На правах рукописи

Нгуен Дык Банг

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ диссертации на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Красноярск — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (ФГБОУ ВО «ИРНИТУ»)

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, **Чистяков Виктор Филимонович**

Официальные оппоненты:
Капцов Олег Викторович - доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук», отдел вычислительных моделей в гидрофизике, ведущий научный сотрудник

Орлов Сергей Сергеевич - кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет», кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, доцент.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.

Защита состоится «31» мая 2016 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 999.007.02 на базе Сибирского федерального университета и Института вычислительного моделирования СО РАН по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. Академика Киренского, 26, ауд. УЛК 115.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте Сибирского федерального университета www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан « » апреля 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Бронов Сергей Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. В настоящее время многие экспериментальные исследования можно заменить на исследование математических моделей физических процессов или технических устройств. Особенно это актуально при создании тренажеров рабочих мест энергетических и химических установок. Многие модели в технических системах (на современном уровне моделирования) описываются взаимосвязанными системами дифференциальных, интегральных и алгебраических уравнений, которые можно записать в виде систем интегро-дифференциальных уравнений с матрицей неполного ранга перед старшей производной искомой вектор-функции. Алгебраические уравнения отвечают за наличие в моделях балансовых соотношений, в частности, законов сохранения или уравнений состояния, системы дифференциальных уравнений описывают динамику процесса. Если процесс обладает последействием, то математическая модель может включать и интегральные уравнения. Такие системы принято называть вырожденными системами интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ).

Численное решение краевых и начальных задач для вырожденных систем ИДУ сопряжено с большими трудностями. Численные методы развиты недостаточно даже для начальных задач. Для краевых задач эти методы отсутствуют. Методы, применяемые в других работах при решении краевых задач для дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), сложно адаптировать к нашим задачам. А для систем с прямоугольными матрицами коэффициентов это сделать и вовсе невозможно.

В частности, модели гидравлических и электрических цепей (ГЦ и ЭЦ) описываются вырожденными системами ИДУ. С практической точки зрения актуальность обусловлена тем, что *модели гидравлических и электрических цепей являются составной частью моделей сложных энергетических установок (паровых котлов, турбин, систем регенераций либо всего комплекса энергоблока тепловых электростанций). От качества моделирования гидравлических и электрических цепей существенно зависит качество комплексной модели всей энергоустановки.*

При создании моделей ГЦ и ЭЦ возможна ситуация, когда получается система с числом уравнений, не совпадающим с размерностью искомой вектор-функции. Если число уравнений больше размерности вектор-функции, то системы принято называть *переопределенными*. Если число уравнений меньше размерности вектор-функции, то такие системы называются *недоопределенными*. Переопределенным и недоопределенным системам соответствуют системы ИДУ с прямоугольными матрицами коэффициентов перед старшей производной искомой вектор-функции. Если число уравнений совпадает с размерностью вектор-функции, то будем их называть *замкнутыми* системами. Для замкнутых систем неполнота ранга матрицы перед старшей производной искомой вектор-функции эквивалентна тому, что определитель матрицы равен нулю. Замкнутые системы рассматривались в работах В.Ф. Чистякова, М.В. Булатова, Е.В. Чистяковой, С.С. Орлова, М.В. Фалалеева, В.К. Горбунова, Е.Б. Кузнецова, С.С. Дмитриева и т.д. Незамкнутые системы рассматриваются в диссертации впервые.

Диссертационная работа посвящена разработке теории начальных и краевых задач для вырожденных систем ИДУ. На основе этих разработок построены и исследованы модели, возникающие в теории нелинейных гидравлических и электрических цепей (ГЦ и ЭЦ). В моделях физические принципы моделирования взяты из работ О.А. Балышева, Э.А. Таирова[1] и Е.И. Ушакова[2]. В предыдущих поколениях моделей ГЦ для расчета использовали системы алгебраических или дифференциально-алгебраических уравнений (АУ или ДАУ). Такие модели разрабатывались и исследовались в трудах А.П. Меренкова, В.Я. Хасилева[3], Н.Н. Новицкого, Е.В. Сенновой, Б.М. Кагановича, М.Г. Сухарева и т.д.

В диссертации рассматриваются системы следующего общего вида:

$$\mathcal{S}(t)\dot{x} + \Gamma(x,\mathcal{W}x,t) = 0, \quad t \in T = [\alpha,\beta], \tag{1}$$

где $\mathcal{S}(t)$ — $(m \times n)$-матрица, $\Gamma(x,w,t)$ — вектор-функция соответствующей размерности, $\dot{x} = dx/dt$, $x \in \mathbf{R}^n$, $w \in \mathbf{R}^l$, $\mathcal{W}x = \int\limits_{\alpha}^{t} \tilde{K}(t,\tau,x(\tau))d\tau$ — оператор Вольтерра, точнее говоря, $\Gamma : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \times T \to \mathbf{R}^m$, $\tilde{K} : \ T \times T \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l$. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие и выполнено условие

$$\operatorname{rank} \mathcal{S}(t) < \min\{m, n\} \ \forall t \in T. \tag{2}$$

Если $m = n$, то условие (2) эквивалентно равенству $\det \mathcal{S}(t) = 0 \ \forall t \in T$.

Для системы (1) обычно задаются либо начальные $x(\alpha) = a$, a — заданный вектор из $\mathbf{R}^n$, либо краевые условия

$$\varphi(x(\alpha),\, x(\beta)) = 0, \quad \varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{\mu}. \tag{3}$$

В работе рассматривается только классические решения. Под решением задачи (1), (3) будем понимать любую вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, которая обращает равенства (1), (3) в тождества при подстановке.

[1]Балышев О.А., Таиров Э.А. Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (Теоретические и экспериментальные аспекты). Новосибирск: Наука, 1999. 164 с.

[2]Ушаков Е.И. Статическая устойчивость электрических систем. Новосибирск: Наука, 1988. 271 с.

[3]Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 277 с.

Целью диссертационной работы является исследование разрешимости вырожденных систем ИДУ и начально-краевых задач для них, конструирование численных методов решения таких систем и применение для расчета динамики сложных ГЦ, ЭЦ.

При написании диссертации решались следующие конкретные **задачи**:

1. Получение критериев разрешимости вырожденных систем ИДУ и начально-краевых задач для них;
2. Разработка численных методов и создание комплекса программ, реализующих эти методы;
3. Разработка моделей ГЦ, ЭЦ с автоматическими регуляторами на основе теории вырожденных систем ИДУ;
4. Применение полученных результатов к исследованию математических моделей.

Объектом исследования являются вырожденные системы ИДУ; модели ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами, записанные в виде таких систем ИДУ.

Предметом исследования являются поиск критериев разрешимости краевых (в частности, начальных) задач для вырожденных систем ИДУ; разработка методов численного решения для таких систем; исследование свойств математических моделей ГЦ и ЭЦ, записанных в виде вырожденных систем ИДУ.

Методы исследования. В работе использованы результаты из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений типа Вольтерра, теории дифференциальных, интегральных операторов, теории матриц, а также сведения из теории ГЦ и ЭЦ. При исследовании численного решения вырожденных систем ИДУ использованы основы метода наименьших квадратов и теории конечно-разностных схем. Для создания программ, реализующих численные методы решения начально-краевых задач для вырожденных систем ИДУ и комплексов программ, моделирующих ГЦ и ЭЦ, использована среда разработки Matlab.

