Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
/В.В. Шайдуров
«____» ______ 2022г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ ПРОИЗВОДЯЩИХ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ О РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЯХ

Руководитель	доцент, кандидат физико-математических наук	А.П. Ляпин
Выпускник		В.С. Алексеев
Нормоконтролер		Т.Н. Шипина

Красноярск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1 Основные определения

1.1 Линейные разностные уравнения

По аналогии с работой [6] введем обозначения $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ точки N-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^N = \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, и A – конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}^N$. Разностным уравнением относительно неизвестной функции $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ с постоянными коэффициентами c_α, где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, называется соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0. \tag{1}$$

В данной работе рассматривается слачай, когда множество A лежит в октанте $\mathbb{Z}_0^n = \{(x_1, x_2, ..., x_N) : x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., N\}$ целочисленной решетки и удовлетворяет условию:

$$\exists m = (m_1, m_2, ..., m_N) \in A : c_m \neq 0, \forall \alpha \in A, \forall j = 1, 2, ..., N : \alpha_j \leq m_j.$$

Одномерный случай не вызывает трудностей и хорошо изучен (см. [4]). А. Муавр в своей работе (см. [16]) рассмотрел степенные ряды

$$f(0) + f(1)z + ... + f(k)z^k + ...$$

с коэффициентами $f(0), f(1), ...$ удовлетворяющими разностному уравнению

$$c_m f(x + m) + c_{m-1} f(x + m - 1) + ... + c_0 f(x) = 0, x = 0, 1, 2, ...,$$

где $c_m \neq 0$, а $c_j \in \mathbb{C}$ – некоторые постоянные, и доказал, что такие ряды всегда сходятся к рациональным функциям (см. [16]).

В многомерном случае, который мение изучен (см. [8, 9]), интерес представляют рациональные производящие функции, которые в иерархии Р. Стенли (см. [13]) являются «наиболее полезным» классом производящих функций. В комбинаторном анализе известен широкий класс задач, приводящих к рациональным производящим функциям, например, в задачах о числе путей на целочисленной решетки (см. [15]).

1.2 Решеточные пути

В комбинаторном анализе хорошо известна задача о решеточных путях: задан набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\} \subset \mathbb{Z}^N$, и требуется вычислить сколькими способами можно попасть в точку $x \in \mathbb{Z}^N$ из начала координат, используя только шаги из Δ.

Если обозначить искомое число путей через $f(x)$, то известно (см. [15]),что $f(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$f(x) - f(x - \alpha^1) - ... - f(x - \alpha^n) = 0, x \in K,$$

где K – конус, натянутый на вектора из Δ.

Примеры классических решеточных путей.

1)Пути Дика. Путями Дика будем называть пути на целочисленной решетки с шагами (0, 1), (1, 0), не поднимающиеся выше прямой $y = x$ (рис. 1). Количество таких путей из точки (0, 0) в точку (n, n) называется n-ым числом Каталана и обозначается C_n. Числа Каталана также являются ответом к задаче о числе правильных скобочных последовательностей: сколькими способами можно разместить n правильных скобочных последовательностей. Можно заметить, что решения этой задачи для произвольного числа n лежат на диагонали $y = x$.

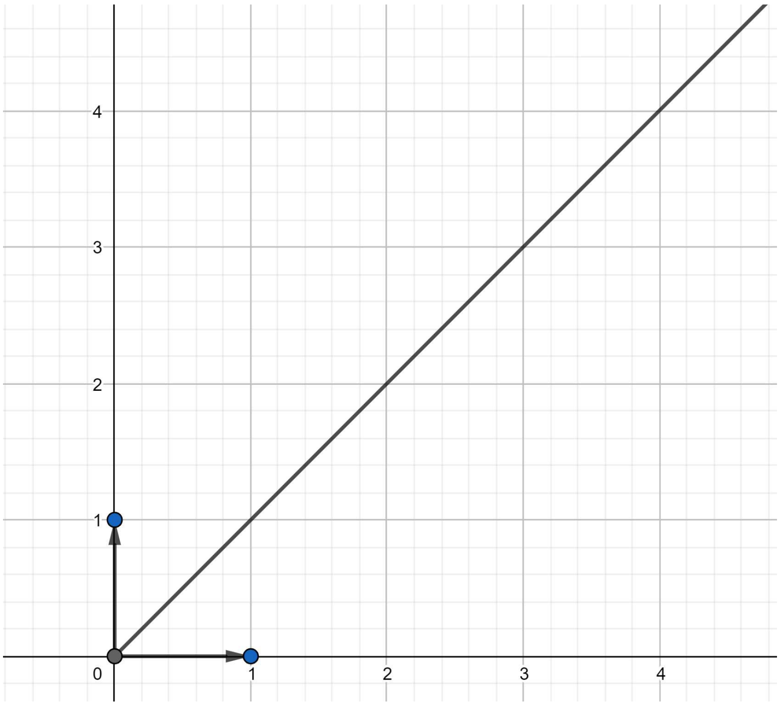

Рис. 1: Пути Дика

2)Пути Шрёдера. Путями Шрёдера будем называть пути на целочисленной решётки с шагами (0, 1), (1, 0), (1, 1), не подминающиеся выше диагонали $y = x$ (рис. 2). Числа Шрёдера являются ответом на вопрос: сколькими способами шахматный король может прийти из начала координат в точку с координатами (n, n), используя только шаги из заданного набора.

