На правах рукописи

Мышкина Евгения Константиновна

О ВЫЧЕТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ И СТЕПЕННЫХ СУММАХ КОРНЕЙ СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{C}^n$

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2015

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Кытманов Александр Мечиславович

Официальные оппоненты: Знаменский Сергей Витальевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБУ «Институт программных систем им. А. К. Айламазяна» РАН, исследовательский центр системного анализа, заведующий лабораторией;

Михалкин Евгений Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева» кафедра математического анализа и методики обучения математике в вузе, доцент

Ведущая организация: ФГБУ «Институт математики им. С.Л.Соболева» СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится 29 мая 2015 г. в 13.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «____» апреля 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Федченко Дмитрий Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Исследование систем алгебраических уравнений является классической задачей. Частью ее является задача исключения неизвестных. Для двух переменных и систем из двух уравнений она решается с помощью результанта Сильвестра. Для систем из большего числа уравнений хорошо известна классическая схема исключения неизвестных, но она, как правило, является весьма трудоемкой. В настоящее время общепринятым методом исключения неизвестных является метод базисов Гребнера, созданный в работах Бухбергера и его учеников.

Модифицированный метод исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ возник в работе Л.А.Айзенберга [1]. Основная идея метода заключается в нахождении степенных сумм корней системы с помощью формулы многомерного логарифмического вычета, не вычисляя самих корней, а затем в использовании классических рекуррентных формул Ньютона для построения результанта. В отличие от классического метода исключения он менее трудоемок и не увеличивает кратности корней. Дальнейшая его разработка продолжена в монографиях [2, 3, 4]. В качестве приложений этой теории были рассмотрены системы нелинейных уравнений, возникающих в химической кинетике и зависящих от параметров.

Во многих прикладных задачах возникают также неалгебраические системы уравнений, состоящих из экспоненциальных многочленов, т.е. из функций конечного порядка роста [5]. Для систем неалгебраических уравнений, множество корней которых, как правило, бесконечно, степенные суммы корней в положительной степени, вообще говоря, являются расходящимися рядами. Но степенные суммы корней в отрицательной степени часто являются сходящимися. Возникает задача о их вычислении через коэффициенты Тейлора функций, входящих в систему. Это вычисление можно осуществить с помощью вычетных интегралов. В работе [6] рассмотрен простейший класс систем уравнений для целых и мероморфных функций, фактически функций не выше первого порядка роста. Тем самым тематика работы является актуальной.

---

[1] Айзенберг Л.А. О формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1977. т. 234. № 3. С. 505-508.

[2] Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.

[3] Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М.З. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов. Н.: Наука, 1991.

[4] Цих А.К. Многомерные вычеты и их приложения. Н.: Наука, 1992.

[5] Быков В.И., Цыбенова С.Б. Нелинейные модели химической кинетики. М.: КРАСАНД, 2011. 540 с.

[6] Кытманов А.М.,Потапова З.Е. Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций // Известия вузов. Математика. 2005. № 8. С. 39–48.

Цель диссертации

Целью работы является изучение и нахождение степенных сумм корней разного вида систем неалгебраических уравнений, состоящих из целых или мероморфных функций конечного порядка роста. Установление связи между степенными суммами и вычетными интегралами, построенными по заданной системе функций. Нахождение сумм некоторых видов кратных рядов на основе разработанной теории.

Методика исследования

В основу исследования положены методы многомерного комплексного и функционального анализа, а также системы компьютерной алгебры.

Научная новизна

Результаты работы являются новыми. Они заключаются в изучении некоторых типов систем неалгебраических уравнений; в рассмотрении вычетных интегралов и доказательстве формул для их вычисления, содержащих конечное число коэффициентов Тейлора функций, входящих в уравнения; в установлении связи между интегралами и степенными суммами корней в отрицательной степени.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты, полученные автором, являются теоретическими. Их ценность состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, в математических задачах химической кинетики, а также в компьютерной алгебре.

Практическое применение полученных результатов состоит в их внедрении в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов по современным проблемам многомерного комплексного анализа кафедры теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Степень достоверности и апробация работы

Достоверность результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами.

Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих конференциях: VIII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых (Красноярск, Россия, 2012); IV российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, Россия, 2012); IX Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием (Красноярск, Россия, 2013); международные научные студенческие конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, Россия, 2013, 2014); школа-конференция (Ярославль, Россия, 2013); XIII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2014» (Казань, Россия, 2014); V российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, Армения, 2014); международная школа-конференция по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, Россия, 2014).

Результаты работы неоднократно докладывались на Красноярском городском семинаре по многомерному комплексному анализу (2012–2015 г. г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–14], из них 5 работ [1–5] в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, 5 публикаций [6–10] в материалах конференций, 4 публикации [11–14] являются тезисами конференций.

В соавторстве выполнены три работы [1, 2, 5]. В диссертации приведены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 55 наименований. Общее число страниц диссертационной работы 102.

Содержание работы

Первая глава является предварительной и включает в себя математические сведения, определения, теоремы и формулы, которые используются в диссертационной работе.

