На правах рукописи

Некрасов

Некрасова Татьяна Игоревна

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЙ С НОСИТЕЛЯМИ В РАЦИОНАЛЬНЫХ КОНУСАХ

01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2015

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Лейнартас Евгений Константинович
Официальные оппоненты:	Тетенов Андрей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Горно-Алтайский государственный университет», кафедра математического анализа, заведующий кафедрой; Михалкин Евгений Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева» кафедра математического анализа и методики обучения математике в вузе, доцент
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт математики им. С.Л.Соболева» СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится 25 декабря 2015 г. в 13.30 часов на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», ФГБУН ИВМ Сибирского отделения РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» ноября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Шлапунов Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Исчисление конечных разностей — раздел математики, в котором изучаются функции при дискретном изменении аргумента. Его начала содержатся в трудах П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбница, и развивалось оно параллельно с основными разделами математического анализа. В 18 веке теория конечных разностей приобрела характер самостоятельной математической дисциплины, изложение начал которой принадлежит Б. Тейлору (1717 г.), но подлинным основателем следует все же считать Д. Стирлинга (1730 г.). Первое систематическое исследование по теории конечных разностей было написано Л. Эйлером в 1755 году, в нем впервые использовалось обозначение Δ для разностного оператора.

К основным задачам теории конечных разностей относятся задачи интерполирования и суммирования функций. С последней задачей тесно связана задача решения уравнений в конечных разностях. Для линейных конечно-разностных уравнений построена теория, вполне аналогичная теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений[1]. Разностные уравнения в сочетании с методом производящих функций представляют собой мощный аппарат исследования задач перечислительного комбинаторного анализа и в одномерном случае позволили решить широкий круг задач[2,3,4]. Многомерный случай менее развит, отметим, например, работы[5,6,7,8].

А. Муавр рассмотрел под названием возвратных рядов степенные ряды $F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k + \ldots$ с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, образующими возвратные последовательности, т. е. удовлетворяющими соотношению вида $c_0 a_{m+p} + c_1 a_{m+p-1} + \cdots + c_m a_p = 0, p = 0, 1, 2, \ldots$, где c_j — некоторые постоянные. Оказалось, что такие ряды всегда изображают рациональные функции. В многомерном случае ситуация значительно сложнее, например, уже вопрос о «запасе» решений уравнения становится нетривиальным, а производящий ряд решения разностного уравнения, вообще говоря, расходящийся.

Сформулируем общую постановку задачи. На комплекснозначных функциях $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ целочисленных переменных $x_1, \ldots, x_n$ определим

[1] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М.: КомКнига, 2006. — 376 с.

[2] Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. — М.: Наука, 1982. — 255 с.

[3] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

[4] Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика / Г. Дж. Райзер. — М.: Мир, 1966. — 154 с.

[5] Bousquet-Mélou M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Mélou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics. — 2000. — V. 225. — P. 51–75.

[6] Лейнартас Е. К. Устойчивость задачи Коши для многомерного разностного оператора и амеба характеристического множества / Е. К. Лейнартас // Сиб. мат. журн. 2011. — Т. 52. — № 5. — С. 1087–1095.

[7] Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев — Новосибирск: Наука, 1977. — 288 с.

[8] Даджион Д. Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, О. Мерсеро. — М.: Мир, 1988.

операторы δ_j сдвига по переменным x_j:

$$\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

и полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega,$$

где $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ — конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \cdot \cdots \cdot \delta_n^{\omega_n}$, c_ω — постоянные коэффициенты разностного оператора.

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta) f(x) = g(x), x \in X, \tag{1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbb{Z}^n$ функция. Из множества X выделим подмножество точек $X_0 \subset X$, которые будем называть начальными (граничными) и сформулируем следующую задачу.

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и совпадающую на множестве X_0 с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_0. \tag{2}$$

Эту задачу естественно назвать задачей Коши для уравнения (1), а функцию $\varphi(x)$ в условии (2) — начальными данными задачи Коши. Существование и единственность решения задачи Коши зависят от всех объектов, участвующих в ее постановке: разностного оператора $P(\delta)$, множества X, на котором задана правая часть $g(x)$ уравнения (1), и от множества X_0, на котором задаются начальные данные $\varphi(x)$. Общих результатов о соотношениях между этими объектами, обеспечивающих существование и единственность решения задачи Коши, нет, и, по-видимому, их трудно описать.