3)Пути Деланноя. Путями Деланноя будем называть пути на целочисленной решётки с шагами (0, 1), (1, 0), (1, 1) (рис. 3).

1.3 Многомерные производящие функции и их сечения

Пусть $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\} \subset \mathbb{Z}^N$ – это набор из n векторов с целочисленными координатами такой, что конус

$$K = \{\lambda : \lambda = k_1\alpha^1 + ... + k_n\alpha^n\}, k_i = 1, 2, ..., i = 1, ..., n$$

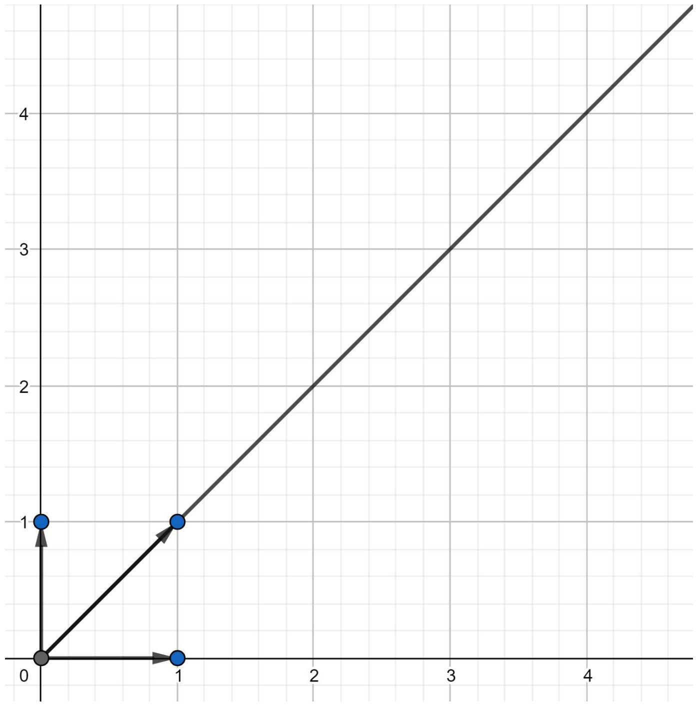

Рис. 2: Пути Шрёдера

заостренный, то есть целиком лежит в некоторой полуплоскости. Обозначим $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_N)$ число путей из начала координат в точку $(x_1, x_2, ..., x_N) \in K$ с шагами из Δ и рассмотрим формальный степенной ряд

$$F(z) = F(z_1, z_2, ..., z_N) = \sum_{(x_1, x_2, ..., x_N) \in K} f(x_1, x_2, ..., x_N) z_1^{x_1} z_2^{x_2} ... z_N^{x_N}, \qquad (2)$$

который назовем производящим рядом для числа путей $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ с шагами из Δ.

$$F(z) = \sum_{k_1+k_2+...+k_p=0}^{\infty} \left(\sum_{(x_1, x_2, ..., x_N) \in K_{p+1,...,n}} f(x_1, x_2, ..., x_N) z_1^{x_1} z_2^{x_2} ... z_N^{x_N} \right) \cdot$$
$$\cdot \left(z^{\alpha^1} \right)^{k_1} ... \left(z^{\alpha^p} \right)^{k_p}, \qquad (3)$$

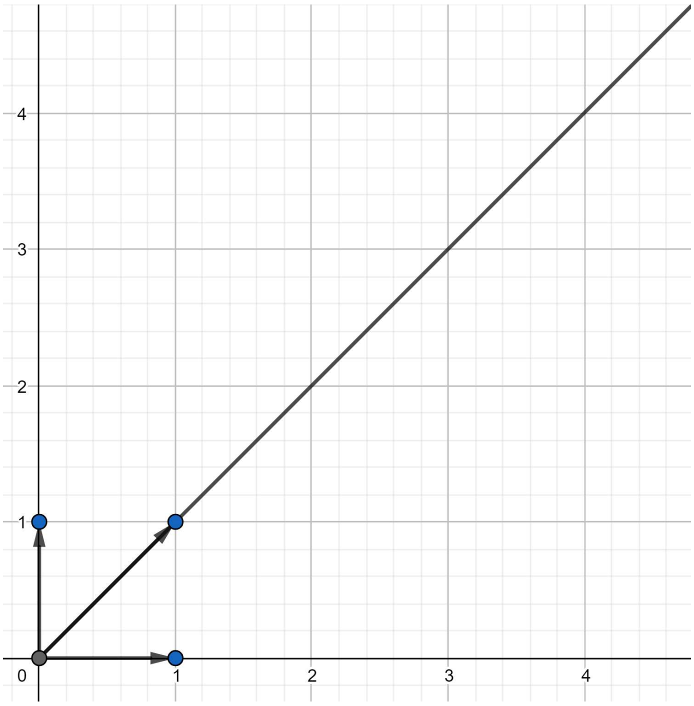

Рис. 3: Пути Деланноя

где $K_{p+1,...,n}$ – это конус, натянутый на ветора $\{\alpha^{p+1}, ..., \alpha^n\}$. Причем суммы вида $F(k_{p+1}, ..., k_n; z) = \sum\limits_{(x_1,x_2,...,x_N)\in K_{p+1,...,n}} f(x_1, x_2, ..., x_N) z_1^{x_1} z_2^{x_2} ... z_N^{x_N}$ будем называть сечениями производящего ряда $F(z)$.

