)\alpha_1 + \left(3 + \frac{14}{3}L\right)A_1^s\right]$$

$$F^\xi(\xi) = L\left[\frac{B}{1+B}(A_B + C_B - A_1^s - C_1^s)\frac{\xi^4}{24} + (A_1^s - C_1^s)\frac{\xi^3}{6}\right] - \frac{1}{2P}N_1^s\xi^2 + \alpha_4\xi$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2(1+B)}[B(A_B + C_B) + A_1^s + C_1^s] + \frac{L}{120(1+B)}[17B(A_B + C_B) +$$

$$+(40 + 23B)(A_1^s + C_1^s)]$$

$$N_1^s = \frac{PL}{60(1+B)}[3B(A_B + C_B) + (17B + 20)(A_1^s + C_1^s)] + 3P\alpha_4$$

$$H^\xi(\xi) = L\left[\frac{B}{1+B}(A_B - C_B - C_1^s - A_1^s)\frac{\xi^4}{24}\right] + (A_1^s - C_1^s)\frac{\xi^3}{6} - \frac{1}{2p}N_2^s\xi^2 + \alpha_5\xi$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2(1+B)}[B(A_B - C_B) + A_1^s - A_2^s] + \frac{L}{120(1+B)}[17B(A_B - C_B) +$$

$$+(40 + 23B)(A_1^s - A_2^s)],$$

$$N_2^s = \frac{PL}{60(1+B)}[3B(A_B - C_B) + (17B + 20)(A_1^s - C_1^s)] + 3P\alpha_5$$

$$\text{Радиальное направления} \left\{ \begin{array}{l} A_B = C_B \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{B(A_B - A_1^s)}{1+B}, \alpha_5 = 0, N_2^s = 0 \\ H^s(\xi) = 0, F^s = L \left[\frac{B}{1+B} (A_B - A_1^s) \frac{\xi^4}{12} + \frac{A_1^s}{3} \xi^3 - \frac{1}{2P} N_1^s \xi^2 + \alpha_4 \xi \right] \\ \alpha_4 = \frac{1}{1+B} (B A_B + A_1^s) + \frac{L}{60 + (1+B)} [17B A_B + (40 + 2B) A_1^s] \\ N_1^s = \frac{PL}{30(1+B)} [3B A_B + (17B + 20) A_1^s] + 3P \alpha_4 \end{array} \right.$$

Пусть $\bar{x} = x/y, \bar{y} = Y/\ell$ тогда безразмерная скорости $\bar{u} = \frac{\ell}{x} u, \bar{\vartheta} = \frac{\ell}{\lambda} \vartheta,$

$\bar{\omega} = \frac{\ell}{x} \omega$ будут $\bar{u} = M(F + H)\bar{x}, \bar{\vartheta} = M(F - H)\bar{Y},$

$$\bar{\omega} = -2M \int_0^{\xi} F(\xi, \tau) d\xi$$

Температура $\bar{T} = \frac{T}{\theta} = d * (A(\xi, \tau)\bar{x}^2 + C(\xi, \tau)\bar{Y}^2) + D(\xi, \tau)d^* = a^* \ell^2 / \theta^*$

Давление $\bar{P} = \frac{\ell^2 p}{\rho \nu x} = \frac{\bar{x}^2}{2}$

$$\begin{aligned} & [PLM \int_0^{\xi} A(\xi, \tau) d\xi + PM(N_1(\tau))] - 2MF - 2\xi + \\ & + 2\xi \int_0^{\xi} D(\xi, \tau) 2 \frac{M}{P} \int_0^{\xi} (Z - \varepsilon) F_{\tau}(\xi, \tau) d\xi - \frac{2M^2}{P} \left(\int_0^{\xi} F(\xi, \tau)^2 + \bar{P}_0(t) \right). \end{aligned}$$

$z = \frac{\varphi e^3}{\nu x}$ – параметр микроконвекции\$

$\varepsilon = \beta \theta$ – параметр Буссенеска.

$$-\bar{P} \sim z\xi + \zeta \varepsilon \int_0^{\xi} D(\xi, \tau) d\xi \quad M \ll 1.$$

Для стационарного (3.41)

$$\bar{T}^s = d^* [A^s(\xi)\bar{x} + C^s(\xi)\bar{y}^2] + D^s(\xi) = d^* A^s \sim A^s d^* \sim C^s$$

$$\bar{T}^s(\bar{x}, \bar{y}, 0) = A_1^s \bar{x}^2 + C_1^s \bar{y}^2 + \mathcal{D}_1^s \quad (3.41)$$

Радиальное нагревание $A^s(\xi) = C^s(\xi)$

$$A_1^s = C_1^s \quad \bar{u}^s = MF^s(\xi)\bar{x}, \quad \bar{\vartheta}^s = MF^s$$

$$\bar{w}^s = -2M \int_v^s F^s(\xi) d\xi$$

$$\bar{T}^s(\xi) = A^s(\xi)(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + \mathcal{D}^s(\xi) \quad (3.42)$$

Все формулы имеются выше

$$T^s = A_1^s(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \mathcal{D}_1^s$$

$$u, v, w \quad u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$$

$$u - u_\lambda, v - v_\lambda, w - w_\lambda, \quad L, L_1 \gg 1$$

$$d^* = 1, \theta^* = a^* l^2$$

Физико-химический свойство:

В результате моделированных процессов с различными граничными условиями, а именно среда в которой происходит термокопеляный эффект и температуры граничных стенок. Ниже наглядно показаны результаты расчета.

Физический термодинамический свойство: Бесцветная жидкость со своеобразным резким запахом. Температура плавления = 5,5 °С, температура кипения = 80,1 °С, плотность = 0,879 г/см³, молярная масса = 78,11 г/моль. Подобно ненасыщенным углеводородам бензол горит сильно коптящим пламенем. С воздухом образует взрывоопасные смеси, хорошо смешивается с эфиром, бензином и другими органическими растворителями, с водой

образует азеотропную смесь с температурой кипения 69,25 °С (91 % бензола). Растворимость в воде 1,79 г/л (при 25 °С). Коэффициент термического расширения 0,00147

Физический термодинамический свойство: при 25°С воздух имеет плотность 1,185 кг/м³. При нагревании плотность воздуха снижается — воздух расширяется (его удельный объем увеличивается). С ростом температуры, например до 1200°С, достигается очень низкая плотность воздуха, равная 0,239 кг/м³, что в 5 раз меньше ее значения при комнатной температуре. В общем случае, снижение при плотности газов при нагреве позволяет проходить такому процессу, как естественная конвекция и применяется, например, в воздухоплавании.