Вторая глава состоит из четырех параграфов и посвящена вычетным интегралам и степенным суммам корней различных типов систем неалгебраических уравнений.

В первом параграфе рассматриваются вычетные интегралы и степенные суммы корней простейших систем.

Введем функций $f_1(z),\ f_2(z),\dots,f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^n$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_j(z)=(z^{\beta^j}+Q_j(z))e^{P_j(z)},\quad j=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

где $\beta^j=(\beta_1^j,\beta_2^j,\dots,\beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j}=z_1^{\beta_1^j}\cdot z_2^{\beta_2^j}\cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\|=\beta_1^j+\beta_2^j+\ldots+\beta_n^j=k_j$, $j=1,2,\dots,n$. Функции Q_j, P_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z)=\sum_{\|\alpha\|>k_j}a_\alpha^j z^\alpha, \tag{2}$$

$$P_j(z)=\sum_{\|\gamma\|\geqslant 0}b_\gamma^j z^\gamma, \tag{3}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$, $\alpha_j\in\mathbb{Z}$, а $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}$; $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$, $\gamma_j\geqslant 0$, $\gamma_j\in\mathbb{Z}$, а $z^\gamma=z_1^{\gamma_1}\cdot z_2^{\gamma_2}\cdots z_n^{\gamma_n}$.

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \ldots, r_n)$

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, 2, \ldots, n\}, \quad r_1 > 0, \ldots, r_n > 0.$$

При достаточно малых r_j определены интегралы вида

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\gamma(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot z_2^{\beta_2+1} \cdots z_n^{\beta_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0, \ldots, \beta_n \geqslant 0$, $\beta_j \in \mathbb{Z}$, $I = (1, 1, \ldots, 1)$.

В соответствии с [7] назовем их *вычетными интегралами.* К этим интегралам не применима теорема о логарифмическом вычете и они не являются стандартными вычетами Гротендика.

Обозначим через $\widetilde{f}_j$ функции $\widetilde{f}_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z)$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть I_s — мультииндекс длины n, содержащий s единиц и $n - s$ нулей $(s = 0, 1, \ldots, n)$. Рассмотрим Δ_{I_s} — якобиан системы функций, таких, что единице, стоящей на j-ом месте из I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции $\widetilde{f}_j$, а нулю, стоящему на k-ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k.

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях для функции f_j вида* (1), (2), (3) *справедливы формулы:*

$$J_\beta = \sum_{s=0}^{n} \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leqslant \|\beta\| + \min(s, k_{i_1} + \ldots + k_{i_s})} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{(\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s})!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{l_s}(\Delta_{I_s} \cdot Q^{\alpha^s}(I_s))}{\partial z^{\beta + (\alpha_1^s+1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s+1)\beta^{i_s}}}\Bigg|_{z=0} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leqslant \|\beta\| + \min(n, k_{i_1} + \ldots + k_{i_s})} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M}\left[\frac{\Delta_{I_s} \cdot Q^{\alpha^s}(I_s)}{z^{\beta + (\alpha_1^s+1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s+1)\beta^{i_s}}}\right],$$

где α^s — мультииндекс порядка s, i_k — номер k-ой единицы в I_s, $l_s = \|\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}\|$, $\beta! = \beta_1! \cdots \beta_n!$, $Q^{\alpha^s}(I_s) = Q_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot Q_{i_2}^{\alpha_2^s} \cdots Q_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\dfrac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z^\gamma} = \dfrac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2} \cdots \partial z_n^{\gamma_n}}$ и, наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

Далее в параграфе рассмотренные интегралы связываются со степенными суммами корней системы. Для этого мы сузим класс функций f_j. Возьмем в качестве функций Q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ многочлены вида

$$Q_j(z) = \sum_{\alpha \in M_j} a_\alpha^j z^\alpha, \tag{4}$$

[7] Passare M., Tsikh A. Residue integrals and their Melin transforms// Can. J. Math. 1995. V. 47. № 5, 1037–1050.

где M_j — конечное множество мультииндексов такое, что при $\alpha \in M_j$ координаты $\alpha_k \leqslant \beta_k^j$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq j$. (Но по прежнему предполагается, что $\|\alpha\| > k_j$ для всех $\alpha \in M_j$). А для функций P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leqslant \|\gamma\| \leqslant p_j} b_\gamma^j z^\gamma. \tag{5}$$

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \ldots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(k)}^{\beta_n+1}},$$

где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – некоторый мультииндекс. Здесь $(z_{1(k)}, \ldots, z_{n(k)})$ корни системы, не лежащие на координатных плоскостях, взятые столько раз какова их кратность (как показано в данном параграфе, их число конечно).

Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, системы, но в отрицательной степени (степенной суммой от обратных величин корней).

Теорема 2.2. *Для системы с функциями f_j вида* (1) *и многочленами Q_j вида* (4), *P_j вида* (5) *и для произвольного мультииндекса β такого, что*

$$l^1 + \ldots + l^n \leqslant \beta, \tag{6}$$

справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I},$$

где $l^j = (l_1^j, \ldots, l_n^j)$ и l_i^j — степень i-ого многочлена P_i по j-ой переменной z_j; $i, j = 1, \ldots, n$ (для мультииндексов $\alpha \leqslant \beta$, если данное неравенство выполняется для всех их координат).