Так дискретизация уравнений математической физики методами теории схем приводит к разнообразным задачам вида (1)–(2), в которых выбор множеств X и X_0 зависит от дифференциальной задачи[9]. Дискретизация же уравнений Коши-Римана привела к созданию теории дискретных аналитических и гармонических функций на гауссовской решетке[10,11]. Новые плодотворные комбинаторные идеи в эту теорию были внесены в работе D. Zeilberger[12]. Они были развиты и обобщены в работах А. Д. Медных[13], О. А. Данилова[14].

[9] Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977.

[10] Duffin R. J. Basic Properties of Discrete Analytic Functions / R. J. Duffin // Duke Math. J. — 1956. — V. 23. — P. 335–363.

[11] Duffin R. J. Potential theory on rhombic lattice / R. J. Duffin // J. Combinatorical Theory. — 1968. — V. 5. — P. 258 –272.

[12] Zeilberger D. A New Basis for Discrete Analytic Polynomials / D. Zeilberger // J. Austral. Math. Soc. — 1977. — V. 23. — P. 95–104.

[13] Медных А. Д. Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора / А. Д. Медных // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Сб. науч. тр. — Наук. думка, Киев. — 1982. — С. 137–144.

[14] Данилов О. А. Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора / О. А. Данилов, А. Д. Медных // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. — Т. 9, вып. 2. — С. 38–46.

Нас интересуют задачи вида (1)–(2), возникающие в комбинаторном анализе. В одномерном случае[1] разностный оператор имеет вид $P(\delta) = \sum\limits_{\omega=0}^{m} c_\omega \delta_\omega$, $c_m \neq 0$, а в качестве множества X, на котором определена правая часть и ищется решение $f(x)$ уравнения (1), берется множество $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел, в качестве множества X_0 берется $X_0 = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. При этих условиях задача (1)–(2) очевидным образом имеет единственное решение.

В многомерном случае стандартной является ситуация, когда $X = \mathbb{Z}^n_+$, а выбор множества X_0 зависит от свойств множества Ω, по которому строится характеристический полином P. В работе[5] для разностного уравнения (1) исследовался вопрос о «правильной» (т. е. обеспечивающей существование и единственность решения) постановке задачи Коши в положительном октанте $\mathbb{Z}^n_+$ целочисленной решетки. Кроме того, в ней изучалась алгебраическая природа производящей функции решения разностного уравнения, а именно зависимость таких свойств производящей функции решения, как рациональность и алгебраичность, от соответствующих свойств производящей функции начальных данных[15,16]. В диссертационной работе аналогичные вопросы рассмотрены в более общей ситуации, а именно: мы ищем решения задачи (1)–(2) и, соответственно, исследуем их производящие функции в *произвольных рациональных конусах*.

Цель диссертации

Цель работы — исследовать проблемы разрешимости задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах, найти формулу для решения задачи Коши и для производящей функции этого решения, получить условия принадлежности производящих функций решений к одному из классов иерархии Стенли.

Методика исследования

Для исследования задачи Коши для полиномиальных разностных операторов и производящих функций решений в работе используются методы теории степенных рядов и интегральных представлений функций многих комплексных переменных, метод производящих функций, методы линейной алгебры.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

[15]Лейнартас Е. К. Многомерные разностные уравнения / Е. К. Лейнартас, Д. Е. Лейнартас. — Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. — 154 с.

[16]Лейнартас Е. К. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов / Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин // Журнал Сибирского Федерального Университета. 2009. — Т. 2, вып. 4. — С. 449–455.

найдены условия принадлежности производящих функций решений задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах к одному из классов иерархии Стенли;

доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах и получена формула, в которой решение выражается через начальные данные и фундаментальное решение;

получена формула, в которой производящая функция решения задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами конечного набора функций, построенных по начальным данным.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты, полученные автором, являются теоретическими. Их ценность состоит в том, что полученные результаты могут быть применены в теории многомерных разностных уравнений и производящих функций, в комбинаторном перечислительном анализе.

