

На правах рукописи



Шишкина Ольга Андреевна

**МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ И МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ
ЭЙЛЕРА – МАКЛОРЕНА**

**01.01.01 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ**

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Красноярск 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент **Лейнартас Евгений Константинович**

Официальные оппоненты:

Тетенев Андрей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Горно-Алтайский государственный университет», кафедра математики и методики преподавания математики, профессор;

Яковлев Евгений Иосифович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева», кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» СО РАН, г. Новосибирск.

Защита состоится «22» декабря 2017 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» <http://www.sfu-kras.ru>.

Автореферат разослан «___» ноября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шлапунов
Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Исследование функций при дискретном изменении аргумента велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей выделилось только в 18 веке. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, и роль дифференциалов играют конечные разности функции. Вычисление конечных разностей аналогично дифференцированию, а интегрированию здесь соответствует суммирование разностей, роль дифференциальных уравнений играют конечно-разностные уравнения.

Начала исчисления конечных разностей содержатся в трудах П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбница. Развивалась конечно-разностная теория параллельно с основными разделами математического анализа. В 18 веке теория конечных разностей приобрела характер самостоятельной математической дисциплины, изложение начал которой принадлежит Б. Тейлору (1717 г.), но подлинным основателем следует все же считать Д. Стирлинга (1730 г.). Первое систематическое исследование по теории конечных разностей было написано Л. Эйлером в 1755 году, в нем впервые использовалось обозначение Δ для разностного оператора.

Сумму степеней последовательных натуральных чисел вычислил еще Я. Бернулли¹, его исследования дали толчок к возникновению целого ряда разделов комбинаторного анализа. В своей работе "Искусство предположений", изданной в 1713 году, Я. Бернулли привел общее выражение для нахождения этой суммы. Кроме того, он вывел рекуррентное правило, позволяющее вычислять числа Бернулли.

Леонард Эйлер применил числа Бернулли в теории конечных разностей и исследовал их свойства. Некоторые из этих результатов он изложил в своем сочинении "Дифференциальное исчисление", вышедшем в свет в 1755 г. В "Дифференциальном исчислении" им предложено шесть способов нахождения чисел Бернулли.

Числа Бернулли являются значениями в нуле многочленов Бернулли, которые для натуральных значений аргумента рассматривал Бернулли, а для произвольных изучал Эйлер, использовавший для этого в 1738 году производящую функцию.

Также полиномы Бернулли изучал J. L. Raabe² (1801-1859), он нашел для них две важные формулы и ввел термин многочлены Бернулли (1851). Полиномы Бернулли и Эйлера позднее изучал Nörlund³.

Числа и многочлены Бернулли хорошо изучены, они нашли широкое

¹Bernoulli J. Ars Conjectandi / Jacob Bernoulli. — Basel, 1713.

²Raabe J. - L. Die Jacob Bernoullische Funktion / J.-L. Raabe — Zürich, 1848.

³Nörlund N.E. Differenzenrechnung/ N.E. Nörlund — Berlin, 1924.

применение в различных областях теоретической и прикладной математики^{4, 5, 6}. Числа Бернулли используются в комбинаторном^{7, 8, 9,10,11,12,13,14} и численном анализе¹⁵.

Gould¹⁶ заметил, что для многих сумм, содержащих биномиальные коэффициенты, использование чисел Бернулли дает существенное улучшение формул. Различным обобщениям чисел и многочленов Бернулли посвящено большое количество работ^{17, 18, 19, 20, 21, 22} из различных областей математики. В частности, Темме²³ ввел обобщенные многочлены Бернулли, у которых степени комплекснозначные.

Одной из основных задач в исчислении конечных разностей является задача суммирования. В общем случае задачу суммирования функций одного аргумента решает известная формула Эйлера – Маклорена, позволяющая выражать дискретные суммы значений функции через производные и интеграл от этой функции. Эйлер получил свою формулу при вычислении медленно

⁴Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М.: КомКнига, 2006. — 376 с.

⁵Ландо С. К. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.

