На правах рукописи

ТУХВАТУЛЛИНА ЛЯЙСАН РИНАТОВНА

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ЗАДАННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск-2008

Работа выполнена в Красноярском государственном аграрном университете

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент Филиппов К.А.

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Мазуров В.Д.

доктор физико-математических наук,
профессор Созутов А.И.

Ведущая организация:

Иркутский государственный
педагогический университет

Защита состоится 30 июня 2008 года в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "____"______________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета ___________ Бушуева Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При изучении бесконечных групп естественно выделять и изучать классы групп с различными условиями конечности (периодичность, локальная конечность и т.д.). Изучение групп с разного рода условиями конечности началось еще в школе О.Ю. Шмидта (30-40-е годы). Это было связано с попытками обобщить на бесконечные группы некоторые результаты по конечным группам. Каждое условие само по себе или в сочетании с другими представляет собой крупное направление теории групп. За последние десятилетия в теории бесконечных периодических групп решены многие проблемы, предложены различные конструкции периодических групп, построено много серий примеров.

История периодических не локально конечных групп начинается с работы П.С. Новикова и С.И. Адяна [9], в которой доказана бесконечность свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ периода n с m порождающими при $m \geq 2$ и достаточно большом n. В период между анонсом П.С. Новикова и развернутой публикации [9] Е.С. Голод для каждого простого числа p построил конечно порожденную p-группу неограниченного периода [2]. В класс периодических не локально конечных групп попала и построенная А.Ю. Ольшанским [10] бесконечная группа, которая порождена двумя элементами простого нечетного порядка p и любая собственная ее подгруппа имеет порядок p. Здесь следует также отметить группы Р.И. Григорчука [3], конструкцию В.И. Сущанского конечно порожденных p-групп подстановок неограниченного периода [16], теорию групп преобразований однородных деревьев А.В. Рожкова [11], пример Лысенка [6]и Иванова [24] группы $B(n,r)$ четного периода r.

Все эти конструкции периодических не локально конечных групп обладали характерной особенностью — они не содержали конечные простые неабелевы группы. Естественно возник вопрос:

Существуют ли простые периодические не локально конечные группы, содержащие конечные простые неабелевы подгруппы?

В русле попыток решения этого вопроса появилось понятие насыщенности группы некоторыми системами конечных групп, введенное в 1993 г. А.К. Шлёпкиным [18].

Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$. Пусть группа G насыщена группами из некоторого множества $\mathfrak{M}$, и для любой группы $X \in \mathfrak{M}$ в G найдется подгруппа L, изоморфная X. В этом случае будем говорить, что G *насыщена множеством групп* $\mathfrak{M}$, а само множество $\mathfrak{M}$ будем называть *насыщающим множеством групп* для G.

Примеры периодических не локально конечных групп, насыщенных заданными множествами конечных групп, хорошо известны. Так, из основного результата работы [1] следует, что если X — конечное множество неединичных конечных групп нечетных порядков, содержащее циклическую группу порядка $n \geq 665$, то существует бесконечная простая периодическая группа G, для которой X — насыщающее множество. Для нечетных чисел n, больших 10^{10}, есть более удивительные примеры А.Ю. Ольшанского. В работе [10] (следствие 35.3) показано, что существует простая группа Шмидта G, т.е. бесконечная группа, все собственные подгруппы которой конечны, в которую вложима любая конечная группа нечетного порядка. Используя другие результаты А.Ю. Ольшанского, можно показать, что для любого конечного или счетного множества X, состоящего из конечных групп нечетного порядка и содержащего циклическую группу порядка $n > 10^{10}$, существует простая группа Шмидта с насыщающим множеством X. При изучении периодических групп, содержащих инволюции, большую роль играет простой, но фундаментальный факт, что две инволюции в периодической группе всегда порождают конечную подгруппу, которая к тому же достаточно прозрачно устроена — полупрямое произведение циклической подгруппы на подгруппу порядка 2. За последнее десятилетие получен ряд фундаментальных результатов по группам $B(m, n)$ четных периодов. Как оказалось, конечные подгруппы в таких группах содержатся в конечных прямых произведениях групп диэдра [6, 24]. Таким образом, группы $B(m, n)$ достаточно большого четного периода n насыщены прямыми произведениями групп диэдра, взятых в конечном числе.

