На правах рукописи

ТАРАСОВ ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК С КОНЕЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РАССЕИВАНИЯ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск-2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Сучков Николай Михайлович.

Официальные оппоненты:

Колесников Сергей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнёва», кафедра безопасности информационных технологий, заведующий.

Тимофеенко Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева», кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания, профессор.

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт математики и механики» УрО РАН, г. Екатеринбург.

Защита состоится 21 сентября 2018 г в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 на базе ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 34-11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» __________2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Шлапунов Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы исследования

По теореме Кэли любая группа изоморфна некоторой группе подстановок. Одним из направлений исследования бесконечных групп подстановок является наложение на подстановки "условий конечности". Наиболее известное из этих условий - финитарность подстановок.

Пусть $S(M)$ - группа всех подстановок непустого множества M. Подстановка $g \in S(M)$ называется финитарной, если её носитель $\{\lambda | \lambda \in M, \lambda^g \neq \lambda\}$ конечен. Множество $Fin(M)$ всех финитарных подстановок множества M образует нормальную в $S(M)$ локально конечную подгруппу. Любая подгруппа из $Fin(M)$ называется группой финитарных подстановок. Эти группы изучались многими авторами. Приведём несколько результатов.

И. Д. Адо [1] показала, что группа финитарных подстановок с условием минимальности для подгрупп конечна. В частности, $Fin(M)$ не содержит квазициклических подгрупп C_{p^∞} для любого простого p. Д. А. Супруненко [7,8] открыл ряд специфических свойств локально нильпотентных групп финитарных подстановок и поставил вопрос о строении локально конечных групп, изоморфно вложимых в группы $Fin(M)$. Из работ П.Ноймана [16], Д. Уигольда [17] и Ф. Холла [15] следует, что счетная финитно аппроксимируемая группа X имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда X - локально нормальная группа.

В работе В. В. Беляева [2] доказано, что простая локально конечная группа имеет точное финитарное подстановочное представление тогда и только тогда, когда любая её финитно аппроксимируемая подгруппа локально нормальна. Аналогичный результат для полупростых локально конечных групп получен В.В. Беляевым и Д.А. Шведом [3].

В дальнейшем предполагаем, что M либо множество целых чисел Z, либо множество натуральных чисел N. В работе Н.М. Сучкова [10] подстановка $g \in S(M)$ названа ограниченной, если

$$w(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Множество $Lim(M)$ всех таких подстановок образует группу, которая является естественным расширением группы $Fin(M)$. В работе [9] впервые был построен пример смешанной группы $C = AB$, где A, B - периодические (и даже локально конечные) подгруппы, а в [10,11] установлено, что $C = \langle h | h \in Lim(Z),\, |h| < \infty \rangle$, любая счетная свободная группа и 2-группа Алёшина изоморфно вложимы в C. При этом $Lim(Z) = C \leftthreetimes \langle d \rangle$, где d - сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ для любого $\alpha \in Z$.

Факторизация всей смешанной группы $Lim(N)$ двумя локально конечными подгруппами доказана в [12]. Там же установлено, что группа $Lim(M)$ порождается подстановками $x \in S(M)$, для которых параметр ограниченности $w(x) = 1$. Эти порождающие являются либо инволюциями, в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида $(\alpha\, \alpha + 1)$, $\alpha \in M$, либо $M = Z$ и $x \in \{d, d^{-1}\}$. В работах [13,14] начато изучение нормального строения группы $Lim(N)$. Получено описание локально конечного радикала этой группы.

В работе [18] для любой подстановки $g \in S(M)$ определен её параметр рассеивания $\lambda(g)$ следующим образом. Для каждого $\alpha \in M$ обозначим

$$M_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in M,\, \beta \leqslant \alpha,\, \beta^g > \alpha\},\; L_\alpha(g) = \{\beta | \beta \in M,\, \beta > \alpha,\, \beta^g \leqslant \alpha\}.$$

Полагаем теперь

$$t(g) = \max_{\alpha \in M} |M_\alpha(g)|,\; s(g) = \max_{\alpha \in M} |L_\alpha(g)|,\; \lambda(g) = \max(t(g),\, s(g)).$$

Множество $Disp(M) = \{g | g \in S(M),\, \lambda(g) < \infty\}$ образует группу. Из легко проверяемого неравенства $\lambda(g) \leqslant w(g)$ следует, что $Lim(M)$ - подгруппа группы $Disp(M)$. При этом подстановки группы $Disp(M)$ уже не связаны с расстоянием между точками и их образами, а связаны лишь с естественным упорядочением множества M. Если, например, $x = (3\,4)(5\,8)...(2^n{+}1\;2^{n+1})...$, то $\lambda(x) = 1$, $w(x) = \infty$, а значит, $x \in Disp(M)$, $x \notin Lim(M)$. Поэтому группа $Disp(M)$ существенно шире группы $Lim(M)$.

В этой же работе подстановка $g \in S(Z)$ названа равномерной, если $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$ при любом $\alpha \in Z$. Множество R всех таких подстановок образует группу.

