На правах рукописи

Тимошенко Егор Александрович

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ. CSP-КОЛЬЦА И МОДУЛИ НАД НИМИ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Красноярск — 2016

Работа выполнена в федеральном государственном
автономном образовательном учреждении высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор **Крылов Пётр Андреевич**

Официальные оппоненты:

Сулейманова Галина Сафиуллановна, доктор физико-математических наук, доцент, Хакасский технический институт — филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Сибирский федеральный университет», кафедра прикладной информатики, математики и естественнонаучных дисциплин, профессор

Туганбаев Аскар Аканович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет "МЭИ"», кафедра высшей математики, профессор

Царев Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет», кафедра алгебры, профессор

Ведущая организация:
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I»

Защита состоится 29 января 2016 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», ФГБУН Институт вычислительного моделирования СО РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «____» декабря 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Шлапунов Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В книге Андрунакиевича и Рябухина отмечено, что «при изучении алгебраических систем одной из основных задач является... построение соответствующей структурной теории. Структурные теоремы сводят изучение рассматриваемых алгебраических систем к изучению более “просто устроенных”. ⟨...⟩ Одной из конструкций, осуществляющих подобное сведение, и является радикал»[1]. Начало общей теории радикалов (для колец, алгебр и решёток) положили в 1950-х годах Курош[2] и Амицур[3,4,5]. С тех пор теория радикалов распространилась и на другие алгебраические структуры, среди которых модули и группы занимают одно из первых мест.

На зрелость связанного с радикалами модулей направления указывает, помимо всего прочего, наличие заметного числа монографий по данной теме (Мишина и Скорняков[6], Кашу[7,8], Ламбек[9], Бицан, Кепка и Немец[10], Голан[11], Стенстрём[12] и другие). В работах отечественных и зарубежных алгебраистов (Курош, Рябухин, Иванов, Гарднер, Диксон, Гёбель, Шелах и т. д.) получены также многочисленные результаты, связанные с радикалами абелевых групп, т. е. модулей над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$.

С другой стороны, во многих работах исследуются взаимосвязи между свойствами модулей и абелевых групп. Шульц в одной из статей[13] определил E-*кольца* как кольца R со свойством $\mathrm{Hom}_R(R,R) = \mathrm{Hom}(R,R)$. Позднее это

[1]Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. *Радикалы алгебр и структурная теория.* М.: Наука. 1979. С. 5.

[2]Курош А. Г. *Радикалы колец и алгебр* // Мат. сб. 1953. Т. 33(75). С. 13–26.

[3]Amitsur S. A. *A general theory of radicals. I* // Amer. J. Math. 1952. V. 74. P. 774–786.

[4]Amitsur S. A. *A general theory of radicals. II* // Ibid. 1954. V. 76. P. 100–125.

[5]Amitsur S. A. *A general theory of radicals. III* // Ibid. P. 126–136.

[6]Мишина А. П., Скорняков Л. А. *Абелевы группы и модули.* М.: Наука. 1969.

[7]Кашу А. И. *Радикалы и кручения в модулях.* Кишинёв: Штиинца. 1983.

[8]Кашу А. И. *Функторы и кручения в категориях модулей.* Кишинёв: Штиинца. 1997.

[9]Lambek J. *Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients.* Berlin: Springer. 1971.

[10]Bican L., Kepka T., Němec P. *Rings, modules, and preradicals.* New York: Marcel Dekker. 1982.

[11]Golan J. S. *Torsion theories.* Harlow: Longman Sci. Techn.; New York: Wiley. 1986.

[12]Stenström B. *Rings of quotients.* Berlin: Springer. 1975.

[13]Schultz P. *The endomorphism ring of the additive group of a ring* // J. Austral. Math. Soc. 1973. V. 15. P. 60–69.

определение было распространено на модули: A_R называют Е-*модулем*, если $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}(R, A)$. Одной из наиболее подробных работ о Е-модулях является статья Пирса[14]. В книге Крылова, Михалёва и Туганбаева[15] даётся обзор основных результатов, связанных с Е-кольцами и Е-модулями.

В диссертации изучаются радикалы, которые определяются с помощью Hom и $\otimes$ — важнейших модульных функторов. Крылов и Приходовский[16,17] ввели понятия Е(e)-модуля и Т(e)-модуля следующим образом. Пусть задан гомоморфизм колец $e\colon S \to R$, тогда каждый R-модуль можно естественным образом превратить в (притягивающий) S-модуль. Говорят, что A_R является Е(e)-*модулем* (Т(e)-*модулем*), если выполняется $\mathrm{Hom}_S(R, A) = \mathrm{Hom}_R(R, A)$ (соответственно выполняется $A \otimes_S R = A \otimes_R R$). В диссертационной работе, в частности, определяется (обобщённый) Е-радикал, который по сути сводит воедино аналогичный радикал, рассматривавшийся Пирсом[14], и Е(e)-модули из работ Крылова и Приходовского. С помощью Т(e)-модулей двойственным образом в диссертации вводится Т-радикал.

В своей работе[18] Кашу исследовал вопрос об аппроксимации заданного радикала «наиболее близким» к нему радикалом, обладающим в каком-либо смысле «хорошими» свойствами. В диссертации решается вопрос, как можно аппроксимировать порождённый (копорождённый) произвольным S-модулем радикал при помощи радикала, порождённого (копорождённого) каким-либо S-S-бимодулем, и описываются все кольца S, для которых «самый близкий» радикал всегда будет совпадать с исходным радикалом. Это, в свою очередь, позволяет получить больше информации о Е-радикале, Т-радикале, а также о связанных с ними модулях.

---

[14]Pierce R. S. E-*modules* // Abelian group theory. Providence: Amer. Math. Soc. 1989. P. 221–240.

[15]Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism rings of Abelian groups*. Dordrecht: Kluwer. 2003. §6.

[16]Крылов П. А., Приходовский М. А. *Обобщённые* Т-*модули и* Е-*модули* // Универсальная алгебра и её приложения. Волгоград: Перемена. 2000. С. 153–169.

[17]Приходовский М. А. *Изоморфизмы тензорных произведений модулей и* Т-*модули*: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск. 2002.

[18]Kashu A. I. *Some remarks on approximation of preradicals in modules* // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat. 2002. №3(40). P. 53–60.

При исследовании абелевых групп часто полезно рассматривать их как модули над подходящими кольцами (подробнее об этом важном направлении см. в упомянутой выше книге[19]). В работах Фомина[20] и Крылова, Пахомовой и Подберезиной[21] независимо определены кольца псевдорациональных чисел. Во второй из этих статей был существенно использован тот факт, что всякая sp-*группа* (т. е. редуцированная смешанная группа, допускающая сервантное вложение в прямое произведение своих примарных компонент такое, что при этом вложении любой элемент конечного порядка переходит сам в себя) есть модуль над некоторым кольцом псевдорациональных чисел. В своих работах sp-группы изучали Глаз и Уиклесс[22], Альбрехт[23], Крылов[24] и другие авторы.

Ещё в одной статье Фомина[25] отмечено, что факторно делимые группы (A называют *факторно делимой группой*, если A не содержит отличных от 0 периодических делимых подгрупп и содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что факторгруппа A/F является периодической и делимой) можно изучать с помощью модулей над кольцом псевдорациональных чисел. Значимость факторно делимых групп проявляется, кроме прочего, в том, что образуемая ими категория будет двойственна категории, объекты которой — группы без кручения конечного ранга[26].

В связи со сказанным крайне важно исследовать модули над кольцами псевдорациональных чисел. Так, Чегляковой[27] описаны инъективные модули

---

[19]Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism rings of Abelian groups*. Chap. 2.

[20]Fomin A. A. *Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers* // Abelian groups and modules. Basel: Birkhäuser. 1999. P. 87–100.

[21]Крылов П. А., Пахомова Е. Г., Подберезина Е. И. *Об одном классе смешанных абелевых групп* // Вестн. Томского ун-та. 2000. № 269. С. 47–51.

[22]Glaz S., Wickless W. *Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups* // Comm. Algebra. 1994. V. 22. P. 1161–1176.

[23]Albrecht U. F. *Mixed Abelian groups with Artinian quasi-endomorphism ring* // Comm. Algebra. 1997. V. 25. P. 3497–3511.