Достоверность полученных результатов подтверждается строгими доказательствами теорем существования решений вырожденных систем ИДУ и начально-краевых задач для них, доказательствами сходимости предлагаемых численных методов и расчетами тестовых примеров. Достоверность математических моделей ГЦ и ЭЦ базируется на наблюдениях прошлых лет за функционированием реального оборудования.

Тематика диссертационной работы соответствует паспорту специальности 05.13.18 по следующим пунктам: п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»; п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей»; п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; п. 5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Научная новизна

1. Создана теоретическая основа для численного исследования вырожденных систем ИДУ: доказаны теоремы существования и единственности решений начальных и краевых задач для вырожденных систем ИДУ, включая системы с прямоугольными матрицами коэффициентов. Системы с прямоугольными матрицами коэффициентов исследованы впервые. Разработаны новые численные методы на основе методов наименьших квадратов и разностных схем, позволяющие находить приближенные решения начальных, краевых задач для вырожденных систем ИДУ. Получены оценки скорости сходимости этих методов к точным решениям таких задач.
2. Впервые проведены аналитическое и численное исследования математических моделей ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами в виде вырожденных систем ИДУ и учетом состояния среды на ветвях: пар, вода, пароводяная смесь.
3. Разработан комплекс программ нахождения приближенного решения краевых задач для вырожденных систем ИДУ, и начальных задач, описывающих модели ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами. Разработанный комплекс программ позволяет проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, исследовать свойства предложенных алгоритмов (в частности, оценивать обусловленность линейных алгебраических систем, к решению которых сводится реализация алгоритмов).

Теоретическая значимость. Предложен метод формирования системы уравнений, описывающих ГЦ и ЭЦ при наличии автоматических регуляторов и различных законов падения давлений на ветвях ГЦ; доказаны теоремы существования решения вырожденных систем ИДУ; построены численные методы.

Практическая значимость результатов исследования заключается в следующем: модель, рассматриваемая в работе, представляет составную часть модели прямоточного котла и турбины, которые являются частью оборудования тепловой электростанции. Полные модели включают в себя системы, состоящие из сотен алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений. Теоретическое исследование таких больших систем не представляется возможным. На компактных моделях, рассматриваемых в диссертации, предполагается отрабатывать принципиальные вопросы построения полных моделей; разработанная программная система позволяет реализовать модели ГЦ и ЭЦ и рассчитывать режимы работы этих моделей.

Апробация. Результаты, излагаемые в диссертации, были представлены на следующих конференциях и семинарах: Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Малые Винеровские чтения», г. Иркутск, 2013 г.; Ляпуновские чтения, ИДСТУ СО РАН, 2013 г.; IV международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи», г. Иркутск, 2014 г.; Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Малые Винеровские чтения», г. Иркутск, 2014 г.; XIX Байкальская Всероссийская конференция «Информационные и математические технологии в науке и управлении», г. Иркутск, 2014 г.; XV Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, г. Тюмень, 2014 г.; Международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», г. Улан-Удэ, 2015 г.

Публикации по теме диссертации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 12 научных работах, из них 3 статьи в изданиях, входящих в Перечень ВАК и SCOPUS. Получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014615157 (2014 г.) и № 2015660014 (2015 г.). Список публикаций приведен в конце автореферата.

Личный вклад. Все результаты получены лично соискателем. Руководителю и соавтору принадлежат некоторые постановки задач, рассматриваемых в диссертации. Все необходимые заимствования отмечены ссылками на соответствующие литературные источники.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, содержащего 100 наименований, и приложения. Объем работы составляет 132 страницы, включая 24 рисунка и 9 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность направления исследований, обрисован класс задач, которые приводят к необходимости решать системы, содержащие алгебраические, дифференциальные и интегральные уравнения, а также дан краткий обзор текущей литературы по теме диссертации.

В **главе 1** рассматриваются вопросы разрешимости вырожденных систем ИДУ, включая подходы к определению индекса. В ней получены теоремы разрешимости начальных и краевых задач для линейных и квазилинейных систем ИДУ.

Наиболее полно в диссертации рассмотрены линейные вырожденные системы ИДУ

$$(\Lambda_1 + V)x := A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) + \int_\alpha^t K(t,s)x(s)ds = f, \quad t \in T = [\alpha,\beta], \tag{4}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $K(t,s)$ — $(m \times n)$-матрицы, $x(t)$ — искомая, $f \equiv f(t)$ — заданная вектор-функции, $\Lambda_1 x := A(t)\dot{x} + B(t)x$, V — оператор Вольтерра с ядром $K(t,s)$, с краевыми условиями

$$Cx(\alpha) + Dx(\beta) = a, \tag{5}$$

где C, D — $(\mu \times n)$-матрицы, a — заданный вектор из $\mathbf{R}^\mu$,

$$\operatorname{rank} A(t) < \min\{m, n\} \ \forall t \in T.$$

Определение 1. [4] Если существует оператор $\Lambda_l = \sum_{j=0}^{l} L_j(t)(d/dt)^j$, где $L_j(t)$ — $(m \times m)$-матрицы из $\mathbf{C}(T)$, со свойством

$$\Lambda_l \circ (\Lambda_1 + V)x = \tilde{A}(t)\dot{x} + \tilde{B}(t)x + \int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)x(s)ds, \quad \forall x \in \mathbf{C}^{l+1}(T),$$

где $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$, $\tilde{K}(t,s)$ — $(m \times n)$-матрицы, непрерывные в своих областях определения, $\operatorname{rank} \tilde{A}(t) = \min\{m, n\} \ \forall t \in T$, то будем говорить, что для системы (4) определен левый регуляризирующий оператор (ЛРО). Минимально возможное число l называется индексом системы (4).

Теорема 1. *Пусть для системы* (4)*, у которой* $m \le n$*, выполнены условия:*

1) $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$;

2) *существует ЛРО и индекс оператора* $\Lambda_1 + V$ *равен* $l < \infty$;

3) $f \in \mathbf{C}^{l+1}(T)$*;*

4) $\operatorname{rank} \Upsilon_{l-1} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \Upsilon_{l-1} & \mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha) \end{pmatrix}$, *где* $\Upsilon_{l-1} = D_{l-1}[A,B,K](\alpha)$, $D_{l-1}[A,B,K](\alpha)$ *— блочная матрица, полученная с использованием формулы Лейбница для дифференцирования произведений, блоки которой представляют собой линейные комбинации производных входных данных с множителями в виде биномиальных коэффициентов,* $\mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha) = (f(\alpha)^\top \ (d/dt)f(\alpha)^\top \ \dots \ (d/dt)^{l-1}f(\alpha)^\top)^\top$.

Тогда найдутся $(n \times \rho)$*-матрица* $X_\rho(t) \in \mathbf{C}^1(T)$*,* $\operatorname{rank} X_\rho(\alpha) = \rho$ *и* $(n \times m)$*-матрицы* $K_0(t,s)$, $K_1(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, $\tilde{C}_0(t)$, $C_j(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $j = 0,1,\dots,l$ *такие,*

[4] Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 278 с. (Определение 1 дано для случая $m = n$).

