На правах рукописи

Мкртчян Александр Джанибекович

ПРОДОЛЖИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ПОСРЕДСТВОМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2015

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Цих Август Карлович

Официальные оппоненты: Знаменский Сергей Витальевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБУН «Институт программных систем им. А.К. Айламазяна» РАН, исследовательский центр системного анализа, заведующий лабораторией;

Яковлев Евгений Иосифович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВПО «Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева»
кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова».

Защита состоится 25 декабря 2015 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет», ФГБУН ИВМ Сибирского отделения РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» ноября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Шлапунов
Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Аналитические функции играют важную роль в математике и различных науках точного естествознания. Они составляют пласт математики, лежащий на стыке между точными вычислениями и приближенными. Один из способов идентификации аналитической функции основан на разложении ее в степенной ряд (подход Вейерштрасса). На языке коэффициентов ряда можно описывать свойства аналитической функции, важнейшим из которых является свойство аналитической продолжимости ряда за пределы его области сходимости. Такая проблематика аналитического продолжения, а также описания связей между особенностями степенных рядов и их коэффициентами активно исследовалась в прошлом столетии в работах Адамара[1], Линделефа[2], Полиа[3], Сеге[4], Карлсона[5] и многих других известных математиков (см. список литературы в книге Бибербаха[6]).

Наиболее эффективные и завершенные результаты были получены для простых (одномерных) рядов, у которых коэффициенты ряда интерполируются значениями $\varphi(k)$ целой функции $\varphi(z)$ на множестве натуральных чисел: $k \in N$. Согласно лемме Абеля область сходимости одномерного ряда – круговая, поэтому речь о продолжимости суммы степенного ряда за пределы области сходимости можно вести на языке граничной дуги, через которую возможно продолжение. Такая дуга называется *дугой регулярности*. Описание открытой дуги регулярности было сделано в статьях Аракеляна[7,8].

В терминах индикатрисы роста интерполирующей целой функции им дан критерий для того, чтобы выбранная дуга единичной окружности была дугой регулярности для рассматриваемого ряда.

Полиа получил условия для продолжимости ряда на всю комплексную плоскость, кроме некоторой граничной дуги[9].

Также глубоко изучена проблема нахождения множеств сингулярных точек

---

[1]Hadamard J. La série de Taylor et son prolongement analytique. C. Hérissey, 1901. №12. C. 102

[2]Lindelöf E. L. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Gauthier-Villars. 1905. C. 143

[3]Pólya G. Über Potenzreihen mit ganzzalhigen koeffizienten. Math. Ann. 1916. 77. pp. 497-513

[4]Szegö G. Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Sitzgsber. prueβ. Akad. Wiss., Math.-phys. K1. 1922. pp. 88-91

[5]Carlson F. Sur une classe de series de Taylor. Diss. Upsala. 1914

[6]Бибербах, Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука. 1967

[7]Arakelian N. U. Approximation by entire functions and analytic continuation. 1992. Progress in approximation theory (FL: Tampa, 1990); Computational Mathematical Series, Vol. 19 (New York: Springer), pp. 295–313

[8]Arakelian N., Luh W., Muller J. On the localization of singularities of lacunar power series. Complex Variables and Elliptic Equations. 52(2007). №7. pp. 561-573

[9]Pólya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Mathematische Zeitschrift. 1929. 29. pp. 549-640

ряда, т.е. точек, через которые сумма ряда не продолжается[10,11,12].

В такой постановке указанной проблемы особое место занимает ситуация, когда все граничные точки особые, то есть когда сумма ряда не продолжается через границу своей области сходимости[13,14].