2 Вид сечения производящего ряда и его рекурентное соотношение.

Пусть задан набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\} \subset \mathbb{Z}^N$. Тогда производящая функция решеточных путей равна

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2} - ... - z^{\alpha^n}}.$$

Теорема 1. Сечения производящего ряда $F(z)$ для числа решеточных путей имеют вид:

$$F(k_{p+1}, ..., k_n; z) = \frac{\frac{(k_{p+1}+...+k_n)!}{k_{p+1}! \cdot ... \cdot k_n!}}{\left(1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2} - ... - z^{\alpha^p}\right)^{k_{p+1}+...+k_n+1}}. \tag{4}$$

Доказательство. Проведем некоторые преобразования с производящим рядом

$$F(z) = \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j} - \sum\limits_{j=p+1}^{n} z^{\alpha^j}} = \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sum\limits_{j=p+1}^{n} z^{\alpha^j}}{1 - \sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}}},$$

расписываем последний множитель как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sum\limits_{j=p+1}^{n} z^{\alpha^j}}{1 - \sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sum\limits_{j=p+1}^{n} z^{\alpha^j} \right)^k}{\left(1 - \sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j} \right)^{k+1}} =$$

$$= \sum_{k_{p+1}+\ldots+k_n=0}^{\infty} \frac{\frac{(k_{p+1}+\ldots+k_n)!}{k_{p+1}!\cdot\ldots\cdot k_n!}\left(z^{\alpha^{p+1}}\right)^{k_p+1}\cdot\ldots\cdot\left(z^{\alpha^n}\right)^{k_n}}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+\ldots+k_n+1}} =$$

$$\sum_{k_{p+1}+\ldots+k_n=0}^{\infty} \frac{\frac{(k_{p+1}+\ldots+k_n)!}{k_{p+1}!\cdot\ldots\cdot k_n!}}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+\ldots+k_n+1}} \cdot (z^{\alpha^{p+1}})^{k_{p+1}}\ldots((z^{\alpha^n})^{k_n}) =$$

$$= \sum_{k_{p+1}+\ldots+k_n=0}^{\infty} F(k_{p+1},\ldots,k_n;z)(z^{\alpha^{p+1}})^{k_{p+1}}\ldots((z^{\alpha^n})^{k_n}),$$

где

$$F(k_{p+1},\ldots,k_n;z) = \frac{\frac{(k_{p+1}+\ldots+k_n)!}{k_{p+1}!\cdot\ldots\cdot k_n!}}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+\ldots+k_n+1}}$$

является сечением производящего ряда $F(z)$.

Теорема 2.Пусть у нас есть набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\} \subset \mathbb{Z}^N$. Тогда сечения для производящего ряда числа решеточных путей связаны рекуррентная соотношением:

$$(1-\sum_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}) \cdot F(k_{p+1},\ldots,k_n;z) = F(k_{p+1}-1,\ldots,k_n;z) + \ldots +$$
$$+ F(k_{p+1},\ldots,k_n-1;z). \quad (5)$$

Доказательство. Подставим выражение (4) для сечения производящего ряда из предыдущей теоремы в данное равенство. В левой части получим:

$$\frac{(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j})\left(\frac{(k_{p+1}+\ldots+k_n)!}{k_{p+1}!\cdot\ldots\cdot k_n!}\right)}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+\ldots+k_n+1}}.$$

А в правой:

$$\frac{\frac{(k_{p+1}+k_{p+2}...+k_n-1)!}{(k_{p+1}-1)!\cdot(k_{p+2})!\cdot...\cdot k_n!}}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+...+k_n}}+\frac{\frac{(k_{p+1}+k_{p+2}+...+k_n-1)!}{(k_{p+1})!\cdot(k_{p+2}-1)!\cdot...\cdot k_n!}}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+...+k_n}}+...+$$

$$+\frac{\frac{(k_{p+1}+k_{p+2}+...+k_n-1)!}{(k_{p+1})!\cdot(k_{p+2})!\cdot...\cdot(k_n-1)!}}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+...+k_n}}=$$

$$=\frac{1}{\left(1-\sum\limits_{j=1}^{p} z^{\alpha^j}\right)^{k_{p+1}+...+k_n}}\cdot\left(\frac{(k_{p+1}+k_{p+2}...+k_n-1)!}{(k_{p+1}-1)!\cdot(k_{p+2})!\cdot...\cdot k_n!}+\right.$$

$$\left.+\frac{(k_{p+1}+k_{p+2}+...+k_n-1)!}{(k_{p+1})!\cdot(k_{p+2}-1)!\cdot...\cdot k_n!}+...+\frac{(k_{p+1}+k_{p+2}+...+k_n-1)!}{(k_{p+1})!\cdot(k_{p+2})!\cdot...\cdot(k_n-1)!}\right).$$

Приводим выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\left(\frac{(k_{p+1}+...+k_n-1)!(k_{p+1}+...+k_n)}{k_{p+1}!\cdot...\cdot k_n!}\right)=\frac{(k_{p+1}+...+k_n)!}{k_{p+1}!\cdot...\cdot k_n!}.$$

Сравнивая левую и правую части, получаем верное торжество.

3 Примеры сечений производящих рядов

Пример 1. Рассмотрим систему векторов $\Delta = \{(2,1),(0,2)\} \subset \mathbb{Z}^2$.