Целью диссертации является изучение групп $Lim(N)$ и $Disp(M)$.

Основные результаты диссертации

1. Изучены нормальные замыкания в группе $Lim(N)$ подстановок g с параметром ограниченности $w(g) = 1$.

2. Доказано, что в группах $Disp(N)$ и $Disp(Z) \cap R$ любое конечное множество элементов содержится в подгруппе вида $Q = AB$, где A, B - локально финитно аппроксимируемые подгруппы из Q.

3. Найдена связь между группами $Disp(Z)$ и $Disp(N)$.

4. Доказано, что группы $Disp(M)$ порождаются подстановками g множества M с параметром рассеивания $\lambda(g) = 1$. Дано описание этих порождающих.

Научная новизна и значимость работы. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и могут найти применение в теории групп.

Методы исследования. В работе используются методы теории групп.

Апробация результатов. Результаты работы доложены на четырех конференциях.

1. Международная конференция "Алгебра и геометрия"(Екатеринбург, 2011) [22].

2. Международная конференция "Алгебра и линейная оптимизация"(Екатеринбург, 2012) [23].

3. Международная конференция "Алгебра и логика: теория и приложения, посвященной памяти В.П. Шункова"(Красноярск, 2013) [24].

4. XI международная школа-конференция по теории групп, посвященная 70-летию А.Ю. Ольшанского (Красноярск, 2016) [25].

Публикации. Список публикаций по теме диссертации включает 8 работ [18-25] (3 без соавторов). Основные результаты диссертации опубликованы в четырех статьях [18-21] в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы делятся на параграфы. Нумерация формул, определений, лемм, предложений, теорем сквозная в пределах каждой главы и имеет вид $n.m$, где n - номер текущей главы. Объем диссертации - 54 страницы.

Основное содержание диссертации

В §1.1 Главы 1 приводятся определения и известные факты, используемые в дальнейшем. Для понимания точной формулировки основного результата этой главы (теорема 1.1) нам потребуется понятие (вполне) рассеянного подмножества множества N, введеного в работе [13]. Пусть

$$L = \{\mu_1,\, \mu_2,\, ...,\, \mu_n,\, ...\}-$$

бесконечное подмножество множества N, где $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ...$; m - фиксированное натуральное число. По определению элементы μ_i, μ_j множества L эквивалентны, если либо $i = j$, либо $i < j (j < i)$ и выполняются все неравенства $\mu_{k+1} - \mu_k \leqslant m$; $i \leqslant k \leqslant j-1$ ($j \leqslant k \leqslant i-1$). Это отношение эквивалентности индуцирует разбиение L на классы эквивалентности. Пусть $B_m(L)$ - множество всех этих классов.

Определение 1.3. Множество L называется m - рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m - рассеянным, если

$$\max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m - рассеянное при любом натуральном m.

Пусть для элементов множества L выполняются неравенства $\mu_n + 1 < \mu_{n+1}$ ($n = 1, 2, ...$). Рассмотрим инволюцию

$$a = (\mu_1\,\mu_1 + 1)...(\mu_n\,\mu_n + 1)...$$

группы $Lim(N)$. Очевидно, $w(a) = 1$. В [13] доказано, что нормальное замыкание инволюции a в группе $Lim(N)$ тогда и только тогда локально конечно, когда L - вполне рассеянное множество.

Теорема 1.1. Нормальное замыкание T инволюции a в группе $Lim(N)$ тогда и только тогда является собственной подгруппой группы $Lim(N)$, когда L - рассеянное множество. Если L - рассеянное, но не вполне рассеянное множество, то T - смешанная группа.

Данная теорема доказывает одну из гипотез о нормальных замыканиях элементов группы $Lim(N)$ [13]. Доказательство теоремы 1.1. начато §1.2 и закончено в §1.3.

Результаты главы 1 получены автором лично и опубликованы в работе [21].

В главе 2 начато изучение групп $Disp(M)$. В §2.1, 2.2 доказано, что множество R всех равномерных подстановок множества Z образует группу и устанавливается связь между группами $G = Disp(N)$ и $H = Disp(Z)$.

Предполагая, что подстановки группы G действуют тождественно на множестве $Z\backslash N$, мы получим естественное вложение $G < H$. Через t обозначена подстановка группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha$ $(\alpha \in Z)$.

Теорема 2.1. $H \cap R = Fin(Z) \cdot (G \times G^t)$.

Теорема 2.2. $H = (H \cap R) \leftthreetimes < d >$.

Группа X называется локально финитно аппроксимируемой, если каждая её конечно порожденная подгруппа изоморфно вложима в декартово произведение конечных групп. Основным результатом §2.3 является

Теорема 2.3. В группах G и $H \cap R$ любое конечное подмножество содержится в группе вида $Q = AB$, где A, B - локально финитно аппроксимируемые подгруппы из Q.