⁶Устинов А. В Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера / А. В. Устинов // Матем. заметки. — 2002. V. 71. — №6. — Р. 931–936.

⁷Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete mathematics / R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. — A foundation for computer science. Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994. xiv+657 pp.

⁸Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. — М.: Наука, 1982. — 255 с.

⁹Rota G. - C. The classical umbral calculus / G.-C. Rota, B.D. Taylor // SIAM J. Math. Anal. — 1994. — V. 25. — №2. — Р. 694–711.

¹⁰Данилов О. А. Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора / О. А. Данилов, А. Д. Медных // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. — Т. 9, вып. 2. — С. 38–46.

¹¹Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев — Новосибирск: Наука, 1977. — 288 с.

¹²Егорычев Г. П. Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$ / Г. П. Егорычев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. — Т. 3 — №4. — С. 39–44.

¹³Медных А. Д. Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора / А. Д. Медных // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Сб. науч. тр. — Наук. думка, Киев. — 1982. — С. 137–144.

¹⁴Zeilberger D. A New Basis for Discrete Analytic Polynomials / D. Zeilberger // J. Austral. Math. Soc. — 1977. — V. 23. — Р. 95–104.

¹⁵Fröberg C.-E. Lärbok i numerisk analys / C.-E. Fröberg — Stockholm, 1962.

¹⁶Gould H. W. Combinatorial identities / H.W.Gould. — Morgantown printing and binding co., Morgantown WV-USA, 1972.

¹⁷Ernst T. q-Bernoulli and q-Euler polynomials, an umbral approach / T. Ernst // International Journal of Difference Equations. — 2006. — V. 1 — №1. — Р. 31–80.

¹⁸Ernst T. The history of q-calculus and a new method / T. Ernst. — Uppsala, 2000.

¹⁹Carlitz L. Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials / L. Carlitz // Duke Math. J. — 1959. — V. 26. — Р. 694–711.

²⁰Lehmer D. H. Lacunary recurrence formulas for the numbers of Bernoulli and Euler / D.H. Lehmer // Ann. of Math. — 1935. — V. 36(2). — №3. P. 637–649.

²¹Srivastava H. M. Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials / H.M. Srivastava, A. Pintér // Appl. Math. Lett. — 2004. — V. 17. — №4. — Р. 375–380.

²²Vandiver H. S. Simple explicit expressions for generalized Bernoulli numbers of the first order / H. S. Vandiver // Duke Math. J. — 1941. — V. 8. — Р. 575–584.

²³Temme N. M. Bernoulli polynomials old and new: Generalization and asymptotics / N. M. Temme // CWI Quarterly. — 1995. — V. 1. — Р. 47–66.

сходящегося ряда, а Маклорен использовал ее для вычисления интегралов. Их вывод формул был не строгим, первое серьезное исследование остаточного члена предпринял Пуассон (1823), а первое строгое доказательство формулы²⁴ дал Якоби (1834). В частности, многие асимптотические разложения функций получаются именно через эту формулу. Известны различные методы доказательства формулы Эйлера – Маклорена: средствами вещественного анализа, опирающегося на свойства многочленов Бернулли, и средствами комплексного анализа (Пуассон). В диссертационной работе рассматривается подход Эйлера, при котором задача суммирования сводится к решению разностного уравнения и использованию дифференциальных операторов бесконечного порядка.

В последнее время всплеск интереса к задачам суммирования связан с разработкой символьных алгоритмов суммирования рациональных функций в статьях С. А. Абрамова²⁵ и С. П. Полякова²⁶, которые использовали для этих задач название "неопределенное суммирование". Отметим, что в некоторых случаях для суммирования рациональной функции вместо простейшего разностного уравнения целесообразно использовать уравнение более общего вида.

Проблема суммирования функций нескольких дискретных аргументов менее исследована. Можно отметить работу²⁷, в которой доказанная теорема Римана – Роха может быть интерпретирована как многомерное обобщение формулы Эйлера – Маклорена для квазиполиномов. Функцию нескольких дискретных аргументов представляется естественным суммировать по целым точкам рациональных многогранников. Например, в работах^{28, 29, 30} в связи с задачей о числе целых точек в выпуклом многограннике рассматривалась задача неопределенного суммирования многочленов нескольких переменных, и получены аналоги формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной таких многочленов.