Если сравнить плотность воздуха относительно плотности воды, то воздух легче на три порядка — при температуре 4°С плотность воды равна 1000 кг/м³, а плотность воздуха составляет 1,27 кг/м³. Необходимо также отметить значение плотности воздуха при нормальных условиях. Нормальными условиями для газов являются такие, при которых их температура равна 0°С, а давление равно нормальному атмосферному. Таким образом, согласно таблице, плотность воздуха при нормальных условиях (при НУ) равна 1,293 кг/м³. Коэффициент термического расширения 0,0053

Физический термодинамический свойство воды: Коэффициент термического расширения 0,00258

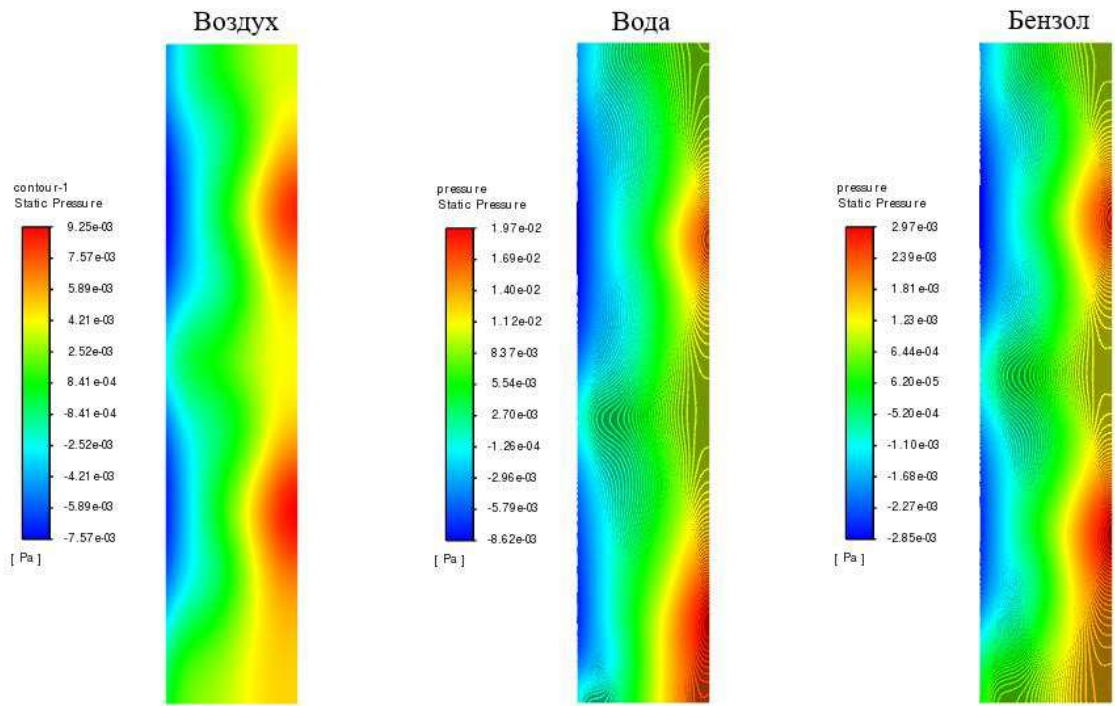


Рисунок 7 – поля давления при температуре 10 °С

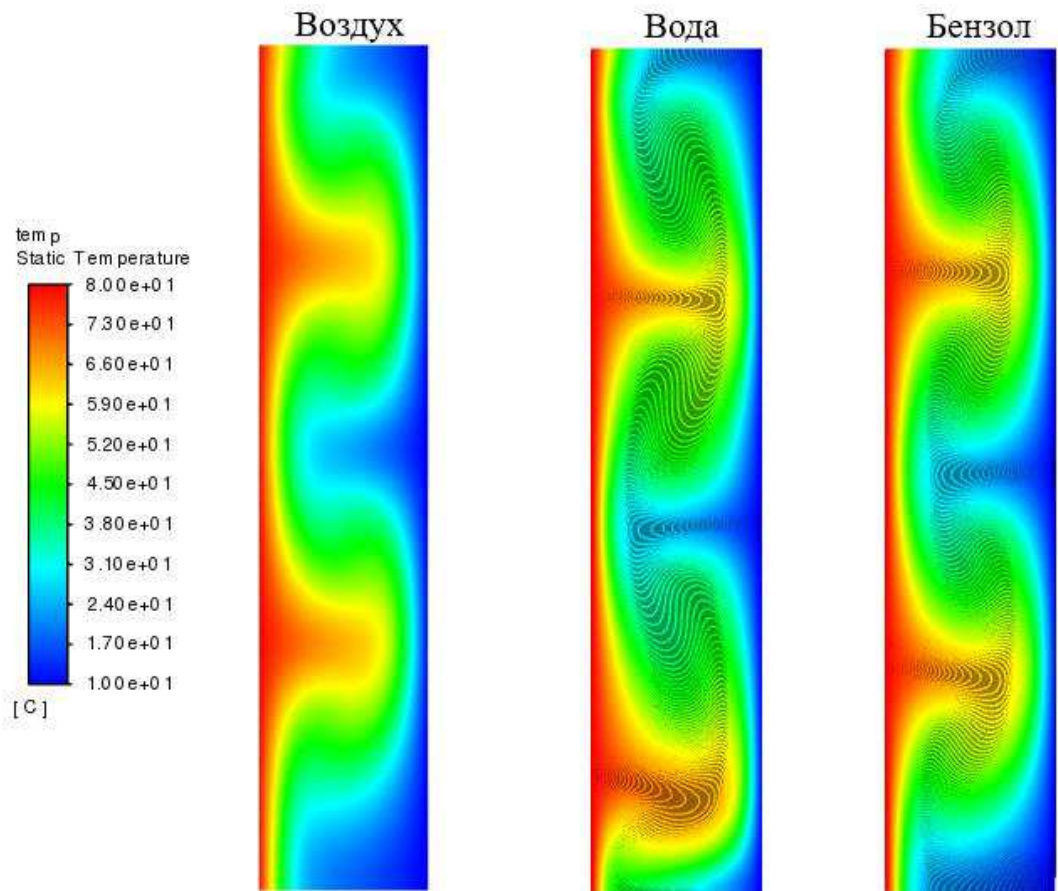


Рисунок 8- поля температуры при температуре 10 °С

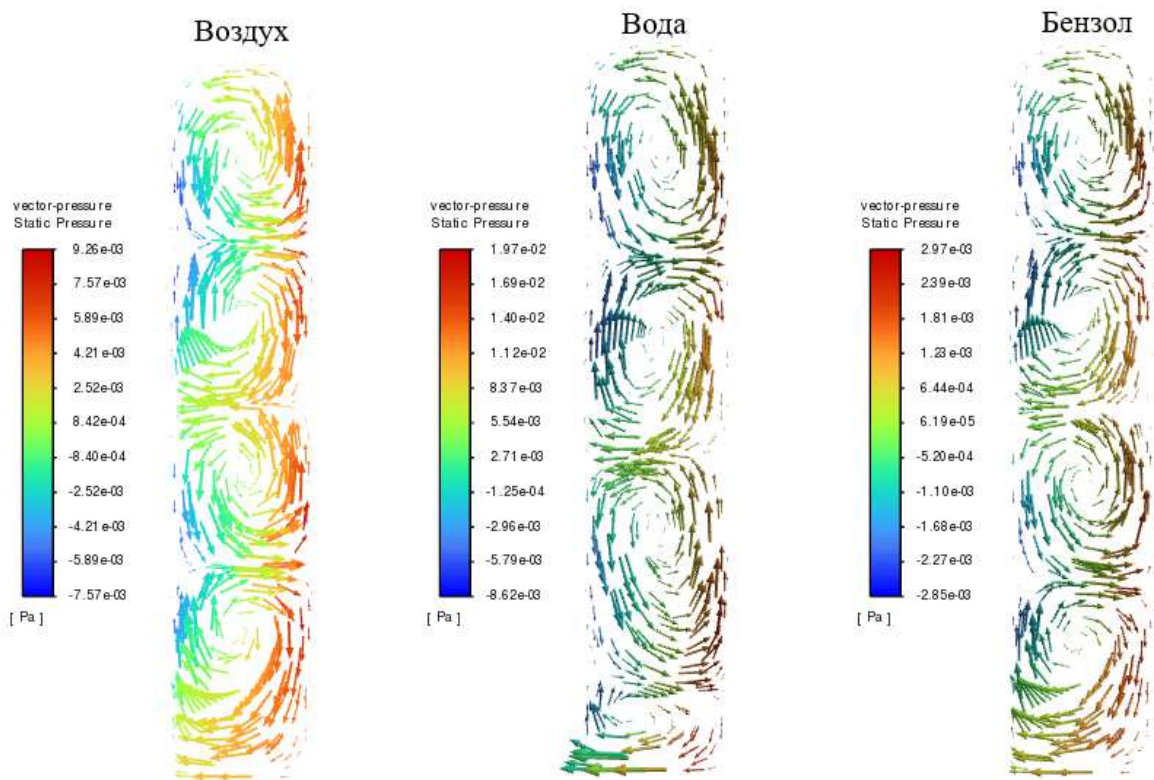


Рисунок 9 – векторное поля давление при температуре 10 °C