Степень достоверности и апробация работы

Достоверность результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

1) Красноярском городском научном семинаре по комплексному анализу (СФУ, 2012-2015 гг.);

2) Четвертом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, 2012 г.);

3) Летней школе-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России (Ярославль, 2013 г.);

4) 51-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2013 г.);

5) IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Молодежь и наука» (Красноярск, 2013 г.);

6) 52-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2014 г.);

7) X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Молодежь и наука», посвященной 80-летию образования Красноярского края (Красноярск, 2014 г.);

8) Пятом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, 2014 г.);

9) Международной научной конференции студентов, аспирантов и моло-

дых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный» (Красноярск, 2015 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–12], из них 4 работы [1–4] в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, 8 публикаций [5–12] являются тезисами конференций.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, основного текста и списка литературы из 57 наименований. Общее число страниц диссертационной работы – 72.

Содержание работы

В **первой главе** диссертационной работы (§§1.1, 1.2) исследуется проблема разрешимости задачи Коши (1)–(2), то есть проблема существования и единственности функции $f(x)$, определенной в целых точках рационального конуса и удовлетворяющей условиям (1)–(2). Параграф 1.3 посвящен задаче отыскания производящей функции решения этой задачи Коши. В нем получена формула, в которой производящая функция решения задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами конечного набора функций, построенных по начальным данным. В §1.4 для $n > 1$ определена конструкция мультисекции рядов Лорана с носителями в рациональных конусах, которая оказалась очень полезной для исследования производящих функций решения задачи Коши с носителями в рациональных конусах.

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ *линейно независимые* векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a_1^j, \ldots, a_n^j\right)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$. *Рациональным конусом*, порожденным векторами $a^1, \ldots, a^n$, назовем[17,3,18] множество

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \ldots, n\}.$$

Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие *единственным* образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим* (заостренным), т. е. не содержит прямых.

В §1.1 приведено простое геометрическое условие на множество показателей ω степеней характеристического многочлена $P(z) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega$ разностного

[17]Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко. — М.: МЦНМО, 2009. — 672 с.

[18]Brion M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of AMS. 1997. — V. 10. — № 4. P. 797–833.

оператора, обеспечивающее существование и единственность решения задачи Коши.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geqslant} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v. Кроме того, будем писать $u \underset{K}{\not\geqslant} v$, если $u \in K \backslash \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \underset{K}{\geqslant} v$ не выполняется.

Фиксируем $m \in \Omega$ и конкретизируем задачу (1)–(2) следующим образом: в качестве X возьмем пересечение $K \cap \mathbb{Z}^n$ рационального конуса и целочисленной решетки, а в качестве

$$X_0 = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : x \underset{K}{\not\geqslant} m\}.$$

Требуется найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$P(\delta) f(x) = g(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n \tag{3}$$

и совпадающую с заданной функцией $\varphi(x)$ на множестве X_0:

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_0. \tag{4}$$

Для формулировки достаточных условий на разностный оператор $P(\delta)$, обеспечивающих существование и единственность решения задачи (3)–(4), нам потребуются следующие определения.

Двойственным к конусу K называется конус

$$K^* = \{k \in \mathbb{R}^n : \langle k, x \rangle \geqslant 0, x \in K\},$$

где $\langle k, x \rangle = k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n$. Обозначим множество его внутренних точек $\mathring{K}^*$ и зафиксируем $\nu \in \mathring{K}^* \cap \mathbb{Z}^n$. Для всех $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ *взвешенно-однородной степенью монома* z^x назовем неотрицательное число

$$|x|_\nu = \langle \nu, x \rangle,$$

а (взвешенно-однородную) *степень многочлена* Лорана $Q(z) = \sum\limits_x q_x z^x$ определим формулой

$$\deg_\nu Q(z) = \max_x |x|_\nu.$$

Кольцо многочленов Лорана $Q(z) = \sum\limits_x q_x z^x$, у которых показатели степеней x мономов z^x лежат в $K \cap \mathbb{Z}^n$, обозначим $\mathbb{C}_K[z]$. Операция сложения и умножения при этом определяются естественным образом.

Характеристическим многочленом для разностного оператора (3) назовем многочлен Лорана $P(z) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega$.

Порядком разностного оператора $P(\delta)$ назовем степень $\deg P(z)$ характеристического многочлена и, если обозначить этот порядок d, то $P(\delta)$ можно записать в виде $P(\delta) = \sum\limits_{|\omega|_\nu \leqslant d} c_\omega \delta^\omega$.