Цель диссертационной работы — исследовать задачу неопределенного суммирования функций нескольких дискретных аргументов. В частности, определить многомерные аналоги чисел Бернулли и многочленов Бернулли и

²⁴Hardy G. Divergent series / G. Hardy. — Oxford University Press. London, 1949.

²⁵Abramov S.A. On the summation of rational functions / S. A. Abramov // USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1971. — V. 11. — №4. — P. 324–330.

²⁶Polyakov S. P. Indefinite summation of rational functions with factorization of denominators / S. P. Polyakov // Programming and Computer Software. — 2011. — V. 37. — №6. — P. 322–325.

²⁷Pukhlikov A. V. The Riemann–Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes / A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii // St. Petersburg Mathematical Journal. — 1993. — V. 4. — №4. — P. 789–812.

²⁸Brion M. Lattice points in simple polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. — 1997. — V. 10. — №2. — P. 371–392.

²⁹Brion M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of AMS. — 1997. — V. 10. — №4. — P. 797–833.

³⁰Berline N. Local Euler–Maclaurin formula for polytopes / N. Berline, M. Vergne // Moscow Mathematical Society Journal. — 2007. — V. 7. — №3. — P. 355–386.

доказать их свойства, получить многомерный аналог формулы Бернулли для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа. Кроме того, для функций нескольких аргументов определить понятие дискретной первообразной и получить соответствующий аналог формулы Ньютона – Лейбница для решения задачи неопределенного суммирования. Далее, найти многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для отыскания дискретной первообразной и формулу для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа с переменной вершиной.

Методы исследования

В работе использованы методы многомерного комплексного анализа, теории многомерных разностных уравнений и производящих функций, а также теории дифференциальных операторов бесконечного порядка.

Достоверность результатов

Основные результаты строго доказаны, опубликованы в рецензируемых журналах и докладывались на научных семинарах и конференциях.

Теоретическая и практическая ценность

Все основные результаты являются новыми. Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в теории многомерных разностных уравнений и производящих функций, в комбинаторном перечислительном анализе.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор 14.Y26.31.0006) и в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

- 1) Красноярском городском семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2014–2017 гг.);
- 2) The 21st International Conference on Difference Equations and Applications (Poland, Białystok, 19–25 July 2015);
- 3) International workshop on multidimensional complex analysis and differential equations (Krasnoyarsk, 20–23 October 2014);
- 4) международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2015», посвященной 70-летию Великой Победы (Красноярск, 15–25 апреля 2015 г.);
- 5) международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2016», посвященной Году

образования и Содружества Независимых Государств (Красноярск, 15–25 апреля 2016 г.);

6) международной конференции по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре (Коряжма, 3–9 августа 2016);

7) Barcelona Analysis Conference 2016 (Spain, Barcelona, 5–9 September 2016);

8) VI Российско-Армянском совещании по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (Ростов-на-Дону, 11–16 сентября 2016);

9) The 23rd International Conference on Difference Equations and Applications (Romania, Timisoara, 24–28 July 2017).

Публикации и личный вклад

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях без соавторов ([1], [2], [3], [4]), 2 материалах конференций ([6], [7]) и 4 тезисах ([5], [8], [9], [10]). Все статьи опубликованы ведущих рецензируемых изданиях, входящих в Перечень периодических научных изданий, рекомендованных ВАК Министерством образования и науки Российской Федерации.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав основного содержания, заключения. Список цитированной литературы состоит из 60 наименований, а список работ автора по теме диссертации — из 10 наименований. Вся диссертация состоит из 80 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** диссертационной работы рассматривается вариант обобщения чисел и многочленов Бернулли на случай нескольких переменных, а именно, определяются числа Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, и соответствующие им многочлены Бернулли. Получено представление многочленов Бернулли через оператор Тодда, доказаны основные свойства многочленов Бернулли и формулы умножения, сложения, дополнения и дифференцирования. Найдена формула для суммы значений мономов по целым точкам рационального параллелотопа.