Выбор насыщающего множества имеет важное значение для успеха описания тех или иных классов групп. Например, существуют простые локально конечные группы, для которых насыщающее множество состоит из конечных знакопеременных групп (О.Кегель). Насыщенность является естественным обобщением локального покрытия группы [5]. После завершения классификации конечных простых групп несколькими авторами (В.В. Беляев, А.В. Боровик, С. Томас, Б. Хартли, Ф. Шют) независимо были классифицированы бесконечные простые периодические линейные группы над полем характеристики $p > 0$ (комментарии к вопросу 1.75 из Коуровской тетради). Тем самым были описаны группы, обладающие локальными покрытиями простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. Они оказались простыми группами лиева типа над локально конечным полем. Вопрос о возможности отказа в этом последнем результате от условия локальной конечности исследуемой группы внесён Шлёпкиным в "Коуровскую тетрадь"под номером 14.101:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа конечного ранга?

Частичным решениям этого вопроса посвящен ряд работ А.К. Шлёпкина, А.И. Созутова, О.В. Васильевой, А.Г. Рубашкина, К.А. Филиппова, Д.В. Лыткиной, В.Д. Мазурова [7, 12, 15, 18, 19, 22].

А.К. Шлепкин изучил группы Шункова, насыщенные группами лиева типа ранга 1, а также периодические группы, насыщенные группами из множества $\{Re(q) | q = 3^{2n+1}\}$. А.К. Шлепкин и А.И. Созутов исследовали периодические группы с сильно вложенной подгруппой, насыщенные конечными простыми группами, а также бесконечные периодические группы, содержащие абелеву силовскую 2-подгруппу и насыщенные конечными простыми подгруппами. О.В. Васильева установила структуру групп Шункова, насыщенных центральными расширениями групп $L_2(q)$. А.Г. Рубашкин рассматривал конечные периодические группы ограниченного периода, насыщенные группами диэдра, как необходимый случай характеризации групп $L_2(P)$ в классе периодических групп. Им совместно с А.К.Шлёпкиным доказана конечность периодических групп, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами из конечного множества, не содержащего групп, в централизаторах силовских 2-подгрупп которых есть элементы нечётного порядка ≥ 5. К.А. Филиппов доказал, что периодическая группа G, насыщенная конечными простыми Z-группами, изоморфна либо $L_2(P)$, либо $Sz(Q)$, где P и Q – подходящие локально конечные поля. Им же получен критерий локальной конечности периодической группы, насыщенной группами диэдра, и доказанно, что периодическая финитно аппроксимируемая группа, насыщенная группами диэдра, является локально конечным диэдром. Д.В. Лыткина и В.Д. Мазуров доказали, что периодическая группа G, насыщенная конечными простыми группами $L_3(2^n)$, изоморфна $L_3(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2.

Продолжению исследований в данном направлении посвящена и настоящая диссертация.

Цель работы. Исследование периодических групп с заданным набором конечных подгрупп.

Основные результаты

1. Описание периодических групп, насыщенных произвольными множествами конечных проективных специальных унитарных групп размерности 3 над полями четного порядка (теорема 1).

2. Доказательство конечности периодической группы, насыщенной конечным множеством проективных специальных линейных и унитарных групп размерности три над конечными полями (теорема 2).

3. Описание периодических групп, насыщенных полудиэдарльными группами (теорема 3). В данном результате понятие полудиэдра обобщено следующим образом: группа D называется полудиэдром, если $D = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$, $d^{4n} = i^2 = 1$, $d^i = d^{2n-1}$.

Общая методика исследований. Методы локального анализа конечных групп приспосабливаются для целей исследования строения периодических групп. При этом используются машинные вычисления для установления некоторых свойств конечных групп.

Научная новизна и практическая ценность. Все результаты диссертационной работы являются новыми. Они носят теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы в теории групп и её приложениях.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, 2007), Международной конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2007), Международной конференции „Алгебра и её приложения“ (Красноярск, 2007), V Всесибирском конгрессе женщин-математиков (Красноярск, 2008). Они неоднократно обсуждались на семинарах при КрасГАУ и СФУ.

