На правах рукописи

Куликов Владимир Русланович

Решения и формулы Варинга для системы n алгебраических уравнений от n неизвестных

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном обрадовательном учреждении высшего профессионального образования "Сибирский федеральный университет".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Цих Август Карлович.
Официальные оппоненты:	Тетенев Андрей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Горно-Алтайский государственный университет», кафедра математического анализа, заведующий кафедрой;
	Яковлев Евгений Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева» кафедра высшей математики, доцент.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет».

Защита состоится 10 октября 2014 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте http://www.sfu.kras.ru.

Автореферат разослан «   »   2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Федченко Дмитрий Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В 1921 году Г. Меллин[1] получил формулу для решения общего приведенного алгебраического уравнения

$$y^m + x_1 y^{m_1} + \ldots + x_p y^{m_p} - 1 = 0. \tag{1}$$

Мы называем это уравнение *общим* по той причине, что все коэффициенты независимо друг от друга пробегают поле комплексных чисел.

Решение $y(x) = y(x_1, \ldots, x_p)$ уравнения (1) (которое называют *общей алгебраической функцией*) было представлено им в виде кратного интеграла (одного из представителей класса интегралов Меллина-Барнса[2]), а также в виде степенного ряда гипергеометрического типа. Ряды гипергеометрического типа представляются конечной суммой гипергеометрических рядов по Горну[3]: отношения соседних коэффициентов последних рядов являются рациональными функциями от переменных суммирования ряда.

Приведенное алгебраическое уравнение (1) получается фиксацией двух коэффициентов в общем алгебраическом уравнении степени m. Поскольку решение последнего уравнения биоднородно зависит от коэффициентов, такую фиксацию можно сделать при любой паре мономов, не теряя информации о решениях[4].

Краткая хронология событий, связанных с решением алгебраических уравнений, следующая. В 1757 г. Ламберт разложил корень трехчлена $y^p + y + z$ в степенной ряд по параметру z. В дальнейшем, разложения в ряды отдельных алгебраических функций были получены Эйлером

[1] Mellin H.J., *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma*, C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **172** (1921), 658–661.

[2] Жданов О.Н., Цих А.К., *Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов*, Сиб. матем. журн. **39:2** (1998), 282–298.

[3] Horn J., *Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen,* Math. Ann. **117** (1940), 384–414.

[4] M. Passare, A. Tsikh, *Algebraic equations and hypergeometric series*, The legacy of Niels Henrik Abel (Oslo, Norway, 2002), Springer-Verlag, Berlin, 2004, 653–672.

и Чебышёвым. Поскольку после работ Абеля и Галуа классическая алгебра утратила монополию на исследование алгебраических уравнений, математики обратились к аналитическим средствам, и началось изучение интегральных представлений общих алгебраических функций и их разложений в степенные ряды. При различных предположениях относительно вида исходного уравнения такие разложения были получены в работах Линдеманна[5], Меллина[6] и Биркелана[7].

Подход Меллина основан на применении интегрального преобразования Меллина к решению исходного уравнения, в то время как Биркелан получил разложения решений в степенные ряды гипергеометрического типа на основе метода Лагранжа для вычисления неявной функции.

Третий (дифференциально-аналитический) подход к решению алгебраических уравнений был реализован в 1937 году К. Мэйром[8]. Он предъявил естественную систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет общая алгебраическая функция. Эта система явилась прототипом ставшей знаменитой гипергеометрической системы GKZ (Гельфанда-Капранова-Зелевинского)[9], 1989 г. Используя багаж сведений о решениях GKZ-системы, Б.Штурмфельс[10] в 2000-м году выписал все ветви общей алгебраической функции в виде так называемых гамма-рядов. Его идеи были существенно развиты М. Пассаре и А.К. Цихом[11]. Также дифференциально-аналитический подход был развит в работах

[5]Von Lindemann F. *Über die Auflösung der algebraischen Gleichungen durch transcendente Functionen, Nachrichten von der Königl.* Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, **7**, (1884) 245–248.

[6]Mellin H.J., Op. cit.

[7]Birkeland R., *Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen,* Math. Z. **26**(1927), 565–578.