В основном, примеры рядов, аналитически непродолжимых за пределы своего круга сходимости, относятся к серии "сильно лакунарных" рядов, иными словами, у этих рядов "много" мономов с нулевыми коэффициентами. Таковыми рядами являются следующие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^{k^k}.$$

Еще в 1891г. Фредгольм[15] построил примеры "умеренно лакунарных" непродолжимых рядов, причем представляющих бесконечно дифференцируемые функции в замыкании их круга сходимости. Эти ряды зависят от параметра a и они имеют вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{k^2}, \qquad 0 < a < 1.$$

Здесь степень k^2 имеет порядок роста 2 относительно индекса суммирования k, поэтому будем говорить, что ряды Фредгольма имеют порядок лакунарности два. Наиболее общий результат о непродолжаемых рядах в терминах лакунарности принадлежит Фабри[16,12].

Он состоит в том, что если монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел m_k растет быстрее k (т. е. $k = o(m_k)$) , то существует ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k},$$

сходящийся в единичном круге и непродолжаемый за его пределы.

Следует заметить, что обозначенный выше подход к исследованию проблемы аналитического продолжения в основном был реализован для степенных

[10]Fabry E. Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. Acta Mathematica. 1899. T. 22. №. 1. C. 65-87

[11]Arakelyan N. U., MartirosyanV. A. Localization of singularities on the boundary of the circle of convergence, Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR, Mat. 22 (1987), 3–21 (Russian). English translation: J. Contemp. Math. Anal. 22 (1987), no. 1

[12]Бибербах, Л., цит. выше.

[13]Hadamard, J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journ. Math. Pur. Appl. 1892. 8, 4th series. C. 101–186

[14]Fabry E. Sur les series de Taylor. CR Acad. Sci. Paris. 1897. T. 124. C. 142-143

[15]Mittag-Leffeler G. Sur une transcendente remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d'une letter de M. Mittag-Leffler à M. Poincaré. Acta mathematica. 1891. 15 Imprime le 21

[16]Fabry E. Sur les points singuliers d'une fonction donnee par son developpement de Taylor. Paris: Ann. ec. norm. sup. 1896. 13. pp. 367-399

рядов одного переменного. Между тем, в многомерной теории степенных рядов в этой области исследований много вопросов оставались открытыми до недавнего времени. Актуальность таких исследований мотивируется как внутренними запросами многомерного комплексного анализа, так и приложениями в математической физике, например, в квантовой теории поля[17] и термодинамике[18,19].

Целью настоящей работы является нахождение многомерных аналогов теорем Аракеляна и Полиа об аналитическом продолжении степенного ряда через куски из границы его области сходимости, описание условия продолжимости степенного ряда, коэффициенты которого интерполируются значениями целой или мероморфной функции, построение многомерных феноменов Фредгольма умеренно лакунарных степенных рядов с естественными границами своих областей сходимости.

Методы исследования

В основе исследования лежат методы многомерного комплексного анализа, в частности, используются техника интегральных представлений (Коши, Меллина, Линделефа), аппарат многомерных вычетов и свойства степенных рядов.

Важную роль играют интерполяции коэффициентов степенного ряда значениями аналитических функций таких классов, как целые функции экспоненциального типа или специальные мероморфные функции. В связи с этим использовалась информация о росте интерполирующих функций, т.е. фрагменты комплексной теории потенциала.

В вопросе об естественной границе области сходимости используется идея феномена Ковалевской об аналитической неразрешимости задачи Коши для уравнения теплопроводности, поставленной по температурным начальным данным.

Теоретическая и практическая ценность

Основные результаты являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, в теории потенциалов, а также в таких разделах математической физики как термодинамика и квантовая теория поля.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на
1) красноярском городском семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2012-2015 гг.);
2) семинаре Института математики НАН Армении (2015 г.)

---

[17]Friot S., Greynat D. On convergent series representations of Mellin-Barnes integrals. Journal of Mathematical Physics. 2012. 53.2. 023508

[18]Zorich V. Mathematical Analysis of Problems in the Natural Science. Berlin ; Heidelberg: Springer. 2011.