Публикации. Основные результаты опубликованы с полными доказательствами в работах [26] - [32], при этом статьи [26]- [30] написаны в нераздельном соавторстве с научным руководителем К.А. Филипповым и Д.В. Лыткиной, а работа [31] — с научным руководителем К.А. Филипповым. Работа [32] выполнена диссертанткой единолично. В работах [33]-[35], принадлежащих диссертантке, изложены вспомогательные результаты, полученные при помощи машинных вычислений.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы (78 наименований), занимает 65 страниц текста, набранного в пакете LaTeX. Нумерация теорем и лемм сквозная.

Содержание работы

Диссертация состоит из трёх глав, первая из которых носит предварительный характер: здесь собраны вспомогательные результаты, используемые в доказательстве основных результатов. Часть из них были получены в процессе работы и приведены с доказательствами.

Во второй главе диссертации изучаются периодические группы, насыщенные группами из множества $\Re$, состоящего из проективных специальных унитарных групп размерности три над полем четной характеристики. Здесь доказывается следующий результат.

Теорема 1. *Пусть бесконечная периодическая группа G насыщена группами из множества $\Re = \{U_3(2^n)\}$. Тогда G изоморфна группе $U_3(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.*

В [8] (вопрос 14.101) высказана гипотеза о том, что периодическая группа, насыщенная группами из множества простых конечных групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа над локально конечным полем. Как уже отмечалось, эта гипотеза подтверждена для случаев, когда $\Re$ состоит, соответственно, из групп Ри, проективных специальных линейных групп размерности 2, групп Сузуки и проективных специальных линейных групп размерности три над полями четной характеристики [7, 12, 17, 19]. Теорема 1 расширяет этот список.

Теорема 1 доказана в равном соавторстве с научным руководителем доцентом К.А. Филипповым и Д.В. Лыткиной, доказательство опубликовано в [30, 31].

В третьей главе исследуются периодические группы, насыщенные конечным множеством проективных специальных линейных и унитарных групп размерности три над конечными полями, и периодические группы, насыщенные полудиэдральными группами.

Примеры периодических не (локально) конечных групп, насыщенных конечным множеством конечных групп (даже одной группой простого порядка $n \geq 665$) приведены выше. Однако, для случая, когда $\Re$ состоит из конечного множества конечных простых неабелевых групп, аналогичные примеры не локально конечных групп неизвестны. В [22] высказана гипотеза о том, что периодическая группа, насыщенная конечным множеством $\Re$ конечных неабелевых простых групп, конечна, и там же эта гипотеза подтверждена для случая, когда централизаторы силовских 2-подгрупп групп из $\Re$ не содержат элементов нечетного порядка, большего трех, а также в случаях $\Re = \{U_3(9)\}$ [25], $\Re = \{L_3(27)\}$ [26], $\Re = \{L_3(11)\}$ [27].

В связи с этим интересно исследовать группы, насыщенные конечным множеством конечных простых групп, в которых централизатор силовской 2-подгруппы содержит элемент нечетного порядка, большего трех. Все такие конечные простые группы перечислены в [4].

В первом параграфе третьей главы диссертации доказан следующий результат.

Пусть δ — переменная, принимающая значения + или −. Через $L_3^\delta(p^n)$ обозначается группа $L_3(p^n)$, если $\delta = +$ и группа $U_3(p^n)$, если $\delta = -$.

Теорема 2. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\Re = \{L_3^{\delta_i}(p_i^{n_i}) | i = 1, 2, \ldots, m\}$. Тогда группа G изоморфна группе $L_3^{\delta_j}(p_j^{n_j})$ для некоторого $1 \leq j \leq m$.*

Теорема 2 доказана в нераздельном соавторстве с научным руководителем доцентом К.А. Филипповым и Д.В. Лыткиной, доказательство опубликовано в [28, 29].

В [13] рассмотрен случай, когда множество $\Re$ состоит из конечных диэдров, т.е. конечных групп, порожденных двумя инволюциями. Там же доказана теорема о том, что если G — периодическая группа, насыщенная группами диэдра и S — её силовская 2-подгруппа, то либо S — группа порядка 2 и G — (локально) конечный диэдр (согласно [13] группа называется локально конечным диэдром, если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных диэдров), либо $G = ABC = ACB = BCA = CBA$, где A — централизатор некоторой инволюции z из центра S, $B = O(C_G(v))$, где v — произвольная инволюция из S, отличная от z и $C = O(C_G(zv))$. При этом A — (локально) конечный диэдр, а B, C — (локально) циклические группы. Пока ещё не известно, существуют ли не локально конечные группы, удовлетворяющие этой теореме, хотя в частном случае это так (периодическая финитно аппроксимируемая группа, насыщенная группами диэдра, является локально конечным диэдром [17]).