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста не выше ρ, разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$,

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $(z^{\beta^{j,s}} + Q_{j,s}(z))e^{P_{j,s}(z)}$, а $Q_{j,s}(z)$, $P_{j,s}(z)$ — функции вида (4), (5) и степени всех многочленов $P_{j,s}$, входящих в систему, $\deg P_{j,s} \leqslant \rho$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots$

Для каждого набора индексов $j_1, \ldots, j_n$, где $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \ldots, i_n$, где $i_1, \ldots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных уравнений

$$f_{1,j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2,j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \; \ldots, \; f_{n,j_n}^{(i_n)}(z) = 0, \tag{8}$$

имеют конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей): $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots, z_{(l)}, \ldots$

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}}. \tag{9}$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (8), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{j_s}^{(2)}$; и равен -1, если в систему вида (8), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{j_s}^{(2)}$.

Теорема 2.3. *Для системы с функциями вида (7), для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и выполняется неравенство $l^1 + \ldots + l^n \leqslant \beta$, ряд (9) сходится и справедливы формулы: $J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}$.*

Во втором параграфе рассматриваются вычетные интегралы и степенные суммы корней систем уравнений треугольного вида.

Рассмотрим систему функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_i(z) = (z^{\beta^i} + \psi_i(z))e^{P_i(z)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \ldots, \beta_n^i)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $\|\beta^i\| = \beta_1^i + \beta_2^i + \ldots + \beta_n^i = k_i$, степени мономов z^{β^i} удовлетворяют условию $k_i \leqslant ord\, \psi_i(z)$; $i = 1, 2, \ldots, n$, и данные мономы не содержатся в $\psi_i(z)$. (Здесь и в дальнейшем под порядком ord голоморфной функции понимается наименьшая (по совокупности переменных) из степеней мономов, входящих в разложение Тейлора этой функции в точке 0.)

Кроме того, предположим, что система (10) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} ord_{z_i \ldots z_n} \psi_i > \beta_i^i + \ldots + \beta_n^i, \\ ord_{z_i \ldots z_n} P_i > \beta_i^i + \ldots + \beta_n^i, \\ ord_{z_i \ldots z_n} \psi_j \geqslant \beta_j^j + \ldots + \beta_n^j, \\ ord_{z_i \ldots z_n} P_j \geqslant \beta_j^j + \ldots + \beta_n^j, \\ i = 1, \ldots, n; j = i+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $ord_{z_i \ldots z_n} \psi_j$ порядок голоморфной функции ψ_j по переменным $z_i \ldots z_n$ при фиксированных остальных.

Если система (10) удовлетворяет условиям (11), то она может быть записана в виде

$$\begin{cases} f_1(z) = (z^{\beta^1} + Q_1(z))e^{P_1(z)}, \\ f_2(z) = (z^{\beta^2} + \varphi_{21}(z) + Q_2(z))e^{P_2(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(z) = (z^{\beta^n} + \varphi_{n1}(z) + \ldots + \varphi_{nn-1}(z) + Q_n(z))e^{P_n(z)}, \end{cases} \tag{12}$$

где φ_{ij} — однородные полиномы степени $\|\beta^i\| = k_i$, удовлетворяющие

$$\deg_{z_j} \varphi_{ij} < \beta^i_j, \tag{13}$$

для $i = 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, i-1$. А порядок Q_j по совокупности переменных строго больше k_j, $j = 1, \ldots, n$.

Таким образом получаем, что

$$\psi_i(z) = \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_{ij}(z) + Q_i(z), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

При некоторых условиях на $r_1, \ldots, r_n$ определены вычетные интегралы вида J_β.

Теорема 2.4. *При сделанных предположениях для функций f_j вида* (10), *удовлетворяющим условиям* (11)–(14) *справедливы формулы:*

$$J_\beta = \sum_{s=0}^{n} \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{(\beta + (\alpha_1^s+1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s+1)\beta^{i_s})!} \times$$

$$\times \left. \frac{\partial^{l_s}(\Delta_{I_s} \cdot \psi_{I_s}^{\alpha^s})}{\partial z^{\beta + (\alpha_1^s+1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s+1)\beta^{i_s}}} \right|_{z=0} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_{I_s} \cdot \psi_{I_s}^{\alpha^s}}{z^{\beta + (\alpha_1^s+1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s+1)\beta^{i_s}}} \right],$$

где α^s — мультииндекс длины s, i_k — номер k-ой единицы в I_s, $l_s = \|\beta + (\alpha_1^s+1)\beta^{i_1} + \ldots + (\alpha_s^s+1)\beta^{i_s}\|$, $\beta! = \beta_1! \cdot \beta_2! \cdots \beta_n!$, $\psi^{\alpha^s}(I_s) = \psi_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot \psi_{i_2}^{\alpha_2^s} \cdots \psi_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\dfrac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z^\gamma} = \dfrac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2} \cdots \partial z_n^{\gamma_n}}$ u, наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

Суммирование ведется по конечному множеству мультииндексов α^s, удовлетворяющих условиям $\alpha_1^s \leqslant \|\beta\| + \min(s, k_{i_1} + \ldots + k_{i_s})$, $\alpha_2^s \leqslant \beta_2 + \ldots + \beta_n + 2(n-1) + (\alpha_1^s+1)(\beta_2^{i_1} + \cdots + \beta_n^{i_1})$, $\ldots$, $\alpha_s^s \leqslant \beta_n + 2 + \beta_n^{i_1}\alpha_1^s + \ldots + \beta_n^{i_s-1}\alpha_{s-1}^s$.

