На правах рукописи

Коршун

Коршун Кирилл Викторович

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2016

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Белов Юрий Яковлевич
Официальные оппоненты:	Лаврентьев Михаил Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет», проректор по технологическому развитию и внешним связям; Егоров Иван Егорович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова», кафедра дифференциальных уравнений, заведующий кафедрой.
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» СО РАН

Защита состоится 22 апреля 2016 г. в 13:30 на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», ФГБУН «Институт вычислительного моделирования» СО РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» марта 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета	Шлапунов Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Обратными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи нахождения неизвестных коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, граничных или начальных условий, границы области. Неизвестные элементы начально-краевых задач определяются по некоторой дополнительной информации о решении уравнений. Такой информацией являются различного рода условия переопределения[1].

Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики в настоящий момент играют большую роль в естественных науках и их приложениях[2,3,4]. Коэффициентные обратные задачи – это задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения неизвестным является и один (или несколько) из его коэффициентов. Многие важные прикладные вопросы, касающиеся диффузионных процессов, электромагнитных колебаний, упругих деформаций, геофизики, сейсмологии, компьютерной томографии и обработки изображений, теории рассеяния, акустики, оптики, теории колебания молекул, радиолокации, гравиметрии, и др. приводят к подобным обратным задачам.

Степень разработанности темы

Теория обратных задач является важным самостоятельным направлением исследований в области дифференциальных уравнений.

В настоящее время теория обратных задач математической физики развивается представителями ряда отечественных математических школ, в том числе Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым).

Вопросы корректности обратных задач для параболических уравнений, а также задач идентификации коэффициентов или функции источника для параболических уравнений изучались в работах Ю.Е. Аниконова, Ю.Я. Белова, Е.Г. Саватеева, В.М. Волкова, А.И. Прилепко, В.В. Соловьева, А.И. Кожанова, И.В. Фроленкова и других[5,6,7].

---

[1] Прилепко, А. И. Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением / А. И. Прилепко, Д. С. Ткаченко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 9. – С. 1392–1401.

[2] Аниконов, Ю. Е. Обратные задачи математической физики и биологии / Ю. Е. Аниконов // Доклады академии наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 6 – С. 1350-1354.

[3] Лаврентьев, М. М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. – 1969. – 67 с.

[4] Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – М.: Наука. – 1984. – 262 с.

[5] Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Ю. Я. Белов, Е. Г. Саватеев // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 334, № 5. – С. 800–804.

[6] Фроленков, И. В. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков, Ю. Я. Белов

[7] Кожанов, А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 4. – С. 694-716

Ряд результатов в данном направлении получили в последнее время зарубежные авторы из Италии, Голландии, Швеции, США, Франции, Японии и др.: G. Anger, H.D. Bui, Y. Chen, D. Colton, R. Durridge, E. Francini, J. Gottlieb, M. Grasselli, R. Kress, G. Kunetz, J.Q. Lin, A. Lorenzi, J.M. Mendel, R.D. Murch, S. Rionero, M. Sondhi, S. Strom, L. Yanping, M. Yamamoto[8,9,10,11].

В работе[12] Ю.Я. Беловым изучены задачи определения неизвестных коэффициентов для квазилинейных уравнений типа Бюргерса

$$u_t(t,x) + \nu u u_x = \mu(t) u_{xx} + g(t) f(t,x),$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty,$$
$$u(t,x_0) = \phi(t), \quad x_0 = const.$$

в случае, когда входные данные допускают преобразование Фурье по пространственной переменной.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости задач определения функции источника в случаях задачи Коши и первой краевой задачи в классах гладких функций, а также обобщение полученных результатов на уравнения большей размерности и системы уравнений.

Методы исследования

В работах[4,13] приводятся методы решения различных обратных задач математической физики.