что любая линейная комбинация $x(t,c) = X_\rho(t)c + \psi(t)$, $t \in T$,

$$\psi(t) = \int\limits_\alpha^t K_0(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l} C_j(t)(d/dt)^j f(t) + \tilde{C}_0(t)w(t) + \int\limits_\alpha^t K_1(t,s)w(s)ds,$$

где c *— произвольный вектор из* $\mathbf{R}^\rho$, $w(t)$ *— произвольная гладкая вектор-функция, является решением системы* (4) *и на отрезке* T *нет решений, отличных от* $x(t,c)$.

Определение 2. Если для пучка $(m \times n)$-матриц $\lambda A(t) + B(t)$ существует $(m \times m)$-матрица $P(t)$ со свойствами $\det P(t) \neq 0$ $\forall t \in T$,

$$P(t)[\lambda A(t) + B(t)] = \lambda \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} = \min\{m, n\}$ $\forall t \in T$, то будем говорить, что пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ имеет индекс 1 на отрезке T.

Теорема 2. *Пусть для системы* (4) *выполнены условия:*

1) $A(t), B(t), f(t) \in \mathbf{C}^1(T), K(t,s) \in \mathbf{C}^1(T \times T)$;

2) *пучок матриц* $\lambda A(t) + B(t)$ *имеет индекс* 1 *на отрезке* T.

Тогда система (4) *имеет индекс* 1 *и существуют квадратные матрицы* $\mathcal{P}(t), \mathcal{Q}(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *подходящей размерности со свойствами* $\det \mathcal{P}(t) \neq 0$, $\det \mathcal{Q}(t) \neq 0$ $\forall t \in T$ *такие, что система* $\mathcal{P}(t)(\Lambda_1 + V)\mathcal{Q}(t)u = \mathcal{P}(t)f$ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 & B_{13} \\ 0 & E_{m-r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}, \quad m < n,$$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix},$$

где $m = n$, $J(t)$ *— некоторый* $(r \times r)$*-блок,* $V_{ij}z = \int_\alpha^t K_{ij}(t,s)z(s)ds$, $K_{ij}(t,s)$ *— блоки подходящей размерности произведения* $\mathcal{P}(t)K(t,s)\mathcal{Q}(t)$, u_j *— компоненты вектор-функции* u*, соответствующие блочной структуре матриц коэффициентов.*

Более того, если $m > n$, $\operatorname{rank}(A(t)|B(t)) = n$ $\forall t \in T$*, то существуют квадратные матрицы* $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{Q}(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *подходящей размерности со свойствами*

$\det \mathcal{P}(t) \neq 0,\ \det \mathcal{Q}(t) \neq 0\ \forall t \in T$ *такие, что система* $\mathcal{P}(t)(\Lambda_1 + V)\mathcal{Q}(t)u = \mathcal{P}(t)f$ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \\ V_{31} & V_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}(t)f = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix}.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и* $m \leq n$. *Тогда системы* (4) *разрешимы при любой вектор-функции* $f(t)$ *и их общее решение имеет вид*

$$x(t,c) = X_r(t)c + \zeta(t), \quad m < n,$$

$$\zeta(t) = \int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)f(s)ds + C_0(t)f(t) + \int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)w(s)ds + \bar{C}_0(t)w(t),$$

$$x(t,c) = \bar{X}_r(t)c + \bar{\zeta}(t), \quad m = n,$$

$$\bar{\zeta}(t) = \int_\alpha^t \bar{K}(t,s)f(s)ds + \bar{C}_0(t)f(t),$$

где $X_r(t), \bar{X}_r(t)$ — $(n \times r)$*-матрицы,* $\tilde{K}(t,s), C_0(t), \bar{K}(t,s), \bar{C}_0(t)$ — $(n \times n)$*- матрицы, гладкие в областях определения,* $w(t)$ — *произвольная гладкая вектор-функция,* c — *вектор произвольных постоянных, и это решение на* T *единственно.*

Более того, если $m > n$ *и уравнение*

$$(V_{31}\ V_{32})x(t,\bar{c}) = \tilde{f}_3 \tag{6}$$

разрешимо относительно вектора $\bar{c}$*, то системы* (4) *разрешимы и их общее решение имеет вид*

$$x(t,\bar{c}) = X_d(t)\bar{c} + \tilde{\zeta}(t),$$

$$\tilde{\zeta}(t) = \int_\alpha^t \mathbf{K}(t,s)f(s)ds + \mathbf{C}_0(t)f(t) + X_{r-d}(t)b,$$

где $X_d(t)$ — $(n \times d)$*-матрица,* $X_r(t) = (X_d(t)\ X_{r-d}(t))$*,* b — *некоторые фиксированные векторы,* $\bar{c}$ — *произвольный вектор,* $\mathbf{K}(t,s)$, $\mathbf{C}_0(t)$ — $(n \times m)$*-матрицы, гладкие в областях определения.*

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 2 и условие* (6)*, то краевая задача* (4)*,* (5) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешимы относительно векторов* c, $\bar{c}$ *системы алгебраических уравнений*

$$Z_1c = a - C\zeta(\alpha) - D\zeta(\beta), \quad Z_1 = CX_r(\alpha) + DX_r(\beta), \quad m < n,$$

$$Z_2c = a - C\bar{\zeta}(\alpha) - D\bar{\zeta}(\beta), \quad Z_2 = C\bar{X}_r(\alpha) + D\bar{X}_r(\beta), \quad m = n,$$

$$Z_3\bar{c} = a - C\tilde{\zeta}(\alpha) - D\tilde{\zeta}(\beta), \quad Z_3 = CX_d(\alpha) + DX_d(\beta), \quad m > n.$$

Если решение c, $\bar{c}$ системы единственно, то единственно решение задачи (4)*,* (5).

Пусть имеет место не краевая, а начальная задача $x(\alpha) = a$. Здесь ($C = E_n$, $D = 0$). При $m \le n$, 1-е и 2-е условия эквивалентны условию Кронекера-Капелли

$$\operatorname{rank} A(\alpha) = \operatorname{rank}(A(\alpha)| - B(\alpha)a + f(\alpha)).$$

Свойства вырожденных квазилинейных систем ИДУ изучены гораздо слабее, чем свойства линейных систем ИДУ.

Определение 3. [5] Пусть множество решений системы

$$\Lambda_1(x) := A\dot{x} + \Phi(x,t) = 0, \quad \Phi(x,t) = F(x,t,\nu_*), \quad t \in I_t = (-\infty, +\infty), \qquad (7)$$

где A — $(n \times n)$-матрица с постоянными элементами, $\Phi(x,t) \in \mathbf{C}^{(2,2)}_{x,t}(\mathbf{R}^n \times I_t)$, $\nu_* \in \mathcal{N} = (-\nu_0,\nu_0)$ — фиксированное значение параметра, непусто и выполнены условия: все решения $x(t,t_0,x_0)$, где $x_0 \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{R}^n$ — некоторое многообразие, определены при $t_0 \le t < \infty$; существует единственное решение $\eta(t)$, $t \in I_t$, ограниченное на всей числовой оси $\sup\{\|\eta(t)\|_{\mathbf{I}}, t \in I_t\} = \mu < \infty$; для любого решения $x(t,t_0,x_0)$ выполнены соотношения $\lim_{t\to\infty}[x(t,t_0,x_0) - \eta(t)] = 0$. Тогда будем говорить, что система (7) обладает свойством конвергенции.

