Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____/В.В. Шайдуров

« _____» _____ 2022 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ О ТЕННИСНЫХ МЯЧАХ

Руководитель доцент, кандидат физико-математических наук А.П. Ляпин

Выпускник С.А. Гимранов

Нормоконтролер Т.Н. Шипина

Красноярск 2022

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Алгоритмы вычисления производящих функций в задачах о теннисных мячах» содержит 24 страницы, 1 приложение, 8 рисунков, 5 таблиц и 16 использованных источников.

ЗАДАЧА О ТЕННИСНЫХ МЯЧАХ, РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ, ПРОИЗВОДЯЩИЕ ДЕРЕВЬЯ, ЗАДАЧА КОШИ, ЧИСЛА КАТАЛАНА.

Основная цель работы – исследовать решение задачи о теннисных мячах при различных входных данных.

В результате исследований была сформулирована задача Коши для задачи о теннисных мячах. Также была сформулирована и доказана теорема о производящей функции числа узлов производящего дерева.

Также был разработан и реализован алгоритм вычисления сечений производящей функции для задачи о теннисных мячах в системе компьютерной алгебры Maple.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

1 Общая постановка задачи 4

2 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами 4

3 Производящая функция 8

3.1 Производящая функция в одномерном случае 8

3.2 Производящая функция в многомерном случае 9

4 Задача о теннисных мячах 10

5 Производящие функции и производящие деревья 14

6 Задача Коши для задачи о числе теннисных мячей 17

6.1 Случай $\boldsymbol{s = 2}$ 18

6.2 Случай $\boldsymbol{s = 3}$ 19

6.3 Основной результат 20

Заключение 22

Список использованных источников 23

Приложение А 25

ВВЕДЕНИЕ

В комбинаторном анализе существует задача о теннисных мячах: для заданного набора помеченных метками мячей $A = \{a^1, a^2, \dots a^{n*s}\} \in \mathbb{Z}^n$, где n - число раундов, а s – число получаемых мячей в каждом раунде. Задача заключается в нахождении двух значений: числа $f(n)$ неэквивалентных конфигураций после n раундов и общей суммы $\sum(n)$ номеров tn выброшенных мячей (см. [11], [12]).

Одним из важнейших средств исследования свойств функции являются производящие функции. Они имеют следующий вид: $F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x) z^x$.

А. Муавр в 1722 году доказал, что в одномерном случае степенной ряд $F(z)$ представляет собой рациональную функцию тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами (см. [12]).

Цель бакалаврской работы – исследовать решение задачи о теннисных мячах при различных входных данных.

Данная задача приводится к задаче о подсчете s-арных деревьев. Для этого была сформулирована задача Коши для последовательностей выброшенных шаров.

Решение исходной задачи приводится в терминах производящих деревьев. Была сформулирована и доказана теорема о виде последовательности числа узлов производящего дерева.

В данной работе был разработан и реализован алгоритм вычисления сечений производящей функции для задачи о теннисных мячах в системе компьютерной алгебры Maple.

1 Общая постановка задачи

Пусть нам даны числа $t, s \in \mathbb{Z}_+$, где $t < s$ и набор помеченных метками мячей $A = \{a^1, a^2, \dots a^{n*s}\} \in \mathbb{Z}^n$. На каждом шаге мы получаем s новых, помеченных метками, мячей в порядке возрастания их меток и выбрасываем t мячей.

Требуется найти такие значения: число $f(n)$ неэквивалентных конфигураций после n раундов и общей суммы $\sum(n)$ номеров tn выброшенных мячей.

В данной работе мы будем рассматривать случай, в котором $t = 1$.

2 Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ (n раз). Рассмотрим конечное множество точек с целыми координатами $\Delta = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\} \in \mathbb{Z}^n$.

Многомерным разностным уравнением назовем уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha f(x + \alpha) = g(x), \tag{2.1}$$

где $f: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ — искомая функция, $g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ — некоторая известная функция, $c_\alpha \in \mathbb{C}$ — некоторые константы.

Найти решение уравнения (2.1) означает найти такую функцию $f(x)$, которая при подстановке в (2.1) давала бы верное равенство.

В комбинаторном анализе также рассматривают **задачу Коши**: найти такую функцию $f(x)$, которая бы удовлетворяла бы соотношению (2.1) и совпадала с некоторой функцией $\varphi: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ на множестве $X_0 \subset \mathbb{Z}^n$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_0. \tag{2.2}$$

Самым известным примером задачи Коши в случае $n = 1$ являются числа Фибоначчи, которые задаются соотношением:

$$\begin{cases} f(x) - f(x-1) - f(x-2) = 0, x \geq 2, \\ f(0) = 1, f(1) = 1. \end{cases}$$

Известно, что данная задача Коши имеет решение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

(формула Бине). Аналогичные формулы существуют и для других одномерных линейных разностных последовательностей.

В случае больших размерностей, разностные уравнения появляются в широком классе задач комбинаторного анализа: числа Блума (см. [6]), баллотировочная задача (см. [2]), задача о расстановке n-королей на шахматной доске (см. [3]), задача о числе решеточных путей (путей Дика, Моцкина, Шредера, обобщенных путей) (см. [5]).

Пример 2.1. Пути Дика задаются шагами $\alpha^1 = \binom{1}{1}$ и $\alpha^2 = \binom{1}{-1}$. Наша задача – подсчитать $f(x_1, x_2)$ – число способов попасть в точку с координатами $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{Z}^n$ из начала координат (см. [5]).