Далее рассмотренные интегралы связываются со степенными суммами корней системы (11).

Для системы с функциями f_j вида (10) и функциями ψ_j вида (11), (13), многочленами P_j, Q_j вида (12), (13) и многочленами φ_{ij} вида (13) сформулируем дополнительные предположения:

$$\begin{cases} \deg_{z_k} \psi_i \leqslant \beta_k^i, & k \neq i, \\ \deg_{z_k} Q_i \leqslant \beta_k^i, & i \neq k, \\ \deg_{z_k} \varphi_{ij} \leqslant \beta_k^i, & k \neq i, \\ k = 1, \ldots, n; & i = 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{15}$$

А функции P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leqslant \|\gamma\| \leqslant p_j} b_\gamma^j z^\gamma. \tag{16}$$

Теорема 2.5. *Для системы с функциями f_j вида (10), многочленами ψ_j вида (14) с ограничениями вида (15), P_j вида (16) и для произвольного мультииндекса β такого, что*

$$l^1 + \ldots + l^n \leqslant \beta, \tag{17}$$

справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I},$$

где $l^j = (l_1^j, \ldots, l_n^j)$ и l_i^j — наибольшая степень i-ого многочлена P_i по j-ой переменной z_j; $i, j = 1, \ldots, n$ (для мультииндексов $\alpha \leqslant \beta$, если данное неравенство выполняется для всех их координат).

Теорема 2.6 третьего параграфа аналогична теореме 2.3 предыдущего параграфа.

В третьем параграфе рассматриваем вычетные интегралы и степенные суммы корней специальных систем, состоящих из целых функций.

Рассмотрим систему уравнений $f_1(z),\ f_2(z), \ldots, f_n(z)$ вида

$$\begin{cases} f_1(z) = [(1 - a_{11}z_1)^{m_{11}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{1n}z_n)^{m_{1n}} + Q_1(z)]\, e^{P_1(z)} = 0, \\ f_2(z) = [(1 - a_{21}z_1)^{m_{21}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{2n}z_n)^{m_{2n}} + Q_2(z)]\, e^{P_2(z)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(z) = [(1 - a_{n1}z_1)^{m_{n1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{nn}z_n)^{m_{nn}} + Q_n(z)]\, e^{P_n(z)} = 0, \end{cases} \tag{18}$$

где m_{ij} — натуральные числа, a_{ij} — комплексные числа, различные при каждом фиксированном j, $P_i(z)$ и $Q_i(z)$ — целые функции.

Обозначим через $q_i(z_1, \ldots, z_n)$ выражение вида

$$q_i(z_1, \ldots, z_n) = (1 - a_{i1}z_1)^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{in}z_n)^{m_{in}}, \quad i = 1, \ldots n, \tag{19}$$

тогда наша система примет вид

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = [q_i(z_1, \ldots, z_n) + Q_i(z_1, \ldots, z_n)]\, e^{P_i(z_1, \ldots, z_n)}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

Определим функции

$$h_i(z) = \begin{cases} q_i(z), & \text{если } a_{ij} \neq 0, \quad \text{для всех} \quad j; \\ q_i(z) \cdot \frac{1}{z_{j_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{z_{j_k}}, & \text{если } a_{ij_1} = \ldots = a_{ij_k} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Система уравнений $h_i(z) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ имеет $n!$ изолированных корней в $\overline{\mathbb{C}}^n$ ($\overline{\mathbb{C}}^n$ пространство теории функций). Пусть $J = (j_1, \ldots, j_n)$ — мультииндекс, являющийся перестановкой $(1, \ldots, n)$, тогда эти корни можно записать в виде

$$a_J = \begin{cases} (1/a_{1j_1}, \ldots, 1/a_{nj_n}), & \text{если все } a_{kj_k} \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n; \\ (1/a_{1j_1}, \ldots, \infty_{[i_1]}, \ldots, \infty_{[i_k]}, \ldots, 1/a_{nj_n}), & \text{если } a_{i_1 j_{i_1}} = \ldots = a_{i_k j_{i_k}} = 0. \end{cases}$$

где $k, j = 1, \ldots, n$.

Обозначим через Γ_h цикл

$$\Gamma_h = \{z \in \mathbb{C}^n : |h_i| = r_i, \quad r_i > 0,\ i = \overline{1, n}\}. \tag{22}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(z,t) = (q_i(z) + t \cdot Q_i(z))e^{P_i(z)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{23}$$

зависящую от действительного параметра $t \geqslant 0$.