Приведем наиболее важные результаты о классических числах и многочленах Бернулли.

Числа Бернулли b_μ — это коэффициенты разложения функции $T(\xi) = \frac{\xi}{e^\xi - 1}$ в степенной ряд:

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} b_\mu \frac{\xi^\mu}{\mu!}.$$

Многочлены Бернулли можно определить следующим образом:

$$B_{\mu}(x) = \sum_{k=0}^{\mu} C_{\mu}^k b_{\mu-k} x^k,$$

где $C_{\mu}^k = \frac{\mu!}{k!(\mu-k)!}$, $b_{\mu} = B_{\mu}(0)$ — числа Бернулли.

При выводе формулы суммирования Эйлер использовал соотношение вида $\frac{D}{e^D-1} = \sum_{\mu \geq 0} b_{\mu} \frac{D^{\mu}}{\mu!}$, где D — оператор дифференцирования. Правую часть этого соотношения сейчас называют оператором Тодда и обозначают $Td(D)$. Он устанавливает связь между решением разностного уравнения $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$ и дифференциального $Df(x) = Td(D) \varphi(x)$. Многочлены Бернулли можно представить как действие оператора Тодда на моном x^{μ} : $B_{\mu}(x) = \frac{D}{e^D-1} x^{\mu}$.

Основное свойство многочленов Бернулли состоит в том, что они удовлетворяют разностному уравнению

$$B_{\mu}(x+1) - B_{\mu}(x) = \mu x^{\mu-1} \equiv (x^{\mu})', \quad (1)$$

и поэтому многочлены Бернулли играют в исчислении конечных разностей ту же роль, что и степенные функции в дифференциальном исчислении.

Из равенства (1) сразу получается формула Бернулли для суммы степеней последовательных натуральных чисел:

$$\sum_{t=0}^x t^{\mu} = \frac{1}{\mu+1} [B_{\mu+1}(x+1) - B_{\mu+1}(0)],$$

а интегрируя (1) по отрезку $[0, x]$ можно получить другое выражения для искомой суммы

$$\sum_{t=0}^x t^{\mu} = \int_0^{x+1} B_{\mu}(t) dt, \quad (2)$$

в которой она выражается через интеграл от многочлена Бернулли.

Для многочленов Бернулли справедливы следующие свойства: формула сложения аргументов

$$B_{\mu}(x+y) = \sum_{k=0}^{\mu} C_{\mu}^k B_k(x) y^{\mu-k}; \quad (3)$$

формула дифференцирования

$$B'_{\mu}(x) = \mu B_{\mu-1}(x); \quad (4)$$

формула дополнения

$$B_\mu(x) = (-1)^\mu B_\mu(1-x); \quad (5)$$

формула умножения аргумента

$$B_\mu(mx) = m^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\mu-1} B_\mu\left(x + \frac{k}{m}\right). \quad (6)$$

Для определения чисел и многочленов Бернулли от нескольких переменных и формулировки аналогов свойств (3) – (6) нам потребуются следующие обозначения.

Пусть $a^1, \dots, a^n$ — линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — целые числа.

Рациональным конусом, построенным на векторах $a^1, \dots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}$.

Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие *единственным* образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим*, т. е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geq}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geq} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v . Кроме того, будем писать $u \not\underset{K}{\geq} v$, если $u \in K \setminus \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \underset{K}{\geq} v$ не выполняется. Любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ — вектора-столбцы, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Конус, построенный на таких векторах $a^1, \dots, a^n$, что определитель матрицы A , столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1, называется *унимодулярным конусом*.

В **параграфе 1.1** определяются числа Бернулли и многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, для функций нескольких переменных строится оператор Тодда $Td^A(\partial) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \partial \rangle}{e^{\langle a^j, \partial \rangle} - 1}$, ассоциированный с конусом K , и доказывается, что многочлены Бернулли есть результат действия оператора Тодда на мономы.