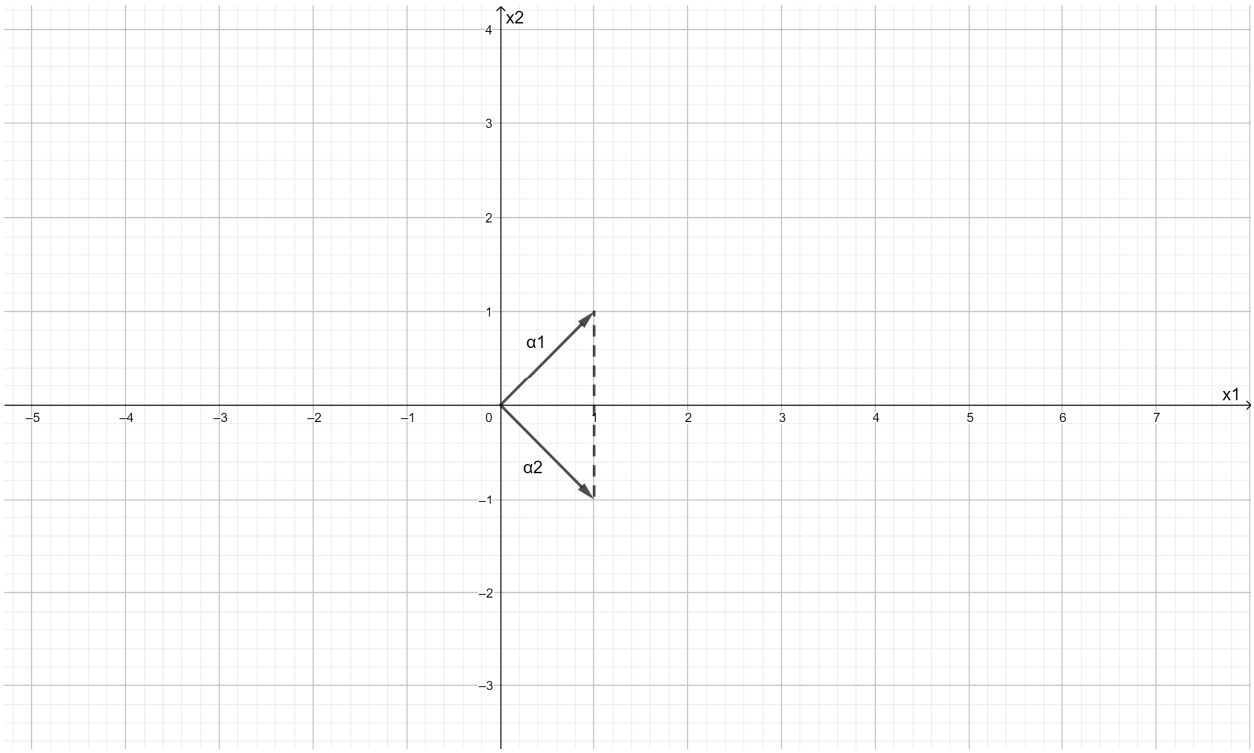

Рисунок 2.1 – Шаги путей Дика

Всего путей по сетке из точки $\binom{0}{0}$ в точку $\binom{x_1}{x_2}$ (для любых $x_1 \geq x_2$) равно $\binom{x_1+x_2}{x_1}$ и из них не подходят пути, касающиеся прямой $x_2 = x_1 + 1$. Таким образом, число путей Дика равно количеству всех путей из точки $\binom{0}{0}$ в точку $\binom{x_2-1}{x_1+1}$. Получаем следующий ответ:

$$\binom{x_1+x_2}{x_1} - \binom{x_1+x_2}{x_1+1} = \frac{(x_1+x_2)!}{(x_1+1)!x_2!}(x_1 - x_2 + 1).$$

Например, $f(5,3) = \frac{(5+3)!}{(5+1)!3!}(5 - 3 + 1) = 28.$

Известно, что пути Дика удовлетворяют уравнению:

$$f(x_1, x_2) - f(x_1 - 1, x_2 - 1) - f(x_1 - 1, x_2 + 1) = 0,$$

начальные данные имеют вид:

$$f(x_1, x_2) = 1,$$

на «лучах» $x_1 = x_2$ и $x_1 = -x_2$:

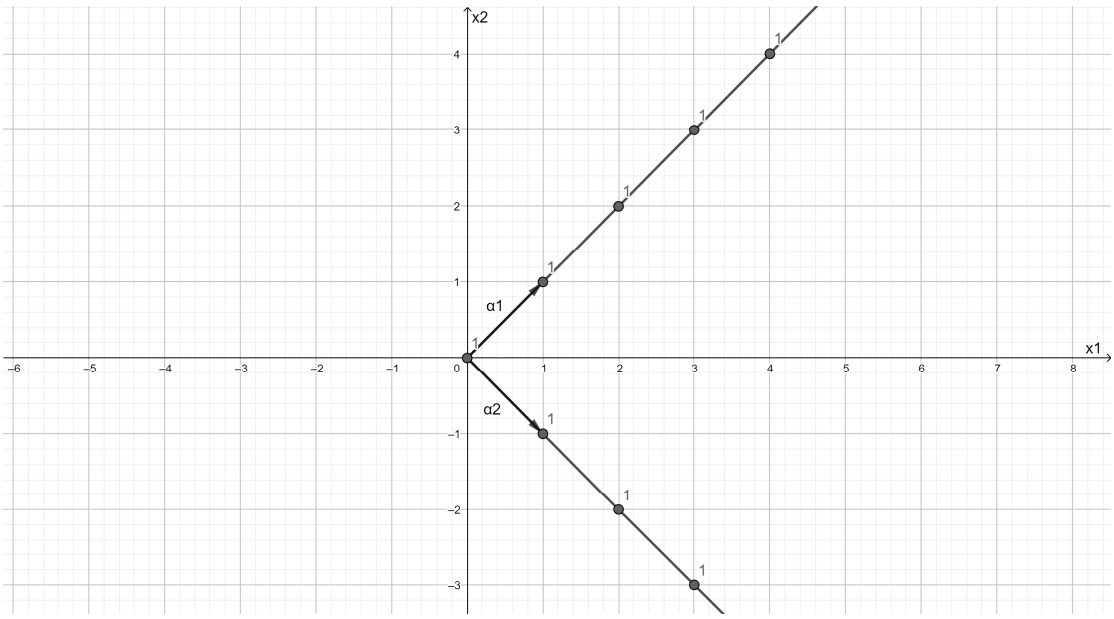

Рисунок 2.2 – Начальные данные для путей Дика.

Пример 2.2. Блум изучал последовательность длины x из нулей и единиц, начинающуюся с нуля и имеющих y изолированных битов. Число таких последовательностей обозначим $r(x, y)$ (см. [6]).

Для $x = 5$ имеем:

$r(5, 0) = 3$, так как $00000, 00011, 00111$;
$r(5, 1) = 5$, так как $00001, 00100, 00110, 01100, 01111$;
$r(5, 2) = 3$, так как $00010, 01000, 01110$;
$r(5, 3) = 4$, так как $00101, 01001, 01011, 01101$;
$r(5,4) = 0$;
$r(5, 5) = 1$, так как 01010.