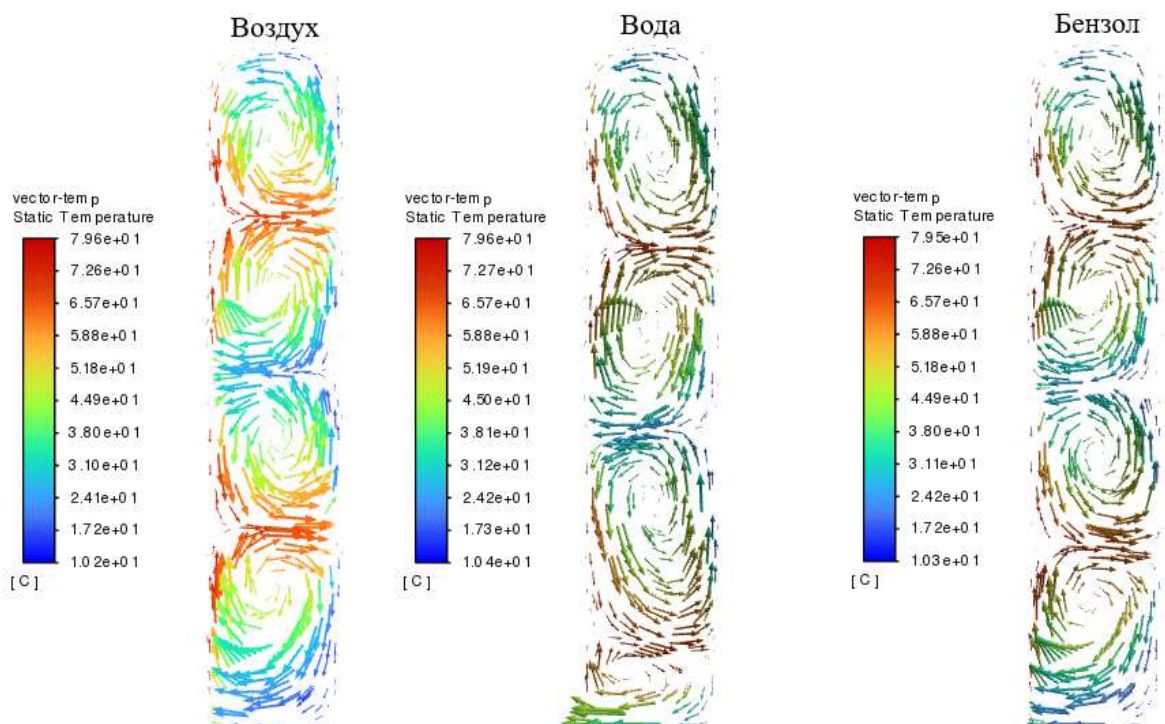


Рисунок 10 – векторное поля температуры при 10 °C

При температуре 10 °С за счет разницы в коэффициентах термического расширения, которые присущи различным средам, мы наблюдаем следующие признаки, а именно различным поля давлений и температур. На рисунке 1 можно увидеть в различных средах поля давлений в том или ином случае выражении более или менее явно, например поле давлений воздуха имеет более четкие границы по сравнению с полями давлений паров воды и бензола. Если рассматривать векторные поля давлений, то можно заметить следующие признаки: вихри, которые образуются в воздушной и бензольной среде по размерам, направлению имеют некоторые сходство, единственным различием является модульная величина значения давления. Данный признак говорит нам о том, что процесс теплопередачи в данных средах протекает более равномерно, по сравнению с водяными парами.