[19]Passare M., Pochekutov D., Tsikh A. Amoebas of complex hypersurfaces in statistical thermodynamics. Math. Phys., Analysis and Geometry. 2013. V. 16. №3. pp. 89-108

3) международном аспирантском форуме «Современная наука: тенденции развития, проблемы и перспективы» (Ереван, 2013 г.);
4) летней школе-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России (Ярославль, 2013 г.);
5) второй международной конференции математики в Армении: достижения и перспективы (Цахкадзор, 2013 г.);
6) пятом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, 2014 г.);
7) международной конференции «Science of Future» (С.-Петербург, 2014 г.);
8) международной школе-конференции по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, 2014 г.);
9) международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный» (Красноярск, 2015 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10], из них 3 работы [1–3] в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, другие 7 публикаций [4-10] составляют тезисы конференций.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав основного содержания, Заключения и Приложения, в котором для удобства читателя приводятся необходимые вспомогательные сведения. Список цитированной литературы состоит из 46 наименований, а список работ автора по теме диссертации — из 10 наименований. Вся диссертация состоит из 78 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена аналитическим продолжениям одномерных степенных рядов. Речь идет об условиях аналитического продолжения (или непродолжения) рядов через заданную дугу из граничной окружности. Для определенности можно считать, что радиус круга сходимости ряда равен единице. Мы выделяем 4 типа задач, связанных с дугой граничной окружности:

1) о продолжимости в сектор, определенного дугой;

2) о продолжимости в некоторую окрестность дуги;

3) о продолжимости на всю комплексную плоскость, кроме некоторой граничной дуги;

4) о непродолжимости через каждую граничную точку.

Задачи 1)-2) были исследованы Аракеляном, а 3) – Полиа. Ими были получены критерии для соответствующих продолжений рядов в терминах целых функций, интерполирующих коэффициенты рядов.

В первом параграфе приводятся условия продолжимости степенного ряда, у которого коэффициенты интерполируются значениями мероморфной функции. Вначале сформулируем упомянутые результаты Аракеляна и Полиа.

Рассматривается степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

переменного $z \in \mathbb{C}$, имеющий своей областью сходимости единичный круг $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Согласно теореме Коши-Адамара, это означает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|} = 1.$$

Говорят, что целая функция φ *интерполирует* коэффициенты ряда (1), если

$$\varphi(n) = f_n \ \text{ для всех } \ n \in \mathbb{N}.$$

Напомним[20,21] что *индикатор* (индикатриса роста) целой функции φ определяется пределом

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{r}, \ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\Delta_\sigma -$ сектор $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| \le \sigma\}, \ \sigma \in [0, \pi)$. Через γ_σ обозначим открытую дугу $\partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$.

Теорема[22,23] *Сумма ряда* (1) *аналитически продолжается в открытый сектор* $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$ *тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты* f_n *целая функция экспоненциального типа* $\varphi(\zeta)$ *такая, что*

$$h_\varphi(\theta) \le \sigma|\sin\theta| \ \ \textit{для} \ \ |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Говорят, что γ_σ является *дугой регулярности* для ряда (1), если он аналитически продолжается хотя бы в некоторую окрестность дуги γ_σ.

Теорема[24,25] *Открытая дуга* $\gamma_\sigma = \partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ *является дугой регулярности для ряда* (1) *тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты целая функция экспоненциального типа* $\varphi(\zeta)$*, у которой индикатриса роста* $h_\varphi(\theta)$ *удовлетворяет условиям:* $h_\varphi(0) = 0$ *и*

$$\overline{\lim_{\theta\to 0}} \frac{h_\varphi(\theta)}{|\theta|} \le \sigma.$$

---

[20] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука. 1971. с. 253-255.

[21] Lelong P., Gruman L. Entire functions of several complex variables. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH Co. K. 1986.

[22] Н. У. Аракелян, Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов, Матем. сб., 1984, том 124(166), номер 1(5), 24–44.

[23] Аракелян Н.У., Мартиросян И.А. Степенные ряды: аналитическое продолжение и локализация особенностей. Ереван. 1991.

[24] Arakelian N. U., цит. выше.

[25] Arakelian N., Luh W., Muller J., цит. выше.

Задача 3) касается продолжения на всю комплексную плоскость, кроме дуги $\partial D_1 \cap \Delta_\sigma$. Ответ для этой задачи дает следующая теорема Полиа.