Известно, что числа Блума удовлетворяют уравнению:

$$r(x, y) - r(x - 1, y) - r(x - 1, y - 1) - r(x - 2, y) + r(x - 2, y - 1) = 0$$

с начальными данными:

$r(0, 0) = 1, r(1, 0) = 0,$
$r(x, 0) = r(x - 1, 0) + r(x - 2, 0), x \geq 2,$

$r(1,1) = 1, r(0,y) = 0, y \geq 1,$

$r(1,y) = 0, y \geq 2.$

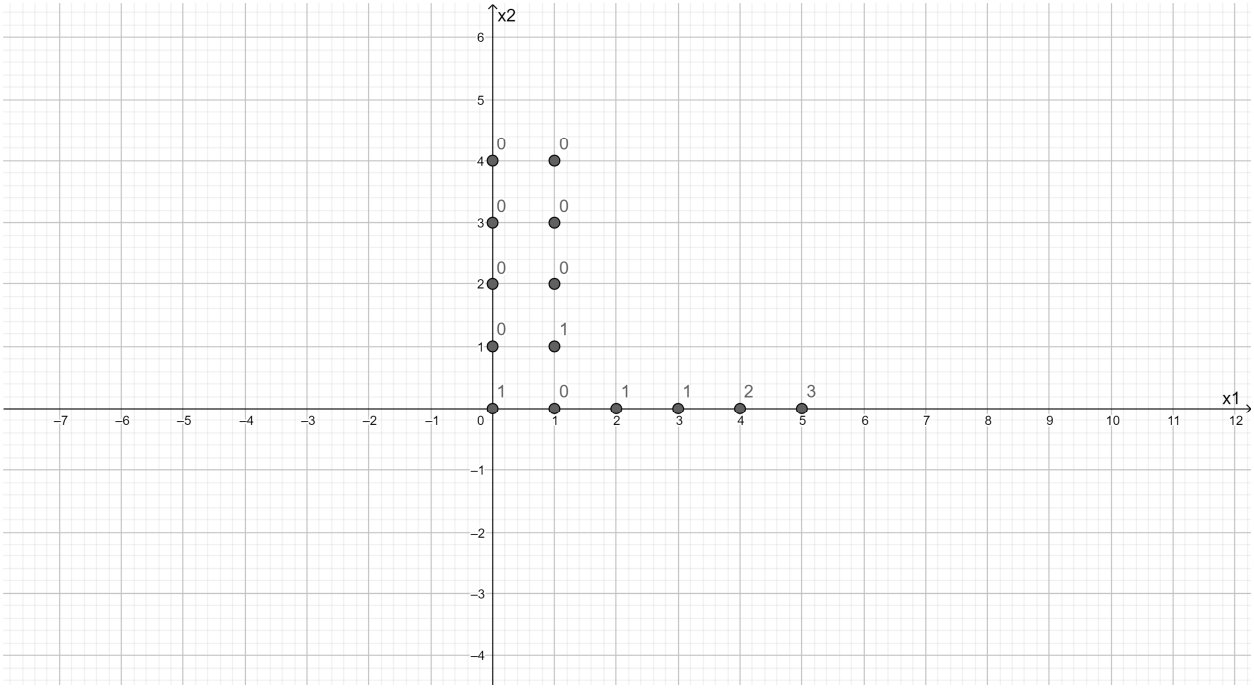

Рисунок 2.3 – Начальные данные Блума для строк.

3 Производящая функция

3.1 Производящая функция в одномерном случае

В одномерном случае степенной ряд $F(z)$ представляет собой рациональную функцию тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами. Этот факт был доказан А. Муавром в 1722 году.

Определение 3.1.1. Производящая функция функции $f(x)$целочисленных аргументов $x \in \mathbb{Z}_+^n$ определяется следующим образом:

$$F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{f(x)}{z^{x+I}}, \text{ где } I = (1, 1, \dots, 1).$$

Пример 3.1.1. Найти производящую функцию для бесконечной последовательности $f(x) = 1, x \geq 0$.

Решение. Рассмотрим сумму

$$\sum_{x=0}^{\infty} 1 * z^x.$$

Заметим, что данный ряд сходится, если $|z| < 1$. Сумма его будет равна $\frac{1}{1-z}$. Таким образом, для последовательности $f(x) = 1$ производящей функцией будет являться функция $F(z) = \frac{1}{1-z}$.

3.2 Производящая функция в многомерном случае

Пусть $A = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^n_{\geq}$, и конус

$$K = \{\alpha^1 x_1 + \cdots \alpha^N x_{N,} \, x_1, \dots, x_N \geq 0\},$$

заостренный и натянутый на вектора.

Введем понятие «сечение производящей функции».

$$F^k('z) = \sum_{'z \in \mathbb{Z}^{n-1}_{>}} f(k,' x)' z'^x,$$

— «сечение» производящей функции для решетчатых путей с шагами из A, где $'z = (z_2, z_3, \dots, z_n)$, $'x = (x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Теорема 3.2.1. (В.Ю. Гришунов и А.П. Ляпин). Сечение $\mathrm{F^k('z)}$ производящей функции $\mathrm{F(z)}$ для решетчатых путей с шагами из A удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$c_k('z)F^{n-k}('z) + c_{k-1}('z)F^{n-k+1}('z) + \cdots + c_1('z)F^{n-1}('z) + \\ + c_0('z)F^n('z) = 0,$$

с полиномиальными коэффициентами

$$c_l('z) = \sum_{a \in A: a_1^i = l} z_2^{a_2^i} \dots z_n^{a_n^i}.$$

Замечание. Если положить $F^0('z) = \frac{1}{c_0('z)}$ и $F^n('z) = 0$ для $n < 0$, то любое $F^n('z)$ может быть найдено при помощи рекуррентного соотношения. Например,

$$F^0('z) = \frac{1}{c_0('z)},$$

$$F^1('z) = -\frac{c_1('z)}{c_0^2('z)},$$

$$F^2('z) = -\frac{c_2('z)}{c_0^2('z)} + \frac{c_1^2('z)}{c_0^3('z)},$$

$$F^3('z) = -\frac{c_3('z) - c_1('z)c_2('z)}{c_0^2('z)} + \frac{c_1('z)c_2('z)}{c_0^3('z)} - \frac{c_1^3('z)}{c_0^4('z)},$$

$$\dots$$

$$F^k('z) = -\frac{1}{c_0('z)}\left(\sum_{n=0}^{k-1} c'_{k-n} z F^n\right).$$

Таким образом, сечения $F^n('z)$ производящей функции F^n для числа решетчатых путей – рациональные функции.

4 Задача о теннисных мячах

Приведем формулировку задачи о теннисных мячах.

Пусть $1 \leq t \leq s$ – два целых числа. Игрок начинает игру с нулевым количеством теннисных мячей в корзине. На каждом раунде он получает s новых, помеченных метками мячей, которые кладет в корзину. При этом он использует t мячей из этой же корзины. Так повторяется n раундов. Все мячи пронумерованы от 1 до sn и подаются игроку в порядке возрастания номеров. Номера выкинутых мячей образуют некоторую последовательность. Две таких последовательности назовем эквивалентными, если они совпадают после сортировки по возрастанию.

Задача о теннисных мячах заключается в нахождении двух значений: числа $f(n)$ неэквивалентных конфигураций после n раундов и общей суммы $\sum(n)$ номеров tn выброшенных мячей.