[24]Крылов П. А. *Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов* // Фундам. и прикл. математика. 2000. Т. 6. С. 793–812.

[25]Fomin A. A. *Quotient divisible mixed groups* // Abelian groups, rings, and modules. Providence: Amer. Math. Soc. 2001. P. 117–128.

[26]Fomin A. A., Wickless W. *Quotient divisible Abelian groups* // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 45–52.

[27]Чеглякова С. В. *Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* // Фундам. и прикл. математика. 2001. Т. 7. С. 627–629.

над кольцом псевдорациональных чисел кохарактеристики $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$; позже Царевым[28] было дано описание плоских модулей над тем же кольцом. Отметим, что модули над кольцами псевдорациональных чисел имеют много общего с обычными абелевыми группами: у таких модулей есть свои аналоги примарных компонент, делимости, редуцированности и ранга без кручения.

Царевым отмечалось: «...в силу оригинальности и красоты результатов теория модулей над кольцом псевдорациональных чисел заслуживает и независимого внимания. ...На сегодняшний день существуют конструкции, обобщающие кольцо псевдорациональных чисел»[29]; в качестве конструкций этого рода Крылов предложил рассматривать сперва кольца псевдоалгебраических чисел (таким кольцам и модулям над ними была посвящена диссертационная работа Зиновьева[30]), а затем csp-кольца (у колец псевдорациональных чисел базовым полем является $\mathbf{Q}$, у колец псевдоалгебраических чисел — конечные алгебраические расширения поля $\mathbf{Q}$, у csp-колец — любые поля). Настоящая диссертация во многом является продолжением перечисленных выше трудов. В частности, дано полное описание проективных модулей над произвольным csp-кольцом, а полученное ранее Царевым[28] описание плоских модулей было обобщено в диссертационной работе на случай csp-колец.

Важным направлением алгебры является решение проблем реализации (в общей постановке теорема реализации для колец эндоморфизмов говорит, что каждое кольцо из какого-либо класса изоморфно кольцу эндоморфизмов подходящего модуля или абелевой группы из заданного класса). В 1963 году были опубликованы знаменитые теоремы Корнера[31,32,33], в одной из которых утверждается, что любое счётное редуцированное кольцо без кручения пред-

---

[28]Царев А. В. *Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел* // Мат. заметки. 2006. Т. 80. С. 437–448.

[29]Царев А. В. *Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы*: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М. 2009. С. 5.

[30]Зиновьев Е. Г. *Кольца псевдоалгебраических чисел и модули над ними*: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск. 2009.

[31]Corner A. L. S. *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring* // Proc. London Math. Soc. 1963. V. 13. P. 687–710.

[32]Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы. Т. 2.* М.: Мир. 1977. §110.

[33]Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism rings of Abelian groups*. §29.

ставимо в виде кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы без кручения. В 1980–1990-х годах исследование проблем реализации составляло уже одну из основных частей теории колец эндоморфизмов. Благодаря ряду работ удалось снять предположение о счётности кольца из теоремы Корнера (см. работу Дугаса и Гёбеля[34] и монографию Гёбеля и Трлифая[35]).

Исследуются также и проблемы реализации для колец эндоморфизмов в категории Уокера[36]. В этой категории множество всех морфизмов из A в B задаётся равенством

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{W}}(A, B) = \operatorname{Hom}(A, B) / \operatorname{Hom}(A, \mathbf{t}(B)),$$

где $\mathbf{t}(B)$ есть периодическая часть группы B. Известно[37], что всякое счётное редуцированное кольцо без кручения будет представимо в виде кольца эндоморфизмов в категории Уокера какой-либо счётной редуцированной группы, которая является расширением периодической группы с помощью ненулевой делимой группы без кручения. В настоящей диссертации получены теоремы, позволяющие представлять заданное поле F как базовое поле какого-нибудь csp-кольца R. Так как всякое csp-кольцо является E-кольцом, в этом случае кольцо эндоморфизмов в категории Уокера $\operatorname{End}_{\mathrm{W}} R^+$ аддитивной группы R^+ построенного кольца R будет изоморфно полю F.

В ряде работ изучаются и кольца эндоморфизмов самомалых sp-групп. Для любой такой группы A кольцо $\operatorname{End}_{\mathrm{W}} A$ изоморфно $\mathbf{Q}$-алгебре квазиэндоморфизмов $\mathbf{Q} \otimes \operatorname{End} A$ группы A. В статье Альбрехта, Гётерса и Уиклесса[38], посвящённой смешанным абелевым группам, доказано, что каждое конечное алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$ изоморфно алгебре квазиэндоморфизмов некоторой самомалой sp-группы. Поскольку, как легко показать, для любого

[34]Dugas M., Göbel R. *Every cotorsion-free algebra is an endomorphism algebra* // Math. Z. 1982. V. 181. P. 451–470.

[35]Göbel R., Trlifaj J. *Approximations and endomorphism algebras of modules.* Berlin: De Gruyter. 2012. Chap. 20.

[36]Крылов П. А., Туганбаев А. А. *Модули над областями дискретного нормирования.* М.: Факториал Пресс. 2007. §29.

[37]Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism rings of Abelian groups.* §30.

[38]Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W. *The flat dimension of mixed Abelian groups as* E*-modules* // Rocky Mountain J. Math. 1995. V. 25. P. 569–590.

csp-кольца R группа R^+ будет самомалой, то полученные в диссертационной работе теоремы о реализации полей характеристики нуль как базовых полей подходящих csp-колец можно рассматривать как существенное продвижение по сравнению с указанной теоремой Альбрехта, Гётерса и Уиклесса.

В диссертации при доказательстве упомянутых теорем внутри важного направления «теоретико-множественные методы в алгебре» (книга Эклофа[39] целиком посвящена таким методам; самым известным результатом в данном направлении является полученное в 1974 году Шелахом[40] решение проблемы Уайтхеда) автором был создан новый раздел, который связан с применением кардинальных характеристик континуума к изучению полей, колец и многочленов; кардинальные характеристики, первоначально появившиеся в теории множеств и топологии (см. монографию Бартошиньского и Джуды[41] и обзор Бласса[42]), в работах по алгебре пока нечасты.

Достаточно хорошо известно[43], что в категории модулей над заданным кольцом все идемпотентные радикалы составляют большую решётку; статьи, в которых давалось бы полное описание этой большой решётки, встречаются реже (удачным примером является работа[44], в которой Бицан, Кепка, Немец и Ямбор получили полную характеризацию всех колец, в категории модулей над которыми есть в точности два идемпотентных радикала). В диссертации даётся описание решётки $\otimes$-радикалов категории абелевых групп и описание решётки всех идемпотентных радикалов категории модулей над csp-кольцом, а также установлены некоторые решёточные свойства таких радикалов.

Цели и задачи. 1. В категории абелевых групп описать $\otimes$-радикалы, а также образуемое такими радикалами частично упорядоченное множество.

[39] Эклоф П. *Теоретико-множественные методы в гомологической алгебре и теории абелевых групп.* М.: Мир. 1986.

[40] Shelah S. *Infinite Abelian groups, Whitehead problem and some constructions* // Israel J. Math. 1974. V. 18. P. 243–256.

[41] Bartoszyński T., Judah H. *Set theory: on the structure of the real line.* Wellesley: A. K. Peters. 1995.

[42] Blass A. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum* // Handbook of set theory. Dordrecht: Springer. 2010. P. 395–489.

[43] Кашу А. И. *Радикалы и кручения в модулях.* §8.

[44] Bican L., Jambor P., Kepka T., Němec P. *On rings with trivial torsion parts* // Bull. Austral. Math. Soc. 1973. V. 9. P. 275–290.

Изучить решёточные свойства $\otimes$-радикалов категории абелевых групп.

2. Ответить на вопрос, при каких условиях на кольцо S каждый идемпотентный радикал категории S-модулей, в каком-либо смысле порождённый некоторым S-модулем, будет порождён также подходящим S-S-бимодулем.

3. Выяснить, при каких условиях данное поле может служить базовым полем некоторого csp-кольца.

4. Описать проективные и плоские модули над csp-кольцом.