Теорема 1. *Если для точки m, определяющей множество начальных данных X_0, найдется $\nu \in \mathring{K}^* \cap \mathbb{Z}^n$ такая, что $|m|_\nu = d$ и при этом m — единственная точка из Ω с этим свойством, то задача (3)–(4) имеет единственное решение.*

Отметим, что для случая $K = \mathbb{R}^n_+$ теорема 1 доказана в работе[5] другим методом (см. также[19]).

Доказательство теоремы 1 сводится к разрешимости бесконечной системы линейных уравнений с бесконечным числом переменных. Она имеет специфический вид, а именно: в каждое уравнение входит только конечное число неизвестных. Такая система совместна, если любая система из конечного числа уравнений совместна (см., например,[20] гл. 6, лемма 6.3.7). В §1.1 построена последовательность подсистем системы (3)–(4), состоящих из конечного числа уравнений. Эти подсистемы устроены так, что в каждую следующую входят все уравнения предыдущей. Совместность каждой такой подсистемы в силу упомянутой выше леммы будет означать совместность системы (3)–(4).

В §1.2 рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения задачи (3)–(4), носитель решения которой лежит в пересечении подрешетки целочисленной решетки с рациональным конусом. Отметим, что такого рода уравнения возникают естественным образом в таких задачах комбинаторного анализа, как задача об *обобщенных путях Дика* или баллотировочная задача (см., например,[5,21,22,23]). Кроме того, в этом параграфе приведена формула, в которой решение выражается через начальные данные и фундаментальное решение.

Упомянутая выше подрешетка — это подрешетка, ассоциированная с векторами, порождающими рациональный конус:

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_n a^n,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Обозначим $X_\Lambda = \{x \in K \cap \Lambda : x \underset{K}{\not\geqslant} m\}$ и рассмотрим вместо (3)–(4) следу-

[19] Лейнартас Е. К. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов / Е. К. Лейнартас, М. С. Рогозина // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56, № 1. — С. 111–121.

[20] Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных / Л. Хермандер. — М.: Мир, 1968.

[21] Mansour T. Counting peaks at height *k* in a Dyck path / T. Mansour // Journal of Integer Sequences. — 2002. — V. 5. — P. 1-10.

[22] Merlini D. Generating functions for the area below some lattice paths / D. Merlini. // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 2003. — P. 217–228.

[23] Заторский Р. А. Обобщение баллотировочных чисел / Р. А. Заторский, А. Р. Малярчук // Математический заметки. 2011. — Т. 90. — № 4. —С. 527–529.

ющую задачу.

Требуется найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$P(\delta)f(x) = g(x), x \in K \cap \Lambda \tag{5}$$

и совпадающую с заданной функцией $\varphi(x)$ на множестве X_Λ:

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_\Lambda. \tag{6}$$

Доказательство разрешимости теоремы 1 не переносится впрямую на задачу (5)–(6). При более сильном по сравнению с теоремой 1 ограничении на характеристический многочлен в §1.2 дано другое доказательство разрешимости задачи (5)–(6) и, главное, приведена формула, в которой решение $f(x)$ выражается через начальные данные φ.

Продолжим функцию φ, задающую начальные данные задачи Коши на множестве X_Λ на $\mathbb{Z}^n \backslash X_\Lambda$ нулем, а именно, положим

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in X_\Lambda, \\ 0, & \text{если } x \notin X_\Lambda. \end{cases}$$

и, кроме того, определим функцию μ следующим образом:

$$\mu(x) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \tilde{\varphi}(x + \omega), \ x \in \mathbb{Z}^n.$$

Пусть $S = \{x \in \mathbb{Z}^n : \exists \omega \in \Omega$ такое, что $x + \omega \in X_\Lambda\}$, а $S_K = S \cap K$ и $\hat{S}_K = S \setminus S_K$.

Фундаментальным[24,25] называется всякое решение $\mathcal{P}(x)$ разностного уравнения такое, что

$$\sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \mathcal{P}(x + \omega) = \delta_0(x), \ x \in \mathbb{Z}^n, \tag{7}$$

где

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Далее определим функцию

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x), x \in \hat{S}_K, \\ 0, \quad x \notin \hat{S}_K, \end{cases}$$

[24]De Boor C. Fundamental solutions of multivariate difference equations / C. De Boor, K. Höllig, S. Riemensckneider // Journal of AMS. 1989. — V. 111. — P. 403–415.

[25]Vert J. Fundamental solutions of multidimensional difference equations wiht periodical and matrix coefficients / J. Vert // Aequationes Mathematical. — 1995. — V. 49. — P. 47–56.