Теорема[26] *Для того, чтобы ряд* (1) *допускал аналитическое продолжение в* $\mathbb{C}$*, кроме быть может дуги* $\partial D_1 \cap \Delta_\sigma$*, необходимо и достаточно, чтобы существовала интерполирующая коэффициенты* f_n *целая функция экспоненциального типа* $\varphi(\zeta)$ *такая, что*

$$h_\varphi(\theta) \le \sigma |\sin\theta| \ \ для \ \ |\theta| \le \pi.$$

Как уже говорилось, в первом параграфе получены достаточные условия для аналитической продолжимости степенного ряда (1) в рамках задач 1)-3). Эти условия формулируются в терминах мероморфных интерполяций вида

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j\zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^{q} \Gamma(c_k\zeta + d_k)}, \tag{2}$$

где $\phi(\zeta)$ целая функция, $a_j \ge 0, \ \ j = 1, ..., p,$ и

$$\sum_{j=1}^{p} a_j = \sum_{k=1}^{q} c_k. \tag{3}$$

Выбор интерполирующих функций (2) с условиями (3) мотивирован, в частности, тем, что обратные преобразования меллина некоторых таких функций представляют класс неконфлуентных гипергеометрических функций[27]

Пусть

$$l = \sum_{k=1}^{q} |c_k| - \sum_{j=1}^{p} a_j.$$

Выражение

$$\varphi(\zeta) := \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^{p} {a_j}^{a_j\zeta}}{\prod_{k=1}^{q} |c_k|^{c_k\zeta}}$$

назовем *ассоциированной целой функцией* для мероморфной функции (2).

Мы доказываем следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Сумма ряда* (1) *аналитически продолжается в открытый сектор* $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$*, если существует интерполирующая коэффициенты* f_n *мероморфная функция* $\psi(\zeta)$ *вида* (2) *такая, что индикатор ассоциированной с* $\psi(\zeta)$ *целой функции* $\varphi(\zeta)$ *удовлетворяет условиям:*

$$1) \ h_\varphi(0) = 0, \qquad 2) \ \max\{h_\varphi(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l, h_\varphi(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l\} \le \sigma.$$

[26] Pólya G., цит. выше.

[27] Садыков Т. М., Цих А. К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука. 2014.

Теорема 1.2. *Сумма ряда* (1) *аналитически продолжается в* $\mathbb{C}\setminus(\partial D_1 \cap \Delta_\sigma)$, *если существует интерполирующая коэффициенты* f_n *мероморфная функция* $\psi(\zeta)$ *вида* (2) *такая, что индикатор ассоциированной с* $\psi(\zeta)$ *целой функции* $\varphi(\zeta)$ *удовлетворяет условию*

$$h_\varphi(\theta) + \frac{\pi}{2} l |\sin\theta| \le \sigma |\sin\theta| \quad \textit{для} \quad |\theta| \le \pi.$$

Теорема 1.3. *Открытая дуга* $\gamma_\sigma = \partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ *является дугой регулярности для ряда* (1), *если существует интерполирующая коэффициенты* f_n *мероморфная функция* $\psi(\zeta)$ *вида* (2) *такая, что индикатор ассоциированной с* $\psi(\zeta)$ *целой функции* $\varphi(\zeta)$ *удовлетворяет условиям*

$$1)\ h_\varphi(0) = 0, \qquad 2)\ \overline{\lim_{\theta\to 0}} \frac{h_\varphi(\theta)}{|\theta|} + \frac{\pi}{2} l \le \sigma.$$

Во втором параграфе приводятся примеры, которые показывают целесообразность интерполяции коэффициентов мероморфными функциями. Один из таких примеров представляет ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-2)(2n-5)...(2n-3(n+2))}{2^{\frac{2}{3}n} n!} z^n,$$

коэффициенты которого интерполируются мероморфной функцией

$$\psi(\zeta) = \frac{3^{\zeta-1}}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3}\zeta + \frac{1}{3})}{\Gamma(\zeta+1)\Gamma(-\frac{1}{3}\zeta + \frac{4}{3})}\ .$$

Ассоцированная с ней целая функция $\varphi(z)$ равна

$$\varphi(\zeta) := \frac{3^{\zeta-1}}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}\zeta}}{|-\frac{1}{3}|^{\frac{1}{3}\zeta}} \equiv \frac{1}{3},$$

а $l = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Согласно Теореме 1.1 рассматриваемый ряд продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_{\frac{\pi}{3}}$.