Коэффициенты b_μ^A ряда

$$T(\xi) = \prod_{j=1}^n \frac{\langle a^j, \xi \rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1} = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \xi^\mu,$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu! = \mu_1! \dots \mu_n!$, $\xi^\mu = \xi_1^{\mu_1} \dots \xi_n^{\mu_n}$, а $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, назовем числами Бернулли, ассоциированными с конусом K .

Для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ многочленом Бернулли, ассоциированным с конусом K , назовем многочлен вида

$$B_\mu^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{(\mu - k)!k!} b_{\mu-k}^A x^k,$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\mu - k = (\mu_1 - k_1, \dots, \mu_n - k_n)$, b_k^A — числа Бернулли.

Теорема 1. Если $Td^A(\partial)$ — оператор Тодда, а $B_\mu^A(x)$ — многочлены Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, то справедливо равенство

$$Td^A(\partial) x^\mu = B_\mu^A(x).$$

В параграфе 1.2 строится полиномиальный разностный оператор, действующий на функциях $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, вида $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$, где $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, δ_j — оператор сдвига, $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n)$, $\delta^{a^j} = \delta_1^{a_1^j} \dots \delta_n^{a_n^j}$. Кроме того вводятся операторы дифференцирования по направлению векторов a^j :

$$D_j = \langle a^j, \partial \rangle = \sum_{k=1}^n a_k^j \partial_k,$$

где ∂_j — операторы дифференцирования по j -ой переменной, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}$, $j = 1, \dots, n$, $D = D_1 \dots D_n$, и методами теории производящих функций (см., например, ^{31, 32}) доказывается многомерный аналог основного свойства (1), состоящего в том, что многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению.

Теорема 2. Многочлены Бернулли $B_\mu^A(x)$, ассоциированные с рациональным конусом K , удовлетворяют разностному уравнению вида

$$Q(\delta) B_\mu^A(x) = D x^\mu.$$

³¹Ландо С. К. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.

³²Стенли Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. — М.: Мир, 1990. — 440 с.

В параграфе 1.3 вычислен интеграл от многочленов Бернулли по параллелотопу, и для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа, построенного на образующих унимодулярного конуса, найден многомерный аналог формулы Бернулли (2), в котором сумма выражается через интеграл от многочлена Бернулли по параллелотопу с "переменной" вершиной.

Теорема 3. Пусть конус K — унимодулярный, и точка x лежит на подрешетке Λ решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, \dots, a^n$. Для суммы значений мономов t^μ в целых точках рационального параллелотопа $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq x\}$ справедлива формула:

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} t^\mu = \int_{\Pi_K(x+a)} B_\mu^A(\tau) d\tau,$$

где $a = a^1 + \dots + a^n$ — вершина фундаментального параллелотопа.

В параграфе 1.4 доказаны свойства сложения, умножения, дополнения и дифференцирования для многочленов Бернулли, ассоциированных с рациональным конусом.

Теорема 4. Справедливы следующие многомерные аналоги свойств (3) – (6) многочленов Бернулли:

1) формула сложения аргументов

$$B_\mu^A(x+y) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!} B_k^A(x) y^{\mu-k};$$

2) формула дифференцирования

$$DB_\mu^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu, \|k\|=n} \frac{\mu!}{k! (\mu-k)!} B_{\mu-k}^A(x) \frac{M_k}{k!},$$

где $\|k\| = k_1 + \dots + k_n$, M_k — коэффициенты однородного многочлена:

$$\prod_{j=1}^n \langle a^j, \xi \rangle = \sum_{\|k\|=n} M_k \frac{\xi^k}{k!};$$

3) формула дополнения

$$B_\mu^A(x) = (-1)^{\|\mu\|} B_\mu^A(a-x),$$

где $a = a^1 + \dots + a^n$, $\|\mu\| = \mu_1 + \dots + \mu_n$;

4) формула умножения аргумента

$$B_\mu^A(mx) = m^{\mu-I} \sum_{0 \leq k \leq \mu-I} B_\mu^A\left(x + \frac{1}{m} Ak\right),$$

где $I = (1, \dots, 1)$, $\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right)$ — вектор-строка, $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец.