[8]Mayr K., *Über die Auflösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen,* Monatshefte fur Mathematik und Physik **45** (1937),280–313.

[9]Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М., *Гипергеометрические функции и торические многообразия*, Функц. анализ и его прил., **23:2**(1989), 12–26.

[10]Sturmfels B. *Solving algebraic equations in terms of A-hypergeometric series*, Discrete Math. **210:1–3**(2000), 171–181.

[11]M. Passare, A. Tsikh, Op. cit.

Т.М. Садыкова[12,13]. Одновременно с третьим подходом развивался подход Меллина на основе теории многомерных вычетов[14]. Исследования алгебраических функций в тесной связи с теорией гипергеометрических функций и с математической физикой проводились во многих работах Переломова[15], Бёйкерса[16,17], Барсана и Немнеса[18], Бода[19], Пассаре, Садыкова и Циха[20].

С помощью таких инструментов, как гипергеометрические ряды и многомерные вычеты, был получен новый метод описания монодромии общей алгебраической функции $y(x)$, основанный на аналитических продолжениях друг в друга гипергеометрических рядов и интегралов Меллина-Барнса[21] (2012).

Переход от скалярного уравнения (1) к системе уравнений был начат в статье И.А. Антиповой[22], где она, следуя подходу Меллина, получила решение для нижнетреугольной системы алгебраических уравнений, когда первое уравнение зависит только от первой неизвестной y_1, второе от первых двух y_1, y_2 и т.д., последнее n-е зависит от всех n неизвестных $y_1, \ldots, y_n$. Отметим, что нижнетреугольные системы играют важную

[12]Садыков Т.М., *О многомерной системе дифференциальных гипергеометрических уравнений,* Сиб. матем. журн., **39:5** (1998), 1141–1153.

[13]Sadykov T., *On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type*, Mathematica Scandinavica, **91:1**(2002), 127–149.

[14]Семушева А.Ю., Цих А.К., *Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений*, Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. научн. тр. - Красноярск: КрасГУ, 2000 134–146.

[15]Переломов А. М., *Гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений*, ТМФ, **140:1** (2004), 3–13.

[16]Beukers F., *Algebraic A-hypergeometric functions,* Inventiones mathematicae, **180:3** (2010), 589–610.

[17]Beukers F., *Irreducibility of A-hypergeometric systems,* Idagationes Mathematicae **21:1** (2011), 30–39.

[18]V. Bârsan, G.A. Nemnes: *Physical relevance of the Passare-Tsikh solution of the principal quintic equation*, J.Adv.Res.Phys. **2:1** (2011) 1–6.

[19]Bod E., *Algebraicity of the Appell-Lauricella and Horn hypergeometric functions,* Differ. Equations **252:1** (2012), 541–566.

[20]Passare M., Sadykov T. and Tsikh A., *Nonconfluent hypergeometric functions in several variables and their singularities,* Compositio Mathematica, **141:3** (2005), 787–810.

[21]Антипова И.А., Михалкин Е.Н., Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа, Сборник статей, Тр. МИАН, 279, МАИК, М., 2012, 9–19.

[22]Антипова И.А., *Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды*, Сиб.матем.журн., **44:5** (2003), 972–980.

роль в задачах о суперпозиции алгебраических функций[23], поскольку n-я координата y_n решения такой системы есть последовательная суперпозиция всех предыдущих координат.

Следует заметить, что применение подхода Меллина к более широкому классу систем, чем нижнетреугольные, сопряжено с определенными трудностями. А именно, результаты исследований данной диссертации показали, что формальный интеграл Меллина-Барнса для более общих систем, как правило, имеет пустую область сходимости. Поэтому потребовалось обосновать справедливость предсказанной В.А. Степаненко[24] формулы для решений систем в виде степенного ряда и привести ее к более совершенной (регуляризованной) форме. При этом, несмотря на имеющийся алгоритм Нильсон-Пассаре-Циха[25] для нахождения области сходимости интеграла Меллина-Барнса, оставался открытым вопрос о формулировке и доказательстве критерия сходимости гипергеометрического интеграла, представляющего решение общей системы алгебраических уравнений.