Доказательство этой теоремы конструктивное и даёт ясное представление элементов конечно порожденных подгрупп из G и $H \cap R$.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [18, 19]. Теорема 2.2 и теорема 2.3 для групп $H \cap R$ доказаны автором лично; теорема 2.1 доказана в нераздельном соавторстве с А.А. Маньковым, а теорема 2.3 для группы G - в нераздельном соавторстве с Н.М. Сучковым.

В §3.1 изучены подстановки g множества M с параметром рассеивания $\lambda(g) = 1$. Основным результатом главы 3 является

Теорема 3.1. Группа $Disp(M)$ порождается подстановками g множества M, для которых параметр рассеивания $\lambda(g) = 1$.

Для случая $M = N$ получено некоторое усиление этой теоремы.

Теорема 3.2. Группа $Disp(N)$ порождается подстановками множества N, которые имеют параметры рассевания 1 и разлагаются в произведение конечных независимых циклов.

Следствием этой теоремы и теорем 2.1, 2.2 является

Теорема 3.3. Группа $Disp(Z)$ порождается подстановками g, g^t $(g \in G, \lambda(g) =$ и сдвигом d.

Теоремы 3.1-3.3 доказаны автором лично. Леммы 3.1-3.5 из §3.1 доказаны в нераздельном соавторстве с Н.М. Сучковым. Результаты главы 3 опубликованы в работе [20].

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Н.М. Сучкову за постановку задач и внимание к работе. А так же всему коллективу кафедры алгебры и математической логики ИМиФИ СФУ за сотрудничество.

Список литературы

1. Адо И.Д. О подгруппах счетной симметрической группы // Доклад АН СССР. - 1945. - Т. 50. - С. 15-17.

2. Беляев В.В. Локальные характеризации бесконечных знакопеременных групп и групп лиевского типа // Алгебра и логика. - 1992. - Т. 31, №4. - С. 369 - 390.

3. Беляев В.В., Швед Д.А. Полупростые группы, имеющие точное финитарное подстановочное представление // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2014. - Т. 20, №2. - С. 55-62.

4. Горенстейн Д. Конечные простые группы. - М.: Мир, 1985.

5. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - М.: Наука, 1982.

6. Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г., Бесконечные группы с инволюциями. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011.

7. Супруненко Д.А. О локально нильпотентных подгруппах бесконечной симметрической группы // Докл. АН СССР. - 1996. - Т. 167, №2. - С. 302 - 304.

8. Супруненко Д.А. Группы матриц. - М.: Наука, 1972.

9. Сучков Н.М. Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами // Алгебра и логика. - 1984. - Т. 23, № 5. - С. 573–577.

10. Сучков Н.М. О подгруппах произведения локально конечных групп // Алгебра и логика. - 1985. - Т. 24, № 4. - С. 408–413.

11. Сучков Н.М. О группе ограниченных перестановок // Сборник научных трудов "Конструкции в алгебре и логике". - Тверь. - 1990. - С. 84-89.

12. Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. О группах ограниченных подстановок // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. - 2010. - Т. 3, №2. - С. 262-266.

13. Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. О нормальных подгруппах групп ограниченных подстановок // Сиб. электрон. матем. изв., - 2015. - Т. 12. - С. 344–353.

14. Сучков Н.М., Сучкова Н.Г. О локально конечном радикале группы ограниченных подстановок // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2016. - Т. 22, №3. - С. 259-264.

15. Hall P. Periodic FC - groups // J. London Math. Soc. - 1959. - Vol. 34. - P. 289 - 304.

16. Neumann P. The structure of finitary permutation groups // Arch. Math. - 1976. - Vol. 27, № 3. - P. 3 - 17.

17. Wiegold J. Groups of finitary permutations // Arch. Math. - 1974. - Vol. 25. - P. 466 - 469.

Работы автора по теме диссертации

18. Сучков Н.М., Маньков А.А., Тарасов Ю.С. Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. - 2012. - Т. 5, № 1. - С. 116–121.

19. Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. О равномерных подстановках с конечными параметрами рассеивания // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2013. - Т. 19, №3. - С. 284-289.

20. Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. О порождающих групп подстановок с конечными параметрами рассеивания // Сибирские электронные математические известия. - 2014, - Т. 11. - С. 345–353.

21. Tarasov Yuri S On Normal Closures of Involutions in the Group of Limited Permutations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. - 2016. - Vol. 9, №3. - P. 393 – 400.

22. Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. О группе подстановок целых чисел с конечными параметрами рассеивания // Тез. докл. международ. конф. "Алгебра и геометрия". Екатеринбург. - 2011. - С. 160.

23. Сучков Н.М., Тарасов Ю.С. Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания // Тез. докл. международ. конф. "Алгебра и линейная оптимизация". Екатеринбург. - 2012. - С. 158.

24. Тарасов Ю.С. О группах подстановок с конечными параметрами рассеивания // Тез. докл. международ. конференции "Алгебра и логика: теория и приложения, посвященной памяти В.П. Шункова". Красноярск. - 2013. - С. 130.

25. Тарасов Ю.С. О Нормальном замыкании инволюций в группе ограниченных подстановок // Тез. докл. XI международной школы-конференции

по теории групп, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского. Красноярск. - 2016. - С. 59 - 60.