Вторая глава посвящена суммированию функций нескольких дискретных аргументов. Прежде чем формулировать постановку задачи, приведем некоторые сведения о классической задаче суммирования функций одной переменной.

Задача суммирования функций одного аргумента состоит в отыскании для заданной функции $\varphi(t)$ суммы ее значений в целых неотрицательных точках отрезка $[0, x]$:

$$S(x) = \sum_{t=0}^x \varphi(t). \quad (7)$$

По аналогии с теорией интегрирования функций сумму в правой части равенства (7) можно назвать суммой с переменным "верхним пределом суммирования", а задачу отыскания суммы $S(x)$ — *задачей неопределенного суммирования*^{33,34}. Сумму (7) можно найти, зная решение $f(x)$ разностного уравнения

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x), \quad (8)$$

т.к. в этом случае $S(x) = f(x+1) - f(0)$, т.е. выражается через значения f в концах отрезка $[0, x+1]$.

Функцию $f(x)$ называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$, а формулу $S(x) = f(x+1) - f(0)$ — *дискретным аналогом формулы Ньютона – Лейбница*.

Эйлер нашел формулу, в которой производная решения $f(x)$ разностного уравнения (8) выражается через производные от функции $\varphi(t)$ и числа Бернулли:

$$f'(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu}}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(x). \quad (9)$$

После интегрирования равенства (9) по промежутку от 0 до $x+1$ получим формулу, которая решает задачу суммирования:

$$\sum_{t=0}^x \varphi(t) = \int_0^{x+1} \varphi(t) dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{b_{\mu}}{\mu!} \left[\varphi^{(\mu-1)}(x+1) - \varphi^{(\mu-1)}(0) \right]. \quad (10)$$

В диссертационной работе рассматривается задача отыскания суммы значений функций нескольких переменных $\varphi(t)$ по всем целым точкам

³³Abramov S.A. On the summation of rational functions / S.A. Abramov // USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1971. — V. 11. — №4. — P. 324–330.

³⁴Polyakov S. A. Indefinite summation of rational functions with factorization of denominators / S.A. Polyakov // Programming and Computer Software. — 2011. — V. 37. — №6. — P. 322–325.

$t = (t_1, \dots, t_n)$, принадлежащим рациональному параллелотопу с "переменной" вершиной x .

Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq x\}$, построенный на образующих рационального конуса. Рациональность означает, что вершины параллелотопа имеют целые координаты. Для заданной функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ *задача состоит в отыскании суммы* ее значений по всем целочисленным точкам параллелотопа $\Pi_K(x)$:

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t). \quad (11)$$

По аналогии со случаем одного переменного такую задачу также назовем *задачей неопределенного суммирования*.

В **параграфе 2.1** для случая унимодулярного рационального конуса реализован подход Эйлера к задаче суммирования, основанный на понятии дискретной первообразной функции. А именно, используя методы теории многомерных разностных уравнений, вводится понятие дискретной первообразной, и доказывается дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница.

Дискретной первообразной функции $\varphi(y)$, $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ называется всякое решение разностного уравнения $Q(\delta)f(y) = \varphi(y)$, $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$, где $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta^{a^j} - 1)$.

Для любой точки $y \in K$ обозначим $\pi_j y$ ее проекцию вдоль вектора a^j , т.е. для $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, где $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, положим $\pi_j y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_{j-1} a^{j-1} + \lambda_{j+1} a^{j+1} + \dots + \lambda_n a^n$.

Пусть V — множество всех 2^n упорядоченных наборов

$$J = (j_1, \dots, j_k) \subset \{1, \dots, n\},$$

включая и пустое множество. Если обозначить $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \dots \circ \pi_{j_k}$, то множество вершин параллелотопа $\Pi_K(x)$ можно записать в виде $vert(x) == \{\pi_J x, J \in V\}$. Отметим, что $\pi_\emptyset x = x$.

Теорема 5. Пусть K — унимодулярный рациональный конус, тогда для любой дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлив следующий дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница:

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + a)),$$

где $\#J$ означает число элементов множества J .