В третьем параграфе речь идет о задаче 4). Там строится семейство "умеренно лакунарных" непродолжимых рядов, суммы которых представляют бесконечно дифференцируемые функции в замыкании их круга сходимости.

Один из основных результатов этого параграфа составляет Теорема 1.4. Она показывает, что пример Фредгольма можно усилить, уменьшая степенной порядок лакунарности с 2 до $1+\varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Ее точная формулировка следующая:

если возрастающая последовательность натуральных чисел n_k удовлетворяет неравенствам $const \times k^2 \geq n_k \geq const \times k^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{n_k}, \qquad 0 < a < 1$$

не продолжается за пределы единичного круга и представляет бесконечно дифференцируемую функцию в замыкании круга.

Во второй главе рассматриваются вопросы о продолжимости кратных степенных рядов. Для кратных степенных рядов имеется гораздо меньше результатов об описании сингулярных подмножеств на границе области сходимости или, что то же самое, об описании подмножеств границы, через которые аналитически продолжаются такие ряды. В первом параграфе на случай кратных степенных рядов распространяется результат Аракеляна[8] о дуге регулярности, сформулированный выше.

Рассмотрим n-кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_k z^k, \tag{4}$$

со свойством

$$\overline{\lim_{|k| \to \infty}} \sqrt[|k|]{|f_k| R^k} = 1, \tag{5}$$

где $R^k = R_1^{k_1} ... R_n^{k_n}$, а $|k| = k_1 + ... + k_n$. Согласно многомерной теореме Коши-Адамара[28], раздел 7), указанное в (5) свойство выражает тот факт, что R_j составляют набор *радиусов поликруга сходимости* ряда (4).

Подмножество G из границы области сходимости ряда (4) назовем *множеством регулярности для ряда* (4), если сумма ряда аналитически продолжается через любую точку этого множества.

Пусть $D_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \rho\}-$ открытый круг с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиуса $\rho > 0$. Обозначим $D_\rho := D_\rho(0)$, а для $\sigma \in (0, \pi]$ через $\gamma_{\sigma,\rho}$ обозначим открытую дугу $\partial D_\rho \setminus \Delta_\sigma$.

В многомерной ситуации нет универсального определения индикатрисы роста целой функции. Более того, часто информацию о росте целой функции выражают в геометрических терминах. Следуя Иванову[29,30]. введем следующее множество, в котором неявно отражается понятие индикатрисы целой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$:

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln |\varphi(re^{i\theta})| \leq \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n + C_{\nu,\theta}\},$$

[28]Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат – М.: Наука. – 1987. – 2т.

[29]Иванов В. К. Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов. Мат. сборник. 1959. №1. т.47(89).

[30]Ронкин Л. И., цит. выше.

где неравенство выполняется для любого $r \in \mathbb{R}^n_+$ при некоторой константе $C_{\nu,\theta}$. Здесь $re^{i\theta}-$ это вектор $(r_1e^{i\theta_1}, ..., r_ne^{i\theta_n})$. Таким образом, $T_\varphi(\theta)-$ это множество *линейных мажорант* (с точностью до сдвига $C_{\nu,\theta}$)
$\nu = \nu(r) = \nu_1r_1 + ... + \nu_nr_n$ для логарифма модуля функции φ.