5. В категории модулей над csp-кольцом дать описание идемпотентных радикалов и образуемого ими частично упорядоченного множества.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории абелевых групп и теории колец и модулей, для исследования идемпотентных радикалов применяются также методы теории решёток. Разработаны методы теоретико-множественного характера, позволившие, применяя кардинальные характеристики континуума, доказать тот факт, что базовые поля csp-колец могут иметь достаточно большую мощность; также развиты методы, дающие возможность исследовать некоторые модули над произвольным csp-кольцом, используя матрицы и определители с элементами из этого кольца.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Описаны $\otimes$-радикалы категории абелевых групп и решётка, которая состоит из этих радикалов.

2. Установлено, что идемпотентный радикал категории абелевых групп будет $\otimes$-радикалом в точности тогда, когда его радикальный класс обладает свойством замкнутости относительно сервантных подгрупп.

3. Показано, что в категории абелевых групп совпадают «решёточное» и «поточечное» пересечения $\otimes$-радикалов.

4. Доказано, что идемпотентный радикал, $\otimes$-порождённый каким-либо S-модулем, обязательно $\otimes$-порождён также подходящим S-S-бимодулем.

5. Получена характеризация колец, в категории модулей над которыми всякий идемпотентный радикал, порождённый (копорождённый) каким-либо

S-модулем, порождён (копорождён) также подходящим S-S-бимодулем.

6. Показано, что всякое поле характеристики нуль, мощность которого не превосходит кардинальной характеристики $\mathfrak{b}$, есть базовое поле какого-то csp-кольца.

7. Получено описание проективных модулей над csp-кольцом (на языке кардинальных инвариантов).

8. Получены описание плоских модулей и критерий чистоты подмодуля в категории модулей над csp-кольцом.

9. В категории модулей над csp-кольцом дано описание идемпотентных радикалов; выяснено строение образуемой этими радикалами решётки.

10. Доказано, что в категории модулей над произвольным csp-кольцом «решёточное» и «поточечное» пересечения любых идемпотентных радикалов будут совпадать.

Теоретическая и практическая значимость. Данная работа носит теоретический характер и может быть использована в дальнейшем развитии теории абелевых групп и теории колец и модулей.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях «Алгебра и её приложения» и «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2002, 2007, 2010, 2013), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2002, 2003, 2008, 2009, 2012), «Алгебра, логика и кибернетика» (Иркутск, 2004), Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003, 2008), Всероссийской конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2010) и Всероссийских и Международных симпозиумах «Абелевы группы» (Бийск, 2005, 2006, 2010, 2012; Москва, 2014). Кроме этого, они докладывались автором на семинарах кафедры алгебры и на семинарах кафедры общей математики ТГУ, а также на Красноярском алгебраическом семинаре.

При написании диссертации автор получал поддержку в рамках гранта по Постановлению Правительства Российской Федерации №220 от 09 апреля 2010 года по договору с Министерством образования и науки Российской Фе-

дерации № 14.B25.31.0001 от 24 июня 2013 года (BIO-GEO-CLIM).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 35 научных работ; 12 из них — в журналах, рекомендованных ВАК [1–12].

Структура и объём работы. Диссертация включает в себя введение и четыре главы, разделённые на 17 параграфов, а также список обозначений и список литературы из 118 наименований. Объём работы — 222 страницы.

Основное содержание работы

Во введении приведена общая характеристика работы. Обосновывается актуальность направления исследований, даётся краткое содержание глав.

Первая глава содержит предварительные сведения и общие результаты, которые будут использоваться в последующих главах. §1 представляет собой теоретико-множественное введение и включает, кроме прочего, необходимую информацию о кардинальных характеристиках континуума. В §2 приведены основные определения и результаты теории радикалов модулей. §3 содержит некоторые свойства функторов $\otimes$ и Hom, играющих в диссертации ключевую роль. В §4 собраны необходимые факты, относящиеся к кольцам обобщённых матриц и модулям над этими кольцами (что пригодится нам при построении примеров в §12). В §5 приведён ряд технических результатов об аддитивных структурах некоторых колец и модулей. В §6 вводятся $\otimes$-радикалы, а также Hom-радикалы. Устанавливаются связанные с ними общие факты, имеющие и самостоятельное значение.

Приведём основные определения.

Определение 2.1. Пусть всякому модулю $A \in \text{mod-}S$ сопоставлен его подмодуль $\rho(A)$. Мы будем говорить, что ρ — *предрадикал* категории mod-S, если для любого S-гомоморфизма $\varphi\colon B \to A$ выполнено $\varphi(\rho(B)) \subset \rho(A)$.

Рассмотрим следующие возможные свойства предрадикала ρ.

R1. $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любого модуля A.

R1*. $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любого модуля A.

R2. $\rho(B) = B \cap \rho(A)$ для любого модуля A и $B \subset A$.

R2*. $\rho(A/B) = (\rho(A) + B)/B$ для любого модуля A и $B \subset A$.

Определение 2.3. Предрадикал ρ называется:

— *идемпотентным*, если он удовлетворяет условию R1;

— *радикалом*, если он удовлетворяет условию R1*;

— *идемпотентным радикалом*, если выполнены условия R1 и R1*;

— *кручением*, если выполнены условия R1* и R2;

— *кокручением*, если выполнены условия R1 и R2*.

Идемпотентные радикалы могут быть частично упорядочены: полагаем $\rho \leqslant \sigma$ в том и только в том случае, когда $\rho(A) \subset \sigma(A)$ для всякого модуля A. Относительно этого частичного порядка совокупность $\mathcal{IR}(S)$ идемпотентных радикалов категории mod-S образует большую решётку.

Для классов S-модулей $\mathcal{F} \subset S$-mod и $\mathcal{V} \subset$ mod-S полагаем

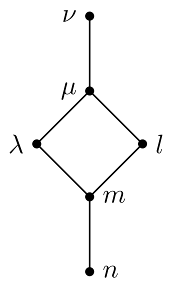
$$^{\otimes}\mathcal{F} = \{A \in \text{mod-}S \mid A \otimes_S F = 0 \text{ при всех } F \in \mathcal{F}\},$$
$$\mathcal{V}^{\downarrow} = \{A \in \text{mod-}S \mid \operatorname{Hom}(V, A) = 0 \text{ при всех } V \in \mathcal{V}\}.$$

Через $\mathrm{W}_{\mathcal{F}}(A)$ мы обозначим сумму всех подмодулей B модуля A таких, что выполнено $B \in {}^{\otimes}\mathcal{F}$. Символом $\mathrm{H}_{\mathcal{V}}(A)$ будем обозначать пересечение всех подмодулей $B \subset A$, для которых $A/B \in \mathcal{V}^{\downarrow}$. В этом случае как $\mathrm{W}_{\mathcal{F}}$, так и $\mathrm{H}_{\mathcal{V}}$ являются идемпотентными радикалами. Будем говорить, что первый из этих идемпотентных радикалов $\otimes$-*порождён* (читается как «тензорно порождён») классом $\mathcal{F}$, а второй — *порождён* классом $\mathcal{V}$.

В случаях $\mathcal{F} = \{F\}$ и $\mathcal{V} = \{V\}$ пишем просто W_F и H_V. Все радикалы, имеющие вид W_F или H_V, мы будем называть соответственно $\otimes$-*радикалами* (читается «тензор-радикалами») и Hom-*радикалами*. Через $\mathcal{L}(S)$ обозначаем класс всех $\otimes$-радикалов категории правых S-модулей mod-S.

Глава 2 посвящена изучению $\otimes$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$. В §7 дано описание всех таких радикалов и решётки, которую они образуют. Символ $\mathbf{t}$ обозначает радикал, который сопоставляет каждой группе её периодическую часть; через $\mathbf{P}$ обозначим множество всех простых чисел.

Рассмотрим множество $\mathcal{K}$, состоящее из шести элементов l, m, n, λ, μ, ν; порядок на этом множестве зададим условиями $n < m < l < \mu < \nu$ и $m < \lambda < \mu$ (элементы l и λ будем считать несравнимыми). Далее, введём на множестве $\mathcal{K}^{\mathbf{P}}$ всех функций $\mathbf{P} \to \mathcal{K}$ отношение порядка, считая, что $\xi \leqslant \eta$ в точности в том случае, когда для всякого простого p выполняется $\xi(p) \leqslant \eta(p)$. Обозначим $\mathcal{J} = \{l, m, n\}^{\mathbf{P}} \cup \{\lambda, \mu, \nu\}^{\mathbf{P}}$.