В связи с этим интересно исследовать случай, когда группа насыщена полудиэдрами. Понятие полудиэдра обычно применяется для 2-групп. В диссертации понятие полудиэдра обобщается, а именно: *группа D называется конечным полудиэдром, если $D = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$, $d^{4n} = i^2 = 1$, $d^i = d^{2n-1}$. Будем называть группу локально конечным полудиэдром, если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных по-*

лудиэдров.

Таким образом, полудиэдральная группа не обязательно должна быть 2-группой.

Во втором параграфе третьей главы доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — бесконечная периодическая группа, насыщенная конечными полудиэдрами. Тогда G — локально конечный полудиэдр и $G = B \leftthreetimes \langle i \rangle$, где $B = V \times H$, V — конечная циклическая 2-группа, H — локально циклическая группа, не содержащая инволюций, i — инволюция. Подгруппа $V \leftthreetimes \langle i \rangle$ является конечным полудиэдром, а подгруппа $H \leftthreetimes \langle i \rangle$ — локально конечным диэдром.*

Результат, доказанный в теореме 3, получен диссертанткой лично и опубликован в [32].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Константину Анатольевичу Филиппову за постановку задачи, помощь в работе и внимание с его стороны.

Список литературы

[1] Адян С.И. Периодические произведения групп/ С.И. Адян// Тр. мат. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. – М: Наука, 1976. – Т. 142. – С. 3–21.

[2] Голод, Е.С. О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах/ Е.С. Голод// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т. 28, № 2.– С. 273–276.

[3] Григорчук, Р.И. К проблеме Бернсайда о периодических группах/ Р.И. Григорчук// Функцион.анализ и его приложения. – 1980. – Т.14, №1. – С.53–54.

[4] Кондратьев, А.С. 2-сигнализаторы конечных простых групп/ А.С. Кондратьев, В.Д. Мазуров// Алгебра и логика. – 2003. – Т. 42, № 5. – С. 333–348.

[5] Конторович, П.Г. Структурные вопросы теории групп/ П.Г. Конторович, А.С. Пекелис, А.И. Старостин// Матем. зап. Уральск. ун-та. – 1961. – №3. – С. 3–50.

[6] Лысёнок, И.Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода/ И.Г. Лысёнок// Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – С. 4–5.

[7] Лыткина, Д.В. Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$/ Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров// Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 5. – С. 520–535.

[8] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск, 2002.

[9] Новиков, П.С. О бесконечных периодических группах. – I, II, III/ П.С. Новиков, С.И. Адян//Изв. АН СССР. Сер.матем.- 1968.- Т.32, №№ 1,2,3. – С. 212–244, 251–524, 709–731.

[10] Ольшанский, А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах/ А.Ю. Ольшанский. – М.: Наука, 1989.

[11] Рожков, А.В. Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев/ А.В. Рожков// Алгебра и логика. – 1987. – Т.26, №3. – С. 268–269.

[12] Рубашкин, А.Г. О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$/ А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов// Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1388–1392.

[13] Рубашкин, А.Г. Группы, насыщенные заданными множествами конечных групп: дис. ... канд. физ.–мат. наук/А.Г. Рубашкин. – Красноярск, 2006.

[14] Санов, И.Н. Решения проблемы Бернсайда для периода 4/ И.Н. Санов// Учен. записки ЛГУ. Сер. матем. – 1940. – Т.10. – С. 166–170.

[15] Созутов, А.И. О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами/ А.И. Созутов, А.К. Шлепкин//Матем. заметки. – 2002. – Т. 72, № 3. – С. 433–447.

[16] Сущанский, В.И. Периодические p-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда/ В.И. Сущанский//ДАН СССР. – 1979. – Т. 247, № 3. – С. 557–561.

[17] Филиппов, К.А. Группы, насыщенные конечными неабелевыми простыми группами и их центральными расширениями: дис. ... канд. физ.–мат. наук/К.А. Филиппов. – Красноярск, 2005.