Цель диссертации

Цель настоящей диссертации — получить более совершенную формулу в виде ряда гипергеометрического типа для решения системы общих алгебраических уравнений, найти критерий сходимости гипергеометрического интеграла для решения, и в качестве применения получить многомерный аналог формул Варинга для степенных сумм корней системы.

[23]Васильев В.А., *Топология дополнений к дискриминантам,* М.: Фазис, 1997.

[24]Степаненко В.А. *О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций*, Вестник КрасГУ, **1** (2003), 35–48.

[25]Nilsson L., *Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions,* Doctoral Thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

Методы исследования

Для получения результатов первой главы используется линеаризация системы алгебраических уравнений, а также многомерная формула логарифмического вычета А.П. Южакова.

Во второй главе используется алгоритм Нильсон-Пассаре-Циха для вычисления области сходимости кратного интеграла Меллина-Барнса, а также теорема о многомерных вычетах, основанная на принципе разделяющих циклов.

Научная новизна

Основные результаты данной работы являются новыми, они носят теоретический характер.

Результаты исследований диссертационной работы высветили принципиально новые моменты в аналитическом аспекте теории алгебраических функций. Первый момент связан с предупреждением Б. Штурмфельса[26] о том, что решения для систем уравнений не являются A-гипергеометрическими функциями с конфигурацией A, происходящей из "трюка Кэли" (а являются таковыми после деления на якобиан системы). Результаты первой главы показывают, что решения систем, а также формулы Варинга для них, представляются регуляризациями гипергеометрических рядов. Также неожиданными являются результаты второй главы, где обнаружена "формальность" интегралов Меллина-Барнса, представляющих решения систем, а именно, такие интегралы могут иметь пустую область сходимости. Для систем с двумя уравнениями получен критерий "неформальности", а в общем случае — необходимое условие.

[26] Sturmfels B. Op. cit.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в многомерном комплексном анализе, алгебраической геометрии и математической физике.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

1) Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», г. Новосибирск, НГУ, 2010 г.;

2) Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», г. Новосибирск, НГУ, 2012 г.;

3) IV Российско-Армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, г. Красноярск, СФУ, 2012 г.;

4) Летней школе-конференции по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа для молодых математиков европейской части России, Ярославль, 2013 г.;

5) В Сибирском федеральном университете на семинаре по многомерному комплексному анализу под руководством профессора А.К. Циха и профессора А.М. Кытманова, г. Красноярск, 2011–2014 гг.

Также результаты первой главы были включены в монографию Т.М. Садыкова и А.К. Циха «Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных», М.: Наука, 2014.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы с исчерпывающей полнотой в 3 статьях. Все статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Одна статья совместная, ее результаты получены в неразрывном соавторстве с В.А. Степаненко.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав основного текста и списка литературы из 32 наименований, содержит 2 рисунка. Общее число страниц диссертационной работы — 58.

Содержание работы

Во **введении** раскрывается актуальность темы диссертационного исследования, а также кратко перечисляются основные результаты. Основной текст разбит на две главы.

В диссертации рассматривается приведенная система n уравнений

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda - 1 = 0,\ j = 1,\dots,n, \tag{2}$$

от n неизвестных $y = (y_1,\dots,y_n)$, где набор показателей $\Lambda^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ фиксирован, а все коэффициенты $x_\lambda^{(j)}$ – переменные. Разумеется предполагается, что множество $\Lambda^{(j)}$ в j-м уравнении не содержит точек $\lambda = (0,\dots,m_j,\dots,0)$ и $\lambda = 0$, являющихся показателями выделенных мономов $y_j^{m_j}$ и y^0 с фиксированными коэффициентами 1 и -1. Несложными алгебраическими процедурами к виду (2) сводится любая система n полиномиальных уравнений от n неизвестных[27].