и обозначим $Supp\,\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Z}^n : \mathcal{P}(x) \neq 0\}$– носитель функции $\mathcal{P}$. Нетрудно убедиться, что носитель фундаментального решения $Supp\,\mathcal{P}_m$ лежит в конусе, построенном на векторах $m - \omega,\ \omega \in \Omega$.

Многогранником Ньютона N_P многочлена P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества Ω.

Теорема 2. *Пусть K — симплициальный конус и m — вершина многогранника Ньютона N_P, удовлетворяющая условию*

$$m \underset{K}{\geqslant} \omega,\ \omega \in \Omega. \tag{8}$$

Тогда задача Коши (5)–(6) имеет единственное решение, которое при $g(x) = 0$ можно найти по формуле

$$f(x) = \sum_{y \in \hat{S}_K} \tilde{\mu}(y)\mathcal{P}_m(x - y), \tag{9}$$

в правой части которой число слагаемых конечно.

Производящей функцией (производящим рядом) функции $f : K \cap \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ назовем ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}. \tag{10}$$

Носителем ряда (10) называется множество

$$supp\,F = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : f(x) \neq 0\}.$$

Ряды вида (10) образуют кольцо $\mathbb{C}_K[[z]]$ относительно операций сложения и умножения. Операция умножения таких рядов определяется обычным образом, и это определение корректно, так как конус K — выступающий. В частности, это означает, что число представлений вектора $\varrho \in K \cap \mathbb{Z}^n$ в виде $\varrho = x + y,\ x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n$, конечно.

В §1.3 доказана формула, в которой производящая функция решения задачи Коши (3)–(4) представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами конечного набора функций (рядов), построенных по начальным данным задачи.

Теорема 3. *При выполнении условия (8) из теоремы 2 для производящей функции $F(z) = \sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}$ решения $f(x)$ однородной задачи (3)–(4) справедлива формула*

$$F(z) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega z^\omega \frac{1}{P(z)} \Phi_\omega(z), \tag{11}$$

где $\Phi_\omega(z) = \sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n, x \underset{K}{\ngeqslant} \omega} \varphi(x) z^{-x}$ — функции (ряды), построенные по начальным данным задачи Коши.

Отметим, что из условия (8) следует, что производящая функция начальных данных $\Phi(z) = \sum\limits_{x \in X_0} \varphi(x) z^{-x}$ совпадает с $\Phi_m(z)$.

Из формулы (11) следует, что исследование вопроса о принадлежности производящей функции $F(z)$ решения однородной задачи (3)–(4) к классу рациональных или алгебраических сводится к аналогичному вопросу о функциях $\Phi_\omega(z)$. В связи с этим потребовалось определить конструкцию мультисекции кратного ряда Лорана.

В §1.4 определено понятие мультисекции кратного ряда Лорана, которое полезно не только для исследования природы производящих функций решений разностных уравнений с носителями в рациональных конусах, но и при описании множества решений систем однородных линейных диофантовых уравнений, а также для доказательства некоторых тождеств с биномиальными коэффициентами.

Обозначим A — матрицу, столбцы которой состоят из координат векторов a^j, и $\Delta = \det A$. Если $\Delta = 1$, то конус K называется унимодулярным.

Фиксируем $\tau \in K \cap \Lambda$, обозначим $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, где μ_i — координаты τ в базисе $a^1, \ldots, a^n$. Обозначим параллелотоп

$$\Pi_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} x \underset{K}{<} \tau\}.$$

Пусть

$$\Lambda_\tau = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \lambda_1 \mu_1 a^1 + \ldots + \lambda_n \mu_n a^n,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n\}$$

— подрешетка $\mathbb{Z}^n$, порожденная векторами $\mu_1 a^1, \ldots, \mu_n a^n$. Далее будем считать, что v — точки с целыми координатами, лежащие в параллелотопе Π_τ, их число равно объему параллелотопа $Vol(\Pi_\tau) = \mu_1 \ldots \mu_n \Delta^n$. Очевидно, что $\bigcup\limits_{v \in \Pi_\tau \cap \mathbb{Z}^n} (v + \Lambda_\tau) = \mathbb{Z}^n$.