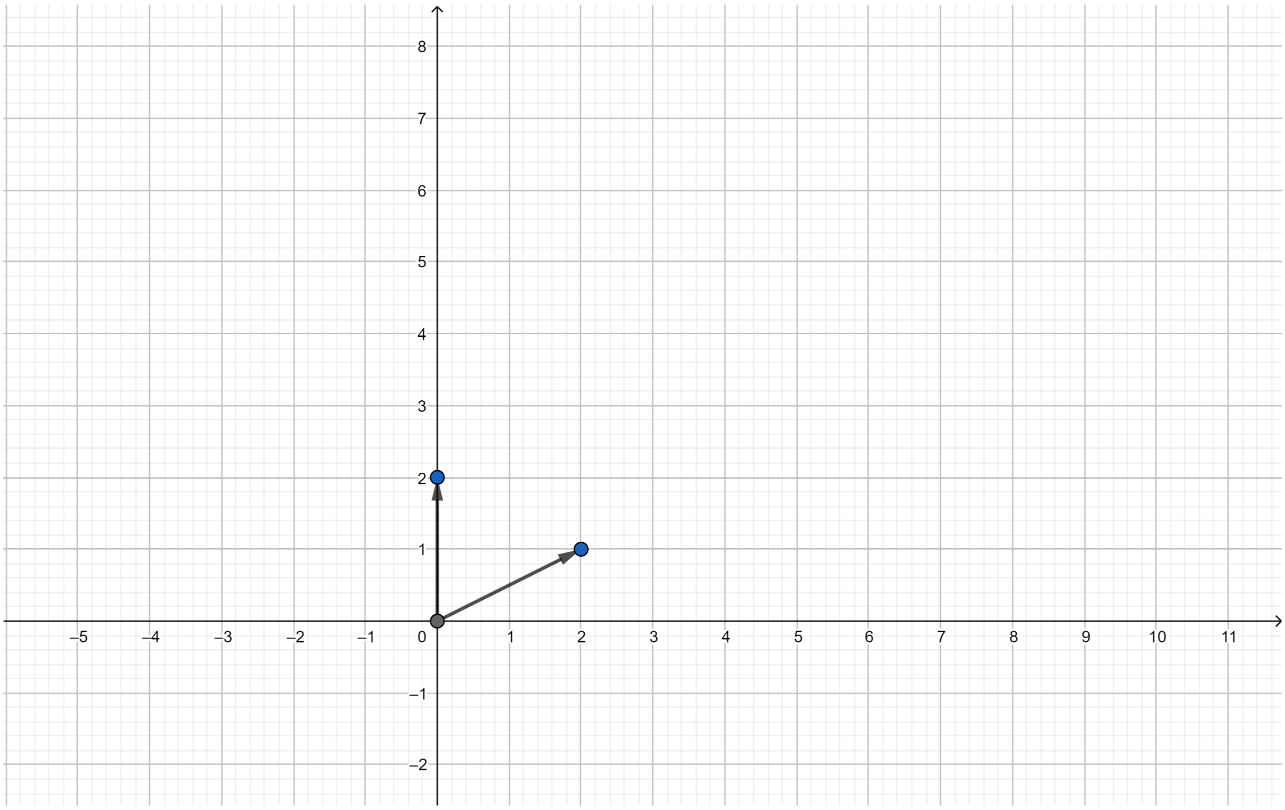

Рис. 4: Пример 1

Тогда производящая функция числа решеточных путей равна

$$\frac{1}{1 - z_1^2 z_2 - z_2^2}.$$

Проведем преобразования аналогичные теореме 1. Зафиксируем вектор $(2,1)$.

$$\frac{1}{1 - z_1^2 z_2 - z_2^2} = \frac{1}{(1 - z_1^2 z_2) - z_2^2} = \frac{1}{1 - z_1^2 z_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_2^2}{1 - z_1^2 z_2}} =$$

$$= \frac{1}{1 - z_1^2 z_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_2^2}{1 - z_1^2 z_2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - z_1^2 z_2)^{k+1}} \cdot (z_2^2)^k.$$

Вычисление сечений производящих рядов.

1)Фиксируем вектор $(2;1)$.

Для $k=0$

$$F_{\alpha^1(0,z)} = 1 + z_1^2 z_2 + z_1^4 z_2^2 + z_1^6 z_2^4 + ... = \frac{1}{1 - z_1^2 z_2},$$

для $k=1$

$$F_{\alpha^1(1,z)} = C_1^0 z_2^2 + C_2^1 z_1^2 z_2^3 + C_3^2 z_1^4 z_2^4 + ... + C_k^{k-1} z_1^{2(k-1)} z_2^{k+1} + ...,$$

для $k=2$

$$F_{\alpha^1(2,z)} = z_2^4 + C_3^1 z_1^2 z_2^5 + C_4^2 z_1^4 z_2^6 + C_5^3 z_1^6 z_2^7 + C_6^4 z_1^8 z_2^8 + ... + C_k^{k-2} z_1^{2(k-1)} z_2^{k+2} + ...,$$

для $k=3$

$$F_{\alpha^1(3,z)} = z_2^6 + C_4^3 z_1^2 z_2^7 + C_5^3 z_1^4 z_2^8 + C_6^3 z_1^6 z_2^9 + C_7^4 z_1^8 z_2^{10} + ... + C_k^{k-3} z_1^{2(k-3)} z_2^{k+3} + ...,$$

для $k=4$

$$F_{\alpha^1(4,z)} = z_2^8 + C_5^4 z_1^2 z_2^9 + C_6^4 z_1^4 z_2^{10} + C_7^4 z_1^6 z_2^{11} + C_8^4 z_1^8 z_2^{12} + ... + C_k^{k-4} z_1^{2(k-4)} z_2^{k+5} + ...,$$

тогда для произвольного $k=t$

$$F_{\alpha^1(t,z)} = \sum_{k=0}^{t-1} C_{k+t}^{t} z_1^{2k} z_2^{2t+k} + \sum_{k=2t}^{\infty} C_k^{k-t} z_1^{2k-t} z_2^{k+t}.$$

Графически сечения показаны на рисунке 5.