Теорема 3. *Пусть для замкнутой системы* (1) *с начальным условием* $x(\alpha) = a$ *выполнены условия:*

1) $\mathcal{S}(t) \in \mathbf{C}^2(T)$, $\Gamma(x,z,t) \in \mathbf{C}^2(\{x : \|a - x\|_{\mathbf{I}} \le \rho_1\} \times \{z : \|z\|_{\mathbf{I}} \le \rho_2\} \times T,\ \rho_1,\ \rho_2 > 0)$, $a \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{K}(t,\tau,x) \in \mathbf{C}^1(T \times T \times \{x : \|a - x\|_{\mathbf{I}} \le \rho_1\})$;

2) $\operatorname{rank} \mathcal{S}(t) = \mathrm{const}$, $t \in [\alpha, \alpha + \rho_1]$;

3) $\operatorname{rank} \mathcal{S}(\alpha) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\alpha) & \Gamma(a,0,\alpha) \end{pmatrix}$;

4) *многочлен* $\lambda\mathcal{S}(\alpha) + \mathcal{D}(a,0,\alpha)$, *где* $\mathcal{D}(x,z,t) = \partial\Gamma(x,z,t)/\partial x$, *удовлетворяет критерию «ранг-степень»*: $\operatorname{rank} \mathcal{S}(\alpha) = \deg\det[\lambda\mathcal{S}(\alpha) + \mathcal{D}(a,0,\alpha)]$.

Тогда на некотором отрезке $[\alpha,\alpha + \epsilon]$, $\epsilon > 0$ *определено решение* $x(t) \in \mathbf{C}^1[\alpha,\alpha + \epsilon]$.

Теорема является частным случаем доказанного утверждения[6].

Глава 2 посвящена численным методам решения начальных, краевых задач, основанным на методе наименьших квадратов, и построению специальных разностных схем для вырожденных систем ИДУ.

Метод наименьших квадратов базируется на следующем утверждении.

[5] Демидович Б.П. Лекции по теории математической устойчивости. М.: Наука, 1967.

[6] Чистякова Е.В. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений общего вида // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 5. С. 100–114.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2, краевая задача* (4), (5) *разрешима и для некоторой вектор-функции* $x_\epsilon(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *выполнены условия*

$$\|\phi_\epsilon(t)\|_{\mathbf{C}(T)} < \epsilon, \qquad \|h_\epsilon\|_{\mathbf{I}} < \epsilon,$$

где $\phi_\epsilon(t) = (\Lambda_1 + V)x_\epsilon(t) - f(t), \quad h_\epsilon = Cx_\epsilon(\alpha) + Dx_\epsilon(\beta) - a$. *Тогда найдутся решение задачи* $x(t)$ *и положительные числа* ϵ_0, κ *такие, что*

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\|_{\mathbf{C}(T)} < \kappa\epsilon, \qquad \epsilon < \epsilon_0.$$

Более того, если в краевых условиях (5) $C = E_n$, $D = 0$ *(краевая задача является задачей Коши) и для некоторой вектор-функции* $x_\epsilon(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *выполнены условия*

$$\|\phi_\epsilon(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(T)} < \epsilon, \qquad x_\epsilon(\alpha) - x(\alpha) = h_\epsilon = 0,$$

тогда найдутся решение задачи $x(t)$ *и положительные числа* ϵ_1, κ_1 *такие, что*

$$\|x_\epsilon(t) - x(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(T)} < \kappa_1\epsilon, \quad \epsilon < \epsilon_1.$$

Приближения к решению краевой задачи (4), (5) ищем в виде полинома $p_i(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_i t^i$, $i = 1,2,\ldots$, где c_0, $c_1, \ldots$, c_i — векторные коэффициенты, подлежащие определению. По методу множителей Лагранжа[7] при условной минимизации построим функцию

$$S(c_0,c_1,\ldots,c_i,\lambda) = \|\delta(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(T)} + (\lambda,\Omega) = \int_\alpha^\beta \|F(t)c - f(t)\|^2_{\mathbf{E}} dt + (\lambda,\Omega), \qquad (8)$$

где $\delta(t) = A(t)\dot{p}_i(t) + B(t)p_i(t) + \int_\alpha^t K(t,s)p_i(s)ds - f(t)$, $\|\delta(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(T)} = \int_\alpha^\beta \|\delta(t)\|^2_{\mathbf{E}} dt$, (λ,Ω) – скалярное произведение в пространстве R^m,

$$F(t) = A(t)\dot{P}_i(t) + B(t)P_i(t) + \int_\alpha^t K(t,s)P_i(s)ds,$$

$$\lambda = (\lambda_0\ \lambda_1\ \ldots\lambda_m)^\top, \quad c = (c_0\ c_1 \ldots c_i)^\top, \quad P_i(t) = (E_n\ tE_n \ldots t^i E_n),$$

$$\Omega = Cx(\alpha) + Dx(\beta) - a = C[c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_i\alpha^i] + D[c_0 + c_1\beta + \ldots + c_i\beta^i] - a. \quad (9)$$

Минимум функции (8) с условиями (9) совпадает с решением системы линейных алгебраических уравнений размерности $n(i+1) + m$ относительно неизвестных c_0, $c_1, \ldots$, c_i, λ:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & L \\ L^\top & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ a \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

[7] Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.

где $\Lambda = 2\int_\alpha^\beta F^\top(t)F(t)dt, \quad L = \partial\Omega/\partial c, \quad \Theta = 2\int_\alpha^\beta F^\top(t)f(t)dt.$

Решение системы (10) единственно, если единственно решение краевой задачи (4), (5), и может быть получено любым из известных методов (например, методом Гаусса). Подставляя найденные значения $c = (c_0,\, c_1, \ldots,\, c_i)$, λ, получим функции $p_i(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_i t^i$ — приближения к точным решениям задачи (4), (5).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4, краевая задача* (4), (5) *является задачей Коши и решение $x(t)$ единственно. Тогда найдутся решение системы* (10) *и соответствующий ей многочлен задачи p_i такой, что*

$$S(c_0,c_1,\ldots,c_i,\lambda) \le \frac{\kappa_1}{i^2\cdot(ln\ i)^2}, \qquad \|p_i(t)-x(t)\|^2_{\mathbf{L}_2(T)} \le \frac{\kappa_2}{i^2\cdot(ln\ i)^2},$$

где $\kappa_1 = \mathrm{const}$, $\kappa_2 = \mathrm{const}$.

В основе разностных схем, предложенных в диссертации для решения вырожденных систем ИДУ, лежат следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при достаточно малых $h \le h_0$ решения разностной схемы*

$$\mathcal{S}(t_{i+1})\frac{x_{i+1}-x_i}{h} + \Gamma\left(t_{i+1},x_{i+1},h\sum_{j=0}^{i}\tilde{K}(t_i,t_j,x_j)\right) = 0 \tag{11}$$

существуют, где $x_0 = a$, $h = \epsilon/N$, $t_i = \alpha + ih$, $i = \overline{0,N}$, и справедлива оценка

$$\|x_i - x(t_i)\|_{\mathbf{I}} \le Ch, \quad C = \mathrm{const} > 0,$$

где x_i, $x(t_i)$ — приближенное и точное решения в точке t_i соответственно.

Более того, схему (11) *можно заменить на безитерационную схему*

$$\mathcal{S}(t_{i+1})\frac{w_{i+1}-w_i}{h} + \Gamma(\xi_i) + \mathcal{D}(\xi_i)(w_{i+1}-w_i) = 0,$$

где $\xi_i = (t_{i+1},w_i,h\sum\limits_{j=0}^{i}\tilde{K}(t_i,t_j,w_j))$, для которой справедлива оценка

$$\|w_i - x(t_i)\|_{\mathbf{I}} \le C_1 h, \quad C_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Теорема является частным случаем доказанного утверждения[6].