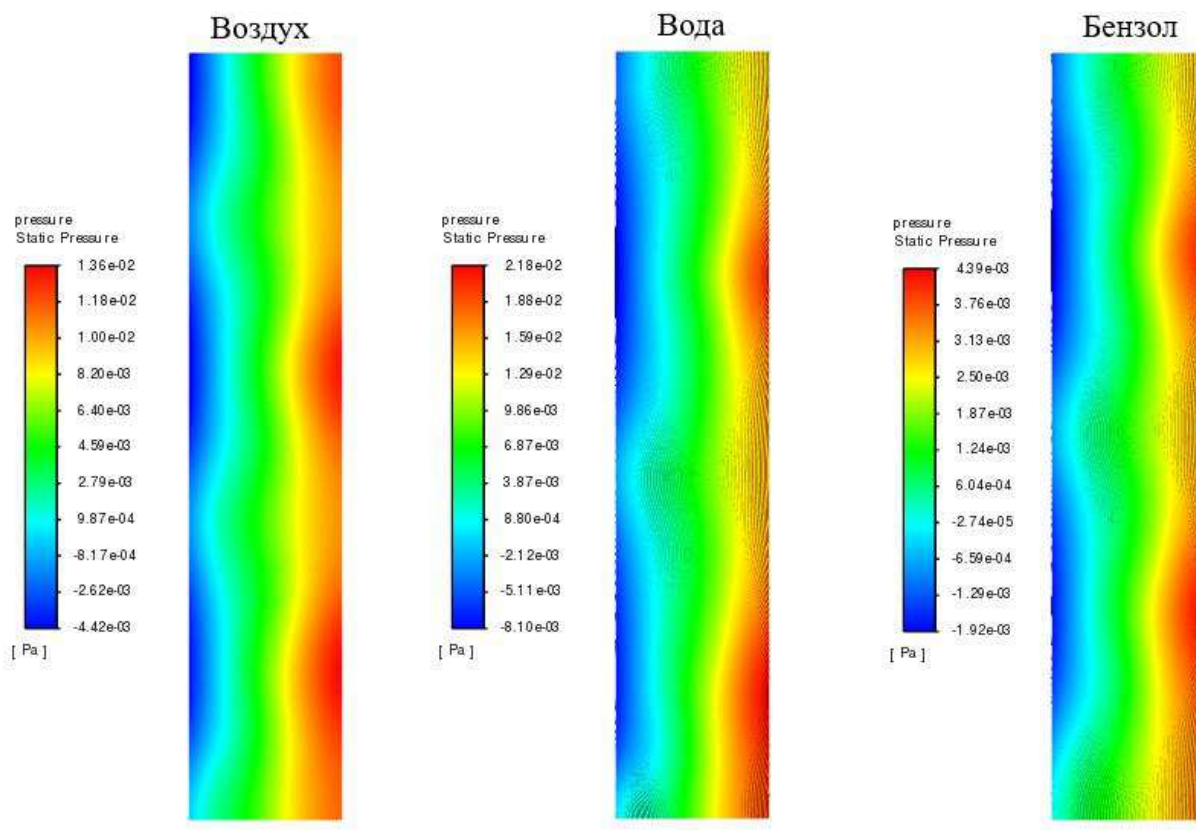


Рисунок 11 – поля давления температуры при 30 °С

При температуре 30°C так же за счет разницы в коэффициент термического расширения, по различным средам, мы наблюдаем, следующие признаки температурные давление в полях давление. На рисунке 5 можно увидеть, что поля давление меняется в граничных полях. На векторных полях давлений можно наблюдать, что вихри становится больше. Данный процесс показывает, что процесс теплопередачи протекает более, равномерно и тепловой поток уменьшается.