Исследование разрешимости рассматриваемых в диссертации задач производится методом, позволяющим переходить от обратной задачи к прямой задаче для нагруженного (содержащего следы неизвестных функций и их производных) уравнения. Данный метод аналогичен методу, впервые предложенному Ю.Е. Аниконовым[14] (в котором обратная задача сводилась к прямой для интегродифференциального уравнения при помощи преобразования Фурье). Отказ от использования преобразования Фурье позволяет расширить класс допустимых входных данных, а также позволяет рассматривать задачи с различными краевыми условиями.

---

[8]Belleni, Morante A. Inverse problems in photon transport - Part I: determination of physical and geometrical features of an interstellar cloud. / R. Monaco, S. Pennisi, S. Rionero, T. Ruggeri // Proceedings of the XII Int. Conference on Waves and Stability in Continuous Media. – World Scientific. – 2004. – P. 52-59.

[9]Cannon, J.R. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations / J. R. Cannon, Lin Yanping // J. Ill-Posed and Inverse Problems. – 1988. – V.4. N1. – P.595–606.

[10]Francini, E. An inverse problem for higher order parabolic equation with integral overdetermination. Unique solvability and stabilization of the solution. / E. Francini, V. Kamynin // Pubblicazioni Dell'istituto di analisi globale e applicazioni. Serie "Problemi non ben pasti ed inversi". – Firenze. – 1996.

[11]Lorenzi, A. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator eqations / A. Lorenzi, E. Paparoni // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 1998. – V. 5. N6. – P. 523–548.

[12]Belov, Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations / Yu. Ya. Belov. – Utrecht etc.:VSP. – 2002. – 211 p.

[13]Prilepko, A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekkar, inc. – 1999. – 709 p.

[14]Аниконов, Ю. Е. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения / Ю. Е. Аниконов, Ю. Я. Белов // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 306, № 6. – С. 1289–1293.

Для доказательства разрешимости прямых задач для нагруженных уравнений применяется метод слабой аппроксимации, являющийся методом расщепления на дифференциальном уровне. Метод был впервые предложен Н.Н. Яненко и А.А. Самарским[15]. В работе[16] приводится подробное описание метода и систематизированы полученные результаты. В работах[17,18] описывается применение метода слабой аппроксимации к решению различных задач математической физики.

Исследование обратных задач с краевыми условиями производится методом разложения входных данных в тригонометрические ряды по синусам и/или косинусам[19], с последующим их продолжением с исходной области определения на всё пространство и приведением исходной краевой задачи к задаче Коши.

Научная новизна и практическая значимость работы

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и имеют строгое доказательство. Полученные результаты имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 13 работ, из них работы [1, 2, 3, 4] опубликованы в изданиях, входящих в Перечень периодических научных изданий, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации. Работы [1, 2, 3, 13] написаны и опубликованы в соавторстве. Во всех случаях автору принадлежит решающая роль в доказательстве основных результатов.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета под руководством д. ф.-м. н. Белова Ю.Я. (г. Красноярск, 2011 – 2015 гг.);

XLIX международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (г. Новосибирск, 16–20 апреля 2011 г.); 50-й юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (г. Новосибирск, 13–19 апреля 2012 г.); 51-й международной научной студенческой конферен-

[15]Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. / Н. Н. Яненко. – Новосибирск. – 1967. – 195 с.

[16]Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю. Я. Белов, С. А. Кантор. – Красноярск:КрасГУ. – 1999.

[17]Яненко, Н. Н. Исследование задачи Коши методом слабой аппроксимации / Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 6. – С. 1242–1244.

[18]Ковеня, В.М. Метод расщепления в задачах газовой динамики. / В. М. Ковеня, НН. Яненко, Ю. И. Шокин. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. – 1981. – 304 с.

[19]Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы. – 1961. – 937 с.