Таблица 4.1 – Два сценария для случая $(s = 2, t = 1)$

Раунд	Полученные мячи	Мячи в корзине	Выброшенные мячи
$n = 1$	1 и 2	1 и 2	2
$n = 2$	3 и 4	$1, 3$ и 4	3
$n = 3$	5 и 6	$1, 4, 5$ и 6	6
$n = 4$	7 и 8	$1, 4, 5, 7, 8$	7
			$\sum(n) = 18$

Раунд	Полученные мячи	Мячи в корзине	Выброшенные мячи
$n = 1$	1 и 2	1 и 2	1
$n = 2$	3 и 4	2, 3 и 4	4
$n = 3$	5 и 6	2, 3, 5 и 6	3
$n = 4$	7 и 8	2, 5, 6, 7 и 8	2
			$\sum(n) = 10$

Таблица 4.2 – Сценарий для случая $(s = 4, t = 2)$

Раунд	Полученные мячи	Мячи в корзине	Выброшенные мячи
$n = 1$	$1, 2, 3, 4$	$1, 2, 3, 4$	$2, 3$
$n = 2$	$5, 6, 7, 8$	$1, 4, 5, 6, 7, 8$	$1, 7$
$n = 3$	$9, 10, 11, 12$	$4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12$	$10, 12$
$n = 4$	$13, 14, 15, 16$	$4, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16$	$5, 16$
			$\sum(n) = 56$

Определение 4.1. Производящее дерево – это корневое помеченное дерево со свойством, что если v_1 и v_2 являются любыми двумя узлами с одинаковой меткой, то для каждой метки l, v_1 и v_2 имеется точно такое же количество элементов с меткой l. Для описания производящего дерева мы должны указать:

1. метку корня;
2. набор правил, объясняющих, как из метки родительского элемента получить метки всех его дочерних элементов.

В случае $t = 1$ удобно использовать производящие деревья. Для переформулировки проблемы корень дерева обозначим единицей. Он связан с началом игры и имеет s потомков (от 1 до s). Каждый пусть в таком дереве связан со сценарием, когда каждый узел на уровне n обозначает номер мяча, выброшенного в раунде n.

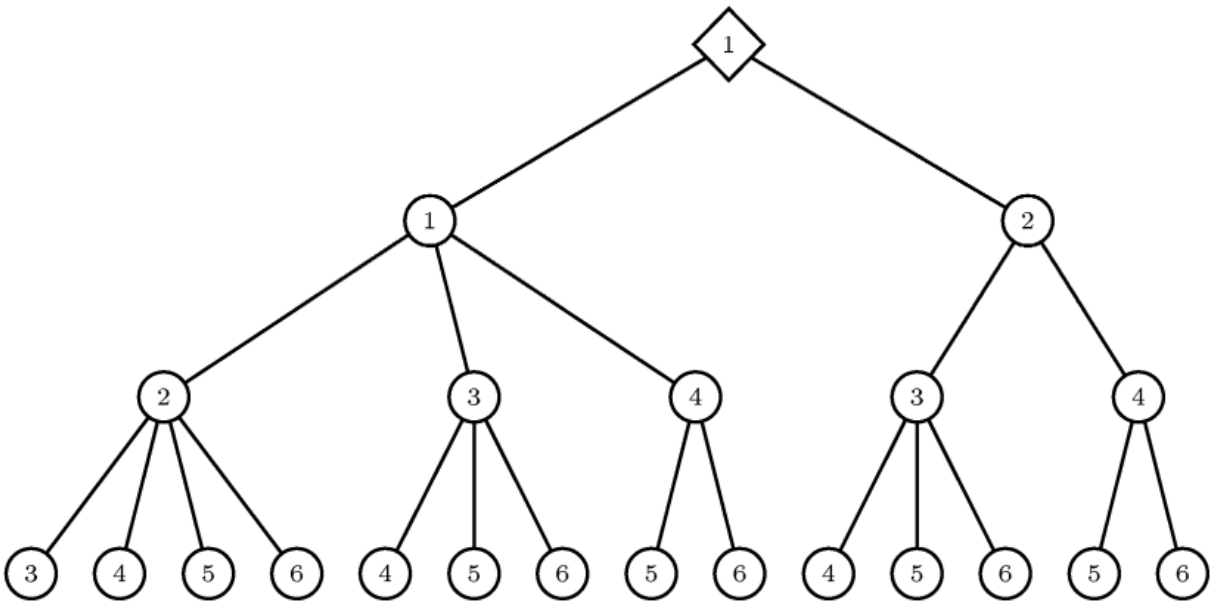

Рисунок 4.1 – Графическое представление s-последовательностей теннисных мячей для $s = 2$

Также можно построить изоморфное дерево, используя следующее правило:

$$\begin{cases} root: (1), \\ rule: (k) \to (1) \dots (k+s-2)(k+s-1), s \geq 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Соответствующее дерево изображено на рисунке (4.2).

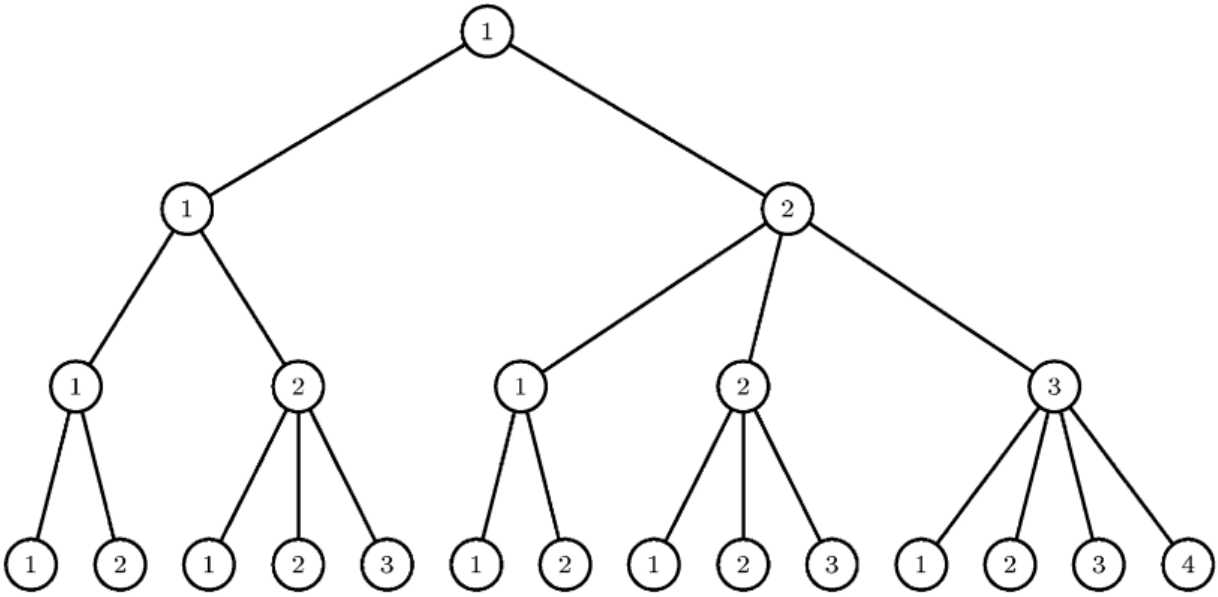

Рисунок 4.2 – Производящее дерево для $s = 2$

Известно решение данной задачи.