В **параграфе 2.2** получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для задачи суммирования целых функций экспоненциального типа по целым точкам рациональных параллелотопов. Получена формула для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа, построенного на образующих унимодулярного конуса. С помощью методов теории

дифференциальных операторов бесконечного порядка построен необходимый для многомерного аналога формулы Эйлера – Маклорена оператор. Тогда обоснована сходимость функционального ряда, который участвует в этой формуле.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $|z| = |z_1| + \dots + |z_n|$.

Для фиксированного $R > 0$ и произвольного $r < R$ обозначим через $Exp_R(\mathbb{C}^n)$ пространство целых функций экспоненциального типа $\varphi(z)$ таких, что для некоторого $M > 0$ и любого $r < R$ справедливо равенство

$$|\partial^\alpha \varphi(z)| \leq M r^{|\alpha|} e^{r|z|}$$

для всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и всех $z \in \mathbb{C}^n$. Здесь $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

В следующей теореме приведен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной функции $\varphi(z)$.

Теорема 6. Пусть $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$, тогда всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения

$$Df(z) = Td^A(\partial)\varphi(z), \quad (12)$$

является дискретной первообразной для функции $\varphi(z)$.

После интегрирования равенства (12) по параллелотопу $\Pi_K(x+a)$ с "переменной" вершиной $x+a$, где $a = a^1 + \dots + a^n$, получим формулу для суммы значений функций в целых точках рационального параллелотопа.

Теорема 7. Справедлива следующая формула

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \int_{\Pi_K(x+a)} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \partial^\mu \varphi(t) dt. \quad (13)$$

В параграфе 2.3 в отличие от 2.1 и 2.2 рассматривается случай, когда унимодулярность конуса не требуется. Доказан дискретный вариант формулы Ньютона – Лейбница для задачи суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа, и для функций экспоненциального типа получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для дискретной первообразной. Кроме того, решена задача суммирования функций по целым точкам рационального параллелотопа.

Нам потребуется следующее преобразование векторов $v = \xi_1 a^1 + \dots + \xi_n a^n$, заданных в базисе $a^1, \dots, a^n$ координатами $(\xi_1, \dots, \xi_n)$:

$$\chi_a(v) = \sum_k \chi(\xi_k) a^k,$$

где

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = 0; \\ 0, & \xi \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 8. Пусть точка $x \in \Lambda$ и $f(t)$ — дискретная первообразная функции $\varphi(t)$, тогда справедлив следующий дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница:

$$S(x) := \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \sum_{J \in V} (-1)^{\#J} f(v + \pi_J(x + \chi_a(v))),$$

где $\#J$ означает число элементов множества J .

После интегрирования равенства (12) по параллелотопу

$$\Pi_K^v(x) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : v \underset{K}{\leq} t \underset{K}{\leq} v + x + \chi_a(v) \right\}$$

получим следующую формулу для суммы (11).

Теорема 10. Справедлива формула вида

$$S(x) = \sum_{v \in \Pi_a \cap \mathbb{Z}^n} \int_{\Pi_K^v(x)} Td^A(\partial) \varphi(t) dt.$$

В параграфе 2.4 методы теории дифференциальных операторов бесконечного порядка использованы для определения дискретной первообразной и обобщения формулы Эйлера – Маклорена на случай суммирования по симплексу, т.е к задаче отыскания суммы вида

$$S(x) = \sum_{\|t\| \leq x} \varphi(t),$$

где $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\|t\| = t_1 + \dots + t_n$, и суммирование ведется по целым точкам n -мерного симплекса $\{t \in \mathbb{R}_+^n : \|t\| \leq x\}$. Этот случай оказался сложнее случая суммирования по параллелотопу и решить задачу удалось только для функций вида $\varphi(t) = \psi(\|t\|)$, где $\psi(\tau)$ — функция одного переменного, для которой сумма имеет вид

$$S(x) = \sum_{\|t\| \leq x} \psi(x - \|t\|). \quad (14)$$

В качестве дискретной первообразной рассматривается решение $f(x)$ разностного уравнения $(\delta - 1)^n f(x) = \psi(x)$, а аналогом оператора Тодда является оператор

$$A\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{\frac{d^n}{dx^n}}{\left(e^{\frac{d}{dx}} - 1\right)^n}.$$