Доказывается, что следующее правило корректно определяет функцию $\Gamma\colon \mathcal{L}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{J}$ (здесь $p \in \mathbf{P}$, а через F_p обозначена p-компонента группы F):

$$\big[\Gamma(\mathrm{W}_F)\big](p) = \begin{cases} n, & \text{если } p(F/\,\mathbf{t}(F)) \neq F/\,\mathbf{t}(F), \\ m, & \text{если } pF \neq F \text{ и } p(F/\,\mathbf{t}(F)) = F/\,\mathbf{t}(F) \neq 0, \\ l, & \text{если } pF = F \neq \mathbf{t}(F), \\ \lambda, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } pF_p \neq F_p, \\ \mu, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } pF_p = F_p \neq 0, \\ \nu, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } F_p = 0. \end{cases}$$

Основным результатом §7 является

Теорема 7.6. *Отображение* $\Gamma\colon \mathcal{L}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{J}$ *осуществляет изоморфизм частично упорядоченных множеств* (*следовательно*, $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ *является полной дистрибутивной решёткой*).

Заметим, однако, что $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ не является подрешёткой в $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$.

В §8 рассматриваются различные свойства замкнутости классов ${}^{\otimes}\{F\}$. Это позволило дать описание (на языке отображения Γ) всех идемпотентных радикалов ρ категории абелевых групп, для которых класс $\mathcal{R}(\rho)$ (он состоит из групп A таких, что $\rho(A) = A$) замкнут относительно:

— произвольных подгрупп;

— p-сервантных подгрупп;

— слабо сервантных подгрупп;

— сервантных подгрупп.

В §9 исследуются решёточные свойства $\otimes$-радикалов. В своей работе[45] Тэбырцэ установил справедливость теорем 9.8 и 9.10 для случая модулей над произвольным кольцом, но предполагая, что все рассматриваемые радикалы являются кручениями. Так как все кручения категории mod-$\mathbf{Z}$ принадлежат множеству $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, то эти две теоремы по сути представляют собой обобщение результатов Тэбырцэ для случая абелевых групп.

Теорема 9.8. *Если $\mathcal{S}$ есть какое-либо непустое семейство радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, то для всякой группы A выполнено*

$$\Big[\bigwedge_{\rho\in\mathcal{S}}\rho\Big](A)=\bigcap_{\rho\in\mathcal{S}}\rho(A). \tag{9.2}$$

Следствие 9.9. *Для произвольных групп F, G и A выполнено*

$$\begin{aligned}\big[\mathrm{W}_F\wedge\mathrm{W}_G\big](A)=\mathrm{W}_F(\mathrm{W}_G(A))=\mathrm{W}_G(\mathrm{W}_F(A))=\\ =\mathrm{W}_{F\oplus G}(A)=\mathrm{W}_F(A)\cap\mathrm{W}_G(A).\end{aligned}$$

В частности, любые два радикала категории mod-$\mathbf{Z}$, *принадлежащие* $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, *коммутируют между собой.*

Теорема 9.10. *Для любого $\rho\in\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ и любого непустого семейства $\mathcal{S}$ радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ выполнено*

$$\rho\wedge\Big(\bigvee_{\sigma\in\mathcal{S}}\sigma\Big)=\bigvee_{\sigma\in\mathcal{S}}(\rho\wedge\sigma).$$

(Символы $\wedge$ и $\vee$ всюду обозначают операции большой решётки $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$; множество $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ замкнуто относительно операции $\wedge$, но не относительно $\vee$.)

Кроме того, приводится пример, демонстрирующий, что для радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, вообще говоря, не выполняется тождество

$$(\rho\wedge\rho')\vee\sigma=(\rho\vee\sigma)\wedge(\rho'\vee\sigma).$$

При помощи того же примера установлен тот факт, что подрешётка большой решётки $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$, порождённая множеством $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, не будет модулярной и что

[45] Тэбырцэ Е. И. *О булевости решётки кручений в модулях* // Математические исследования. Т. 8. Вып. 3(29). Кишинёв: Штиинца. 1973. С. 92–105.

в условии теоремы 9.8 нельзя отказаться от требования, чтобы все радикалы из равенства (9.2) принадлежали $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$.

В главе 3 диссертации изучаются $\mathrm{T}(e)$-модули и $\mathrm{E}(e)$-модули (в смысле работ Крылова и Приходовского[46,47]) и задаваемые с их помощью T-радикал и E-радикал. Выясняется, что такие радикалы близки к радикалам, которые $\otimes$-порождаются или соответственно порождаются S-S-бимодулями.

Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец; тогда любой модуль A_R можно рассматривать как правый S-модуль, полагая $as = ae(s)$ для всех элементов $a \in A$ и $s \in S$ (полученный модуль A_S называют *притягивающим*). Каждый R-гомоморфизм таких S-модулей является также S-гомоморфизмом; значит, сопоставление $A_R \rightsquigarrow A_S$ задаёт унивалентный функтор $\Theta_e\colon \text{mod-}R \to \text{mod-}S$.

Определение 10.2. Пусть $A \in \text{mod-}R$, и пусть $e\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм. Модуль A называется:

— $\mathrm{T}(e)$-*модулем*, если $A \otimes_R R = A \otimes_S R$;

— $\mathrm{E}(e)$-*модулем*, если $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$.

Через $\mathcal{T}$ (через $\mathcal{E}$) мы обозначим класс модулей A_S, на которых можно ввести R-модульную структуру таким образом, чтобы имело место равенство $\Theta_e(A_R) = A_S$ и A являлся $\mathrm{T}(e)$-модулем (или соответственно $\mathrm{E}(e)$-модулем). Сужение Θ_e на подкатегорию категории $\text{mod-}R$, которая состоит или из всех $\mathrm{T}(e)$-модулей, или из всех $\mathrm{E}(e)$-модулей, является инъективным на объектах и будет, помимо этого, полным унивалентным функтором; отсюда видно, что функтор Θ_e определяет изоморфизм между полной подкатегорией категории $\text{mod-}R$, объекты которой — это все $\mathrm{T}(e)$-модули (все $\mathrm{E}(e)$-модули), и полной подкатегорией $\mathcal{T}$ (соответственно подкатегорией $\mathcal{E}$) категории $\text{mod-}S$.

Пусть A есть правый R-модуль. Его T-*радикалом* назовём сумму $\mathrm{W}(A)$ всех R-подмодулей $B \subset A$, являющихся $\mathrm{T}(e)$-модулями, а его E-*радикалом* — пересечение $\mathrm{H}(A)$ всех R-подмодулей $B \subset A$ таких, что A/B — $\mathrm{E}(e)$-модуль.

В приводимых ниже теоремах §10 считается, что модуль V (модуль F)

---

[46]Крылов П. А., Приходовский М. А. *Обобщённые* T-*модули и* E-*модули.*

[47]Приходовский М. А. *Изоморфизмы тензорных произведений модулей и* T-*модули.*

совпадает с правым S-модулем (соответственно с левым S-модулем) $R/e(S)$. Группы $U = V \otimes_S R$ и $G = R \otimes_S F$ естественным образом допускают правую (соответственно левую) R-модульную структуру, поэтому эти группы задают в категории $\mathrm{mod}\text{-}R$ идемпотентные радикалы H_U и W_G.

Теорема 10.7. *Для всякого модуля* $A \in \mathrm{mod}\text{-}R$ *выполнены равенства* $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_G(A) = \mathrm{W}_F(A)$. *В частности,* $\mathrm{W} \in \mathcal{IR}(R)$.

Теорема 10.10. *Для всякого модуля* $A \in \mathrm{mod}\text{-}R$ *выполнены равенства* $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_U(A) = \mathrm{H}_V(A)$. *В частности,* $\mathrm{H} \in \mathcal{IR}(R)$.