Определение 4.2. *S*-арное дерево является либо пустым деревом, либо состоит из узла (называемого корнем), к которому присоединена упорядоченная последовательность s (возможно, пустых) *s*-арных деревьев.

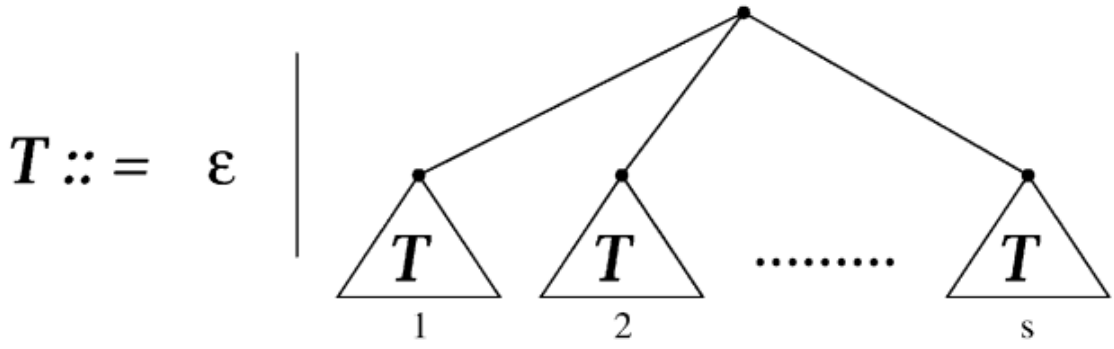

Рисунок 4.3 – Определение *s*-арных деревьев

Теорема 4.1. Число $f(n)$ конфигураций для $(s,1)$-задачи о теннисных мячах – это число T_{n+1} s-арных деревьев с $n+1$ узлами:

$$T(n) = \frac{\binom{sn}{n}}{1+(s-1)n} \text{ и } T(z) = 1 + zT(z)^s,$$

где $T(z)$ – производящая функция такой последовательности.

Идея доказательства связана с вычислением числа путей на множестве целых чисел с шагами, описанными правилом (4.1).

Теорема 4.2. Общая сумма $\sum(n)$ всех конфигураций меток выброшенных шаров равна

$$\sum(n-1) = \frac{sn^2+(s-1)n+1}{2}\frac{\binom{sn}{n}}{(s-1)n+1} - \frac{1}{2}\binom{sk}{n}\binom{s(n-k)}{n-k}.$$

Данное утверждение доказано в статье [11], стр. 17.

Приведенные выше теоремы показывают, что $(2,1)$-задача ведет к числам Каталана $f(n) = \frac{\binom{rn}{n}}{n+1}$.

Случай $(2,1)$ подробно рассмотрен в работе [11], а случай $(4,2)$ – в работе [12].

Для случая $s = 2$ удобно упорядочивать пары с номерами выброшенных мячей в лексикографическом порядке. Так, если на $1, 2$ и 3 раунде были выброшены мячи с номерами $(1,4), (5,8)$ и $(2,10)$ соответственно, то мы можем без потери общности сказать, что были выброшены мячи с номерами $(1,2), (4,8)$ и $(8,10)$ соответственно.

5 Производящие функции и производящие деревья

Производящая функция $G(z)$ для производящего дерева – это формальный степенной ряд

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(n) z^k,$$

где $g(n)$ – число его узлов на уровне k.

В нашем случае, $G(z)$ получается путем наблюдения, что единственное дерево, не связанное ни с какими путями в производящем дереве, – это пустое дерево, что означает:

$$G(z) = \frac{T(z)-1}{z} = T(z)^s.$$

Определение 5.1. Двумерная числовая последовательность (или бесконечная матрица) $d(n,k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$, называется ассоциированной с производящим деревом с корнем (c), если $d(n,k)$ – число узлов на уровне n с метками $k + c$. Для удобства будем всегда считать, что $c = 0$.

Теорема 5.1. Производящая функция $G_k(z)$ для поддерева, корень которого обозначен k, задается формулой

$$G_k(z) = T(z)^{k+s-1}.$$

Обозначим через A_n сумму меток по всем путям из уровня 0 к уровню n в производящем дереве. Также обозначим через $\alpha_{i,n}$ сумму меток на уровне i в сумме A_n. Чтобы вычислить $\alpha_{i,n}$, мы должны принять во внимание тот факт, что метка k на уровне i повторяется столько же раз, сколько ее потомков на уровне n. Очевидно, что

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i,n}.$$

Известно, что

$$\alpha_{i,n} = \sum_{r\geq 0} d(i,r)(r+1)\left[t^{n-i}\right]T(t)^{r+s}.$$

Данный факт доказан в статье [12], стр. 319, Theorem 4.2. Мы же приведем его краткое доказательство.

На уровне i в генерирующем дереве мы находим метки $k = 1, 2, \dots, i + s - 1$, поэтому интерпретируем r как $k - 1$. По определению, $d(i,r) = d(i, k - 1)$ – кратность метки k на уровне i. Эта кратность должна быть умножена на «вес» метки, то есть $k = r + 1$. Это количество следует учитывать столько раз, сколько потомков узел имеет на уровне n. Согласно Теореме 5.1, это подсчитывается как $T(z)^{k+s-1} = T(z)^{r+s}$ и, в нашем случае, по коэффициенту z^{n-i}. На этом доказательство завершено.

Обозначим $d_r(z)$ производящую функцию для столбца r в матрице $D = \{d(n,k)\},\ n, r \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $d_0(z) = T(z)$.

Производящие функции для других столбцов задаются соотношением:

$d_0(z) = T(z)$,
$d_i(z) = T(z) - 1, i = 1, \dots, s-1$,
$d_r(z) = d_{r-1}(z) - zd_{r-s}(z), \geq s$.

Данный факт доказан в статье [12], стр. 319, Theorem 4.3. Приведем краткое доказательство.