Определим множество

$$\mathcal{M}_\varphi(\theta) := \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ \nu + \varepsilon \in T_\varphi(\theta), \ \ \nu - \varepsilon \notin T_\varphi(\theta) \quad \text{для любого } \ \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+\},$$

которое можно назвать *граничным множеством линейных мажорант.*

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n-$ область сходимости ряда (4). Введем семейство

$$G = \bigcup_R \gamma_{\sigma,R} = \bigcup_R (\gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}) \subset \partial D \tag{6}$$

полидуг $\gamma_{\sigma,R}$, где R пробегает поверхность сопряженных радиусов сходимости ряда (4), а $\ \sigma = \sigma(R) = (\sigma_1(R), ..., \sigma_n(R))$.

Теорема 2.1. *Семейство G полидуг (6) является множеством регулярности для ряда (4) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(z)$ такая, что:*
1) $0 \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(0)$,
2) существует вектор-функция $\nu_R(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^z\varphi}(\theta)$, для которой

$$\overline{\lim_{(\theta_1,..\hat{j}..,\theta_n)\to 0}} \ \overline{\lim_{\theta_j \to 0}} \ \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \le \sigma_j(R), \quad j = 1, ..., n.$$

Во втором параграфе второй главы приводятся условия продолжимости ряда в секториальную область посредством интерполяций коэффициентов целой или мероморфной функцией.

Обозначим

$$T_\varphi := \bigcap_{\theta_j = \pm\frac{\pi}{2}} T_\varphi(\theta_1, ..., \theta_n),$$

$$\mathcal{M}_\varphi := \{\nu \in [0, \pi]^n : \ \nu + \varepsilon \in T_\varphi, \ \ \nu - \varepsilon \notin T_\varphi \quad \text{для любого } \ \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Пусть G — секториальное множество вида

$$G = \bigcup_{\nu \in \mathcal{M}_\varphi} G_\nu, \tag{7}$$

где

$$G_\nu = (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_1}) \times ... \times (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_n}).$$

Теорема 2.2. *Сумма ряда (4) аналитически продолжается в секториальную область G вида (7), если найдется интерполирующая коэффициенты f_k*

целая функция $\varphi(\zeta)$ *экспоненциального типа и вектор-функция* $\nu(\theta)$, *заданная на кубе* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$ *и принимающая значения в* $\mathcal{M}_\varphi(\theta)$, *для которых*

$$\nu_j(\theta) \le a|\sin\theta_j| + b\cos\theta_j, \quad j = 1, ..., n,$$

с некоторыми константами $a \in [0, \pi), \quad b \in [0, \infty)$.

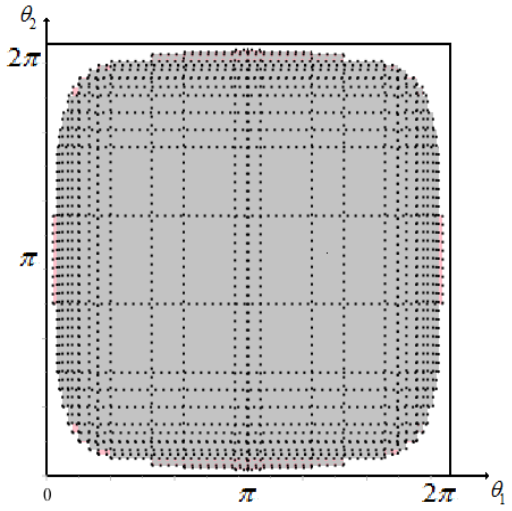
В качестве примера рассматривается двойной степенной ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}^2} \cos\sqrt{k_1 k_2}\; z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{8}$$

коэффициенты которого интерполируются значениями целой функции

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \cos\sqrt{\zeta_1 \zeta_2}.$$

Согласно Теореме 2.2 ряд (8) продолжается в секториальную область (7), где ν пробегает часть гиперболы $\nu_1\nu_2 = \frac{1}{4} : \mathcal{M}_\varphi = \{\nu \in [0, \pi]^2 : \nu_1\nu_2 = \frac{1}{4}\}$.