Как показано в этом параграфе определен вычетный интеграл $J_\gamma(t)$

$$J_\gamma(t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \dots \wedge \frac{dF_n}{F_n}, \tag{24}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots \gamma_n)$ — мультииндекс.

Пусть I_s — мультииндекс длины n, состоящий из s единиц и $n-s$ нулей ($s = 0, \dots, n$). Обозначим через G_i функции $G_i(z,t) = q_i(z) + t \cdot Q_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть I_s — мультииндекс порядка n, состоящий из s единиц и $n-s$ нулей ($s = 0, \dots, n$). Рассмотрим определители Δ_{I_s} — якобианы системы функций, таких, что единице, стоящей на j-ом месте из I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции G_j, а нулю, стоящему на k-ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k.

Теорема 2.7. *При сделанных предположениях для функций F_i вида (23) справедливы формулы для $J_\gamma(t)$ в виде сходящихся при достаточно малых t рядов:* $J_\gamma(t) =$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{J} \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-t)^{||\alpha^s||} (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(\alpha^s, J)!} \cdot \frac{\partial^{||\beta^s||}}{\partial z^{\beta^s}} \left[\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q^{\alpha^s}(I_s)}{q^{\alpha^s+I}(I_s, J)} \right]_{z=a_J},$$

где $(-1)^{s(J)} = 1$, когда J — четная перестановка и $(-1)^{s(J)} = -1$, когда J — нечетная перестановка, α^s — мультииндекс порядка s, i_l — номер l-й единицы в I_s, $q^{\alpha^s+I}(I_s, J) = q_1^{\alpha_1^s+1}[j_1] \cdot \ldots \cdot q_s^{\alpha_s^s+1}[j_n]$, а $q_p[j_p]$ — это произведение всех $(1 - a_{p1} z_1)^{m_{p1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{pn} z_n)^{m_{pn}}$ кроме $(1 - a_{pj_p} z_{jp})^{m_{pj_p}}$, $Q^{\alpha^s}(I_s) = Q_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot \ldots \cdot Q_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\beta(\alpha^s, J) = (m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1, \dots, m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1)$,

$$\beta(\alpha^s, J)! = \prod_p (m_{pj_p} \cdot (\alpha_{j_p}^s + 1) - 1)!,$$

$$\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial z^\beta} = \frac{\partial^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1 + \ldots + m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}{\partial z_1^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1} \cdot \ldots \cdot \partial z_n^{m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}.$$

При некоторых ограничениях на Q_i и P_i вычетные интегралы можно связать со степенными суммами корней системы (18)

Предположим, что $Q_i(z)$ — многочлены вида

$$Q_i(z) = z_1 \cdots z_n \sum_{||\alpha|| \geqslant 0} C_\alpha^i z^\alpha \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{25}$$

где α — мультииндекс, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $\deg_{z_j} Q_i \leqslant m_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, для тех a_{ij}, для которых $a_{ij} \neq 0$. Если $a_{ij} = 0$, то ограничение на степень $\deg_{z_j} Q_i$ отсутствует.

Функции P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leqslant ||\eta|| \leqslant p_j} b_\eta^j z^\eta, \tag{26}$$

где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — мультииндекс.

Обозначим $z^{(j)} = (z_{j1}, \dots, z_{jn}) = (z_{j1}(1), \dots, z_{jn}(1))$, $j = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$ — нули системы (20) с учетом их кратностей, не лежащие на координатных плоскостях.

Рассмотрим цикл

$$\widetilde{\Gamma}_h = \{w \in \mathbb{C}^n : \left| h_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots \frac{1}{w_n} \right) \right| = \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Цикл $\widetilde{\Gamma}_h$ гомологичен сумме циклов $\widetilde{\Gamma}_{h,\tilde{a}_J}$, получающихся заменой $z_j = \dfrac{1}{w_j}$ из циклов Γ_{h,a_J}.

Обозначим через $\widetilde{G_i}$ функции $\widetilde{G_i} = \widetilde{q_i}(w) + \widetilde{Q}_i(w)$, $\quad i = 1, 2, \dots, n$, где $\widetilde{q_i} = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$, а $\widetilde{Q}_i = w_1^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot w_n^{m_{in}} \cdot Q_i \left(\dfrac{1}{w_1}, \dots, \dfrac{1}{w_n} \right)$.

Пусть $\widetilde{\Delta}$ — якобиан системы функций $\widetilde{G}_1, \dots, \widetilde{G}_n$.