ции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (г. Новосибирск, 12–18 апреля 2013 г.); IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Молодежь и наука», посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска, секция «Математика, информатика: Дифференциальные уравнения» (г. Красноярск, 15–25 апреля 2013 г.); Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.», посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (г. Новосибирск, 18–24 августа 2013 г.); 52-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика (г. Новосибирск, 11–18 апреля 2014 г.); Тринадцатой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения-2014» (г. Казань, 24–29 октября 2014 г.); 53-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2015: Математика (г. Новосибирск, 11–17 апреля 2015 г.); Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (г. Улан-Удэ, 22–27 июня 2015 г.);

Представлялись на Лаврентьевский конкурс студенческих и аспирантских работ по математике и механике (г. Новосибирск, 2014 г.);

Докладывалась и обсуждалась на семинаре Отдела условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством член-корр. РАН, д. ф.-м. н. В.Г. Романова, д. ф.-м. н. Д. С. Аниконова (г. Новосибирск, 8 сентября 2015 г.);

На семинаре «Математическое моделирование в механике» Института вычислительного моделирования СО РАН под руководством д. ф.-м. н. В.К. Андреева (г. Красноярск, 12 января 2016 г.).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего 61 наименование и списка работ автора по теме диссертации, включающего 13 наименований. Объем диссертации составляет 87 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** вводятся необходимые обозначения, приводятся необходимые определения и теоремы.

Вторая глава посвящена обратной задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса. Поставленная задача относится к классу коэффициентных обратных задач для параболических уравнений. Данная задача исследована в случае задачи Коши и первой краевой задачи. Получены условия на входные данные, гарантирующие однозначную разрешимость поставленной задачи в классах гладких ограниченных функций.

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, -\infty < x < \infty\}$ рассматривается **задача Коши** для уравнения типа Бюргерса

$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t) + g(t)f(t,x), \qquad (1)$$

где $A(t), B(t), C(t), f(t,x)$ - заданные функции, с данными Коши

$$u(0,x) = u_0(x), -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Функции $u(t,x), g(t)$ неизвестны. Считаем, что выполнены условие переопределения

$$u(t,x_0) = \phi(t), x_0 = const, \tag{3}$$

и условие согласования

$$\phi(0) = u_0(x_0). \tag{4}$$

Исходная задача приводится к вспомогательной прямой задаче для нагруженного уравнения. Существование решения вспомогательной задачи доказывается методом слабой аппроксимации. Вспомогательная задача разрешима в малом временном интервале, т.е. для всех $t \in [0,t^*]$, где $0 < t^* \leq T$ – некоторая постоянная, зависящая от входных данных. Показывается, что решение вспомогательной задачи является решением исходной обратной задачи. Доказывается единственность решения обратной задачи.

В области $Q_T = \{(t,x)|0 < t < T, 0 < x < l\}, T, l - const > 0$ рассматривается **краевая задача**

$$u_t(t,x) = \mu u_{xx} + A(t)uu_x + Bu + g(t)f(t,x), \tag{5}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{6}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$u(t,x_0) = \phi(t), \quad 0 < x_0 < l, \tag{8}$$

$$u_0(x_0) = \phi(0). \tag{9}$$

Предполагается, что функции $u_0(x)$, $f(t,x)$ имеют непрерывные производные по x до шестого порядка включительно, и удовлетворяют условиям

$$u_0(0) = u_0''(0) = u_0^{(4)}(0) = u_0^{(6)}(0) = 0, \tag{10}$$

$$u_0(l) = u_0''(l) = u_0^{(4)}(l) = u_0^{(6)}(l) = 0. \tag{11}$$

$$f(t,0) = f_{xx}(t,0) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}f(t,0) = \frac{\partial^6}{\partial x^6}f(t,0) = 0, \tag{12}$$

$$f(t,l) = f_{xx}(t,l) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}f(t,l) = \frac{\partial^6}{\partial x^6}f(t,l) = 0. \tag{13}$$

Функция $u_0(x)$ продолжается на отрезок $[-l,l]$: $u_0(x) = -u_0(-x)$ при $-l \leq x < 0$. Затем функция $u_0(x)$ продолжается с $[-l,l]$ на $\Re$ до периодической по x функции. Функция $f(t,x)$ продолжается с $[0,T] \times [0,l]$ на $[0,T] \times \Re$ до периодической и нечётной по x функции. Продолженные данным способом функции $u_0(x), f(t,x)$ берутся в качестве входных данных для задачи Коши

$$u_t(t,x) = \mu u_{xx} + A(t)uu_x + Bu + g(t)f(t,x), \tag{14}$$

$$u(0,x)=u_0(x), \quad x\in(-\infty,\infty). \tag{15}$$

Доказывается, что решение задачи (14), (15) удовлетворяет краевым условиям (7). Доказывается единственность решения задачи (5)–(9).