2)Фиксируем вектор $(0;2)$. Для $k=0$

$$F_{\alpha^2(0,z)} = 1 + z_2^2 + z_2^4 + ... = \frac{1}{1 - z_2^2},$$

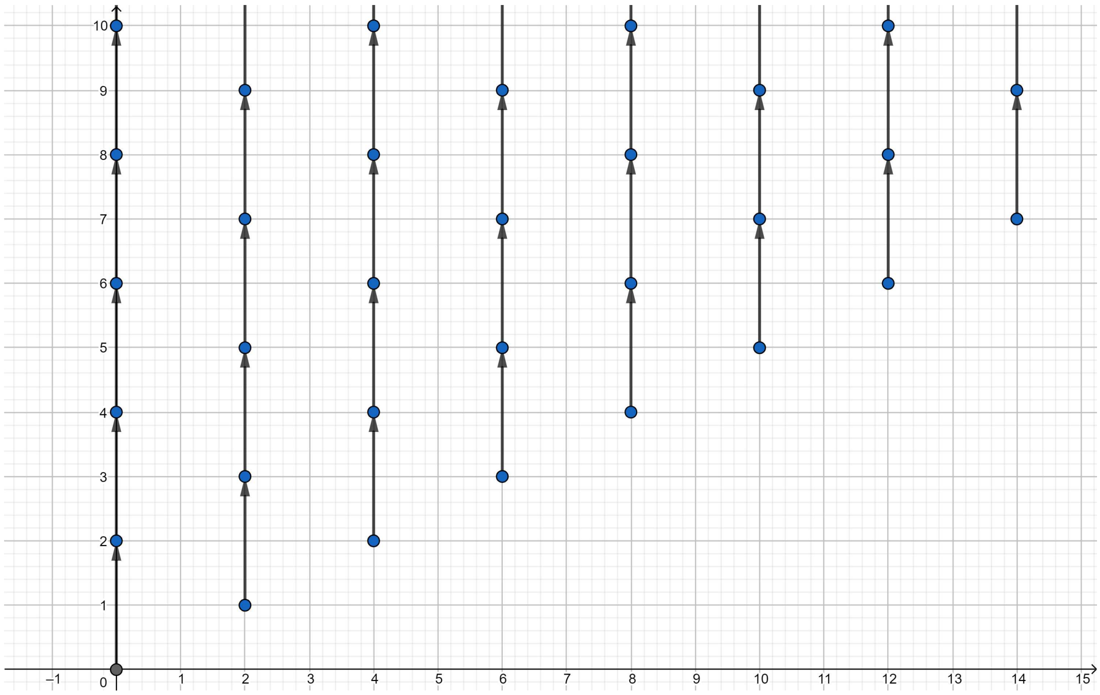

Рис. 5: Сечения при фиксированном векторе (2, 1)

для $k = 1$

$F_{\alpha^2(1,z)} = z_1^2 z_2 + C_2^1 z_1^2 z_2^3 + C_3^2 z_1^2 z_2^5 + C_4^3 z_1^2 z_2^7 + C_5^4 z_1^2 z_2^9 + C_6^5 z_1^2 z_2^{11} + ... C_k^{k-1} z_1^2 z_2^{2k-1} + ...,$

для $k = 2$

$F_{\alpha^2(2,z)} = z_1^4 z_2^2 + C_3^2 z_1^4 z_2^4 + C_4^2 z_1^4 z_2^6 + C_4^2 z_1^4 z_2^6 + C_5^3 z_1^4 z_2^8 + ... + C_k^{k-2} z_1^4 z_2^{2k-2} + ...,$

для $k = 3$

$F_{\alpha^2(3,z)} = z_1^6 z_2^3 + C_4^3 z_1^6 z_2^5 + C_5^3 z_1^6 z_2^7 + C_6^3 z_1^6 z_2^9 + C_7^4 z_1^6 z_2^{11} + ... + C_k^{k-3} z_1^6 z_2^{2k-3} + ...,$

тогда для произвольного $k = t$

$$F_{\alpha^1(t,z)} = \sum_{k=0}^{t-1} C_{k+t}^{t} z_1^{2t} z_2^{2k+t} + \sum_{k=2t}^{\infty} C_k^{k-t} z_1^{2t} z_2^{2k-2}.$$

Графически сечения показаны на рисунке 6.