Будем называть v-ой τ-секцией кратного ряда Лорана

$$F(z) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}$$

ряд вида

$$T_{v,\tau} F(z) = \sum_{x \in v + K \cap \Lambda_\tau} f(x) z^{-x}. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что любой ряд $F(z)$ из кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ можно единственным образом представить в виде суммы

$$F(z) = \sum_{v \in \Pi_\tau \cap \mathbb{Z}^n} T_{v,\tau} F(z). \tag{13}$$

Заметим также, что v-ая τ-секция представима в виде

$$T_{v,\tau} F(z) = \sum_{x \in v + K \cap \Lambda_\tau} f(x) z^{-x} = z^{-v} \Theta_v(z), \tag{14}$$

где $\Theta_v(z) = \sum\limits_{y \in K\cap\Lambda} f(v+y)z^{-y}$. Отметим, что $\Theta_v(z)$ принадлежат подкольцу $\mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$ кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$, где $\mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$ — подкольцо рядов с носителями из $K \cap \Lambda$.

При $\tau = a^1 + \dots + a^n$ и $v \in \Pi_\tau \cap \mathbb{Z}^n$ ряды $z^{-v}\Theta_v(z)$ будем называть каноническими мультисекциями ряда $F(z)$.

В следующей теореме дана формула, связывающая мультисекцию с исходным рядом.

Теорема 4. *Всякая v-ая τ-секция $T_{v,\tau}F(z)$ выражается через исходный ряд $F(z)$ следующим образом:*

$$T_{v,\tau}F(z) = \frac{1}{Vol(\Pi_\tau)} \sum_J R^{\tau - v\odot J} F(R^J z), \tag{15}$$

где $R = (R_1, ..., R_n)$, $R_j \neq 1$, $j = 1, \dots, n$, — некоторое решение системы уравнений

$$R^{\mu_i a^i} = 1,\ i = 1, \dots, n, \tag{16}$$

и $J = (j_1, \dots, j_n)$, $1 \leqslant j_1 \leqslant \mu_1\Delta$, ..., $1 \leqslant j_n \leqslant \mu_n\Delta$, где μ_i — координаты τ в базисе $a^1, \dots, a^n$.

При $n = 1$ определение мультисекции, данное формулой (12), совпадает с определением мультисекции из работы[2]. Там же приведен одномерный аналог формулы (15) и перечислены некоторые примеры применения понятия мультисекции.

Вторая глава посвящена исследованию природы производящих функций решений задачи Коши. Для $n = 1$ известно, что производящая функция решения разностного уравнения с любыми начальными данными рациональна. Для $n > 1$ это уже не так. В работе[5] для разностных уравнений в положительном октанте $\mathbb{Z}^n_+$ целочисленной решетки приведены примеры, показывающие, что из рациональности производящей функции начальных данных не всегда следует рациональность производящей функции решения (она может быть даже не D-финитной), а также даны условия на многогранник Ньютона, обеспечивающие рациональность (алгебраичность) производящих функций решения в случае рациональности (алгебраичности) производящей функции начальных данных.

Наиболее полезные в перечислительном комбинаторном анализе классы производящих функций (рядов) можно выстроить в иерархию, предложенную Стенли[3]:

$$\{\text{рациональные}\} \subset \{\text{алгебраические}\} \subset \{\text{D-финитные}\}. \ (*)$$

Вопрос о том, останутся ли производящие функции (ряды) решения разностного уравнения в тех же классах из иерархии $(*)$, что и производящие функции начальных данных представляет большой интерес и является актуальным. Для положительного ответа на этот вопрос условия разрешимости задачи (3)–(4) из теоремы 1 будут недостаточными[5].

В диссертационной работе задача Коши рассматривается в симплициальных рациональных конусах K и возникает вопрос об определении понятия D-финитности для рядов Лорана с носителями в $K \cap \mathbb{Z}^n$. В §2.1 на кольце $\mathbb{C}_K[[z]]$ рядов Лорана с носителями в рациональном конусе K определены операторы дифференцирования, которые позволяют ввести понятие D-финитного ряда Лорана, так, чтобы иерархия Стенли производящих функций решений задачи Коши (3)–(4) сохранялась.

Для формальных степенных рядов одной переменной понятие D-финитности систематически изучалось в работах[26,27]. Для кратных степенных рядов это определение обсуждалось в работе[28]. Приведем его формулировку.