Теорема 2.9. *Для системы* (18) *с функциями* f_j *вида* (20) *и* Q_i *вида* (25) *справедливы формулы*

$$\sigma_{\gamma+I} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdots z_{jn}^{\gamma_n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{\|K\| \geqslant 0} (-1)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_{h,\tilde{a}_J}} \widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \widetilde{Q}_n^{k_n}}{\widetilde{q}_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \widetilde{q}_n^{k_n+1}} dw =$$

$$= \sum_{K \in \Re} (-1)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K,J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^K}{\widetilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=\tilde{a}_J},$$

где $z^{(j)} = z^{(j)}(1)$, *а множество индексов* $\Re = \{K = (k_1, \dots, k_n) : \quad \exists i, \quad \text{что} \quad \|K\| < \gamma_i + 2, \quad i = 1, \dots, n\}$, $\tilde{a}_J = (a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n})$, $(-1)^{s(J)} = 1$, *когда* J — *четная перестановка и* $(-1)^{s(J)} = -1$, *когда* J — *нечетная перестановка*, $\widetilde{q}^{K+I}(J) = \widetilde{q}_1^{k_1+1}[i_1] \cdot \dots \cdot \widetilde{q}_n^{k_n+1}[i_n]$, *а* $\widetilde{q}_j[i_j]$ — *это произведение всех* $(w_1 - a_{j1})^{m_{j1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{jn})^{m_{jn}}$ *кроме* $(w_{i_j} - a_{ji_j})^{m_{ji_j}}$, $\widetilde{Q}^K = \widetilde{Q}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \widetilde{Q}_n^{k_n}$, $\beta(K,J) = (m_{1i_1} \cdot (k_{i_1}+1) - 1, \dots, m_{ni_n} \cdot (k_{i_n}+1) - 1)$,

$$\beta(K,J)! = \prod_j (m_{ji_j} \cdot (k_{i_j}+1) - 1)!,$$

$$\frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} = \frac{\partial^{m_{1i_1} \cdot (k_{i_1}+1) - 1 + \dots + m_{ni_n} \cdot (k_{i_n}+1) - 1}}{\partial w_1^{m_{1i_1} \cdot (k_{i1}+1) - 1} \cdot \dots \cdot \partial w_n^{m_{nin} \cdot (k_{in}+1) - 1}}.$$

Далее приводится теорема 2.10, аналогичная теореме 2.3 второго параграфа.

Хорошо известно, что целые функции конечного порядка роста в $\mathbb{C}^n$, вообще говоря, не допускают разложения в бесконечное произведение, связанное с нулями функции. В четвертом параграфе доказывается теорема о разложении некоторых типов целых функций в бесконечные произведения.

Пусть Q_j — многочлены в $\mathbb{C}^n$, $[1 - Q_j]$ нулевое множество (дивизор) функций $1 - Q_j$. Если существует целая функция $f(z)$, у которой нулевое множество равно $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$, то необходимым условием для этой $f(z)$ является то, что в любом шаре из $\mathbb{C}^n$, содержатся точки конечного числа множеств $[1 - Q_j]$.

Рассмотрим *каноническое произведение*

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}E(Q_j(z),p_j-1)=\prod_{j=1}^{\infty}(1-Q_j(z))e^{Q_j(z)+\frac{Q_j^2(z)}{2}+\ldots+\frac{Q_j^{p_j-1}(z)}{p_j-1}}, \tag{27}$$

где выражение

$$E(Q,p)=(1-Q(z))e^{Q(z)+\frac{Q^2(z)}{2}+\ldots+\frac{Q^p(z)}{p}}, \tag{28}$$

($p=1,2,\ldots$) назовем *первичным множителем.*

Теорема 2.11. *Для всякой последовательности многочленов Q_j, $j=1,\ldots,n,\ldots$, в которой степени всех Q_j ограничены числом q, Q_j имеют вид*

$$Q_j(z)=\sum_{\|\beta\|\leqslant q}c_\beta^j z^\beta, \tag{29}$$

и выполнено условие

$$\alpha_j=\max_\alpha|c_\alpha^j|\to 0, \tag{30}$$

существует целая функция, имеющая нули на этих и только этих нулевых множествах, т.е. на множестве $\bigcup_{j=1}^\infty[1-Q_j]$. Здесь $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — мультииндекс.

Данная теорема является аналогом классической теоремы Вейерштрасса.

В дальнейшем будем считать $f(0)=1$. Пусть для функции $f(z)$ ряд $\sum\limits_j\alpha_j^\beta$ сходится при некотором $\beta>0$.

Нижнюю грань положительных чисел β, для которых ряд $\sum\limits_j\alpha_j^\beta$ сходится, назовем *показателем сходимости ряда* и обозначим через ρ_1.

Теорема 2.12. *Если для целой функции $f(z)$, вида (27) имеющей нулевые множества $\bigcup_{j=1}^\infty[1-Q_j]$, показатель сходимости $\rho_1>0$, то f имеет конечный порядок роста $\rho\leqslant q\rho_1$.*

Теорема 2.13 (Аналог теоремы Адамара о разложении на множители). *Если функция $f(z)$ — целая функция с нулевым множеством $\bigcup_{j=1}^\infty[1-Q_j]$, причем $f(0)=1$ и $\rho_1>0$, то*

$$f(z)=e^{M(z)}P(z),$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$, а $M(z)$ — многочлен, степень которого не выше $q\rho_1$.

Третья глава состоит из трех параграфов и посвящена нахождению сумм кратных рядов с помощью вычетных интегралов.