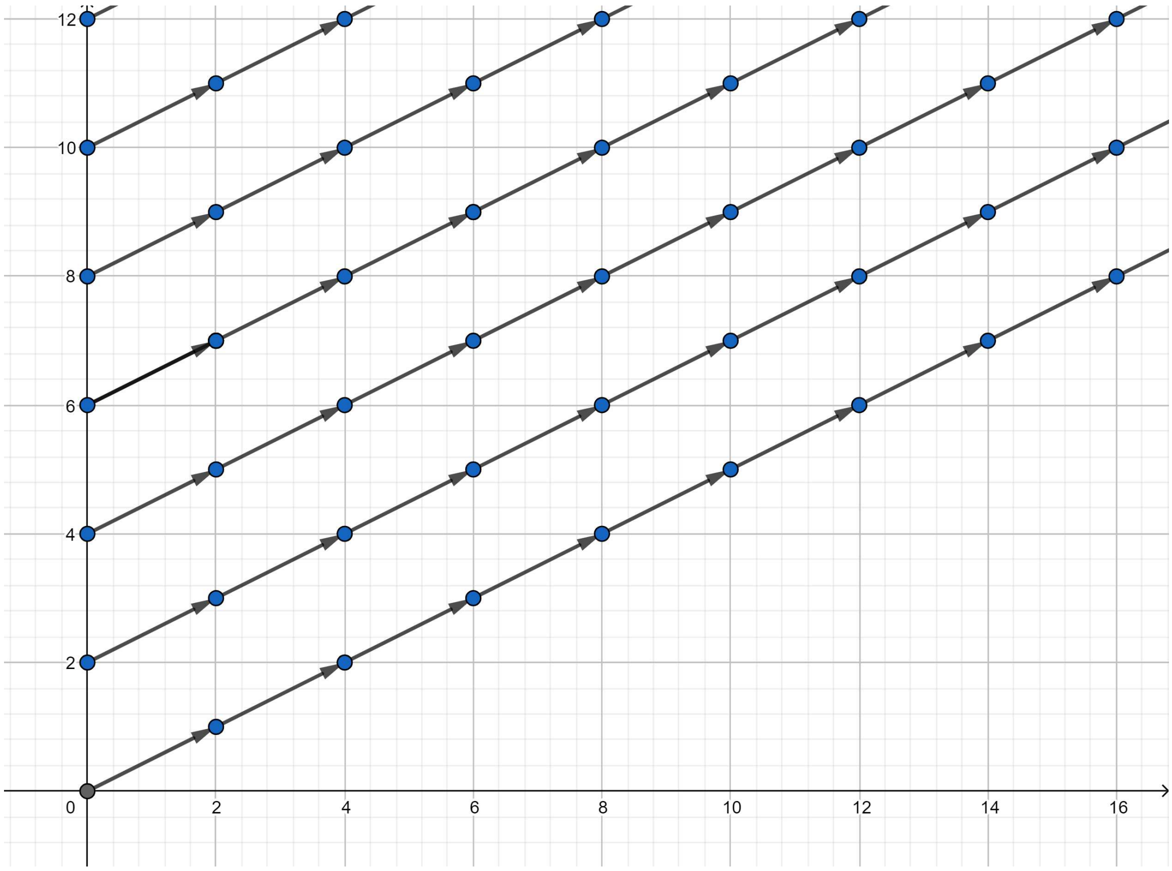

Рис. 6: Сечения при фиксированном векторе (0, 2).

Пример 2. Рассмотрим систему из трех векторов $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \subset \mathbb{Z}^2$, $\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (1, 1), \alpha_3 = (0, 1)$. Зафиксируем один вектор α_3.

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2} - z^{\alpha^3}} = \frac{1}{1 - z^{\alpha^3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^{\alpha^1} + z^{\alpha_2}}{1 - z^{\alpha^3}}} =$$

$$= \frac{1}{1 - z^{\alpha^3}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{\alpha^1} + z^{\alpha^2}}{1 - z^{\alpha^3}} \right)^k = \sum_{k_1 + k_2 = 0}^{\infty} \frac{\frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! \cdot k_2!}}{(1 - z^{\alpha^3})^{k_1 + k_2 + 1}} \cdot (z^{\alpha^1})^{k_1} \cdot (z^{\alpha^2})^{k_2} =$$

$$= \sum_{k_1 + k_2 = 0}^{\infty} F(k_1, k_2; z) \cdot (z^{\alpha^1})^{k_1} \cdot (z^{\alpha^2})^{k_2}.$$

Графически сечения показаны на рисунке 7.