В данной главе доказаны [1] следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\sum_{k=0}^{6}\left|\frac{\partial^k u_0(x)}{\partial x^k}\right|+\sum_{k=0}^{6}\left|\frac{\partial^k f(t,x)}{\partial x^k}\right|+|A(t)|+|B(t)|+|C(t)|+$$

$$+|\psi(t)|\le K, \quad |f(t,x_0)|\ge\frac{1}{K}, \quad K=const>0, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}.$$

Тогда существует постоянная t^*, $0<t^*\le T$, такая, что в полосе $\Pi_{[0,t^*]}$ существует единственное решение (u,g) задачи (1)-(4) класса

$$Z=\{u(t,x),g(t)|u(t,x)\in C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}),\left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right|+\sum_{s=0}^{4}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,x)\right|\le K,$$

$$(t,x)\in\Pi_{[0,t^*]},g(t)\in C([0,t^*])\},$$

$$C^{1,4}_{t,x}(\Pi^M_{[0,t^*]})=\{u(t,x)|\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\in C(\Pi^M_{[0,t^*]}),k=0,1...4\},$$

Для любого $M>0$

$$\left\|\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}-\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{C(\Pi^M_{[0,t^*]})}\to 0, \quad k=0,1...4,$$

при $\tau\to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (10)-(13), а условия Теоремы 1 выполнены при $(t,x)\in Q_T$. Тогда существует постоянная t^*, $0<t^*\le T$, такая, что в области Q_{t^*} существует единственное решение (u, g) задачи (5)-(9) класса*

$$W=\{u(t,x),g(t)|u(t,x)\in C^{1,4}_{t,x}(Q_{t^*}),g(t)\in C([0,t^*])\}.$$

При этом

$$\left\|\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}-\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{C([0,t^*]\times[0,l])}\to 0, \quad k=0,1...4, \quad \tau\to 0.$$

В **третьей главе** исследована задача идентификации функции источника для двумерного уравнения типа Бюргерса. Данная задача является обобщением задачи (1)-(4) на двумерный случай. Рассмотрены случаи условий Коши и смешанных краевых условий в прямоугольной области. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи.

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x,y)|0 \le t \le T, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ рассматривается **задачу Коши**

$$u_t = \mu_1(t)u_{xx} + \mu_2(t)u_{yy} + a_1(t)u_x + a_2(t)u_y + b_1(t)uu_x + b_2(t)uu_y + g(t)f(t,x,y), \tag{16}$$

где $\mu_i(t) > 0, a_i(t), b_i(t), f(t,x,y), i = 1,2$ - заданные функции, с начальными условиями

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Считаем, что выполнены условие переопределения

$$u(t,x_0,y_0) = \phi(t), \qquad x_0 = const, \quad y_0 = const, \tag{18}$$

и условие согласования

$$\phi(0) = u_0(x_0,y_0). \tag{19}$$

Под решением задачи (16)-(19) понимается пара функций $u(t,x,y), g(t)$, принадлежащая классу

$$Z_p(T) = \{u(t,x,y), g(t)|u(t,x,y) \in C^{1,p}(\Pi_{[0,T]}), \left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right| +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\le p} |D^\alpha u(t,x,y)| \le K, (t,x,y) \in \Pi_{[0,T]}, g(t) \in C([0,T])\}, \quad p \ge 2 \in \mathbb{Z},$$

где $C^{1,p}(\Pi_{[0,T]}) = \{u(t,x,y)|\frac{\partial u}{\partial t}, D^\alpha u(t,x,y) \in C(\Pi_{[0,T]}), |\alpha| \le p\}$.