Теоремы 10.7 и 10.10 приводят к следующему результату:

Теорема 10.11. *Подмодули* $\mathrm{W}(A)$ *и* $\mathrm{H}(A)$ *определяются* S*-модульной структурой модуля* A_R *однозначно.*

Пусть S — кольцо и ${}_SF_S$ — бимодуль. Тогда, полагая

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in S,\, f \in F \right\} \quad \text{и} \quad e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $s \in S$, мы получаем гомоморфизм $e\colon S \to R$ такой, что бимодули $R/e(S)$ и F изоморфны. Описанная ситуация позволяет превратить любой S-модуль в R-модуль при помощи гомоморфизма $d\colon R \to S$, где

$$d\begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} = s.$$

Тем самым мы получаем унивалентный функтор Θ_d из $\mathrm{mod}\text{-}S$ в $\mathrm{mod}\text{-}R$; этот функтор осуществляет изоморфизм между $\mathrm{mod}\text{-}S$ и $\Theta_d(\mathrm{mod}\text{-}S)$ (полной подкатегорией категории $\mathrm{mod}\text{-}R$). Композиция $\Theta_e \circ \Theta_d$ является тождественным функтором категории $\mathrm{mod}\text{-}S$ (в частности, отсюда вытекает, что сужение Θ_d на $\mathcal{T}$ является функтором, обратным к сужению функтора Θ_e на состоящую из всех $\mathrm{T}(e)$-модулей полную подкатегорию категории $\mathrm{mod}\text{-}R$). Итак, всякий модуль над S может быть получен как притягивающий модуль из некоторого R-модуля. Поэтому для рассматриваемого гомоморфизма колец e мы можем говорить не только о том, что W однозначно определяется $\otimes$-радикалом W_F, но и о том, что W_F однозначно определяется радикалом W (W_F фактически является сужением радикала W на полную подкатегорию категории mod-R). Аналогичный факт верен для радикалов $\mathrm{H} \in \mathcal{IR}(R)$ и $\mathrm{H}_V \in \mathcal{IR}(S)$.

В рассматриваемой ситуации выполнено равенство $\mathcal{T} = {}^{\otimes}\{F\}$. Логично поэтому задаться вопросом: при каких условиях на левый S-модуль F класс ${}^{\otimes}\{F\} \subset \text{mod-}S$ представи́м в виде класса $\mathcal{T}$ (для какого-либо гомоморфизма колец $e\colon S \to R$)? Из приведённых выше рассуждений следует, что это будет возможно, если F — S-S-бимодуль. По теореме 11.5 каждый $\otimes$-порождённый каким-то модулем $F \in S\text{-mod}$ радикал $\otimes$-порождается также S-S-бимодулем $F \otimes S$. Отсюда следует, что подходящие кольцо R и кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$ существуют для любого модуля ${}_SF$.

Теорема 11.5. *Пусть S — кольцо. Тогда*:

(а) *для всякого модуля ${}_SF$ выполнено* ${}^{\otimes}\{F\} = {}^{\otimes}\{F \otimes S\}$ *и* $\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_{F\otimes S}$;

(б) *каждый $\otimes$-порождённый каким-нибудь классом S-модулей радикал из $\mathcal{IR}(S)$ будет $\otimes$-порождён также некоторым классом S-S-бимодулей.*

Естественным будет поставить и вопрос, аналогичный рассмотренному: в каких случаях Hom-радикал $\mathrm{H}_V \in \mathcal{IR}(S)$ порождён не только модулем V_S, но и каким-либо S-S-бимодулем? Приводимая ниже теорема показывает, что «наиболее подходящим» является бимодуль $S \otimes V$.

Теорема 11.7. *Для модуля $V \in \text{mod-}S$ эквивалентны условия*:

1) *существует S-S-бимодуль U такой, что* $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$;

2) $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$;

3) $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$;

4) *радикал H_V порождается некоторым классом S-S-бимодулей*;

5) *для любого модуля A_S и $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ из $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ следует равенство $X = 0$.*

Отсюда получается

Теорема 11.8. *Для кольца S эквивалентны следующие условия*:

1) *для всякого V_S существует бимодуль ${}_SU_S$ такой, что* $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$;

2) *для всякого V_S выполнено* $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$;

3) *для всякого* V_S *выполнено* $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V)=V$;

4) *для всякого* V_S *идемпотентный радикал* H_V *порождён подходящим классом* S-S-*бимодулей*;

5) *если* $A, V\in \mathrm{mod}\text{-}S$ *и* $X=\mathrm{Hom}_S(V,A)$, *то равенство* $\mathrm{Hom}(S,X)=0$ *влечёт равенство* $X=0$;

6) *в категории* $\mathrm{mod}\text{-}S$ *каждый идемпотентный радикал порождается подходящим классом* S-S-*бимодулей*;

7) *для всякого* $V_S\neq 0$ *выполнено* $\mathrm{Hom}(S,\mathrm{End}\,V_S)\neq 0$.

Основное отличие от теоремы 11.5 — в том, что условиям теоремы 11.8 удовлетворяют не все кольца. Всякое кольцо S, для которого эквивалентные условия теоремы 11.8 выполнены, называется *правым* br-*кольцом*; итак, если S — правое br-кольцо, то для каждого модуля V_S класс $\{V\}^{\downarrow}\subset \mathrm{mod}\text{-}S$ будет совпадать с классом $\mathcal{E}$, соответствующим подходящему гомоморфизму колец $e\colon S\to R$. В силу теоремы 11.8 достаточно положить

$$R=\left\{\begin{pmatrix} s & x\\ 0 & s\end{pmatrix}\;\middle|\; s\in S,\, x\in S\otimes V\right\},\qquad e(s)=\begin{pmatrix} s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}.$$

Логично будет поставить вопрос, двойственный к рассмотренному нами в теореме 11.8. Для класса $\mathcal{X}\subset\mathrm{mod}\text{-}S$ и модуля $V\in\mathrm{mod}\text{-}S$ обозначим через $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}(V)$ сумму всех подмодулей U модуля V, для которых $\mathrm{Hom}(U,A)=0$ при всех $A\in\mathcal{X}$. Тогда $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$ будет идемпотентным радикалом; мы будем говорить, что класс $\mathcal{X}$ *копорождает* радикал $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$. Если $\mathcal{X}=\{A\}$, то пишем просто K_A.

Для произвольного правого S-модуля A мы обозначим через A' прямое произведение всех S-S-бимодулей вида $(S\otimes C)/\,\mathrm{K}_A(S\otimes C)$, где C пробегает множество подмодулей модуля A. Тогда справедлива

Теорема 11.11. *Для кольца* S *эквивалентны следующие условия*:

1) *для любого* A_S *существует бимодуль* ${}_SB_S$ *такой, что* $\mathrm{K}_B=\mathrm{K}_A$;

2) *для любого* A_S *выполнено* $\mathrm{K}_{A'}=\mathrm{K}_A$;

3) *если* $0\neq C_S\subset A_S$, *то* $\mathrm{Hom}_S(S\otimes C,A)\neq 0$;

4) *для любого* A_S *идемпотентный радикал* K_A *копорождён некоторым классом* S-S-*бимодулей*;

5) *если* $A, V \in \text{mod-}S$ *и* $X = \text{Hom}_S(V, A)$, *то равенство* $\text{Hom}(S, X) = 0$ *влечёт равенство* $X = 0$;

6) *в категории* $\text{mod-}S$ *любой идемпотентный радикал копорождается некоторым классом* S*-*S*-бимодулей.*

Примечательным оказывается тот факт, что двойственные в некотором смысле теоремы 11.8 и 11.11 описывают один и тот же класс колец. В самом деле, условия 5) этих теорем совпадают.

Теоремы 11.5, 11.8 и 11.11 и вопросы, приведшие к ним, перекликаются с работой Кашу[48], в которой исследовался вопрос об аппроксимации данного радикала «наиболее близким» радикалом с какими-нибудь дополнительными «хорошими» свойствами.

В §12 выделены некоторые известные классы колец, содержащиеся как в классе правых, так и в классе левых $\mathfrak{br}$-колец. Очевидно, имеет место

Предложение 12.1. *Все коммутативные кольца являются правыми* $\mathfrak{br}$*-кольцами.*

Ряд полученных результатов свидетельствует о том, что свойство быть правым $\mathfrak{br}$-кольцом сильно зависит от строения аддитивной группы кольца.