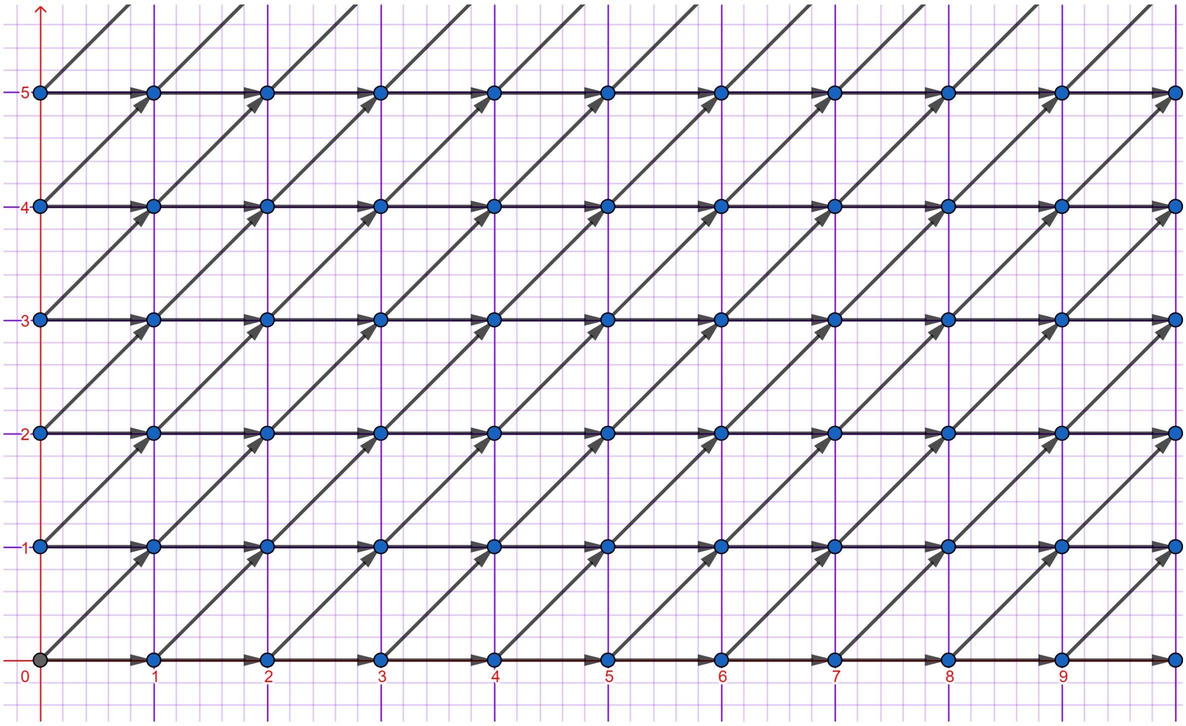

Рис. 7: Сечения при фиксированном векторе α_3.

Зафиксируем два вектора α_1, α_2.

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2} - z^{\alpha^3}} = \frac{1}{1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^{\alpha^3}}{1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2}}} =$$

$$= \frac{1}{1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^{\alpha^3}}{1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2}} \right)^k = \sum_{k_3=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^{\alpha^1} - z^{\alpha^2})^{k_3+1}} \cdot (z^{\alpha^3})^{k_3} =$$

$$= \sum_{k_3=0}^{\infty} F(k_3; z)(z^{\alpha^3})^{k_3}.$$

Графически сечения показаны на рисунке 8.

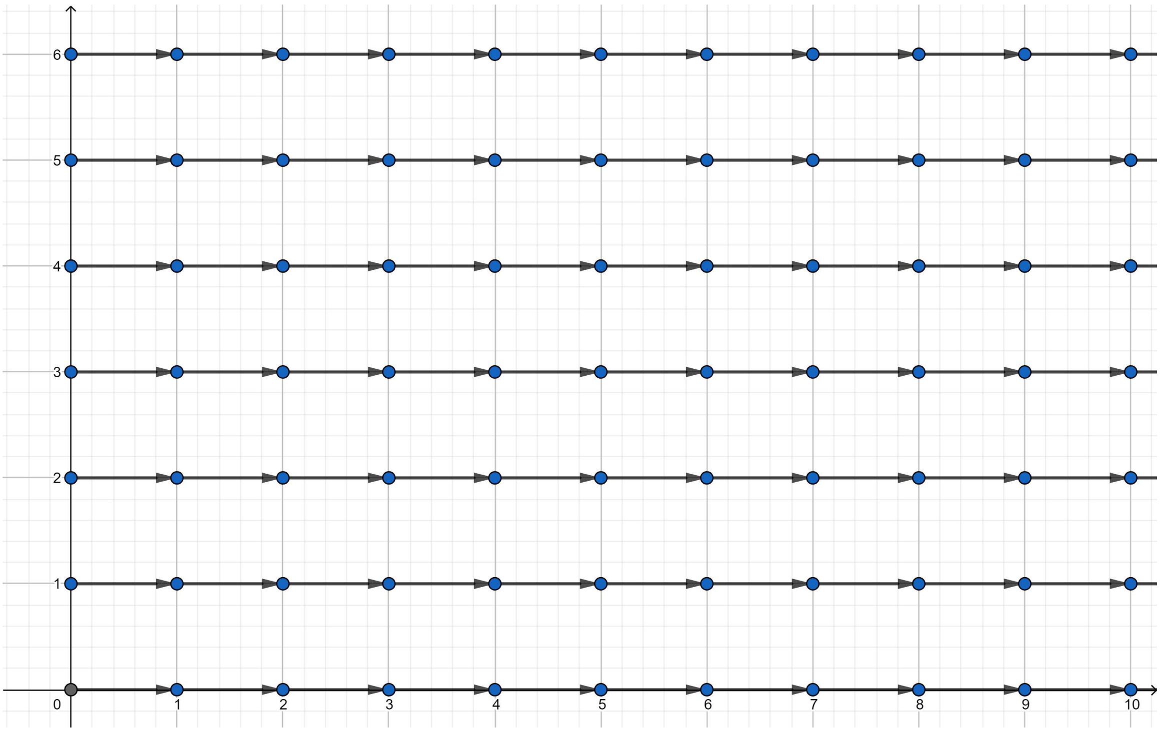

Рис. 8: Сечения при фиксированных векторах α_1, α_2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алексеев, В. С. О свойствах сечений производящих рядов числа решеточных путей в конусе. Математика. Материалы 60-й Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 2022. С. 27.