В первом параграфе рассматриваются ряды, связанные с простейшими системами уравнений.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2,z_3)=\dfrac{\sin\sqrt{z_1-a^2}}{\sqrt{z_1-a^2}}=\prod\limits_{k=1}^\infty\left(1-\dfrac{z_1-a^2}{k^2\pi^2}\right)=0,\\ f_2(z_1,z_2,z_3)=\dfrac{\sin\sqrt{z_2-z_1-a^2}}{\sqrt{z_2-z_1-a^2}}=\prod\limits_{m=1}^\infty\left(1-\dfrac{z_2-z_1-a^2}{m^2\pi^2}\right)=0,\\ f_3(z_1,z_2,z_3)=\dfrac{\sin\sqrt{z_3-z_2-a^2}}{\sqrt{z_3-z_2-a^2}}=\prod\limits_{s=1}^\infty\left(1-\dfrac{z_3-z_2-a^2}{s^2\pi^2}\right)=0.\end{cases}$$

Применяя теорему 2.1, можно получить

$$\sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2k^2+a^2)\cdot(\pi^2(k^2+m^2)+2a^2)\cdot(\pi^2(k^2+m^2+s^2)+3a^2)} = \frac{(a\operatorname{cth}a-1)^3}{48a^6}.$$

Во втором параграфе рассматриваются ряды, связанные с системами уравнений треугольного вида.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{a_1z_1-a_2z_2}}{\sqrt{a_1z_1-a_2z_2}} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_1z_1-a_2z_2}{k^2\pi^2}\right)=0,\\ f_2(z_1,z_2) = \dfrac{\sin\sqrt{-b_1z_1+b_2z_2}}{\sqrt{-b_1z_1+b_2z_2}} = \prod\limits_{s=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{-b_1z_1+b_2z_2}{s^2\pi^2}\right)=0. \end{cases}$$

На основе теоремы 2.4 получена

Теорема 3.1. *Справедливо интегральное представление*

$$\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{a_1b_2-a_2b_1}{(a_1s^2+b_1k^2)(a_2s^2+b_2k^2)} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4(a_1a_2+b_1b_2)}{180a_1b_2} - \frac{\pi(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2})\zeta(3)}{2\sqrt{a_1b_2}}$$

$$-\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\cdot\frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}-1\right)}\int_0^1 \ln^2 y\cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, u)\,dy-$$

$$-\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}\cdot\frac{\pi}{2\left(e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}-1\right)}\int_0^1 \ln^2 y\cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, u)\,dy,$$

где ${}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},x)$ — *базисный гипергеометрический ряд.*

В третьем параграфе рассматриваются ряды, связанные с системами уравнений специального вида.

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1,z_2,z_3) = \dfrac{\sin\sqrt{a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3-a_1a_2z_1z_2-a_1a_3z_1z_3-a_3a_3z_2z_3}}{\sqrt{a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3-a_1a_2z_1z_2-a_1a_3z_1z_3-a_3a_3z_2z_3}} =\\ = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3-a_1a_2z_1z_2-a_1a_3z_1z_3-a_3a_3z_2z_3}{k^2\pi^2}\right)=0,\\ f_2(z_1,z_2,z_3) = \dfrac{\sin\sqrt{b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3-b_1b_2z_1z_2-b_1b_3z_1z_3-b_3b_3z_2z_3}}{\sqrt{b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3-b_1b_2z_1z_2-b_1b_3z_1z_3-b_3b_3z_2z_3}} =\\ = \prod\limits_{s=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3-b_1b_2z_1z_2-b_1b_3z_1z_3-b_3b_3z_2z_3}{s^2\pi^2}\right)=0,\\ f_3(z_1,z_2,z_3) = \dfrac{\sin\sqrt{c_1z_1+c_2z_2+c_3z_3-c_1c_2z_1z_2-c_1c_3z_1z_3-c_3c_3z_2z_3}}{\sqrt{c_1z_1+c_2z_2+c_3z_3-c_1c_2z_1z_2-c_1c_3z_1z_3-c_3c_3z_2z_3}} =\\ = \prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{c_1z_1+c_2z_2+c_3z_3-c_1c_2z_1z_2-c_1c_3z_1z_3-c_3c_3z_2z_3}{m^2\pi^2}\right)=0. \end{cases}$$

Тогда, применяя теорему 2.9, получим, при условии $\sqrt{\frac{ad}{bc}}=2$,

$$\sigma_{(1,1,1)} = \sum_{k,s,m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^6s^2(as^2-bk^2)(cs^2-dm^2)} =$$

$$
\frac{1}{3780ac}+\frac{1}{4\pi^5\sqrt{-cda}}\times
$$

$$
\times\left(\zeta(5)+\frac{1}{2(e^{4\pi\sqrt{-c/d}}-1)}\int_0^1 \ln^4 y\cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}},e^{2\pi\sqrt{-c/d}};e^{4\pi\sqrt{-c/d}},y)\,dy\right)+
$$

$$
+\frac{1}{4\pi^5\sqrt{-abc}}\cdot
$$

$$
\cdot\left(\zeta(5)+\frac{1}{2(e^{4\pi\sqrt{-a/b}}-1)}\int_0^1 \ln^4 y\cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-a/b}},e^{2\pi\sqrt{-a/b}};e^{4\pi\sqrt{-a/b}},y)\,dy\right)+
$$