Пусть $F(\xi) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^n} a_\lambda \xi^\lambda$ — формальный степенной ряд переменных $\xi_1, ..., \xi_n$. *Он называется D-финитным (по Липшицу), если удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида*

$$P_k^i(\xi)\frac{\partial^k F}{\partial \xi_i^k} + ... + P_1^i(\xi)\frac{\partial F}{\partial \xi_i} + P_0^i(\xi)F = 0, \quad i = 1, ..., n, \qquad (17)$$

где $P_j^i(\xi)$ — многочлены.

Из (11) следует, что для рациональности или алгебраичности производящей функции $F(z)$ решения задачи Коши достаточно рациональности или алгебраичности $\Phi_\omega(z)$ для всех $\omega \in \Omega$. Что касается D-финитности, то прежде нужно определить это понятие для рядов Лорана с носителями в рациональных конусах. Для этого введем операторы, которые, в отличие от частных производных, *являются дифференцированиями в кольце* $\mathbb{C}_K[[z]]$.

Любой элемент $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $x = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_n a^n$. В матричной форме это представление запишется в виде $x = A\lambda$, где λ — вектор-столбец, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ .. & .. & .. \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

На мономах $f(x)z^{-x}$ определим оператор D_i следующим образом

$$D_i f(x) z^{-x} = -\lambda_i f(x) z^{-x-a^i}, \qquad (18)$$

где λ_i — i-я координата точки $\lambda = A^{-1}x$. Заметим, что при $\Delta \neq 1$ для $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ числа λ_i, вообще говоря, рациональные.

---

[26] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции / Р. Стенли. — М.: Мир, 2009. — 767 с.

[27] Stanley R. Differentiably finite power series / R. Stanley // European Journal Combinatorics. — 1980. – V. 1. — P. 175–188.

[28] Lipshitz L. D-Finite power series/ L. Lipshitz // Journal of Algebra. — 1989. — V. 122. — P. 353–373.

Действие оператора D_i на ряды F из кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ определяется по линейности. Нетрудно проверить, что операторы D_i, $i = 1, \ldots, n$, являются дифференцированиями (т. е. отображениями кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ в себя, линейными и удовлетворяющими обычному правилу для производной произведения). Обозначим

$$D_i^k = \underbrace{D_i \circ \cdots \circ D_i}_{k \text{ раз}}.$$

Формальный ряд $F(z) = \sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}$ из кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ назовем D-финитным, если он удовлетворяет системе уравнений вида

$$Q_k^i(z) D_i^k F(z) + \cdots + Q_1^i(z) D_i F(z) + Q_0^i(z) F(z) = 0, i = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

где $Q_j^i(z) \in \mathbb{C}_K[z]$.

Если $K = \mathbb{R}_+^n$, то $D_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$, то, после замены $z_i \to \frac{1}{z_i}$, мы имеем определение Липшица[28] D-финитности степенных рядов.

Приведем формулировку теоремы о сохранении иерархии Стенли для производящих функций решения задачи Коши.

Теорема 5. *Пусть для точки m, определяющей множество X_0, на котором заданы начальные данные однородной задачи (3)–(4), выполнено условие (8). Тогда из D-финитности (рациональности, алгебраичности) производящей функции начальных данных следует D-финитность (рациональность, алгебраичность) производящей функции решения.*

Для доказательства теоремы 5 нам потребуется некоторые свойства D-финитных степенных рядов перенести на ряды Лорана с носителями в рациональных конусах.

В §2.2 установлена связь между определением D-финитного степенного ряда по Липшицу и определением D-финитного ряда Лорана с носителем в рациональном конусе.

Если $\mathcal{A}$ – отображение из $\mathbb{Z}_+^n$ в $K \cap \Lambda$ по правилу $\lambda \to A\lambda$, то обозначим $\mathcal{A}^*$ – отображение из кольца рядов Лорана $\mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$ в кольцо степенных рядов $\mathbb{C}[[\xi]]$, индуцированное отображением $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^* : \sum_{x \in K \cap \Lambda} f(x) z^{-x} \to \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^n} f(A\lambda) \xi^{\lambda},$$

где $z^{-A} = \xi$.