Обозначим через Λ дизъюнктную сумму $\bigsqcup \Lambda^{(j)}$, и пусть N — число коэффициентов в системе (2) (то есть мощность множества Λ). Показатели λ мономов $y^\lambda = y_1^{\lambda_1}\dots y_n^{\lambda_n}$ в системе (2) можно представить как $(n\times N)$-матрицу

$$\Phi = (\lambda^1,\dots,\lambda^N),$$

где λ^k — Это вектор-столбцы из Λ. Предполагается, что в рамках каждого уравнения порядок столбцов λ произвольный, но фиксированный.

[27]Антипова И.А., Цих А.К., *Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных*, Изв. РАН. Сер. матем., **76:5** (2012), 29–56.

Элементами $\lambda \in \Lambda$ индексируются координаты векторов $x = (x_\lambda)$ коэффициентов системы. Все пространство коэффициентов обозначим $\mathbb{C}^N$.

Через $\hat{y}(x)$ обозначим ветвь решения $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ системы (2) с условием $y(0) = (1, \ldots, 1)$. Эту ветвь назовем *главным решением.*

Для формулировки основных результатов **первой главы** нам потребуются следующие обозначения. Для каждой строки φ_j матрицы показателей Φ и целых $\mu_j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ введем аффинную функцию

$$l_j(\alpha) = \frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{m_j}\langle \varphi_j, \alpha\rangle, j = 1, \ldots, n.$$

С помощью этих функций определим следующее множество индексов

$$P_\alpha = \{j \in \{1, ..., n\} : l_j(\alpha) \neq 0\}.$$

Заметим, что Φ естественным образом разбивается на блоки, соответствующие $\Lambda^{(j)}$:

$$\Phi = \left(\Lambda^{(1)}, ..., \Lambda^{(n)}\right),$$

поэтому каждую ее строку φ_i можно представить в виде последовательности векторов $\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(n)}$.

Для системы (2) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Моном $\hat{y}^\mu = \hat{y}^\mu(x)$ главного решения системы* (2) *представляется рядом гипергеометрического типа*

$$\hat{y}^\mu = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}} c_\alpha x^\alpha$$

с коэффициентами c_α, вычисляемыми по формуле

$$\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) + 1\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(l_j(\alpha) - \left|\alpha^{(j)}\right| + 1\right)} \det \left\| \delta_i^j - \frac{\langle \varphi_i^{(j)}, \alpha^{(j)} \rangle}{m_j l_j(\alpha)} \right\|_{(i,j) \in P_\alpha \times P_\alpha}. \qquad (3)$$

Доказательство сформулированной теоремы основано на линеаризации системы уравнений и применении многомерной формулы логарифмического вычета методом А.П. Южакова[28].

Отметим, что для некоторого подкласса систем (2) “полуфабрикат” формулы (3) был получен В.А. Степаненко[29] на основе формального подхода Меллина, то есть игнорирования расходимости преобразования Меллина для функции $\hat{y}^{\mu}(x)$ и интеграла Меллина-Барнса. Отличие формулы (3) от всех полученных ранее формул для решения систем с дополнительными ограничениями состоит в том, что коэффициент c_α не имеет аналитической зависимости от α, поскольку даже порядки определителей в ней зависят от α.

Для получения многомерных формул Варинга нет необходимости фиксировать свободные члены в уравнениях (2), поэтому рассмотрим систему

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)} \cup \{0\}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda = 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Однако теперь потребуем условие на множество $\Lambda^{(j)}$, состоящее в том, что для $\lambda \in \Lambda^{(j)}$ выполняется неравенство

$$|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n < m_j, j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

В этом случае, по теореме Безу, система (4) имеет $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ решений $y^{(\nu)}(x)$. Отметим, что в (4) вектор $x = (x_\lambda^{(j)})$ имеет $N + n$ координат.

Степенной суммой степени $\mu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ называется выражение

$$S_\mu = \sum_{\nu=1}^{M} \left(y^{(\nu)}(x)\right)^{\mu}.$$

[28]А. П. Южаков, *О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды*, Матем. сб., **97(139):2(6)** (1975), 177—192.
[29]Степаненко В.А., Op. cit.