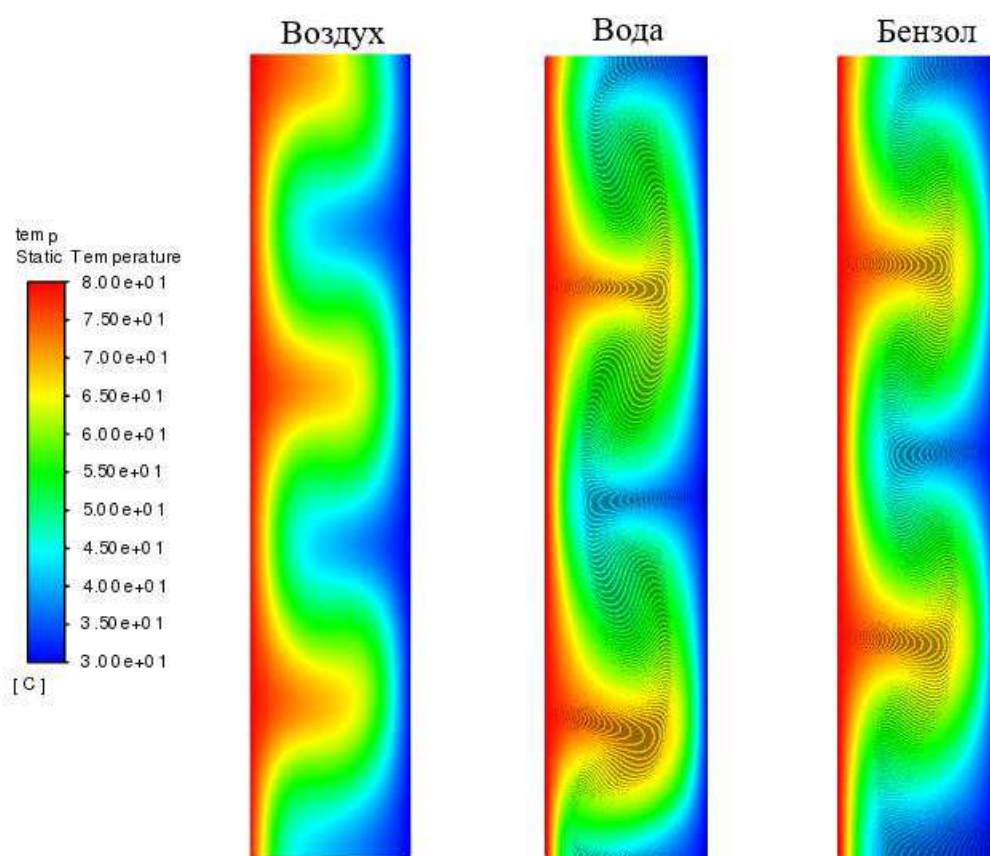


Рисунок 12 – поля температуры при 30 °С

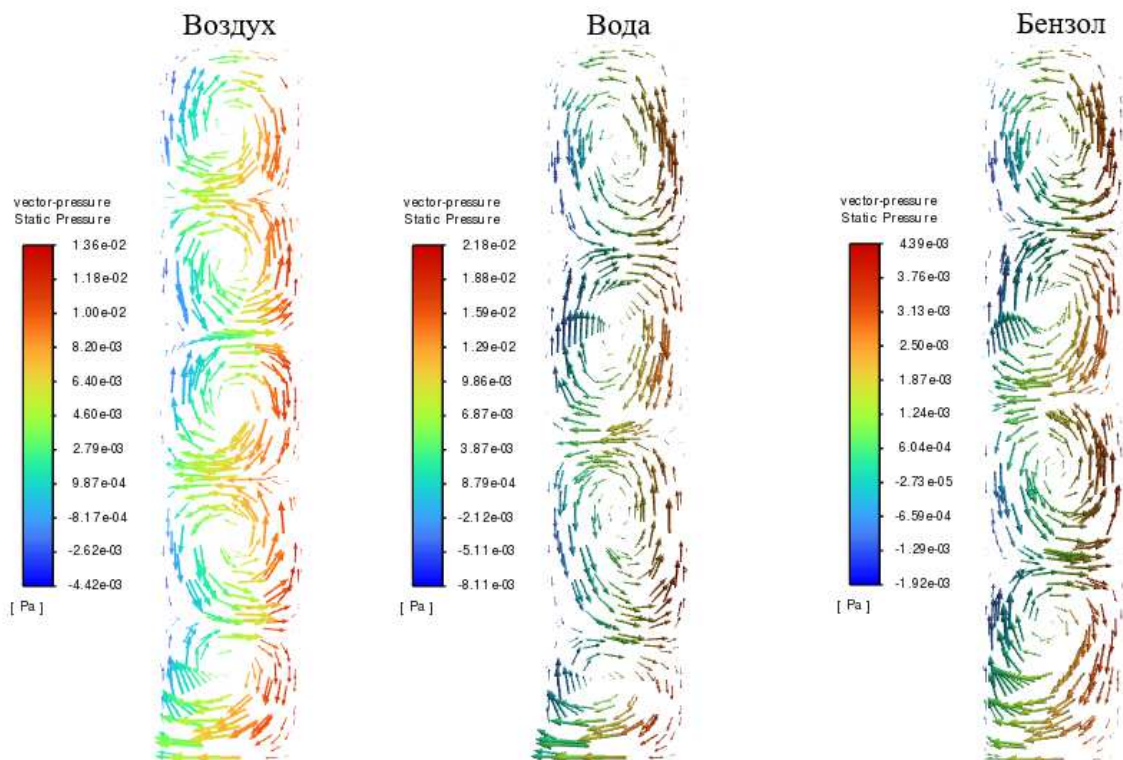


Рисунок 13 – векторное поля давление при температуре 30 °C

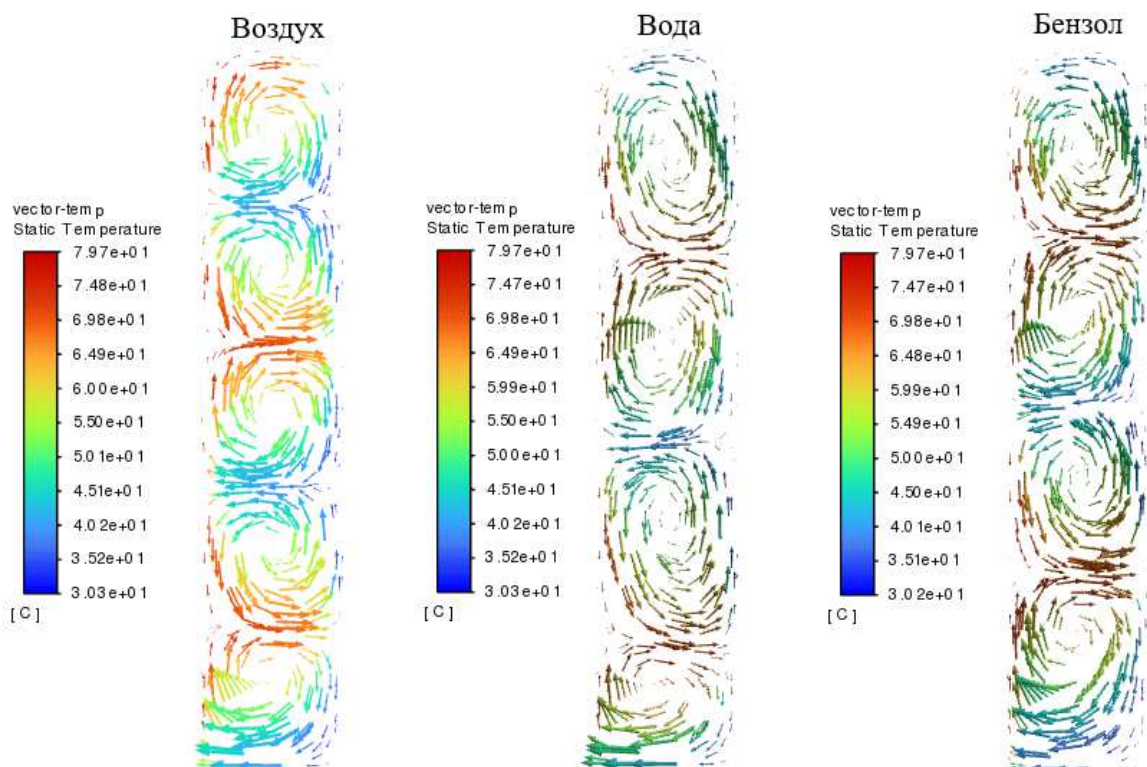


Рисунок 14 – векторное поля температуры при температуре 30 °C

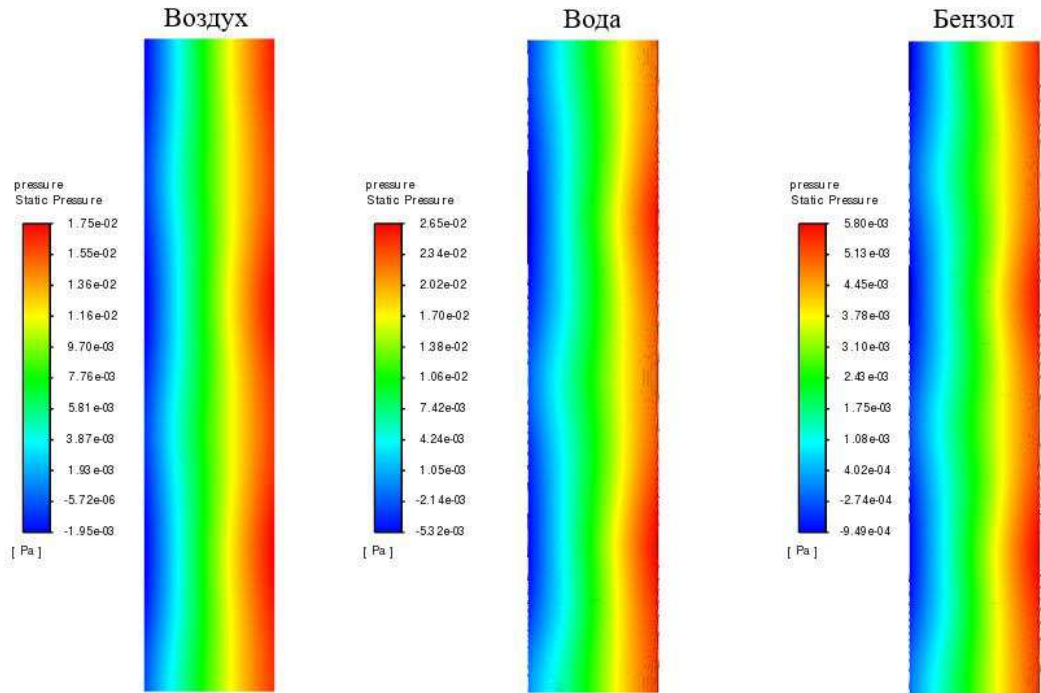


Рисунок 15 – поля давление при температуре 50 °С

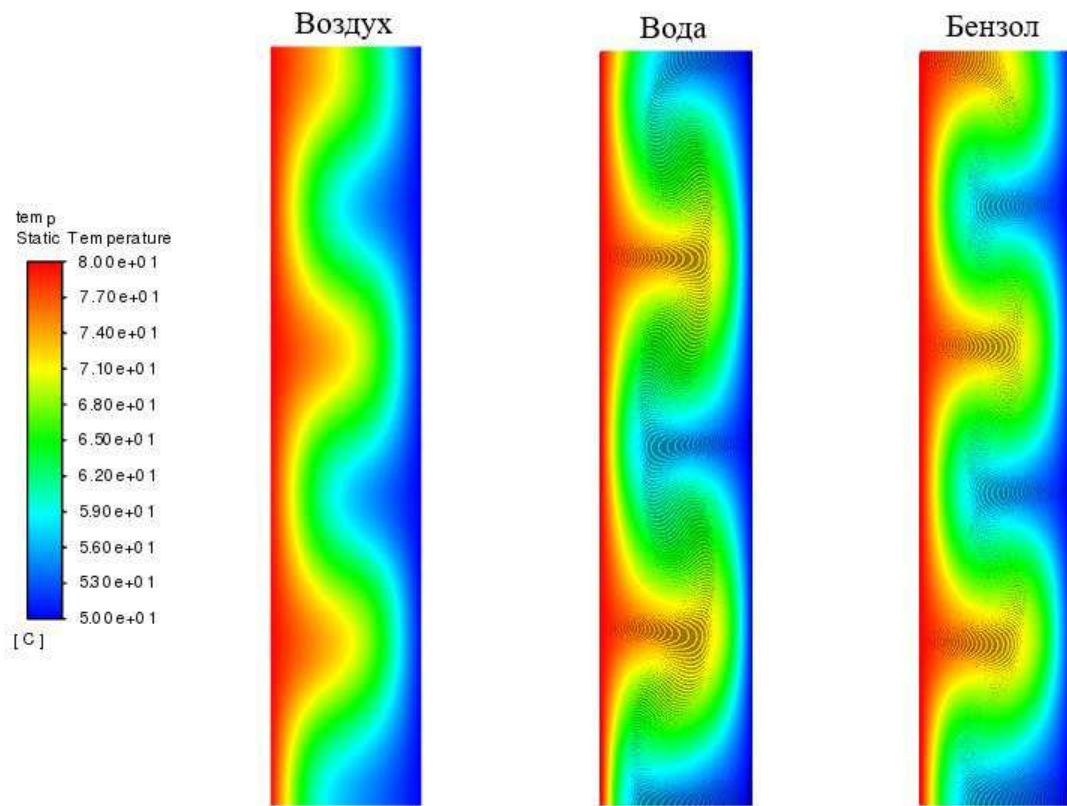


Рисунок 16 – поля температуры при температуре 50 °С

При температуре 50°C на рисунок 9 можно наблюдать при такой температуре можно наблюдать уменьшение процесс теплопередачи за счет менее интенсивного диффузионного процесса, который в свою очередь зависит от коэффициент термического расширения, а также при достижении температуры в 50 процесс теплопередачи становится не явным на граничных стенках нагретой подложке температурный напор стремится к нулю вследствие чего поле процесс теплообмена стремится к нулю.