$$
+\frac{1}{360\sqrt{abcd}}-\frac{1}{4\pi^4\sqrt{abcd}}\times
$$

$$
\times\frac{1}{(e^{4\pi\sqrt{-a/b}}-1)}\int_0^1 \ln^3 y\cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-a/b}},e^{2\pi\sqrt{-a/b}};e^{4\pi\sqrt{-a/b}},y)\,dy-
$$

$$
-\frac{1}{4\pi^4\sqrt{abcd}}\cdot\frac{1}{(e^{4\pi\sqrt{-c/d}}-1)}\int_0^1 \ln^3 y\cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}},e^{2\pi\sqrt{-c/d}};e^{4\pi\sqrt{-c/d}},y)\,dy+
$$

$$
+\frac{3}{32\pi^4\sqrt{abcd}}\cdot\frac{1}{(e^{4\pi\sqrt{-c/d}}-1)}\int_0^1 \ln^3 y\cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}},e^{2\pi\sqrt{-c/d}};e^{4\pi\sqrt{-c/d}},y)\,dy-
$$

$$
-\frac{1}{8\pi^4\sqrt{abcd}}\times
$$

$$
\times\int\limits_0^1 \ln^4 y\cdot\frac{\partial}{\partial\pi\sqrt{-c/d}}\left[\frac{1}{e^{4\pi\sqrt{-c/d}}-1}\,{}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}},e^{2\pi\sqrt{-c/d}};e^{4\pi\sqrt{-c/d}},y)\right]dy-
$$

$$
-\frac{1}{32\pi^4\sqrt{abcd}}-\frac{1}{64\pi^4\sqrt{abcd}},
$$

где ${}_2\Phi_1(e^{2t},e^{2t};e^{4t},x)$ — базисный гипергеометрический ряд.

Рассмотренные примеры отсутствуют в известных справочниках.

Основные результаты

Найдены формулы для вычисления вычетных интегралов для систем неалгебраических уравнений простейшего вида, треугольного вида и систем специального вида.

Установлена связь между вычетными интегралами и степенными суммами корней (в отрицательной степени) для рассмотренных систем уравнений.

На основе разработанной теории проведены вычисления сумм некоторых типов кратных числовых рядов.

Значительная часть результатов диссертации получена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-00277-а).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Александру Мечиславовичу Кытманову за сотрудничество, внимание и поддержку на всех этапах выполнения данной работы.

Публикации по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК

[1] Кытманов А.М., Мышкина Е.К. Нахождение степенных сумм корней некоторых систем неалгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ // Известия вузов. Серия: Математика. 2013. № 12. С. 36–50.

[2] Кытманов А.М., Мышкина Е.К. О степенных суммах корней систем целых функций конечного порядка роста // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14. № 3. С. 62–82.

[3] Myshkina E.K. On One Condition for the Decomposition of an Entire Function into an Infinite Product // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2014. T. 7. № 1. P. 91-94.

[4] Myshkina E.K. Some Examples of Finding the Sums of Multiple Series // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2014. T. 7. № 4. P. 515-529.

[5] Kytmanov A.A.,Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Finding residue integrals for systems of non-algebraic equations in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Symbolic Computations. 2015. V. 66. P. 98-110.

Материалы конференций

[6] Мышкина Е.К. Нахождение некоторых многомерных вычетных интегралов // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. Новосибирск: НГУ. 2013. С. 28.

[7] Мышкина Е.К. Нахождение степенных сумм корней систем // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. Новосибирск: НГУ. 2014. С. 30.

[8] Мышкина Е.К. О вычислении вычетных интегралов, связанных с системой целых функций // Сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. Красноярск, 15–25 апреля 2013. [Электронный ресурс] Красноярск : Сиб. федер. ун-т.,2013, № заказа 2394/отв. ред. О.А.Краев.

[9] Мышкина Е.К. О вычислении вычетных интегралов, связанных с системой неалгебраических уравнений // Сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15–25 апреля 2014. [Электронный ресурс] Красноярск : Сиб. федер. ун-т., 2014, № заказа 1644/отв. ред. О. А. Краев.

[10] Мышкина Е.К. О степенных суммах корней некоторых видов систем нелинейных уравнений // Материалы тринадцатой молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения-2014». Казань: КФУ. 2014. С. 129-130.

Тезисы конференций

[11] Мышкина Е.К. Вычисления степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений определенного вида // Тезисы докладов Четвертого российско – армянского совещания по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. Красноярск: СФУ. 2012. С. 45–47.

[12] Мышкина Е.К. О нахождении степенных сумм нулей некоторых систем функций конечного порядка роста // Тезисы докладов летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России. Ярославль: ЯГПУ. 2013. С. 60–61.

[13] Мышкина Е.К. О некоторых достаточных условиях разложения целых функций конечного порядка роста в $\mathbb{C}^n$ в бесконечные произведения // Сборник тезисов Республиканской конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа», посвященной 100-летию со дня рождения известного ученого профессора Льва Израилевича Волковыского. Узбекистан. 2013. С. 90–92.

[14] Мышкина Е.К. Нахождение степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений с помощью вычетных интегралов // Тезисы докладов Пятого российско – армянского совещания по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. Армения: Ереван. 2014. С. 42–44.