В области $Q_T = \{(t,x,y)|0 < t < T, 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$, $T, l_1, l_2 - const > 0$ рассматривается **краевая задача**

$$u_t(t,x,y) = \mu_1(t)u_{xx} + \mu_2(t)u_{yy} + b_1(t)uu_x + g(t)f(t,x,y), \tag{20}$$
$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in [0,l_1] \times [0,l_2], \tag{21}$$
$$u(t,0,y) = u(t,l_1,y) = 0, \tag{22}$$
$$u_y(t,x,0) = u_y(t,x,l_2) = 0, \tag{23}$$
$$u(t,x_0,y_0) = \phi(t), \qquad (x_0,y_0) \in \Omega = (0,l_1) \times (0,l_2). \tag{24}$$

Уравнение (20) получено из уравнения (16) при $a_1(t) = a_2(t) = b_2(t) = 0$.

В данной главе доказаны [2] теоремы:

Теорема 3. *При выполнении условий*

$$u_0(x,y) \in C^{p+2}(\mathbb{R}^2), \qquad f(t,x,y) \in C^{0,p+2}(\Pi_{[0,T]}), \qquad \mu_i \in C([0,T]),$$
$$a_i \in C([0,T]), \qquad b_i \in C([0,T]), \qquad \phi(t) \in C^1([0,T])$$
$$\sum_{|\alpha|\le p+2} |D^\alpha u_0(x,y)| + \sum_{|\alpha|\le p+2} |D^\alpha f(t,x,y)| + |\mu_i(t)| + |a_i(t)| + |b_i(t)| + \tag{25}$$
$$+ |\phi(t)| + |\phi'(t)| \le K, \quad |f(t,x_0,y_0)| \ge \frac{1}{K}, \quad i = 1,2, \quad K = const > 0, \quad p \ge 4,$$

существует единственное решение задачи (16)-(19) в классе $Z_p(t^*)$, где $t^* > 0$ - некоторая постоянная, зависящая от входных даных.

Теорема 4. *Пусть функции $u_0(x,y), f(t,x,y), \mu_1(t), \mu_2(t), b_1(t)$ удовлетворяют условиям Теоремы 3 при $(x,y) \in \bar{\Omega}$ и $p = 6$. При выполнении условий*

$$\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}(0,y) = \frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}(l_1,y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,0,y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,l_1,y) = 0, \qquad k = 0,2,4,6,8,$$
$$\frac{\partial^m u_0}{\partial y^m}(x,0) = \frac{\partial^m u_0}{\partial y^m}(x,l_2) = \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(t,x,0) = \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(t,x,l_2) = 0, \qquad m = 1,3,5,7$$

существует единственное решение задачи (20)-(24) в классе

$$W = \{u(t,x,y), g(t) | u(t,x,y) \in C^{1,6}(Q_{t^*}), \left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right| +$$
$$+ \sum_{|\alpha| \le 6} |D^\alpha u(t,x,y)| \le K, (t,x,y) \in Q_{t^*}, g(t) \in C([0,t^*])\}.$$

В **четвёртой главе** рассмотрена задача Коши для системы нагруженных (содержащих следы неизвестных функций и их производных) уравнений.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \mu(t, \bar{\omega}(t))\Delta \bar{u} + \nu(\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} + \bar{f}(t,x,\bar{u},\bar{\omega}(t)), \tag{26}$$

$$\bar{u}(0,x) = \bar{\varphi}(x), \tag{27}$$

где $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u} = \big(u_1(t,x), \dots, u_n(t,x)\big)$ - неизвестные функции, $\mu(t,\bar{\omega}(t))$, $\bar{f} = \big(f_1, \dots, f_n\big)$, $\bar{\varphi} = \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\big)$ - заданные функции, $\nu \in \mathbb{R}$ - заданный коэффициент. Через $\bar{\omega}(t) = \big(u_i(t,x^j), D^\alpha u_i(t,x^j)\big)$; $\quad i = 1,\dots,n$; $\quad j = 1,\dots,r$; $\quad |\alpha| = 0,\dots,p_0$ обозначена вектор-функция, компонентами которой являются следы неизвестных функций и их производных по пространственным переменным до порядка p_0 включительно, взятые в точках $x^1, \dots, x^r \in \mathbb{R}^n$.