Рассмотрим $(n \times N)$-матрицу χ, i-я строка которой представляет характеристическую функцию подмножества $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, то есть элементы этой строки равны 1 на местах $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ и 0 на всех остальных местах $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 2. *При условии* (5) *для любого* $\mu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ *степенная сумма* S_μ *корней системы* (4) *представляется в виде многочлена от коэффициентов* $x = (x_\lambda)$ *системы по формуле*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^{N+n}_{\geqslant} 0 \\ (D_m \chi - \Phi)\alpha = \mu}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \prod_{j=1}^{n} \left|\alpha^{(j)}\right|! \det \left\| m_j \delta_i^{(j)} - \frac{\langle \varphi_j^{(i)}, \alpha^{(i)} \rangle}{l_j(\alpha)} \right\|_{(i,j) \in P_\alpha \times P_\alpha} x^\alpha, \quad (6)$$

где $P_\alpha = \{j \in \{1, ..., n\} : l_j(\alpha) \neq 0\}$, *а* D_m *— диагональная* $n \times n$*-матрица с диагональными элементами* m_j *степеней системы.*

Ранее В.А. Болотовым[30] была найдена многомерная версия формул Варинга только для степенных сумм вида

$$\sum_{\nu=1}^{M} \left(y_j^{(\nu)}\right)^{\mu_j} = S_{(0,\dots,\mu_j,\dots,0)},$$

то есть для отдельных координат решения.

Во **второй главе** диссертации исследуется вопрос о представлении решения системы (2) в виде интеграла Меллина-Барнса.

В работах И.А. Антиповой[31] и В.А. Степаненко[32] приводится интегральная формула для монома решения системы алгебраических уравнений вида (2). Однако, в работе Антиповой рассматривается лишь класс нижнетреугольных систем, а в работе Степаненко интегральная формула приводится без исследования вопроса сходимости интеграла и без обоснования существования обращения преобразования Меллина. Схема применеия преобразования Меллина следующая: с помощью линеаризации системы вычисляется результат преобразования Меллина для решения

[30] Айзенберг Л.А., Южаков А.П., *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе,* - Новосибирск: Наука, 1979.

[31] Антипова И.А., Op. cit.

[32] Степаненко В.А., Op. cit.

системы, из которого само решение получается в виде обратного преобразования Меллина. Напомним, что преобразование Меллина функции $F(x)$ определяется интегралом

$$M[F](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} F(x) x^z \frac{dx}{x},$$

где $x^z = x_1^{z_1} \dots x_N^{z_N}$, $\frac{dx}{x} = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_N}{x_N}$.

Указанная схема правомерна, например, при условии следующей теоремы И.А. Антиповой[33]:

Теорема 3. *Если $F(x) \in M^U_\Theta$, то ее преобразование Меллина существует, голоморфно в трубчатой области $U + i\mathbb{R}^N$ и справедлива формула обращения $M^{-1}M[F] = I[F]$, т.е.*

$$\frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^N} x^{-z} dz \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} F(\xi) x^{z-I} d\xi = F(x), x \in S_{k\Theta},$$

где $a \in U$.

Здесь U, Θ – выпуклые области в $\mathbb{R}^N$, причем Θ содержит начало координат, а M^U_Θ – векторное пространство функций, голоморфных в секториальной области $\mathrm{Arg}^{-1}(\Theta)$ и с ограничением на рост

$$|F(x)| < const \left|x^{-a}\right|, \;\; a \in U.$$

В случае $n = 1$ И.А. Антиповой удалось найти выпуклые области U и Θ, при которых моном решения $y^\mu(x)$ принадлежит классу M^U_Θ.

Результаты Антиповой об обращении прямого и обратного преобразования Меллина вместе с сформулированной ниже теоремой 4 показывают, что для $n > 1$ приведенная схема не всегда применима. Причиной этого служит тот факт, что обратное преобразование Меллина (7) для монома решения сходится не для любой системы. Однако, в случае сходимости интеграла (7) будет представлять моном решеия $y^\mu(x)$.

[33] Антипова И.А., *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений*, Матем. сб., **198:4**(2007), 3–20.