В четвертом заключительном параграфе построены двойные степенные ряды, которые не продолжаются за пределы единичного бикруга

$$U^2 = \{(z_1, z_2) : \ |z_1| < 1, \ |z_2| < 1\}$$

и бесконечно дифференцируемы в $\bar{U}^2 \backslash T^2$, где $T^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| = 1, |z_2| = 1\}$. Эти ряды имеют вид

$$\sum_{(k_1, k_2) \in A} {z_1}^{k_1} {z_2}^{k_2},$$

где $A = \{(k_1, k_2) \in {Z_+}^2 : k_2 \ge {k_1}^{1+\varepsilon}\} \cup \{(k_1, k_2) \in {Z_+}^2 : k_1 \ge {k_2}^{1+\varepsilon}\}$, $\varepsilon > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Получен критерий продолжимости кратного степенного ряда через граничное множество полидуг на языке асимптотического поведения целой функции, интерполирующей коэффициенты ряда.

2. Для одномерных рядов найдены условия локальной продолжимости ряда через граничную дугу, и условия продолжимости ряда в секториальную область, используя мероморфные интерполяции коэффициентов ряда.

3. Построена лакунарная шкала степенных рядов одного переменного, непродолжимых за пределы круга сходимости и бесконечно дифференцируемых в замыкании круга, включающая в себя ряды Фредгольма. На основе этой шкалы построены примеры кратных степенных рядов с аналогичными свойствами в единичном поликруге.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Mkrtchyan A. Power Series Nonextendable Across the Boundary of their Convergence Domain / A. Mkrtchyan // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2013. – Т. 6 – №3. – С. 329–335.

2. Mkrtchyan A. J. On analytic continuation of multiple power series beyond the domain of convergence /A. J. Mkrtchyan // Journal of Contemporary Mathematical Analysis. – 2015. – Т. 50. – №1. – С. 22-31.

3. Mkrtchyan A. Analytic Continuation of Power Series by Means of Interpolating the Coefficients by Meromorphic Functions / A. Mkrtchyan // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2015. – Т. 8 – №2. – С. 173–183.

4. Мкртчян А. Д. Примеры непродолжимых простых и двойных степенных рядов / А. Д. Мкртчян // Тезисы докладов летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России – Ярославль: ЯГПУ. – 2013. – С. 58-59.

5. Mkrtchyan A. J. Analytically nonextendable multidimensional power series / A. J. Mkrtchyan // Abstracts of second international conference Mathematics in Armenia advances and perspectives: dedicated to the 70th anniversary of foundation of armenian national academy of sciences. 24-31 August 2013, Tsaghkadzor, Armenia – Yerevan. – 2013. – С. 49-51.

6. Мкртчян А. Д. О многомерных степенных рядах, непродолжимых через границу области сходимости / А. Д. Мкртчян // Международный аспирантский форум Современная наука: тенденции развития, проблемы и перспективы. – Армения: Ереван. – 2013.

7. Мкртчян А. Д. О степенных рядах, непродолжимых через границу своей области сходимости / Мкртчян А. Д. // Молодежь и наука: сборник материалов 9 всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. Красноярск, 15-25 апреля 2013г. [электронный ресурс] – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., № заказа 2394 / отв. ред. О. А. Краев.

8. Мкртчян А. Д. Об аналитическом продолжении кратных степенных рядов через куски границ областей сходимости / А. Д. Мкртчян // Молодежь и наука: сборник материалов 10 всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15-25 апреля 2014г. [электронный ресурс] – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., № заказа 1644 / отв. ред. О. А. Краев.

9. Мкртчян А. Д. Продолжение кратных степенных рядов через полидуги из остова поликруга сходимости. / А. Д. Мкртчян // Тезисы докладов пятого Российско-Армянского совещание по математической физике, комплекснаму анализу и смежным вопросам. – Армения: Ереван. – 2014. – С. 41-42.

10. Мкртчян А. Д. Аналитическое продолжение степенных рядов через граничные дуги, путем интерполяции коэффициентов мероморфными функциями / А. Д. Мкртчян // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный». Красноярск, 15-25 апреля 2015. [Электронный ресурс] – Красноярск : Сибирский федеральный университет. – 2015