Численный расчет идет по следующей схеме:

$$w_{i+1} = (\mathcal{S}(t_{i+1}) + h\mathcal{D}(\xi_i))^{-1}[\mathcal{S}(t_{i+1})w_i - h\Gamma(\xi_i) + h\mathcal{D}(\xi_i)].$$

Очень важным обстоятельством является тот факт, что интеграл в схеме можно считать по формуле левых прямоугольников. Именно это позволяет линеаризовать нелинейную разностную схему. Для линейных систем справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть в замкнутой системе* (4) *выполнены условия*

1) $A(t)$, $B(t)$, $f \in \mathbf{C}^{k+1}(T)$, $K(t,s) \in \mathbf{C}^k(T \times T)$;

2) *система* (4) *имеет индекс* 1;

3) $\operatorname{rank} A(\alpha) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A(\alpha) & f(\alpha) - B(\alpha)a \end{pmatrix}$, *где* $x(\alpha) = a$.

Тогда для разностной схемы

$$A_{i+k}\frac{\alpha_0 x_{k+i} + \alpha_1 x_{k+i-1} + \ldots + \alpha_k x_i}{h} + B_{k+i}x_{k+i} + h\sum_{j=0}^{k+i-1}\gamma_j K(t_{k+i-1},t_j)x_j = f_{k+i}$$

справедлива оценка $\|x(t_i) - x_i\|_{\mathbf{I}} \le Ch^k$, $C = \text{const}$, $i = \overline{0, N}$, *где* $k \le 6$, α_j *— коэффициенты формулы дифференцирования назад*[8], γ_j *— весовые коэффициенты в формуле Ньютона–Котеса.*

Численный расчет идет по следующей схеме:

$$x_{i+k} = (\alpha_0 A_{i+k} + hB_{i+k})^{-1}\left(-A_{i+k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_{i+k-j} - h^2\sum_{j=0}^{i}\gamma_j K(t_{i+k-1},t_j)x_j + hf_{i+k}\right), \tag{12}$$

где $A_{i+k} = A(t_{i+k})$. При $k = 1$ имеем $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = -1,\ \gamma_j = 1$, а при $k = 2$ $\alpha_0 = 3/2,\ \alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 1/2,\ \gamma_j = 1/2$.

В ряде случаев на практике (при расчете ЭЦ с регуляторами) приходится решать квазилинейные системы вида

$$A(t)\dot{x} + \tilde{B}(t,x)x + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f, \quad t \in T, \tag{13}$$

где $\tilde{B}(t,x) = B(t) + \tilde{K}\int\limits_0^t \Phi(x(\tau))d\tau$, $\tilde{K}$, Φ — некоторые матрицы подходящей размерности. Если пучок матриц $\lambda A(t) + \tilde{B}(t,x)$ удовлетворяет критерию «ранг-степень» для всех $t \in T$, $x \in \mathbf{R}^n$, тогда решение системы (13) можно производить по формуле (12), где $k = 1$, $B_{i+1} = B(t_{i+1}) + h\tilde{K}\sum\limits_{j=0}^{i}\Phi(x_j)$. В этом случае локально справедливы теоремы 3 и 6.

Глава 3 посвящена описанию и исследованию математической модели ГЦ и ЭЦ с автоматическими регуляторами на основе вырожденных систем ИДУ.

[8]Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. М., 1962. Т. 1. 464 с.

В п. 3.1 описаны общие принципы для моделирования и расчета ГЦ на основе нелинейных вырожденных систем ИДУ. Используя результаты О.А. Балышева[1] и А.П. Меренкова[3] модель ГЦ может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} R(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot X(t) \\ \dot P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0 & -\mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_1^\top & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ P(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1\left|X(t)\right|X(t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H(t) + \mathcal{A}_2 P^*(t) \\ Q_1(t) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $X(t) = (x_1(t) \;\; x_2(t) \;\; \ldots \;\; x_n(t))^\top$ — вектор-функция расходов среды (газа, смеси газа и жидкости, жидкости) на ветвях ГЦ; $|X(t)|X(t) = \operatorname{diag}\{x_1(t)|x_1(t)|, x_2(t)|x_2(t)|, \ldots, x_n(t)|x_n(t)|\}$; $P(t) = (p_1(t) \;\; p_2(t) \;\; \ldots \;\; p_{m_1}(t))^\top$ — вектор-функция неизвестных давлений в узлах ГЦ; $P^*(t) = (p_{m_1+1}(t) \;\; p_{m_1+2}(t) \;\; \ldots \;\; p_{m_1+m_2}(t))^\top$ — вектор-функция известных давлений, $m_1 + m_2 = m$; $Y(t) = (y_1(t) \;\; y_2(t) \;\; \ldots \;\; y_n(t))^\top$ — вектор-функция перепадов давлений на ветвях ГЦ, где $y_i(t) = p_{ij} - p_{i\nu}$ — разность потенциалов, перепад давлений на i-й ветви ГЦ, j и ν — входной и выходной узлы ветви i ($i = \overline{1, n}$, j, $\nu = \overline{1, m}$); $H(t) = (h_1(t) \; h_2(t) \; \ldots \; h_n(t))^\top$ — вектор-функция напоров на ветвях ГЦ; $Q_1(t)$ — вектор-функция притоков или стоков в узлах с неизвестными давлениями; $R = \operatorname{diag}\{r_0(t), r_1(t), \ldots, r_n(t)\}$ — параметры инерции, зависящие от геометрических характеристик участка цепи $r_i(t) > 0$; $\mathcal{A}$ — $(n \times m)$-матрица соединений ветвей и узлов; $\mathcal{A}_1 P + \mathcal{A}_2 P^* = Y$, $(\mathcal{A}_1 \;\; \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}$, т.е. матрица $\mathcal{A}_1$ получена из $\mathcal{A}$ отбрасыванием последних m_2 столбцов, причем матрица $\mathcal{A}_1$ имеет полный ранг; $S_0 = \operatorname{diag}\{s_{0,1}, \ldots, s_{0,n}\}$, $S_1 = \operatorname{diag}\{s_{1,1}, \ldots, s_{1,n}\}$ — диагональные матрицы гидравлических сопротивлений участков, соответствующие ламинарным и турбулентным течениям, $s_{0,i} > 0$, $s_{1,i} > 0$.

На некоторых ветвях могут присутствовать автоматические регуляторы и уравнение i-й ветви с регулятором автор записывает в виде соотношения:

$$y_i(t) + h_i(t) = r_i(t)\dot x_i(t) + s_{0,i}x_i(t) + \left[s_{1,i} + k_i \int\limits_0^t (\psi_i(x_i(\tau)) - \theta_i)d\tau \right] x_i(t)\left|x_i(t)\right|,$$

где k_i — коэффициент пропорциональности ($k_i \geq 0$), θ_i — задание регулятора ($\theta_i \geq 0$), $\psi(\cdot)$ — функция регулятора.