К системе такого типа сводятся некоторые коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений и систем.

Введем некоторые обозначения

$$U^i_\alpha(0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi_i(x)|, \quad U^i_\alpha(t) = \sup_{\xi \in [0,t]} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u_i(\xi,x)|,$$
$$U^i(t) = \max_{|\alpha| \le p+2} U^i_\alpha(t), \quad U(t) = 1 + \sum_{i=1}^n U^i(t);$$

$$C^{q,s}(\Pi_{[0,T]}) = \left\{ \bar{u} = (u_1(t,x), \dots, u_n(t,x)) \,\middle|\, \frac{\partial^j u_i}{\partial t^j}, D^\alpha u_i(t,x) \in C(\Pi_{[0,T]}); \right.$$
$$\left. \left|\frac{\partial^j u_i}{\partial t^j}\right| \le K, |D^\alpha u_i(t,x)| \le K; \quad i = 1,\dots,n; j \le q; |\alpha| \le s; K - const \right\} -$$

класс достаточно гладких ограниченных вектор-функций.

Пусть $p \geq \max(p_0, 2)$, функция $\bar{\varphi}$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_i(x) \in C^{p+2}(\mathbb{R}^n), \quad |D^\alpha \varphi_i(x)| \leq K_1; \quad i = 1, \dots, n; \quad |\alpha| \leq p+2, \tag{28}$$

функции μ и $\bar{f}$ являются непрерывными по всем переменным и удовлетворяют соотношениям

$$\mu(t, \bar{\omega}(t)) \geq \mu_0 > 0, \quad \forall \bar{u}(t,x) \in C^{1,p+2}(\Pi_{[0,T]})$$

$$|D^\alpha f_i(t, x, \bar{u}, \bar{\omega})| \leq K_2 \left(1 + U(t) + U(t)^2\right), \quad |\alpha| \leq p+2. \tag{29}$$

Здесь и далее, K_i - некоторые постоянные, зависящие только от входных данных. В данной главе доказана [3]

Теорема 5. *Пусть входные данные задачи (26), (27) удовлетворяют условиям (28), (29) при некотором p. Тогда существует решение задачи (26), (27) класса* $C^{1,p}(\Pi_{[0,T]})$.

Приведён пример коэффициентной обратной задачи, приводящейся к рассматриваемой системе уравнений, и указан способ проверки условий теоремы разрешимости.

В **пятой главе** рассмотрена краевая обратная задача для n-мерного параболического уравнения с параметром

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \lambda \Delta_x u(t,x,y) + \mu(t,y) f(t,x,y), \tag{28}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \tag{29}$$

$$u(t,x,y)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \tag{30}$$

$$u(t,x,y)|_{x=y} = \phi(t,y), \ (t,x,y) \in Q_T, \tag{31}$$

где

$$Q_T = \{(t,x,y) | t \in [0,T], \ x \in \Omega, \ y \in D\},$$

$T > 0$, Ω – прямоугольный параллелепипед $[0,l_1] \times [0,l_2] \times \dots \times [0,l_n]$ в $\mathbb{R}^n$, D – компактное подмножество Ω с достаточно гладкой границей ∂D, $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $u(t,x,y)$ и $\mu(t,y)$ – неизвестные функции; функции $f(t,x,y)$, $u_0(x,y)$ заданы.