Во-первых, мы можем записать $(k) \to \prod_{j=1}^{k+s-1}(k+s-j)$ (данный факт доказан в статье [13]). Это показывает, что узел на уровне $n+1$ с меткой $k+2$ может быть определен из узлов на уровне n с меткой $h+1$, так что $h+1+s-j = k+2$, то есть $h = k-s+1+j, j \geq 1$.Следовательно, мы имеем

$$d(n+1, k+1) = d(n, k-s+2) + d(n, k-s+3) + \cdots. \qquad (5.1)$$

и

$$d(n+1, k) = d(n, k-s+1) + d(n, k-s+2) + d(n, k-s+3) + \cdots.$$

Из этого следует, что

$$d(n+1, k) = d(n, k-s+1) + d(n+1, k+1)$$

и, наконец,

$$d(n+1, k+1) = d(n+1, k) - d(n, k-s+1).$$

Переходя к производящим функциям, мы получаем рекуррентное соотношение:

$$d_{k+1}(z) = d_k(z) - zd_{k+1-s}(z), k \geq s-1.$$

Наконец, мы замечаем, что соотношение (5.1) справедливо для числа узлов на уровне $n+1$ с меткой $i+1, i = 1, \dots, s-1$, но оно не может начинаться с отрицательных индексов. Следовательно, во всех случаях результат один и тот же. Например, $d(n+1, i) = d(n+1, 0)$. Следовательно,

все производящие функции равны $T(z) - 1$ и на этом доказательство завершено.

Все производящие функции $d_r(z)$ можно выразить в терминах $T(z)$, через следующую формулу:

$$d_r(z) = p_r(z)T(z) - q_r(z), r \geq 0,$$

где $p_r(z)$ и $q_r(z)$ являются многочленами, определяемыми следующими соотношениями:

$$p_r(z) = p_{r-1}(z) - zp_{r-s}(t), q_r(z) = p_{r-1}(z), r \geq s,$$

с начальными условиями:

$$p_i(z) = 1, i = 0, \ldots, s-1, q_0(z) = 0.$$

Приведем таблицу, содержащую первые многочлены для $s = 2, 3$ и 4.

Таблица 5.1 – Многочлены $p_r(t)$ для $r \leq 8$ и $s = 2, 3, 4$

s	2	3	4
$p_0(t)$	1	1	1
$p_1(t)$	1	1	1
$p_2(t)$	$1 - t$	1	1
$p_3(t)$	$1 - 2t$	$1 - t$	1
$p_4(t)$	$1 - 3t + t^2$	$1 - 2t$	$1 - t$
$p_5(t)$	$1 - 4t + 3t^2$	$1 - 3t$	$1 - 2t$
$p_6(t)$	$1 - 5t + 6t^2 - t^3$	$1 - 4t + t^2$	$1 - 3t$
$p_7(t)$	$1 - 6t + 10t^2 - 4t^3$	$1 - 5t + 3t^2$	$1 - 4t$
$p_8(t)$	$1 - 7t + 15t^2 - 10t^3 + t^4$	$1 - 6t + 6t^2$	$1 - 5t + t^2$

6 Задача Коши для задачи о числе теннисных мячей

Выше мы показали, что производящие деревья являются хорошим способом описания всевозможных комбинаций, возникающих в задаче о числе теннисных мячей. Теперь мы можем сформулировать соответствующую задачу Коши в терминах производящих деревьев.

Пусть производящее дерево задано правилом:

$$\begin{cases} root: (1), \\ rule: (k) \to (1) \dots (k+s-2)(k+s-1), s \geq 2. \end{cases}$$

Например, деревья для $s = 2$ и $s = 3$ приведены на рисунках (6.1) и (6.2) соответственно.

Обозначим $d(x, y)$ – число узлов на уровне x с меткой y. Таблица значений $d(x, y)$ приведены в таблицах (6.1) и (6.2) соответственно.

6.1 Случай $s = 2$

Производящее дерево задается правилом:

$$\begin{cases} root: (1), \\ rule: (k) \to (1) \dots (k+1). \end{cases}$$

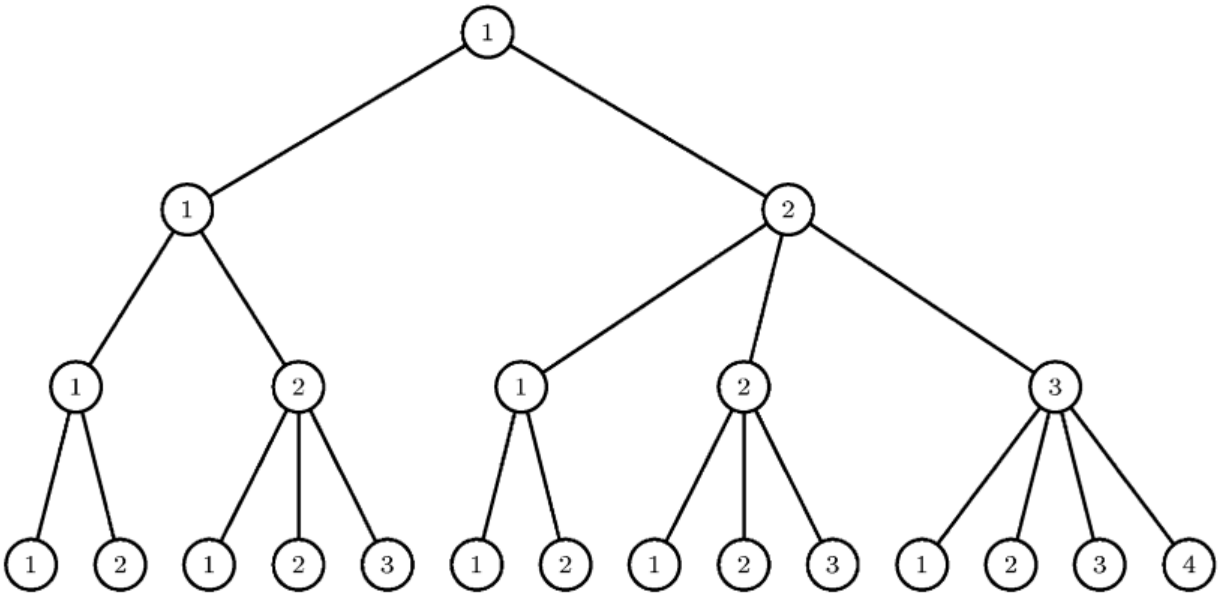

Рисунок 6.1 – Производящее дерево для случая $s = 2$

Приведем матрицу, ассоциированную с производящим деревом, изображенным на предыдущем рисунке.