Теорема 12.11. *Пусть* R *— кольцо, для которого группа* $S = R/\mathbf{t}(R)$ *является делимой. Тогда* R *— правое* $\mathfrak{br}$*-кольцо.*

Отсюда, в свою очередь, следует

Теорема 12.12. *Класс правых* $\mathfrak{br}$*-колец строго содержит в себе класс всех колец, слабо* π*-регулярных справа или слева.*

Из теоремы 12.12 вытекает, что правыми $\mathfrak{br}$-кольцами являются кольца каждого из следующих классов:

— артиновы справа или слева;

— совершенные справа или слева;

— регулярные (в смысле фон Неймана);

— простые.

[48]Kashu A. I. *Some remarks on approximation of preradicals in modules.*

Завершающая часть §12 посвящена построению примеров. В частности, доказан такой факт: ни из примитивности справа и слева, ни из локальности, ни из того, что кольцо является левым br-кольцом, не следует, что оно будет правым br-кольцом.

В главе 4 рассматриваются csp-кольца и модули над ними.

Под *характеристикой* мы будем понимать всякую последовательность вида $\chi = (k_p)_{p\in\mathbf{P}}$, где $k_p \in \mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$. Через L_χ обозначим множество таких $p \in \mathbf{P}$, что $k_p \neq 0$. Если выполняется $k_p = \infty$, мы будем считать, что R_p есть кольцо целых p-адических чисел $\mathbf{Q}_p^*$; в случае $k_p < \infty$ полагаем $R_p = \mathbf{Z}/p^{k_p}\mathbf{Z}$. Пусть множество $L = L_\chi$ бесконечно. Обозначим

$$K_\chi = \prod_{p\in L} R_p, \qquad T_\chi = \bigoplus_{p\in L} R_p \subset K_\chi. \tag{13.1}$$

Определение 13.1. Будем называть csp-*кольцом* всякое подкольцо R кольца K_χ такое, что $T_\chi \subset R$ и что кольцо R/T_χ является полем. Поле R/T_χ, а также любое изоморфное ему поле называем *базовым полем* csp-кольца R; характеристику χ будем называть *кохарактеристикой* csp-кольца R.

Доказывается, что справедлива

Теорема 13.5. (а) *Все* csp-*кольца являются* E-*кольцами.*

(б) *Аддитивные группы двух* csp-*колец изоморфны в точности в том случае, когда эти кольца совпадают.*

Главная цель §13 и §14 — получение ответа на вопрос о том, при каких условиях заданное поле может служить базовым для некоторого csp-кольца. Для этого мы (среди прочего) в дополнение к известным в теории множеств кардинальным характеристикам континуума определяем ещё одну. Если L — бесконечное подмножество из $\mathbf{N}$, то зададим на прямом произведении

$$K_L = \prod_{p\in L} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$$

отношение "$\approx$", полагая $(r_p)_{p\in L} \approx (d_p)_{p\in L}$ в том и только в том случае, когда $r_p = d_p$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Через $\mathfrak{ie}_L$ мы обозначим наименьшую мощность множества $B \subset K_L$, удовлетворяющего условию

$$\text{для всякого } r \in K_L \text{ существует } d \in B \text{ такое, что } r \approx d.$$

Напомним определения основных кардинальных характеристик.

Зададим на множестве $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех функций $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ строгий порядок “$\prec$” следующим образом: $z' \prec z$ в том и только в том случае, когда соотношению $z'(i) < z(i)$ удовлетворяют почти все $i \in \mathbf{N}$. Мы назовём множество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ *ограниченным*, если существует функция $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ с тем свойством, что $z' \prec z$ для произвольной функции $z' \in E$; в противном случае мы скажем, что E — *неограниченное* множество. *Конфинальным* назовём подмножество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, для которого при любой функции $z' \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ в E существует функция z такая, что $z' \prec z$. Символом $\mathfrak{b}$ (символом $\mathfrak{d}$) мы обозначим наименьшую возможную мощность неограниченного множества (конфинального множества) $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

Все множества первой категории и все множества меры 0 образуют два σ-идеала множества всех подмножеств вещественной прямой. Обозначим эти идеалы через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно; через $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ обозначим наименьшую мощность множества вещественных чисел, не принадлежащего σ-идеалу $\mathcal{M}$, через $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ — наименьшую мощность семейства входящих в $\mathcal{M}$ множеств, объединение которого есть $\mathbf{R}$. Аналогичным образом вводятся кардинальные характеристики $\mathsf{non}(\mathcal{N})$ и $\mathsf{cov}(\mathcal{N})$. Следующая часть диаграммы Цихоня[49,50] содержит полную информацию о неравенствах, связывающих перечисленные кардинальные числа.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[dr] & \\
\aleph_1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{b} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

[49]Bartoszyński T., Judah H. *Set theory*: *on the structure of the real line*. Chap. 2.
[50]Blass A. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*. §5.

Стрелка, ведущая от кардинала $\mathfrak{M}$ к кардиналу $\mathfrak{N}$, отражает тот факт, что справедливо соотношение $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$. Известно, что если приписать каждой из рассматриваемых шести кардинальных характеристик и кардиналу $\mathfrak{c}$ одно из значений $\aleph_1$ и $\aleph_2$ таким образом, чтобы это не противоречило схеме (1.2), то можно построить модель ZFC, в которой реализуются все семь требуемых равенств[51,52].

Далее приведён ряд найденных свойств характеристики $\mathfrak{ie}_L$. Некоторые свойства ввиду леммы Бореля — Кантелли, известной в теории вероятностей, зависят от того, является ли конечной сумма

$$\sum_{p \in L} \frac{1}{p} \tag{13.6}$$

(предложение 13.16 было подсказано автору Блассом).

Предложение 13.9. *Для всякого бесконечного подмножества* $L \subset \mathbf{N}$ *выполнено* $\mathfrak{ie}_L \geqslant \aleph_1$.

Предложение 13.15. *Если ряд* (13.6) *сходится, то* $\mathfrak{ie}_L \geqslant \mathsf{cov}(\mathcal{N})$.

Предложение 13.16. *Если ряд* (13.6) *расходится, то* $\mathfrak{ie}_L \leqslant \mathsf{non}(\mathcal{N})$.

Теорема 13.17. (а) *Если* $\mathfrak{d} < \mathsf{non}(\mathcal{M})$, *то* $\sup\limits_L \mathfrak{ie}_L = \mathsf{non}(\mathcal{M})$.

(б) *Если* $\mathfrak{d} < \mathrm{cf}(\mathsf{non}(\mathcal{M}))$, *то* $\mathfrak{ie}_L = \mathsf{non}(\mathcal{M})$ *для некоторого* $L \subset \mathbf{N}$.

Следствие 13.18. *Если* $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}$, *то* $\sup\limits_L \max(\mathfrak{ie}_L, \mathfrak{b}) = \mathsf{non}(\mathcal{M})$.

Теорема 13.20. *Из аксиомы Мартина вытекает, что для всех* $L \subset \mathbf{N}$ *выполнено* $\mathfrak{ie}_L = \mathfrak{c}$.

Предложение 13.22. *Каждое из следующих неравенств совместимо с системой аксиом* ZFC:

(а) $\mathfrak{ie}_L > \mathfrak{ie}_X$;

(б) $\mathfrak{ie}_L < \mathfrak{b}$;

(в) $\mathfrak{ie}_L > \mathfrak{b}$.

Ключевым результатом §13 является

[51] Bartoszyński T., Judah H. *Set theory*: *on the structure of the real line*. Chap. 7.

[52] Blass A. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*. §11.

Теорема 13.25. *Для каждой характеристики* χ *и каждого кардинала* $\mathfrak{M} \leqslant \max(\mathfrak{ie}_{L_\chi}, \mathfrak{b})$ *найдётся* csp-*кольцо кохарактеристики* χ, *имеющее своим базовым полем чисто трансцендентное расширение* $\mathbf{Q}(\mathfrak{M})$ *поля* $\mathbf{Q}$ *степени трансцендентности* $\mathfrak{M}$.