Для данной задачи получены [4] следующие результаты:

Теорема 6. *Пусть входные данные задачи (28)–(31) удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered} |f(t,y,y)| \geq K_1 > 0, \quad y \in D, \\ \left|D_x^\alpha D_y^\beta u_0(x,y)\right| \leq K_2, \quad \left|D_x^\alpha D_y^\beta \frac{f(t,x,y)}{f(t,y,y)}\right| \leq K_3, \quad \left|D_y^\beta \phi_t(t,y)\right| \leq K_4, \\ |\alpha| \leq p, \quad |\beta| \leq 1, (t,x,y) \in Q_T, \quad p \geq 6; \end{gathered} \tag{32}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u_0(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n, y)|_{x_i=0, x_i=l_i} = 0,$$
$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f(t, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n, y)|_{x_i=0, x_i=l_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \ k = 0, 2, 4, 6.$$

Тогда задача (28)–(31) имеет единственное решение класса.

$$Z_p(\Omega) = \{(u(t,x,y), \mu(t,y))\, |D_x^\alpha u(t,x,y) \in C([0,T] \times \Omega \times D),$$
$$|D_x^\alpha u(t,x,y)| \le K, \ \mu(t,y) \in C([0,T] \times D), \ |\alpha| \le p-2\} -$$

Теорема 7. *Рассмотрим задачу Коши (28), (29), (31) в полосе*

$$E = \{(t,x,y) | t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n, y \in D\}.$$

Задача (28), (29), (31) имеет единственное решение класса $Z_p(\mathbb{R}^n)$, если условия (32) выполняются в E.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решены актуальные задачи идентификации функции источника для квазилинейных параболических уравнений типа Бюргерса в одно- и двумерном случаях, как с начальными данными Коши, так и с различными начально-краевыми условиями. Также решена более общая задача разрешимости системы нагруженных уравнений к которой приводятся различные коэффициентные обратные задачи для квазилинейных параболических уравнений.

Основные результаты диссертации:

1. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса в случаях задачи Коши и первой краевой задачи.

2. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для двумерного уравнения типа Бюргерса в случаях задачи Коши и смешанной краевой задачи в прямоугольной области.

3. Доказана теорема разрешимости для системы нагруженных уравнений, к которой приводятся некоторые обратные задачи для параболических уравнений и систем.

4. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для параболического уравнения с параметром в случаях задачи Коши и первой краевой задачи.

Полученные результаты имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА В ИЗДАНИЯХ, РЕКОМЕНДОВАННЫХ ВАК

1. Коршун, К. В. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 497–506.

2. Коршун, К. В. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Сибирский журнал индустриальной математики. Июль-сентябрь, 2013. – 2013. – Т. 16, № 3(55). – С. 28–40.

3. Korshun, K V. On Solvability of the Cauchy Problem for a Loaded System / Yu. Ya. Belov, K. V. Korshun // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2014. – V. 7, no. 2. – P. 155—161.

4. Korshun K.V. On some inverse problem for a parabolic equation with a parameter / K. V. Korshun // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2015. – V. 8, no 3. – P. 281–290.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА В ПРОЧИХ ИЗДАНИЯХ

5. Коршун, К.В. Задача идентификации коэффициентов квазилинейного параболического уравнения / К. В. Коршун // Материалы XLIX международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2011. – С 48.

6. Коршун, К.В. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Материалы 50-й юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2012. – С. 34.

7. Коршун, К. В. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска [Электронный ресурс] № заказа 2394/отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сибирский федеральный университет. – 2013. – Режим доступа: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2013/thesis/s062/s062-010.pdf

8. Коршун, К. В. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Материалы 51-й международной научной студенческой

конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2013. – С. 88.

9. Коршун, К. В. Задача идентификации функции источника для многомерного уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. (Новосибирск, 18-24 августа 2013 г.): Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт математики СО РАН. – 2013. – С. 173.

10. Коршун, К. В. О разрешимости задачи Коши для системы нагруженных параболических уравнений / К. В. Коршун // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2014. – С. 84.

11. Коршун, К.В. О разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения с параметром / К. В. Коршун // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы Тринадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2014". - Казань: Издательство Казанского университета. - 2014. - Том 50. - С. 106-107.

12. Коршун, К.В. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с параметром. / К. В. Коршун // Материалы 53-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2015: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2015. – С. 30.

13. Коршун, К.В. Об обратной задаче для параболического уравнения с параметром. / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование". – 2015. – С. 65–66.