Таблица 6.1 – Ассоциированная матрица при $s = 2$

5					1
4				1	4
3			1	3	9
2		1	2	5	14
1	1	1	2	5	14
k/n	1	2	3	4	5

$$\begin{cases} d(y,z) = d(y-1,z) - zd(y-2,z), \ y \geq 2, \\ d(0,z) = T(z), \\ d(1,z) = T(z) - 1, \end{cases}$$

где $T(z)$ – производящая функция чисел Каталана.

6.2 Случай $s = 3$

Производящее дерево задается правилом:

$$\begin{cases} root: (1), \\ rule: (k) \to (1) \dots (k+1)(k+2). \end{cases}$$

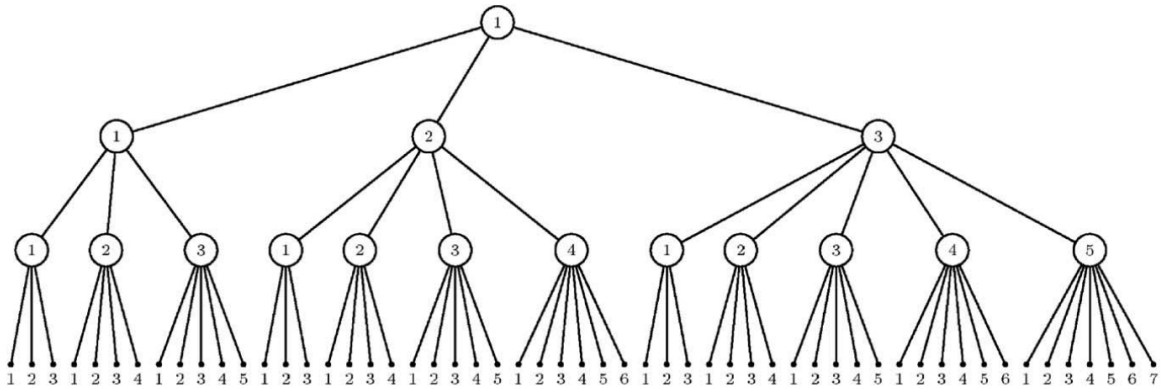

Рисунок 6.2 – Производящее дерево для случая $s = 3$

Таблица 6.2 – Ассоциированная матрица при $s = 3$

11	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	5
9	0	0	0	0	1	15
8	0	0	0	0	4	34
7	0	0	0	1	10	65
6	0	0	0	3	19	108
5	0	0	1	6	31	163
4	0	0	2	9	43	218
3	0	1	3	12	55	273
2	0	1	3	12	55	273
1	1	1	3	12	55	273
k/n	1	2	3	4	5	6

$$\begin{cases} d(y,z) = d(y-1,z) - zd(y-3,z), & y \geq 3, \\ d(0,z) = T(z), \\ d(1,z) = T(z) - 1, \\ d(2,z) = T(z) - 1. \end{cases}$$

6.3 Основной результат

Обозначим $d(y,z) = \sum_{x=1}^{\infty} d(x,y)z^x$ производящую функцию для последовательности $d(x,y)$ при некотором фиксированном y. Тогда известно, что $d(y,z)$ удовлетворяет задаче Коши:

$$\begin{cases} d(y,z) = d(y-1,z) - zd(y-s,z), & y \geq s, \\ d(0,z) = T(z), \\ d(y,z) = T(z) - 1, & 1 < y < s, \end{cases}$$

где $T(z)$ – это производящая функция числа узлов с меткой 1 на первом уровне.

Например, для $s = 2$ получим $d(1,z) = T(z) - 1$. Также для $s = 3$ получим $d(2,z) = T(z) - 1$.

Найдем производящую функцию для $d(x,y)$, заданную формулой:

$$F(z,w) = \sum_{x,y\geq 0} f(x,y)z^x w^y,$$

которую перепишем в виде

$$F(z,w) = \sum_{y=0}^{\infty} d(y,z)w^y, \text{ где } d(y,z) = \sum_{x=0}^{\infty} d(x,y)z^x.$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$d(y,z) - d(y-1,z) - zd(y-s,z) = 0, \ s \geq 2.$$

Домножим обе его части на w^y и просуммируем по y от s до ∞:

$$\sum_{y=s}^{\infty}\big(d(y,z) - d(y-1,z) - zd(y-s,z)\big)w^y = 0,$$

далее,

$$\sum_{y=s}^{\infty} d(y,z)w^y - \sum_{y=s}^{\infty} d(y-1,z)w^y + \sum_{y=s}^{\infty} zd(y-s,z)w^y = 0.$$

Заменим индекс суммирования во второй и третьей сумме:

$$\sum_{y=s}^{\infty} d(y,z)w^y - \sum_{y=s-1}^{\infty} d(y,z)w^{y+1} + \sum_{y=0}^{\infty} zd(y,z)w^{y+s} = 0,$$

далее,

$$\left(\sum_{y=0}^{\infty} d(y,z)w^y - \sum_{y=0}^{s-1} d(y,z)w^y\right) - w\left(\sum_{y=0}^{\infty} d(y,z)w^y - \sum_{y=0}^{s-2} d(y,z)w^y\right) +$$
$$+ zw^s \sum_{y=0}^{\infty} d(y,z)w^y = 0.$$

Так как $\sum_{y=0}^{\infty} d(y,z)w^y = F(z,w)$, перепишем

$$\left(F(z,w)-\sum_{y=0}^{s-1} d(y,z)w^y\right)-w\left(F(z,w)-\sum_{y=0}^{s-2} d(y,z)w^y\right)+$$
$$+zw^sF(z,w)=0,$$

тогда и только тогда, когда

$$(1-w+zw^s)F(z,w)=\sum_{y=0}^{s-1} d(y,z)w^y-w\sum_{y=0}^{s-2} d(y,z)w^y.$$

Так как $d(0,z)=T(z), d(1,z)=\cdots=d(s-1,z)=T(z)-1$, получим, что

$$\sum_{y=0}^{s-1} d(y,z)w^y=d(0,z)+d(1,z)w+\cdots+d(s-1,z)w^{s-1}=$$
$$=T(z)+(T(z)-1)w+\cdots+(T(z)-1)w^{s-1}.$$
$$w\sum_{y=0}^{s-2} d(y,z)w^y=w(T(z)+(T(z)-1)w+\cdots+(T(z)-1)w^{s-2}).$$

Тогда

$$\sum_{y=0}^{s-1} d(y,z)w^y-w\sum_{y=0}^{s-2} d(y,z)w^y=$$
$$=T(z)+(T(z)-1)w+(T(z)-1)w^2+\cdots+$$
$$(T(z)-1)w^{s-2}+(T(z)-1)w^{s-1}-w(T(z)+(T(z)-1)w+$$
$$+(T(z)-1)w^2+\cdots+(T(z)-1)w^{s-2})=T(z)-w.$$

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема 6.1. Последовательность $d(x,y)$ числа узлов с меткой y на уровне x производящего дерева, заданного правилом:

$$\begin{cases} root: (1), \\ rule: (k)\to(1)\ldots(k+s-2)(k+s-1), \qquad s\geq 2, \end{cases}$$

имеет вид

$$F(z,w)=\frac{T(z)-w}{1-w+zw^s},$$

где $T(z)$ – это производящая функция числа узлов с меткой 1 на первом уровне.