[18] Шлепкин, А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы/ А.К. Шлепкин// III межд. конф. по алгебере 23–28 августа 1993: сб. тез. – Красноярск, 1993. – С. 369.

[19] Шлёпкин, А.К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами/ А.К. Шлепкин// Матем. труды. – 1998. – Т. 1, № 1. – С. 129–138.

[20] Шлёпкин, А.К. О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$/ А.К. Шлепкин// Алгебра и логика. – 1998.– Т. 37, № 5. – С. 606–615.

[21] Шлёпкин, А.К. О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами/ А.К. Шлепкин// Алгебра и логика.– 1998.– Т. 37, № 2.– С. 224–245.

[22] Шлепкин, А.К. О группах, насыщенных конечным множеством групп/ А.К. Шлепкин, А.Г. Рубашкин// Сиб. матем. журн. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1397–1400.

[23] Шунков, В.П. О периодической группе с почти регулярными инволюциями/ В.П. Шунков// Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7, №1. – С.113–121.

[24] Ivanov, S.V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents/ S.V. Ivanov// Int. J. of Algebra and Computation. – 1994. – V. 4. – P. 2.

[25] Lytkina, D.V., Periodic groups saturated by the group $U_3(9)$/ D.V. Lytkina//Сиб. электрон. матем. изв. – 2007. – V. 4. – P. 300–303.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[26] Тухватуллина, Л.Р. Периодические группы, насыщенные группой $L_3(11)$/ Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов//Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2007. – № 6 – С. 81–88.

[27] Тухватуллина, Л.Р. Периодические группы, насыщенные группой $L_3(27)$/ Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов//Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2007. – № 6 – С. 89–92.

[28] Тухватуллина, Л.Р. О периодических группах, насыщенных группами из конечного множества линейных групп размерности 3/ Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов//Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2007. – № 6. – С. 93–98.

[29] Тухватуллина, Л.Р. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп/ Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов// Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 395–400.

[30] Тухватуллина, Л.Р. О периодических группах, насыщенных группами $U_3(2^n)$/ Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов//Алгебра и логика, (в печати)

[31] Тухватуллина, Л.Р. О периодических группах, насыщенных группами $U_3(2^n)$/ Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов//Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2007. – № 6. – С. 119–128.

[32] Тухватуллина, Л.Р. О строении периодических групп, насыщенных полудиэдрами/ Л.Р. Тухватуллина// Сиб. электрон. матем. изв. – 2008. Т. 5. – С. 14–19.

[33] Тухватуллина, Л.Р. Об одном алгоритме вычисления элементов конечного поля/ Л.Р. Тухватуллина//Молодежь Сибири - науке России; сб. мат. Межвузовской научно-практической конф.; СИБУП, Красноярск, 2006. – Ч. 2. – С. 224–231.

[34] Тухватуллина, Л.Р. Об одном алгоритме вычисления элементов конечного поля/ Л.Р. Тухватуллина// Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2007. – № 5. – С. 92-98

[35] Тухватуллина, Л.Р. Об алгоритме вычисления групп $GL_3(9)$, $SL_3(9)$, $PSL_3(9)$, $PSU_3(9)$/ Л.Р. Тухватуллина// Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2007. – № 5. – С.99–105.

Тезисы конференций

[36] Тухватуллина, Л.Р. Об алгоритме перечисления элементов группы/ А.А. Кузнецов, С.А. Тарасов, Л.Р. Тухватуллина, А.К. Шлепкин// Сб. тез. Междунар. конф. „Алгебра и её приложения“, посвящ. 75-летию В.П. Шункова. – Красноярск, 2007. – С. 83.

[37] Тухватуллина, Л.Р. О периодических группах, насыщенных группами $U_3(2^n)$/ Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов //Мат. XLV Междунар. научн. студ. конф. – НГУ. – Новосибирск, 2007. – С. 14.

[38] Тухватуллина, Л.Р. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами $L_3(11)$, $L_3(27)$/ Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов//Междунар. российско-китайский семинар: Алгебра и логика. – Иркутск, 2007.

[39] Тухватуллина, Л.Р. О периодических группах, насыщенных полудиэдрами/ Л.Р. Тухватуллина//Мат. V Всесибирского конгресса женщин-математиков. – Красноярск: РИО СФУ, 2008. – С. 394.