Формальная интегральная формула для монома y^μ, $\mu > 0$ ($\mu_1 > 0$, $\ldots$, $\mu_n > 0$) решения системы вида (2) приводилась, например, в работе Степаненко[34]. После некоторых преобразований соответствующее y^μ выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^N}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}\Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}u_\lambda^{(j)}+1\right)}Q(u)x^{-u}du, \qquad (7)$$

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\left\{u\in\mathbb{R}^N_{>0}, \langle\varphi_j,u\rangle<\mu_j, j=1,...,n\right\},$$

а $Q(u)$ — многочлен, выражаемый определителем

$$Q(u)=\frac{1}{m_1\ldots m_n}\det\left\|\delta_i^j\left(\mu_j-\langle\varphi_j,u\rangle\right)+\langle\varphi_j^{(i)},u^{(i)}\rangle\right\|_{i,j=1}^{n}.$$

Теорема 4. *Если интеграл* (7) *сходится, то все матрицы вида*

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)}\end{pmatrix},$$

где каждый вектор-столбец $\lambda^{(j)}=\left(\lambda_1^{(j)}\ldots\lambda_n^{(j)}\right)^T$ *пробегает соответсвующее множество* $\Lambda^{(j)}$, *положительно определены.*

В параграфе 8 мы покажем, что для $n=2$ приведенное условие является также и достаточным. А именно, рассмотрим систему из двух алгебраических уравнений от двух неизвестных y_1, y_2:

$$\begin{cases} y_1^{m_1}+\sum\limits_{i=1}^{p_1}x_i^{(1)}y_1^{\alpha_i^{(1)}}y_2^{\beta_i^{(1)}}-1=0,\\ y_2^{m_2}+\sum\limits_{j=1}^{p_2}x_j^{(2)}y_1^{\alpha_j^{(2)}}y_2^{\beta_j^{(2)}}-1=0.\end{cases} \qquad (8)$$

[34]Степаненко В.А. Op. cit.

Теорема 6. *Если $n = 2$, то интеграл (7) для системы (8) имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда положительны все показатели $\alpha_j^{(1)}$, $\beta_i^{(2)}$ и все определители $\Delta_{ij} = \alpha_i^{(1)}\beta_j^{(2)} - \alpha_j^{(2)}\beta_i^{(1)}$.*

В основе доказательства теорем 4 и 6 лежит алгоритм Нильсон-Пассаре-Циха[35] для вычисления области сходимости кратного интеграла Меллина-Барнса, а также теорема о многомерных вычетах, основанная на принципе разделяющих циклов[36,37].

Основные результаты

1) Получена формула для решения системы n алгебраических уравнений от n неизвестных в виде ряда гипергеометрического типа.
2) Получены формулы для степенных сумм решений системы в виде многочленов от её коэффициентов (многомерные аналоги формул Варинга).
3) Найдено необходимое условие сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего моном решения системы n алгебраических уравнений.
4) Доказан критерий сходимости интеграла Меллина–Барнса для системы двух алгебраических уравнений.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Августу Карловичу Циху за постановку задачи и внимание к работе.

[35]Nilsson L., *Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions,* Doctoral Thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009.

[36]Tsikh A.K., *Multidimentional residuses and their applications,* Amer. Math. Soc. — Providence. – 1992.

[37]Кытманов А.М., Цих А.К., *Интегральные представления и вычеты (по работам красноярской школы)* Коплексный анализ в современной математике: К 80-летию со дня родения Б.В. Шабата. М.: Фазис, 2001. С. 198–216.

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете при поддержке гранта Правительства РФ (Договор №14.Y26.31.0006) для проведения исследований под руководством ведущих ученых, кроме того, автор был поддержан грантом РФФИ, № 14-01-31265 мол_а.

Работы автора по теме диссертации

[1] В.Р. Куликов, Вычисление мономиальной функции для решения общей системы алгебраических уравнений, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., т.5, №3, 2012, С. 409–416.

[2] V.R. Kulikov, Conditions for Convergence of the Mellin–Barnes Integral for Solution to System of Algebraic Equations, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., т.7, №3, 2014, С. 339–346.

[3] В.Р. Куликов, В.А. Степаненко, О решениях и формулах Варинга для систем n алгебраических уравнений от n неизвестных, Алгебра и анализ, т. 26, №5, 2014.