2. Ахтамова, С. С. О сечениях производящих рядов в задачах о решеточных путях / С. С. Ахтамова, В. Ю. Гришунов, А. П. Ляпин, С. А. Тихомиров// Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №2, С. 146-151.

3. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика: учебное пособие / Н. Я. Виленкин; изд. «Наука». –М., 1969 г.,–323 с.

4. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей/ А. О. Гельфонд // М.: КомКнига, 2006.,–400 с.

5. Егорычев, Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм/ Г. П. Егорычев // Новосибирск: Наука, 1977.,–287 с.

6. Кытманов, А. А. Алгоритм вычисления рациональной производящей функции решения задачи Коши двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами / А. А. Кытманов, А. П. Ляпин, Т. М. Садыков // Программирование. – 2017. – № 2. – С. 54-62.

7. Ландо, С. К. Лекции о производящий функциях: учебник/ С. К. Ландо // М.:МЦНМО, 2007. – 144 с.

8. Лейнартас, Е. К. Кратные ряды Лорана и разностные уравнения/ Е. К. Лейнартас // Сиб. матем. журн., 2004, Т. 45, № 2, С. 387–393.

9. Лейнартас, Е. К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений/ Е. К. Лейнартас// Сиб. матем. журн., 2007, Т. 48, № 2, С. 335–340.

10. Ляпин, А. П. Рекуррентные соотношения для сечений производящего ряда решения многомерного разностного уравнения/ А. П. Ляпин, С. С. Ахтамова // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2021. Т.31. Вып. 3. С.414-423

11. Некрасова, Т. И. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений/ Т. И. Некрасова // Изв. Иркутского гос. ун-та.–Сер. Математика.–2014,–том 9, С. 91-102.

12. Сачков, В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики/ В. Н. Сачков // М.: Наука, 1982.,–424 с.

13. Стэнли, Р. Перечислительная комбинаторика: учебник / Р. Стенли // Пер.с англ.–М.–Мир, 1990.–440 с.

14. Leinartas, E. K. On the Rationality of Multidimentional Recusive Series. / E. K. Leinartas, A. P. Lyapin //Journal of Siberian Federal University. – Mathematics & Physics. –2009. P. 449–455.

15. Lyapin, A.P. The Cauchy Problem for MultidimensionalDifference Equations in Lattice Cones / A. P. Lyapin, S. Chandragiri // J. Sib.Fed. Univ. Math. Phys., 2020, 13(2), P. 187–196.

16. Moivre A. de De Fractionibus Algebraicis Radicalitate Immunibus ad Fractiones Simpliciores Reducendis, Deque Summandis Terminis Quarumdam Serierum Aequali Intervallo a Se Distantibus/ A. Moivre // Philosophical Transactions, 1722, V. 32, P. 162–178.

Приложение А

В этом разделе представлен код программы, написанный на встроенном языке системы компьютерной алгебра Maxima, который вычисляет сечение производящего ряда для решеточных путей. Пусть $\Delta = \{(1,0,1), (2,2,1),(2,1,3)\}$ с двумя последними фиксированными векторами.

```
nom:3$ /*колличество векторов*/
alpha1:[1,0,1]$
alpha2:[2,2,1]$
alpha3:[2,1,3]$
A:matrix(alpha1,alpha2,alpha3);
n:length(alpha1) $/* длина векторов */
perem:makelist(concat(z,i),i,1,n)$
perem1:[x,y,z]$
m:2$ /* количество зафиксированных (последних) векторов */
number:makelist(concat(k,i),i,nom-m+1,n)$
list:[3,4]$
proiz:1$
for i:1 while i<=m do proiz:proiz·list[i]!$
proiz$  /* =k_p!*...*k_n!*/
vozv:makelist(1,i,1,n)$ /*Создание единиичного списка размером n*/
for i:1 while i<= n do
for j:1 while j<=n do vozv[i]:vozv[i]·(perem[j])^(A[i][j]);
vozv$/*список из элементов вида z^alpha_i*/
znam:1$
for i:1 while i<=n-m do znam:znam-vozv[i];
znam$ /*Знаменатель сечения*/
F(list, proiz,znam) :=(sum(list[i],i,1,length(list))!/(proiz))/znam^(sum(list[i],i,1,length(list))+1)$ /* явная формула */
F(list, proiz,znam);
N:max(list[1],list[2])$
B:zeromatrix(N, N)$ /* Нулевая матрица*/
for i:1 thru N do B[1,i]:i+1;
for i:1 thru N do B[i,1]:i+1;
B$ /* Матрица начальных данных для рекуррентного соотношения */
```

```
for i:2 thru N do
(for j:2 thru N do B[i,j]:B[i−1,j]+B[i,j−1]);
F1:B[3,4]/znam^(sum(list[i],i,1,length(list))+1); /* Вычисление сечения через рекуррентное соотношение */
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

[1,1,1]

done

done

$$\frac{35}{(1-z1\,z3)^8}$$

done

done

done

$$\frac{35}{(1-z1\,z3)^8}$$

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ /В.В. Шайдуров
«16» июня 2022г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ ПРОИЗВОДЯЩИХ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ О РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЯХ

Руководитель _____ 16.06.22 доцент, кандидат физико-математических наук А.П. Ляпин

Выпускник _____ 16.06.22 В.С. Алексеев

Нормоконтролер _____ 23.06.22 Т.Н. Шипина

Красноярск 2022