Итак, систему (14) при наличии автоматических регуляторов можно представить в виде вырожденной системы интегро-дифференциальных уравнений

$$W(z) := \mathcal{S}(t)\dot z + \Gamma(z, \mathcal{V}z, t) = 0, \qquad t \in T = [\alpha, \beta] \subset [0, \infty), \tag{15}$$

где $z = (X^\top \ P^\top)^\top$, $\mathcal{V}z = \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,\tau,z(\tau))d\tau$ — оператор Вольтерра, $\mathcal{S}(t) = \mathrm{diag}(R(t),0)$.

В пп. 3.1.3 и 3.1.4 представлено описание математической модели ГЦ части дубль-блока связки «Прямоточный котел типа ПК-24 и турбины К-160-130» в виде нелинейных вырожденных систем ИДУ. На рис. 1 представлена схема гидравлической цепи связки «Прямоточный котел – турбина». Эта схема содержит 19 узлов и 22 ветвей, и получена система (15) с размерностью 41 на 41. При этом законы падения давлений на ветвях заданы соотношениями, учитывающими состояние среды (вода, пар, пароводяная смесь) и технические устройства (ступени турбины, регулирующие клапаны)[9].

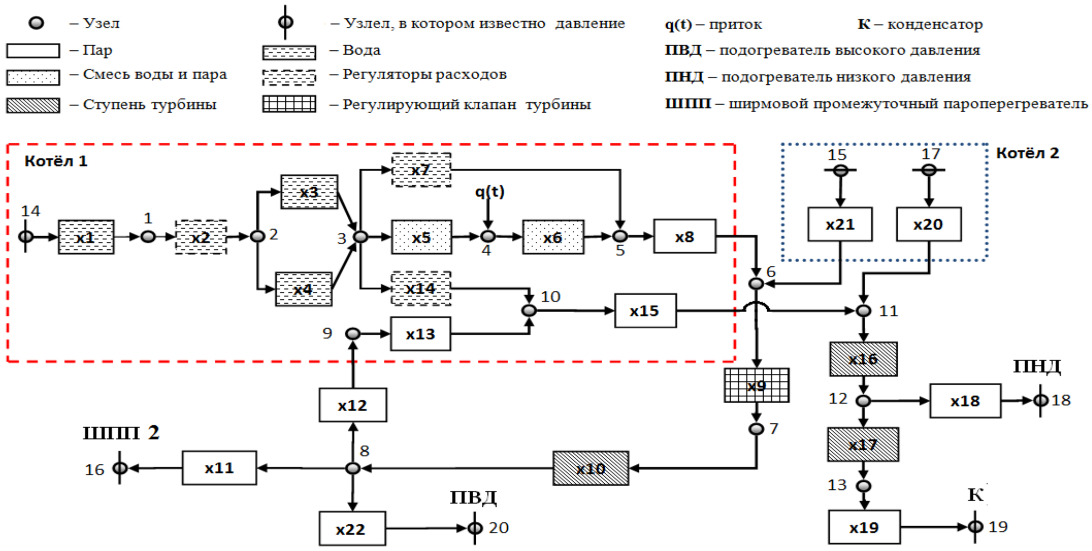

Рис. 1. Схема гидравлической цепи
связки «Прямоточный котел – турбина»

В п. 3.2 выписаны математические модели ЭЦ на основе линейных вырожденных систем ИДУ. Согласно Е.И. Ушакову[2] и Е.В. Чистяковой[10] модель ЭЦ может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}L_B \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}R_B \\ \mathcal{A} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \mathcal{B}\tilde{C}_B \\ 0 \end{pmatrix} \int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} -u_C(t_0) - e_B \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где u_B, i_B, e_B — обозначения соответственно для напряжений и токов ветвей и напряжений действующих в них источников; $x = i_B$ — токи ветвей; $R_B, \tilde{C}_B$ — диагональные матрицы активных сопротивлений и величин, обратных емкости ветви,

[9]Левин А.А., Таиров Э.А., Чистяков В.Ф. Расчет потокораспределения в энергоустановках как гидравлических цепях с регулируемыми параметрами // Трубопроводные системы энергетики: математическое моделирование и оптимизация. Новосибирск: Наука, 2010. С. 115–124.

[10]Чистякова Е.В. Методы исследования и решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений и их приложения: дис... канд. физ-мат. наук: 05.13.18. Иркутск, 2006.

соответственно; L_B — матрица индуктивностей, которая может быть вырожденной. Все элементы матриц L_B, R_B, $\tilde{C}_B$ положительные. Матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ получаются из первого и второго законов Кирхгофа, причем матрица $\mathcal{A}$ *имеет неполный ранг*.

Система (16) в общем случае является переопределенной. Для решения такой системы в других работах вычеркиваются в матрице $\mathcal{A}$ линейно-зависимые строки. Тогда система (16) становится замкнутой. В диссертации была решена переопределенная система (16) методом наименьших квадратов.

В монографии Е.И. Ушакова[2] описано явление, которое в нашем случае будет интерпретироваться следующим образом: при неудачном выборе контуров система (16) имеет индекс выше 1. Это означает, что малым возмущениям входных данных могут соответствовать большие возмущения решений. Поэтому предлагается при формировании системы уравнений использовать построение системы по аналогии с системами гидравлических цепей:

$$\begin{pmatrix} \bar{L}_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_B & -\mathcal{A}_1^\top \\ \mathcal{A}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \tilde{C}_B \int_{t_0}^{t} x(\tau) d\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2^\top \varphi^*(t) - u_C(t_0) - e_B \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $\varphi^*(t)$ — вектор-функция известных потенциалов, $\varphi(t)$ — вектор-функция неизвестных потенциалов в узлах цепи; $\bar{L}_B$ — диагональная матрица индуктивностей; $(\mathcal{A}_1^\top \ \mathcal{A}_2^\top) = \mathcal{A}^\top$, причем матрица $\mathcal{A}_1$ имеет полный ранг.

Помимо исходной модели рассматриваются электрические цепи с регуляторами

$$\tilde{R_B} = R_B + k \int_0^t (|i_B(\tau)| - |\theta(\tau)|) d\tau,$$

где $\theta(t)$ — задания регуляторов токов на ветвях.

Исследованы системы с учетом возможных изменений сопротивления, индуктивности, емкости при зависимости от температуры в разное время суток.

$$\bar{j}(t) = j(t) + \epsilon(t), \qquad \bar{R}_\kappa = R_\kappa(t) + \epsilon_{R_\kappa}(t),$$

$$\bar{L}_\kappa = L_j(t) + \epsilon_{L_\kappa}(t), \qquad \bar{C}_\kappa = C_\kappa(t) + \epsilon_{C_\kappa}(t),$$

где $\kappa = 1{,}2\ldots;$ $\quad \epsilon$ – обозначение малого возмущения.

В п. 3.2.3 проведено исследование примера модели двухконтурной электрической цепи, которая описывается системой (18), и является аналогом двухконтурной ГЦ[1].

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & L_3 & 0 & L_5 \\ 0 & L_2 & L_3 & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 \\ 0 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 & \frac{1}{C_5} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} i_1(\tau) \\ i_2(\tau) \\ i_3(\tau) \\ i_4(\tau) \\ i_5(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j(t) \\ 0 \\ -j(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Исследован также аналог этой системой, записанный в форме (17).

В пп. 3.3.1 и 3.3.2 проведено исследование разрешимости систем ИДУ, описывающих ГЦ и ЭЦ, и доказаны следуюшие утверждения.