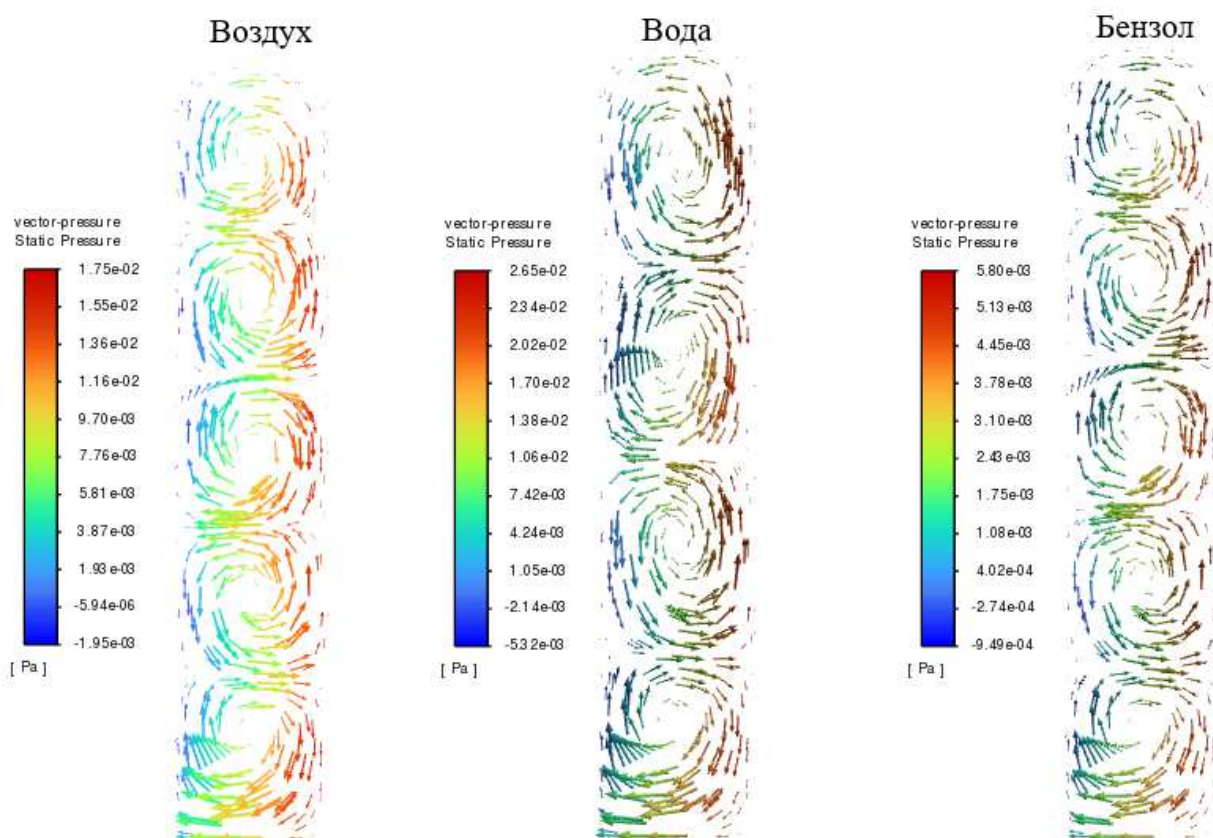


Рисунок 17 – векторное поля давление при температуре 50 °C

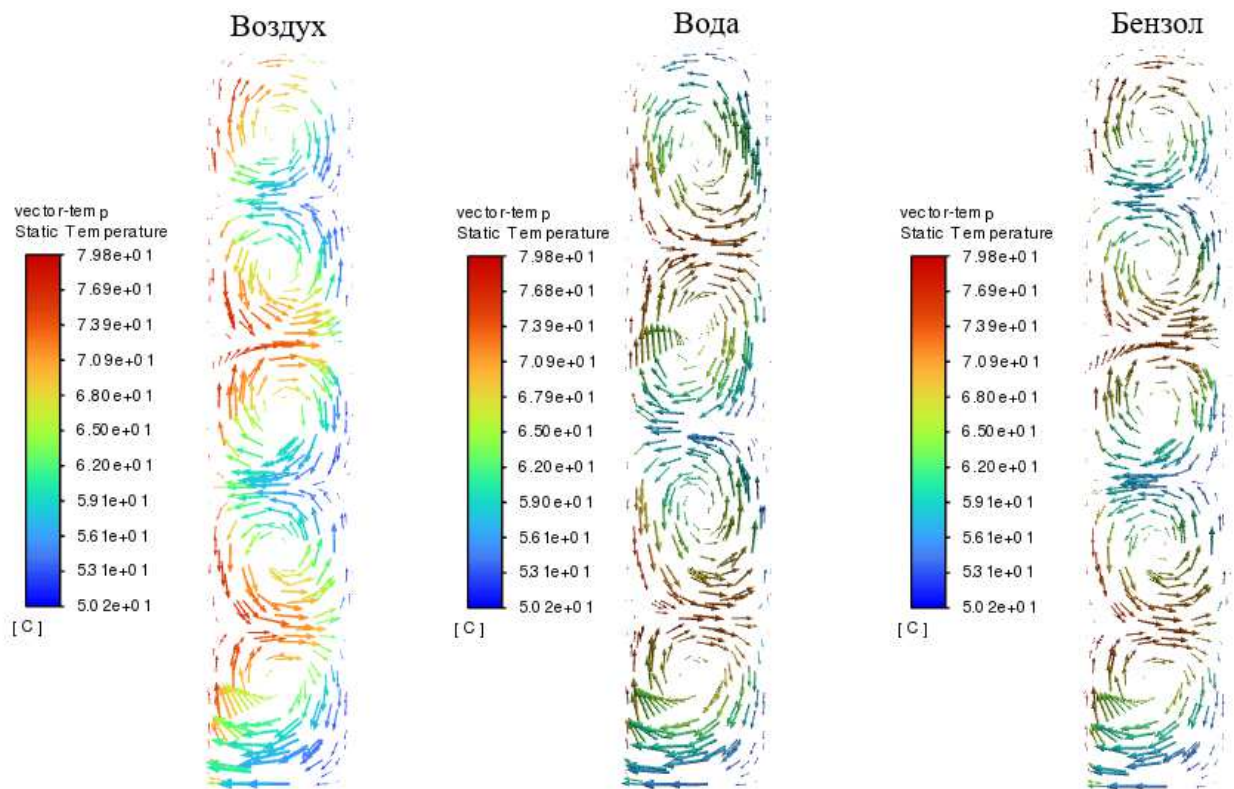


Рисунок 18 – векторное поля температуры при 50 °C

ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Необходимость решения задачи конвекции в слое жидкости возникает в различных практически важных задачах инженерной деятельности. В частности, решение данной задачи возникает при проектировании новых и совершенствовании существующих установок энергетики, металлургии, электроники и др.

В данной работе выполнено решение трехмерной осесимметричной задачи конвекции в слое жидкости с граничным условием третьего рода. Также выполнено сравнение одномерного и двумерного решения задачи конвекции в слое жидкости со свободной недеформируемой границей и граничным условием третьего рода, заданного на ней. В результате сравнения получены погрешности применения одномерного решения при различных степенях стеснения потока.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Sherwood, G., and Cray, S., 1992, Gas-Liquid Forced Turbulence Cooling II United States Patent N 5, 131, 233.
2. Kabov O.A., Kuznetsov V.V. and Legros J.-C, 2004, Pleat transfer and film dynamic in shear-driven liquid film cooling system of microelectronic equipment II Second Int. Conference on Microchannels and Minichannels, Ed. S.G. Kandlikar, June 17-19, 2004, Rochester, NY, ASME, New York-P. 687-694.
3. Buelbach J.P., Bankoff S.G. and Davis S.H., 1988, Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid films II J. Fluid Mech. - Vol. 195 - P. 463-494.
4. Ajaev V.S., 2004, Viscous flow of a volatile liquid on an inclined heated surface // J. of Colloid and Interface Science-Vol. 280 - P. 165-173.
5. Haut B. and Colinet P., 2005, Surface-tension-driven instabilities of a pure liquid layer evaporating into an inert gas II J. Colloid and Interface Science - Vol. 285, Issue 1-P. 296-305.
6. Aklershev S.P. and Alekseenko S.V., 1996, Interfacial instabilities in an annular two-phase flow II Russ. J. Eng. Thermophys. - Vol. 6, No 4 - P. 307-320.
7. Pearson J. R. A., 1958, On convection cells induced by surface tension II J. Fluid Mech.-Vol. 4, N 5.- P. 489-500.
8. Левич В.Г., 1959, Физико-химическая гидродинамика.- Изд. 2,- М.: Гос.изд. физ.-мат. литературы.
9. Leontiev A.I. and Kirdyashkin A.G., 1968, Experimental Study of Flow Patterns and Temperature Fields in Horizontal Free Convection Liquid Layers // Int. J. Heat Mass Transfer.-Vol. 11.-P. 1461-1466.
10. Бердников В.С., 1977, Термокапиллярная конвекция в горизонтальном слое жидкости //Теплофизические исследования: Сб. науч. тр. - Новосибирск,- С. 99-104.
11. Кирдяшкин А.Г., 1982, Структура тепловых гравитационных и термокапиллярных течений в горизонтальном слое жидкости в условиях

горизонтального градиента температуры // Препринт 79-82.- Новосибирск, Институт теплофизики.- 34 с.

12. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Везуб 1-И. А., 1987, Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье -Стокса. - М.: Наука.