Теорема 6. *Пусть $F(z) \in \mathbb{C}_K[[z]]$, $\tau = a^1 + \cdots + a^n$ и $T_{v,\tau} F(z) = z^{-v} \Theta_v(z)$ – его канонические мультисекции, $\Theta_v(z) \in \mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$. Ряд $F(z)$ D-финитен тогда и только тогда, когда для всех $v \in \Pi_\tau \cap \mathbb{Z}^n$ степенные ряды $\mathcal{A}^*(\Theta_v(z))$ будут D-финитны по Липшицу.*

В §2.3 дано понятие сечения ряда Лорана с носителем в рациональном конусе. Доказана теорема о том, что ряд Лорана $F(z)$ с носителем в $K \cap \mathbb{Z}^n$

лежит в том же классе иерархии Стенли, что и ряд Лорана $F_\omega(z)$ с носителем $K \setminus \{\omega + K\} \cap \mathbb{Z}^n$.

Теорема 7. *Если ряд $F(z) \in \mathbb{C}_K[[z]]$ является D-финитным (рациональным, алгебраичным), то для любого $\omega \in K \cap \mathbb{Z}^n$ ряд*

$$F_\omega(z) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n, x \underset{K}{\not\geqslant} \omega} f(x) z^{-x}$$

будет D-финитным (рациональным, алгебраичным).

В §2.4 приведены примеры применения развитых в диссертационной работе методов в следующих задачах комбинаторного анализа: пути Дика, обобщенные пути Дика и баллотировочная задача.

Традиционно в комбинаторном анализе разностные уравнения принято рассматривать в положительном октанте целочисленной решетки, соответственно в качестве производящих функций используются степенные ряды, т. е. ряды вида $F(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} f(x) z^x$ с носителями в положительном октанте. В данной работе исследуются решения разностного уравнения и их производящие функции с носителями в рациональных конусах. Такой подход представляется естественным в задачах о числе способов перемещения точки по целочисленной решетке с заданным набором шагов, например, в задаче об обобщенных путях Дика, а также в баллотировочной задаче.

Основные результаты

1. Найдены условия принадлежности производящих функций решений задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах к одному из классов иерархии Стенли.

2. Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах и получена формула, в которой решение выражается через начальные данные и фундаментальное решение.

3. Получена формула, в которой производящая функция решения задачи Коши для полиномиальных разностных операторов в рациональных конусах представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами конечного набора функций, построенных по начальным данным.

Публикации по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК

[1] Некрасова Т. И. Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки / Т. И. Некрасова // Журнал Сибирского Федерального Университета. 2012. — Т. 5, вып. 4. — С. 576–580.

[2] Некрасова Т. И. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнений // / Т. И. Некрасова // Известия Иркутского государственного университета. 2013. — Т. 6, № 3. — С. 88–96.

[3] Некрасова Т. И. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Известия Иркутского государственного университета. 2014. — Т. 9. — С. 91–103.

[4] Некрасова Т. И. On the Cauchy problem for multidimensional difference equations in rational cone / T. I. Nekrasova // Journal of Siberian Federal University. — 2015. — V. 8(2) — P. 184–191.

Тезисы конференций

[5] Некрасова Т. И. Многомерные разностные уравнения в произвольном конусе целочисленной решетки / Т. И. Некрасова // Тезисы докладов Четвертого российско-армянского совещания по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. — Красноярск: СФУ. — 2012. — С. 48–50.

[6] Некрасова Т. И. Многомерный аналог теоремы Муавра о возвратных последовательностях / Т. И. Некрасова // Тезисы докладов летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России — Ярославль: ЯГПУ. — 2013. — С. 62.

[7] Некрасова Т. И. О рациональности многомерных возвратных рядов Лорана / Т. И. Некрасова // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. — Новосибирск: НГУ. — 2013. — С. 29.

[8] Некрасова Т. И. Интегральное представление для композиции Адамара кратных рядов Лорана / Т. И. Некрасова // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. Красноярск, 15–25 апреля 2013. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2013.

[9] Некрасова Т. И. Критерий D-финитности производящих функций решений разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. — Новосибирск: НГУ. — 2014. — С. 31.

[10] Некрасова Т. И. Необходимое и достаточное условие D-финитности производящих функций решений многомерных разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Молодежь и наука: сборник материалов Х Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15–25 апреля 2014. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2014.

[11] Лейнартас Е. К. О D-финитности производящих функций решений разностных уравнений / Е. К. Лейнартас, Т. И. Некрасова // Тезисы докладов Пятого российско-армянского совещания по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. — Армения: Ереван. — 2014. — С. 38–39.

[12] Некрасова Т. И. О разрешимости задачи Коши для многомерных разностных уравнений в рациональных конусах / Т. И. Некрасова // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный». Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015.