Лемма 1. *Если в системе* (14) *элементы матрицы* S_1 *не зависят от компонент вектор-функции* $P(t)$*, то система имеет индекс* 2.

Лемма 2. *Пусть в системе* (14) $H(t) \equiv 0$, $P^*(t) \equiv 0$, $Q_1(t) \equiv 0$, $t \in I_t$, *регуляторы отсутствуют. Тогда множество* $\mathcal{M}$ *из определения 3 существует для всех* t_0 *и через любую точку* (X_0,P_0,t_0) *, где* $(X_0,P_0) \in \mathcal{M}$*, проходит единственное решение системы* (14)*, и система* (14) *обладает свойством конвергенции.*

Лемма 3. *Индекс системы* (16) *зависит только от индуктивностей цепи* L_j, $j = 1,2,\ldots$ *Если индекс системы* (16) *равен* 1*, то он не меняется при произвольных изменениях матриц* $\tilde{C}_B$, R_B*, и при малых возмущениях элементы матрицы* L_B *не меняют индекс системы.*

Лемма 4. *Система* (17) *имеет индекс* 2 *при любых* $\bar{L}_B$ *с положительными элементами.*

В **главе 4** приведено детальное описание программных комплексов для реализации моделей ГЦ и ЭЦ. Проведено исследование и получены результаты расчетов для моделей ГЦ связки прямоточного котла – турбины и двухконтурной электрической цепи.

Используется метод, излагаемый в теореме (6) для решения модели ГЦ связки прямоточного котла и турбины, получены графики изменений расходов и давлений с заданными значениями регуляторов и заданной функцией изменения плотности среды на участках кипения (см. рис. 2). В гидравлической цепи, изображенной на рис. 1, приток $q(t)$ используется для моделирования изменения плотности среды (пароводяной смеси) на кипящем участке. При численных экспериментах приток вводился в определенный отрезок времени от 200-й до 250-й секунды в виде параболической функции для проверки вида отклика на данное возмущение. В результате работы программы расходы на ветвях достигают заданных значений реальных котла и турбины, и отклик на функцию притока качественно соответствует экспериментальным наблюдениям.

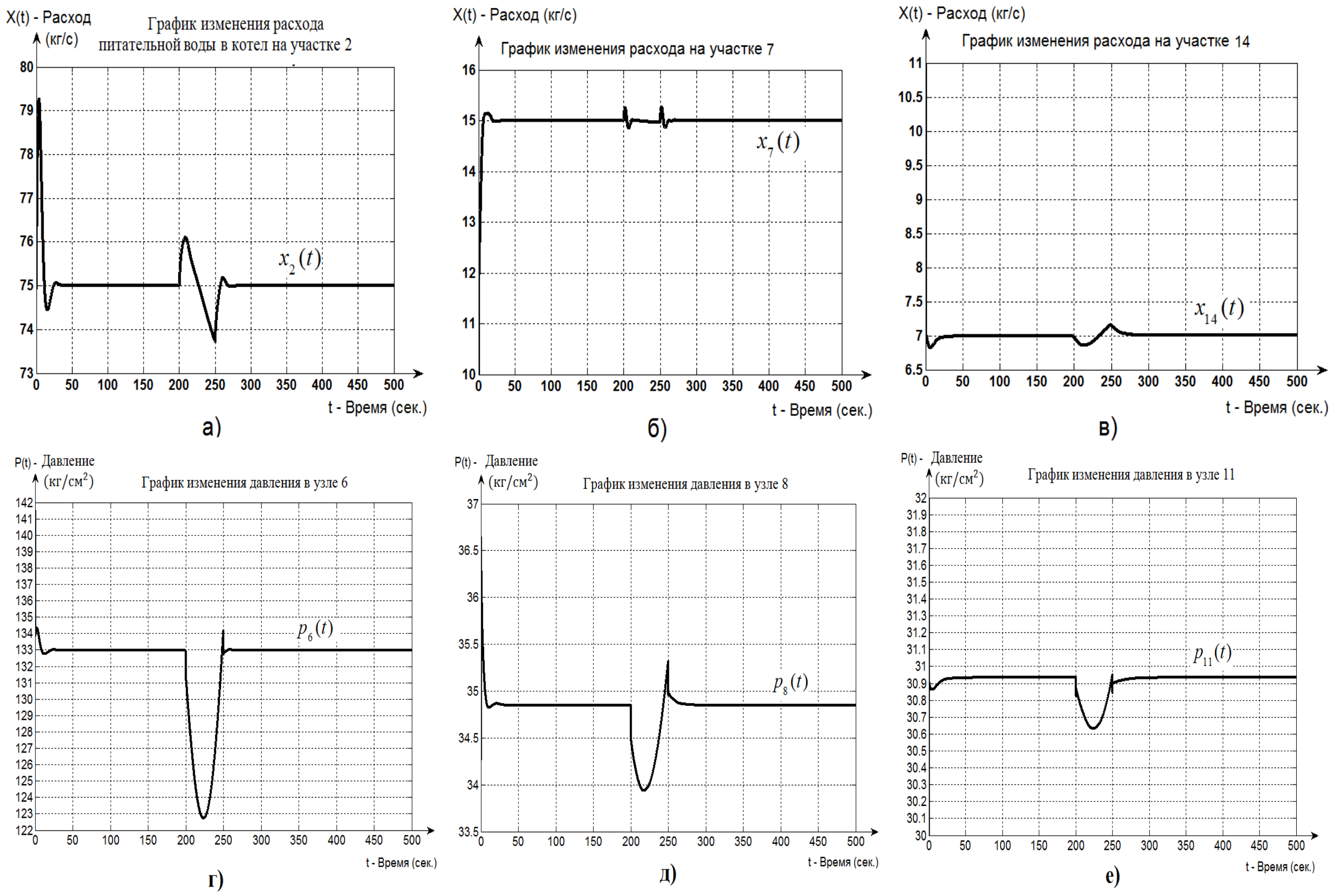

Рис. 2. Графики изменений расходов и давлений ГЦ

Для модели двухконтурной ЭЦ, используются метод наименьших квадратов и метод, излагаемый в теореме (7) для решения системы (18) и (17), соответственно, при влиянии возмущений. Малое возмущение задано таким образом: $\epsilon(t) = \delta \sin\left(\frac{t}{\delta^2}\right)$, $\delta = 0.001$. Получены графики изменений токов в случаях: при наличии внешнего источника $j(t) = 5\sqrt{2}\sin(100\pi t)$, процесс принимает синусоидальные колебания с периодом 0.02 секунды (рис. 3 а); при отсутствии внешнего источника $j(t) = 0$, процесс принимает затухающие колебания (рис. 3 б); при явлении резонанса в контуре цепи, токи i_1, i_5 достигают максимального значения (рис. 3 в). Явление резонанса иногда отрицательно влияет на работу элементов, поэтому для того, чтобы элементы в ЭЦ работали в нормальном режиме, использовались регуляторы (реостаты) на двух ветвях цепи для регулирования токов. Функции регуляторов заданы следующим образом: $\theta_1 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t)$; $\theta_2 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t)$; коэффициенты регуляторов выбирались равными 1. В результате токи на этих ветвях достигают значения амплитуды $2\sqrt{2}$ ампер, как показано на рис. 3 д.