Замечание. При $s=2$:

$$T(z)=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}-$$

производящая функция чисел Каталана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. Исходная задача была определена в терминах производящих деревьев;
2. Была сформулирована задача Коши для последовательностей выброшенных шаров;
3. Сформулирована и доказана теорема о виде последовательности числа узлов производящего дерева. Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы при решении подобных задач комбинаторного анализа.
4. Разработан и реализован алгоритм вычисления сечений производящей функции для задачи о теннисных мячах в системе компьютерной алгебры Maple.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лейнартас, Е.К., Ляпин, А.П., О рациональности многомерных возвратных степенных рядов. / Е.К. Лейнартас, А.П. Ляпин // Journal of Siberian Federal University. – Mathematics & Physics. 2009. –449–455 стр.
2. Некрасова Т.И. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений. / Т.И. Некрасова // Известия Иркутского государственного университета. 2014, т. 9, 91–102 стр.
3. Abramson, M., Moser, W., Combinations, successions and the n-kings problem / M. Abramson, W. Moser // Math. Mag, 1966, v.39, №5, p. 269-273.
4. Akhtamova S.S., Grishunov V.Y., Lyapin A.P., Tikhomirov S.A., On Sections Of Generating Series In Lattice Path Problems / S.S. Akhtamova, V.Y. Grishunov, A.P. Lyapin // Applied Mathematics & Physics, 2020, 52(2), 146–151.
5. Apanovich M.S., Lyapin A.P., Shadrin K.V., Solving the Cauchy Problem for a TwoDimensional Difference Equation at a Point Using Computer Algebra Methods / M.S. Apanovich, A.P. Lyapin, K.V. Shadrin // Programming and Computer Software, 2021, 47(1), 1–5.
6. Bloom D.M. Singles in a Sequence of Coin Tosses / D.M. Bloom // The College Mathematics Journal, 1998. p. 307-344.
7. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M., Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. / M. Bousquet-Mélou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics, 225(2000), 51–75.
8. Leinartas E.K., On the Rationality of Multidimentional Recusive Series. / E. K. Leinartas, A. P. Lyapin // Journal of Siberian Federal University. – Mathematics & Physics. –2009, –449–455 p
9. Lyapin A.P., Chandragiri S., Generating functions for vector partition functions and a basic recurrence relation / A.P. Lyapin, S. Chandragiri //

Journal of Difference Equations and Applications, 25:7, 2019, – pp. 1052-1061.

10. Lyapin A.P., Akhtamova S.S., Recurrence Relations For The Sections Of The Generating Series Of The Solution To The Multidimensional Difference Equation / A.P. Lyapin, S.S. Akhtamova // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2021, 31(3), 414–423.
11. Merlini D. The Tennis Ball Problem / D. Merlini // Algorithms Seminar 2000-2001, (2002), pp. 15-18.
12. Merlini D., Sprugnoli R., Verri M.C., TheTennis Ball Problem / D. Merlini, R. Sprugnoli, M.C. Verri // Journal of Combinatorial Theory, Series A 99, 307–344 (2002).
13. Merlini D., Verri M.C., Generating trees and proper Riordan Arrays / D. Merlini, M.C. Verri // Discrete Math. 218 (2000), 167–183.
14. Moivre, A. de De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractions simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus / A. de Moivre // Philosophical transactions. –1724, –176p.
15. Schutzenberger M.P. Context-free language and pushdown automata / M.P. Schutzenberger // Inform and Control 6 (1963), 246–264.
16. West J. Generating trees and forbidden subsequences / J, West // Discrete Math. 157 (1996), 363–374.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы для построения ассоциированной матрицы с фиксированным числом выбрасываемых мячей в каждом раунде, равным единице. Число получаемых игроком мячей в каждом раунде и число раундов задается при вызове функции. Представлен пример, в котором игрок получает по два мяча на протяжении пяти раундов.

```
> restart : with(linalg) :
  AGTMatrixFind :=proc(s, n)
  #option trace;

  local c, f, a, i, j, m, d;

  c := array(0 ..n, [ ]);
  m := array(0 ..n, [ ]);
  d := Matrix( n, s·n − 1);

  f := T(z) = 1 + z· T(z)^s;
  a := solve(T(z) = 1 + z· T(z)^s, T(z)) ;
  if s = 2 then
  m[0] := a[2];
  end if;
  if s > 2 then
  m[0] := a;
   end if;
  c[0] := taylor(m[0], z, n·s);
  m[1] := m[0] − 1;

  for i from 1 to s do
  c[i] := taylor(m[1], z, n·s);
  od;

  for i from s to n − 1 do
  m[i] := m[i − 1] − z·m[i − s];
  c[i] := taylor(m[i], z, n·s);
  od;
```

```
print(Многочлены );
for i from 0 to n − 1 do
print(simplify(c[i]));
od;

for i from 0 to n − 1 do
for j from 0 to s·n − 2 do
d[i + 1, j + 1] := coeff(c[i], z, j);
od;
od;

print(Ассоциированная матрица );
print(d);

end proc;
```

```
> AGTMatrixFind(2, 5)
```

Многочлены

$$1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + 132z^6 + 429z^7 + 1430z^8 + O(z^9)$$

$$z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + 132z^6 + 429z^7 + 1430z^8 + O(z^9)$$

$$z^2 + 3z^3 + 9z^4 + 28z^5 + 90z^6 + 297z^7 + 1001z^8 + O(z^9)$$

$$z^3 + 4z^4 + 14z^5 + 48z^6 + 165z^7 + 572z^8 + O(z^9)$$

$$z^4 + 5z^5 + 20z^6 + 75z^7 + 275z^8 + O(z^9)$$

Ассоциированная матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 28 & 90 & 297 & 1001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 14 & 48 & 165 & 572 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 20 & 75 & 275 \end{bmatrix}$$

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____/В.В. Шайдуров

« 16 » июня 2022 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ О ТЕННИСНЫХ МЯЧАХ

Руководитель 16.06.22 доцент, кандидат физико-математических наук А.П. Ляпин

Выпускник 16.06.22 С.А. Гимранов

Нормоконтролер 23.06.22 Т.Н. Шипина

Красноярск 2022