Теорема 12. Если $\varphi(z) \in \text{Exp}_{2\pi}(\mathbb{C})$, то для суммы (14) справедлива формула

$$S(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{b_{\mu}(n)}{\mu!} P_{n-\mu} \varphi(x+n) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu+n}(n)^{\mu}}{(\mu+n)!} \varphi^{(\mu)}(x+n),$$

где $b_{\mu}(n) = \sum_{\|k\|=\mu} \frac{\|k\|!}{k!} b_{*k}$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k! = k_1! \dots k_n!$, $b_k^* = b_{k_1} \cdot \dots \cdot b_{k_n}$, а b_{k_j} — классические числа Бернулли, и $P_{n-\mu}$ — первообразная порядка $n - \mu$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Определены многомерные аналоги чисел Бернулли и многочленов Бернулли, найдено представление многочленов Бернулли через оператор Тодда, приведены многомерные варианты основного свойства многочленов Бернулли и формул умножения, сложения, дополнения и дифференцирования. Получен многомерный аналог формулы Бернулли для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа.

2. Введено понятие дискретной первообразной для функций нескольких переменных и получен дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница для решения задачи неопределенного суммирования функций нескольких аргументов.

3. Найдена формула Эйлера – Маклорена для нахождения дискретной первообразной и формула для суммы значений функции в целых точках рационального параллелотопа с переменной вершиной, а также аналогичные формулы в задаче суммирования функции по целым точкам симплекса.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Шишкина О. А. Формула Эйлера – Маклорена для рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2015. — Т. 13. — С. 56–71.
2. Shishkina O. A. The Euler – Maclaurin Formula and Differential Operator of Infinite Order / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. — 2015. V. 8(1). — P. 86–93.
3. Шишкина О. А. Многочлены Бернулли от нескольких переменных и суммирование мономов по целым точкам рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2016. — Т. 16. — С. 89–101.

4. Shishkina O. A. Multidimensional Analog of the Bernoulli polynomials and its Properties / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. — 2016. — V. 9(3). — P. 384–392.
5. Shishkina O. A. On the generalization of the Euler – Maclaurin formula / O. A. Shishkina // Abstracts of ICDEA 2015 (The 21st International Conference on Difference Equations and Applications, 19-25 July 2015, Białystok, Poland). P. 102-103.
6. Шишкина О. А. Формула Эйлера – Маклорена в задаче суммирования функции нескольких переменных / О. А. Шишкина // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный - 2015», посвященной 70-летию Великой Победы. Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015. — С. 44–46.
7. Шишкина О. А. Метод Эйлера в задаче суммирования функции нескольких переменных по целым точкам рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Сборник материалов международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектив Свободный - 2016», посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств. «Математика, информатика: математический анализ и теория функций». Красноярск, 15–25 апреля 2016. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016. — С. 35–38.
8. Шишкина О. А. Многочлены Бернулли нескольких переменных в задаче суммирования мономов / О. А. Шишкина // тезисы международной конференции по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре (г. Коряжма Архангельской области, Филиал С(А)ФУ им. М. В. Ломоносова, 3–9 августа 2016 года). — С. 123–124.
9. Shishkina O. A. Multidimensional analogue of the Bernoulli polynomials and summation of monomials over lattice points of a rational parallelotope. / O. A. Shishkina // Abstracts of Barcelona Analysis Conference 2016. — P.35.
10. Шишкина О. А. Обобщение оператора Тодда и многомерный аналог формулы Эйлера-Маклорена / Е.К. Лейнартас, О. А. Шишкина // [Электронный ресурс]: материалы VI Российско-Армянского совещания по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (г. Ростов-на-Дону, 11-16 сентября 2016 г.) / под общ. ред. А.Н. Карапетянца; Дон. гос. техн. ун-т, 2016 — С. 23.