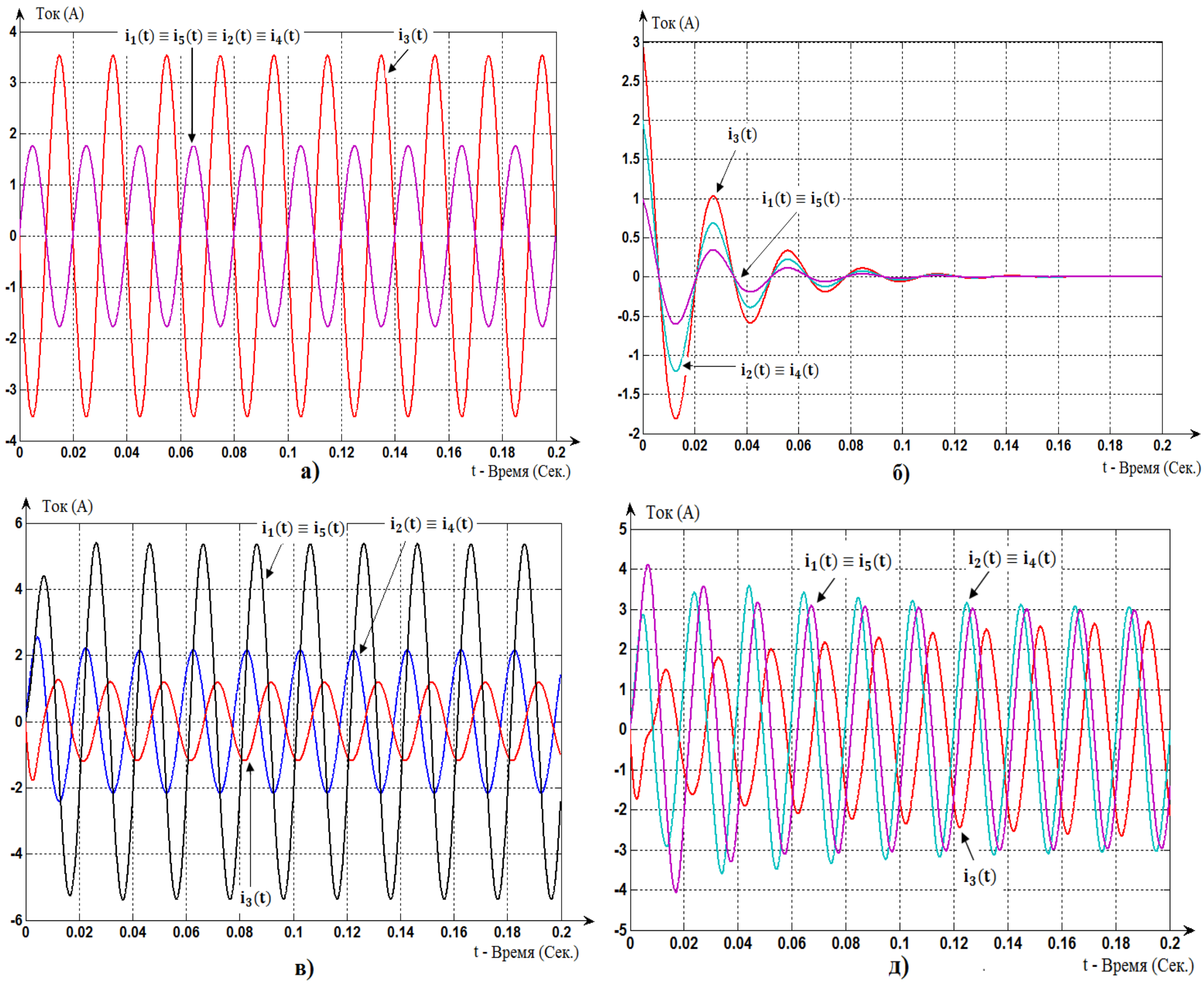

Рис. 3. Графики изменений токов в ветвях двухконтурной ЭЦ.

В **заключении** сформулированы основные выводы по проведенному диссертационному исследованию.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Исследована разрешимость вырожденных систем ИДУ (выделены классы ИДУ, для которых доказаны теоремы существования и единственности решений начальных и краевых задач);

2. В рамках теорем существования обоснованы разностные схемы и метод наименьших квадратов, разработаны алгоритмы и соответствующие программы для решения вырожденных систем ИДУ;
3. Разработаны новые модели ГЦ, ЭЦ с автоматическими регуляторами в виде вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений;
4. Исследованы разрешимости моделей ГЦ, ЭЦ на основе теории вырожденных систем ИДУ;
5. Созданы комплексы программ, реализующих модель ГЦ, ЭЦ.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи, опубликованные в изданиях по списку ВАК и SCOPUS:

1. Нгуен Дык Банг. О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений / Н.Д. Банг, В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — Т. 11. — С. 13–28.
2. Нгуен Дык Банг. О решении краевых задач для вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов / Б.Д. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Вестник ЮурГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2015. — Т. 8, № 2. — С. 81–94.
3. Nguyen Duc Bang. Investigation of the unsteady-state hydraulic networks by means of singular systems of integral differential equations / Nguyen Duc Bang, E.V. Chystiakova // Вестник ЮУрГУ ММП. — 2016. — Т. 9, № 1. — С. 69–83.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

4. Программа автоматизированного решения краевой задачи для вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов: Свительство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014615157 от 20 мая 2014 г. / Нгуен Дык Банг, В.Ф. Чистяков. — М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2014.
5. Программа решения интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) модели нестационарной гидравлической цепи на основе теории вырожденных систем ИДУ: Свительство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015660014 от 21 сентября 2015 г. / Нгуен Дык Банг, В.Ф. Чистяков. — М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, 2015.

Публикации в других изданиях:

6. Нгуен Дык Банг. О квазистационарных моделях гидравлических цепей / Нгуен Дык Банг, В.Ф. Чистяков // Тез. конф. «Винеровские чтения». — Иркутск: ИрГТУ, 2013. — С. 46.
7. Нгуен Дык Банг. О моделях нестационарных гидравлических цепей с ветвями в различных фазовых состояниях / Н.Д. Банг, В.Ф. Чистяков // Тез. конф. «Ляпуновские чтения». — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. — С. 7.
8. Нгуен Дык Банг. Метод наименьших квадратов решения краевых задач для вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений / Нгуен Дык Банг, В.Ф. Чистяков // Тез. конф. «Винеровские чтения». — Иркутск: ИрГТУ, 2014. — С. 46.
9. Нгуен Дык Банг. Решение начальной задачи для систем вырожденных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов / Н.Д. Банг, В.Ф. Чистяков // Тез. IV Междунар. школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». — Иркутск, 2014. — С. 41.
10. Нгуен Дык Банг. Об одном методе решения краевых задач для систем вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / Н.Д. Банг, В.Ф. Чистяков // Тез. XV Всерос. конф. молодых ученых по мат. моделированию и информ. технологиям. — Тюмень, 2014. — С. 43.
11. Нгуен Дык Банг. О решении краевых задач для вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений методом наименьших квадратов / Н.Д. Банг, В.Ф. Чистяков // Материалы XIX Байкальской всерос. конф. «Информационные и математические технологии в науке и управлении». — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. — Ч. 2. — С. 7–11.
12. Нгуен Дык Банг. Модель гидравлического тракта энергетической установки на основе теории вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений / Н.Д. Банг, Е.В. Чистякова // Тез. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование». — Улан-Удэ, 2015. — С. 204–205.