Всякое бесконечное подмножество $L \subset \mathbf{P}$ с тем свойством, что каждый целочисленный многочлен степени $\geqslant 1$ почти для всех p из L имеет в кольце целых p-адических чисел хотя бы один корень, назовём *универсальным*.

Теорема 14.6. *Универсальные множества существуют.*

С помощью теоремы 14.6 удаётся найти достаточные условия для того, чтобы поле было базовым для некоторого csp-кольца:

Теорема 14.11. *Пусть* L_χ — *универсальное множество. Тогда всякое поле* F *такое, что выполняется* $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{b}$, *будет базовым полем подходящего* csp-*кольца кохарактеристики* χ.

Условия $\operatorname{char} F = 0$ и $|F| \leqslant \mathfrak{b}$ при некоторых теоретико-множественных допущениях будут также и необходимыми:

Теорема 14.13. *Если* $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, *то для поля* F *равносильны условия*:

1) $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{c}$;

2) F *служит базовым полем некоторого* csp-*кольца.*

В частности, условия 1) и 2) теоремы 14.13 будут равносильными, если мы принимаем обобщённую континуум-гипотезу (ОКГ), континуум-гипотезу (КГ) или аксиому Мартина; это следует из справедливости импликаций

$$\text{ОКГ} \implies \text{КГ} \implies \text{аксиома Мартина} \implies \mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

Таким образом, существует достаточно много csp-колец.

В §15 дано описание проективных модулей над csp-кольцами. Сначала доказывается, что строение этих модулей аналогично строению проективных модулей над наследственными кольцами:

Теорема 15.5. *Пусть* R — *какое-то* csp-*кольцо. В этом случае любой проективный* R-*модуль можно представить как прямую сумму семейства подмодулей, изоморфных идеалам кольца* R.

Пусть R — csp-кольцо произвольной кохарактеристики χ и выполнены соотношения (13.1). Поле R/T_χ обозначим через R_0. Для всякого модуля M_R будем писать $M_0 = M/MT_\chi$ и $M_p = Me_p$ для $p \in L$ (здесь e_p есть единичный элемент кольца R_p). Очевидно, M_p является R_p-модулем при всех $p \in L_0$, где $L_0 = L \cup \{0\}$.

Для всякого модуля M_R обозначим через $r(M)$ размерность модуля M_0 как линейного пространства над R_0. Из теоремы 15.5 вытекает, что в случае проективного модуля M все M_p (где $p \in L$) будут свободными R_p-модулями. Ранги этих свободных модулей обозначим через $r_p(M)$. Итак, произвольному проективному модулю M_R мы можем сопоставить кардинальные числа $r(M)$ и $\{r_p(M)\}_{p\in L}$. Полученный набор кардинальных чисел называется *системой инвариантов* проективного R-модуля M.

Основным результатом §15 является

Теорема 15.9. *Два проективных модуля над* csp-*кольцом изоморфны в точности тогда, когда они имеют одинаковые системы инвариантов.*

Получен также ответ на вопрос о том, какие условия нужно наложить на заданный набор кардинальных чисел, чтобы этот набор служил системой инвариантов какого-то проективного R-модуля (в доказательстве следующей теоремы строение подходящего проективного модуля указано явно):

Теорема 15.10. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\{\mathfrak{M}_p\}_{p\in L}$ — какие-то кардинальные числа и $W = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\}$. Проективный модуль M_R такой, что $r(M) = \mathfrak{M}$ и $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$ при всех $p \in L$, существует в точности тогда, когда*

(A) *множество W конечно*

или

(B) *выполнены следующие три условия*:

(B1) *множество W счётно*;

(B2) $\{\mathfrak{M}_p \mid p \in W\} = \{\mathfrak{N}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, *где*

$$\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2 < \ldots < \mathfrak{N}_n < \ldots \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M};$$

(B3) *для любого $n \in \mathbf{N}$ множество $\{p \in L \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$ конечно.*

В §16 изучено строение тензорных произведений R-модулей, где R есть csp-кольцо. Главными результатами здесь являются теоремы 16.7 и 16.8.

Теорема 16.7. *Для R-модуля F эквивалентны условия*:

1) *F — плоский R-модуль*;

2) *F_p является плоским R-модулем для всех $p \in L$*;

3) *F_p является плоским R_p-модулем для всех $p \in L$*;

4) *F_p является R_p-модулем без кручения для всех $p \in L$ со свойством $R_p = \mathbf{Q}_p^*$ и свободным R_p-модулем для всех $p \in L$ со свойством $R_p \neq \mathbf{Q}_p^*$.*

Теорема 16.7 обобщает полученное в работе Царева[53] описание плоских модулей над csp-кольцом, которое имеет базовое поле $\mathbf{Q}$ и кохарактеристику $(\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$.

Напомним, что $\cap$-*чистым* называется всякий подмодуль B модуля A_S, для которого $B \cap As = Bs$ при всех $s \in S$.

Теорема 16.8. *Для подмодуля B модуля A_R равносильны условия*:

1) *B есть чистый подмодуль модуля A_R*;

2) *$B \cap AJ = BJ$ для любого идеала J кольца R*;

3) *B есть $\cap$-чистый подмодуль модуля A_R*;

4) *B_p есть чистый подмодуль R_p-модуля A_p (при всех $p \in L$)*;

5) *$B_p \cap A_pJ = B_pJ$ для любого идеала J кольца R_p*;

6) *B_p есть $\cap$-чистый подмодуль R_p-модуля A_p (при всех $p \in L$).*

В §17 приведено описание идемпотентных радикалов категории mod-R (где R — csp-кольцо произвольной кохарактеристики χ). Выяснено строение решётки, образуемой этими радикалами.

Для всякого $p \in L_0$ будем считать, что $\mathcal{H}_p$ совпадает с введённой ранее решёткой $\mathcal{K} = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$, если выполнено $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, и совпадает с цепью $\{n, \nu\} \subset \mathcal{K}$, если $p = 0$ или $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, где $k \in \mathbf{N}$.

Теорема 17.9. (a) *Большая решётка $\mathcal{IR}(R)$ изоморфна решётке*

$$\mathcal{J}_\chi = \prod_{p \in L_0} \mathcal{H}_p$$

[53]Царев А. В. *Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел.*

(и, следовательно, является полной дистрибутивной решёткой).

(б) *Все радикалы из* $\mathcal{IR}(R)$ *суть* $\otimes$*-радикалы, т. е.* $\mathcal{L}(R) = \mathcal{IR}(R)$.

Следующая теорема служит аналогом известного результата Гарднера, в котором говорится о том, что идемпотентный радикал сопоставляет всякой абелевой группе её сервантную подгруппу[54].

Теорема 17.10. *Пусть* $\rho \in \mathcal{IR}(S)$, *где* $S = R_p$ *(для какого-то* $p \in L_0$*) или* $S = R$. *Тогда для всякого* $A \in \mathrm{mod}\text{-}S$ *подмодуль* $\rho(A)$ *чист в* A.

Пусть $\Gamma\colon \mathcal{IR}(R) \to \mathcal{J}_\chi$ есть изоморфизм, существование которого было установлено в теореме 17.9. Теоремы 17.12 и 17.14 отвечают на вопрос о том, при каких условиях радикал из $\mathcal{IR}(R)$ является кручением или кокручением (на языке отображения Γ).

Теорема 17.12. *Радикал* $\rho \in \mathcal{IR}(R)$ *является кручением в точности тогда, когда* $\big[\Gamma(\rho)\big](L) \subset \{n, l, \nu\}$.

Теорема 17.14. *Для радикала* $\rho \in \mathcal{IR}(R)$ *эквивалентны условия:*

1) ρ — *кокручение;*

2) $\big[\Gamma(\rho)\big](L) \subset \{n, \nu\}$, *причём если выполнено* $\big[\Gamma(\rho)\big](0) = \nu$, *то почти для всех* $p \in L$ *справедливо равенство* $\big[\Gamma(\rho)\big](p) = \nu$.

Последние два результата в диссертационной работе служат аналогами теоремы 9.8 и следствия 9.9.

Теорема 17.19. *Если* $\mathcal{S} \neq \varnothing$ — *некоторое семейство идемпотентных радикалов категории* $\mathrm{mod}\text{-}S$, *где* $S = R_p$ *(для какого-то* $p \in L_0$*) либо* $S = R$, *то для всякого* S*-модуля* A *справедливо равенство* (9.2).