13. Полежаев В.И., Белло М.С. Везуб Н.А. и др., 1991, Конвективные процессы в невесомости.- М.: Наука.- 240 с.

14. Ostrach S., Pradhan A., 1978, Surface-tension induced convection at reduced gravity II AIAA Journal.-Vol. 16.-P. 419-425.

15. Shevtsova V.M., 1990, Influence of a Nonlinear Temperature Dependent Surface Tension Force on a Fluid Motion II Proceedings of the Seventeenth International Symposium on Space Technology and Science.- Tokyo. P. 851-857.

16. Индейкина А.Е., Рязанцев Ю.С, Шевцова В.М., 1991, Нестационарная термокапиллярная конвекция в слое неравномерно нагретой жидкости. // Изв. АН СССР МЖГ.- № 3.- С. 17-25.

17. Альварес-Суарес В.А., Рязанцев Ю.С, 1986, О термокапиллярном движении, вызванном локальным нагревом жидкости импульсом ультрафиолетового излучения // Изв. АН СССР. МЖГ.- № 6.- С.165-168.

18. Растопов С.Ф., Суходольский А.Т., 1987, Применение лазерно-индуцированного эффекта Марангони для записи дифракционных решеток // Квантовая электроника.-Т. 14, № 8.- С. 1709-1710.

19. Ostrach S. and Kamotani Y., 1996, Surface Tension Driven Convection Experiment-2 (STDCE-2) II Proc. Third Microgravity Fluid Physics Conference, Cleveland, Ohio, July 13-15.- P. 331-337.

20. Hershey A.V., 1939, Ridges in a Liquid Surface Due to the Temperature Dependence of Surface Tension II Phys. Rev.- Vol. 56.,- P. 204.

21. Пшеничников А.Ф., Токменина Г.Л., 1983, Деформация свободной поверхности жидкости термокапиллярным движением // Известия АН СССР, МЖГ.-№>3.-С. 150-153.

22. Van Hook S.J., Schatz M.F., Swift J.B., McCormik W.D., and Swinney H.L., 1996, Long-wavelength Instability in Marangoni Convection II Proc. Third Microgravity Fluid Physics Conference, Cleveland, Ohio, July 13-15.- P. 265-270.
23. Scriven L.E., Sterling CV. The Marangoni effects //Nature. - 1960. - Vol. 187. -P. 186-188.
24. Линде Х., Шварц П., Вильке Х., 1984, Диссипативные структуры и нелинейная кинетика неустойчивости Марангони // Гидродинамика межфазных поверхностей.- М: Мир.- С. 79-117.
25. Hmkebein T.E. and Berg J.C., 1978, Surface Tension Effects In Heat Transfer Through Thin Liquid Films II Int. J. Heat Mass Transfer.- Vol.21.- P. 1241-1249.
26. Boeck T. and Thess A., 1997, Inertial Benard-Marangoni convection II J. Fluid Mech.-Vol. 350.-P. 149-175.
27. Bragard J. and Velarde M.G., 1998, Benard-Marangoni convection: planforms and related theoretical predictions II I Fluid Mech.- Vol. 368.- P. 165-194.
28. Демехин Е.А., Потапов О.Л. Неустойчивость Марангони в стекающих слоях вязкой жидкости. Изв. СО АН СССР, Серия техн. наук, 1989, Вып.6, с. 113-120.
29. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C., 2001, Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films II J. Fluid Mech. - Vol. 453. - P. 153-175.
30. Кабов О.А., 1999, Влияние капиллярных эффектов на пленочную конденсацию и теплообмен в пленках жидкости: Дис. докт. физ.-мат. наук.- Новосибирск: ИТ СО РАН.
31. Марчук И.В., 2000, Термографическое исследование пленки жидкости стекающей по поверхности с локальным источником тепла: Дис. канд. физ.-мат. наук.- Новосибирск: ИТ СО РАН.
32. Кабов О.А., Легро Ж.К., Марчук И.В., Шейд Б., 2001, Деформация свободной поверхности в движущемся локально нагреваемом тонком слое жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. - №3. - С. 200-208.

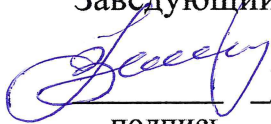
33. Kabov O.A., Marchuk I.V., Muzykantov A.V., Legros J.C., Istasse E., Dewandel J.L., 1999a, Regular Structures In Locally Heated Falling Liquid Films II 2nd Int. Symp. on Two-Phase Flow Modelling And Experimentation, 23-25 May, 1999, Pisa, Italy.-Vol. 2.-P. 1225-1233.
34. Frank A.M., Kabov O.A., 2006, Thermo capillary structure formation in a falling film: experiment and calculations II Physics of Fluids (submitted)
35. Frank A.M., 2003, 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // Europ. J. of Mechanics B/ Fluids - Vol. 22 - P. 445-471.
36. Chmnov E.A., Kabov O.A. Marchuk I.V. and Zaitsev D.V., 2002a, Heat transfer and breakdown of subcooled falling water film on a vertical middle size heater II Intern. J. Heat and Technology. - Vol. 20, No 1. - P. 69-78.
37. Гимбутис Г., 1988, Теплообмен при гравитационном течении пленки жидкости. - Вильнюс : Моксклас- 233 с.
38. Алексеенко СВ., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., 1979, Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. - Новосибирск, - 51 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд.-ние. Ин-т теплофизики; № 36 - 79).
39. Алексеенко СВ., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., 1992, Волновое течение пленок жидкости. - Новосибирск: ВО "Наука". Сибирская издательская фирма. - 256 с.
40. Бирих Р.В., 1966, О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ.-№ 3.-С. 69-72.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический
институт

Теплотехники и гидрогазодинамики
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой


Кулагин В.А.

подпись

« 23 » июня 2022 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

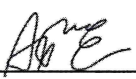
Исследование трехмерного конвективного течения слоя жидкости

на локально нагретой подложке

13.04.01 – Теплоэнергетика и теплотехника

13.04.01.01 – Энергетика теплотехнологий


Руководитель


подпись, дата

К.Т.Н.
ученая степень

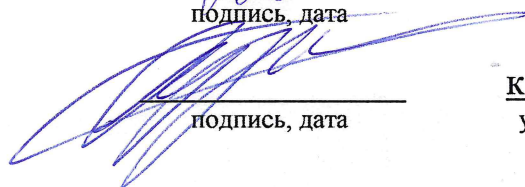
А.А. Пьяных
инициалы, фамилия

Выпускник


подпись, дата

Ш.К.Эшонов
инициалы, фамилия

Рецензент


подпись, дата

К.Т.Н., доцент
ученая степень

А.С. Кузнецов
инициалы, фамилия

Красноярск 2022