Следствие 17.20. *Если* $\rho, \sigma \in \mathcal{IR}(R)$, *то*

$$[\rho \wedge \sigma](A) = \rho(\sigma(A)) = \sigma(\rho(A)) = \rho(A) \cap \sigma(A)$$

для всех R*-модулей* A *(в частности, любые два радикала категории* $\mathrm{mod}\text{-}R$ *коммутируют между собой).*

[54] Gardner B. J. *Two notes on radicals of Abelian groups* // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1972. V. 13. P. 419–430.

Заключение

В диссертации полностью описано строение решётки всех $\otimes$-радикалов категории абелевых групп и строение решётки, состоящей из идемпотентных радикалов категории модулей над произвольным csp-кольцом; помимо этого, найдены некоторые решёточные свойства таких радикалов. Показано, каким образом можно аппроксимировать заданный порождённый (копорождённый) S-модулем радикал с помощью радикала, порождённого (или соответственно копорождённого) S-S-бимодулем, и описываются все кольца S со свойством, что аппроксимирующий радикал всегда совпадёт с исходным; установленные результаты могут быть применены к изучению $\mathrm{E}(e)$-модулей и $\mathrm{T}(e)$-модулей.

Получен ряд важных теорем, позволяющих представить заданное поле как базовое поле подходящего csp-кольца (что, в свою очередь, даёт возможность реализовать это поле как кольцо эндоморфизмов в категории Уокера и как $\mathbf{Q}$-алгебру квазиэндоморфизмов sp-группы с циклическими примарными компонентами). Для этого в рамках направления «теоретико-множественные методы в алгебре» автором был создан новый раздел, который связан с применением кардинальных характеристик континуума для исследования полей, колец и многочленов. Даётся также полное описание плоских и (при помощи разработанных автором методов, которые основаны на рассмотрении матриц и определителей над каким-либо csp-кольцом) полное описание проективных модулей над csp-кольцом. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании важных классов смешанных групп (в частности, факторно делимых групп и sp-групп).

Автор глубоко признателен своему научному консультанту профессору Петру Андреевичу Крылову за введение в данную проблематику и внимание к работе, а также доценту Сергею Александровичу Зюбину за плодотворные беседы по теории полей и профессору Андреасу Блассу за переписку по теме кардинальных характеристик континуума.

Основные публикации по теме диссертации

1. Тимошенко Е. А. T-*радикалы и* E-*радикалы в категории модулей* / Е. А. Тимошенко // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45. – С. 201–210.

2. Timoshenko E. A. T-*radicals in the category of Abelian groups* / E. A. Timoshenko // J. Math. Sci. (New York). – 2008. – V. 154. – P. 411–421.

3. Тимошенко Е. А. *О соотношениях дистрибутивности для* T-*радикалов абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Самарского ун-та. – 2008. – № 6(65). – С. 193–201.

4. Тимошенко Е. А. T-*радикалы, порождаемые бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Самарского ун-та. – 2009. – № 8(74). – С. 88–93.

5. Тимошенко Е. А. *О порождаемости* T-*радикалов бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2010. – № 2(10). – С. 16–19.

6. Тимошенко Е. А. *Радикалы, порождаемые или копорождаемые бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2010. – № 3(11). – С. 47–52.

7. Тимошенко Е. А. *О базовых полях* csp-*колец* / Е. А. Тимошенко // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49. – С. 555–565.

8. Тимошенко Е. А. *О* br-*кольцах* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2010. – № 4(12). – С. 32–38.

9. Тимошенко Е. А. *О радикалах в категории модулей над* csp-*кольцом* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2011. – № 3(15). – С. 59–65.

10. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* / Е. А. Тимошенко // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. – 2011. – Т. 4. – С. 541–550.

11. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над* csp-*кольцами* / Е. А. Тимошенко // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. – 2012. – Т. 5. – С. 581–585.

12. Тимошенко Е. А. *Чисто трансцендентные расширения поля рациональных чисел как базовые поля* csp-*колец* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2013. – № 5(25). – С. 30–39.

Другие публикации автора по теме диссертации

13. Тимошенко Е. А. Е-*модули и связанный с ними радикал* / Е. А. Тимошенко // *Абелевы группы и модули. Вып. 15.* – Томск: Изд-во Томского ун-та. – 2000. – С. 98–112.

14. Тимошенко Е. А. Т-*модули и* Т-*радикал* / Е. А. Тимошенко // Материалы 39-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск. – 2001. – С. 3.

15. Тимошенко Е. А. Т-*радикалы в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Международная конференция «Алгебра и её приложения». Тезисы докладов. – Красноярск. – 2002. – С. 118.

16. Тимошенко Е. А. Т-*радикалы в категории модулей* / Е. А. Тимошенко // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тезисы докладов 5-й Международной конференции. – Тула. – 2003. – С. 214–215.

17. Timoshenko E. A. T-*radicals in the category of modules* / E. A. Timoshenko // International Conference on Radicals. Program and abstracts. – Chişinău. – 2003. – P. 33–35.

18. Тимошенко Е. А. Т-*радикалы в категории модулей* / Е. А. Тимошенко // Международная конференция по математике и механике. Тезисы докладов. – Томск. – 2003. – С. 59.

19. Тимошенко Е. А. Т-*радикалы в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Алгебра, логика и кибернетика. Материалы международной конференции, посвящённой 75-летию со дня рождения А. И. Кокорина. – Иркутск. – 2004. – С. 107–108.

20. Timoshenko E. A. T-*radicals in the category of modules* / E. A. Timoshenko // Acta Appl. Math. – 2005. – V. 85. – P. 297–303.

21. Тимошенко Е. А. Т-*радикалы в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Материалы 43-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск. – 2005. – С. 14.

22. Тимошенко Е. А. *Радикальные классы, замкнутые относительно сервантных подгрупп* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Труды Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2005. – С. 37–39.

23. Тимошенко Е. А. *Радикальные классы, замкнутые относительно сервантных подгрупп* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. – 2006. – № 290. – С. 86–88.

24. Тимошенко Е. А. *Об одном соотношении дистрибутивности для* T*-радикалов* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2006. – С. 38–40.

25. Тимошенко Е. А. *О пересечениях* T*-радикалов в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. – 2007. – № 299. – С. 106–107.

26. Тимошенко Е. А. *Об идемпотентных радикалах, порождаемых бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Международная конференция «Алгебра и её приложения». Тезисы докладов. – Красноярск. – 2007. – С. 132–133.

27. Тимошенко Е. А. *Радикальные классы, порождаемые или копорождаемые бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. – М. – 2008. – С. 227–228.

28. Тимошенко Е. А. *О порождаемости* $\mathrm{T}(F)$*-радикалов бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Всероссийская конференция по математике и механике. Сборник тезисов. – Томск. – 2008. – С. 64.

29. Тимошенко Е. А. *Радикалы в категории модулей над* csp*-кольцом* / Е. А. Тимошенко // Проблемы теоретической и прикладной математики. Тезисы 41-й Всероссийской молодёжной конференции. – Екатеринбург. – 2010. – С. 85–91.

30. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* / Е. А. Тимошенко // Алгебра, логика и приложения. Тезисы докладов международной конференции. – Красноярск. – 2010. – С. 97–98.

31. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2010. – С. 52–54.

32. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над* csp*-кольцами* / Е. А. Тимошенко // Алгебра и математическая логика. Материалы международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения В. В. Морозова. – Казань. – 2011. – С. 170–171.

33. Тимошенко Е. А. *Базовые поля* csp-*колец* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2012. – С. 47–50.

34. Timoshenko E. A. *Purely transcendental extensions of the field* $\mathbf{Q}$ *as base fields of* csp-*rings* / E. A. Timoshenko // Алгебра и логика: теория и приложения. Тезисы докладов международной конференции. – Красноярск. – 2013. – С. 172–174.

35. Тимошенко Е. А. *Группа Гротендика* K_0 *произвольного* csp-*кольца* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Международного симпозиума, посвящённого 100-летию со дня рождения Л. Я. Куликова. – М. – 2014. – С. 72–74.