На правах рукописи

Насыбуллов Тимур Ринатович

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА, ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ И СВОЙСТВА

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Красноярск – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики им. С. Л. Соболева» Сибирского отделения Российской академии наук.
Научный консультант:
доктор физико-математических наук, доцент
Бардаков Валерий Георгиевич

Официальные оппоненты:
Малютин Андрей Валерьевич
доктор физико-математических наук, профессор
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН», дирекция, заместитель директора по научным вопросам.
Мясников Алексей Георгиевич
доктор физико-математических наук, профессор
Технологический институт Стивенса, Кафедра математических наук, Хобокен, Нью-Джерси, США, профессор.
Умирбаев Уалбай Утмаханбетович
доктор физико-математических наук, профессор
Университет Уэйна, Факультет математики, Детройт, Мичиган, США, профессор.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Защита диссертации состоится «13» мая 2022 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8–06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http://www.sfu-kras.ru/.

Автореферат разослан «______» ____________ 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета — Михалкин Евгений Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертационного исследования и степень ее разработанности. Пусть V – векторное пространство над полем F. Линейный изоморфизм $R: V \otimes V \to V \otimes V$ тензорного квадрата $V \otimes V$ называется решением квантового уравнения Янга-Бакстера, если выполнено следующее равенство линейных преобразований пространства $V \otimes V \otimes V$

$$(R \otimes id)(id \otimes R)(R \otimes id) = (id \otimes R)(R \otimes id)(id \otimes R).$$

Это уравнение получило свое имя от независимых работ Янга [37] и Бакстера [10, 11], относящихся соответственно к теоретической физике и статистической механике.

Дринфельд ввел понятие теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера, которое обобщает квантовое уравнение Янга-Бакстера. Пусть X – произвольное множество, а $S : X^2 \to X^2$ – обратимое отображение. Говорят, что отображение S является решением теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на X, если выполнено следующее равенство

$$(S \times id)(id \times S)(S \times id) = (id \times S)(S \times id)(id \times S).$$

Пусть S – решение теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на X, и пусть V – векторное пространство, порожденное множеством X. Тогда отображение $S : X^2 \to X^2$ может быть продолжено до линейного изоморфизма $R : V \otimes V \to V \otimes V$. Отображение $R : V \otimes V \to V \otimes V$ в этом случае будет решением квантового уравнения Янга-Бакстера, т. е. решение теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на множестве X ведет к решению квантового уравнения Янга-Бакстера на V. Таким образом, квантовое уравнение Янга-Бакстера и теоретико-множественное уравнение Янга-Бакстера тесно связаны.

Дринфельд сформулировал вопрос о классификации всех решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Как правило, при изучении решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера в качестве множества X берется не просто множество, а некоторая алгебраическая система. Часто используются такие алгебраические системы как группа, модуль, векторное пространство, циклическое множество, квандл, биквандл, брэйс, косой брэйс и т. д. В работах Дринфельда для изучения решений уравнения Янга-Бакстера были введены такие алгебраические системы, как квазитреугольные (квазикоммутативные) алгебры Хопфа и биалгебры Ли.

В диссертации исследуются свойства алгебраических систем, возникающих при решении теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Изучаются приложения этих алгебраических систем в следующих областях алгебры и топологии

1. Построение представлений групп (виртуальных) кос;
2. Построение инвариантов узлов и зацеплений;
3. Изучение связей между аддитивными и мультипликативными группами косых брэйсов;
4. Изучение классов скрученной сопряженности в линейных группах.

Сформулируем далее конкретные вопросы, которые исследуются в диссертации, а также приведем краткий исторический обзор по каждому из этих вопросов.

Представления групп кос. Напомним, что группой кос B_n на n нитях называется группа с порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & i &= 1, 2, \ldots, n-2, & (b_1)\\ \sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i, & |i-j| &\geq 2. & (b_2)\end{aligned}$$

Группой виртуальных кос VB_n на n нитях называется группа с порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$, соотношениями (b_1), (b_2) и дополнительными соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_i\rho_{i+1}\rho_i &= \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}, & i &= 1, \ldots, n-2, & (vb_1)\\ \rho_i\rho_j &= \rho_j\rho_i, & |i-j| &\geq 2, & (vb_2)\\ \rho_i^2 &= 1, & i &= 1, \ldots, n-1, & (vb_3)\\ \sigma_i\rho_j &= \rho_j\sigma_i, & |i-j| &\geq 2, & (vb_4)\\ \rho_i\rho_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}, & i &= 1, \ldots, n-2. & (vb_5)\end{aligned}$$

Важную роль при изучении групп (виртуальных) кос играют их представления. Используя представления групп кос автоморфизмами свободной группы, а также линейные представления групп кос, были установлены, например, разрешимость проблемы равенства в группе кос и финитная аппроксимируемость групп кос. Также с помощью представлений групп (виртуальных) кос были построены инварианты для классических и виртуальных узлов. Следующий вопрос о представлениях был сформулирован Артином [7] для групп классических кос и Кауффманом [29] для виртуальных кос.

(A.1) *Построить точные представления групп (виртуальных) кос автоморфизмами алгебраических систем.*

Важным частным случаем вопроса **(A.1)** является следующий вопрос, сформулированный Бурау [13] для классических кос и Бардаковым [3, Вопрос 19.7] для виртуальных кос.

(A.2) *Являются ли группы (виртуальных) кос линейными? Если являются, то построить точные линейные представления для этих групп.*

Первое представление группы кос автоморфизмами группы было сконструировано Артином. Он построил представление φ_A группы кос B_n на n нитях в группу автоморфизмов свободной группы F_n с n порождающими. Представление Артина является точным. Бурау построил линейное представление $\varphi_B : B_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$. Долгое время существовала гипотеза о том, что представление Бурау является точным, однако эта гипотеза была опровергнута для $n \geq 5$. Вопрос о точности представления Бурау при $n = 4$ до сих пор открыт. В 1961 году Гасснер построила представление группы крашеных кос

$$\varphi_G : P_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]),$$

которое обобщает представление Бурау. На данный момент вопрос о точности представления Гасснер открыт. Окончательный ответ на вопрос о линейности групп кос был получен независимо Бигелоу и Краммером, которые доказали, что представление $\varphi_{LKB} : B_n \to \mathrm{GL}_{n(n-1)/2}(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}])$, построенное Лоуренц в [30], является точным. Представление φ_{LKB} называется представлением Лоуренц-Бигелоу-Краммера.

Построением и изучением представлений групп виртуальных кос автоморфизмами групп занимались такие исследователи как Бардаков, Боден, Вершинин, Вильямс, Герлингс, Годро, Диес, Камада, Михальчишина, Нещадим, Никас, Сильвер, Харпер. Многие из построенных представлений были использованы впоследствии для построения групповых инвариантов для виртуальных зацеплений.

В диссертации введено понятие мульти-переключателя, которое обобщает понятие решения теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера, а также разработан метод мульти-переключателей, который позволяет по специальным решениям теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на алгебраических системах строить представления групп B_n, VB_n автоморфизмами этих алгебраических систем. С помощью этого метода построены новые представления групп B_n, VB_n автоморфизмами, а также установлено, что все известные на данный момент представления групп B_n, VB_n автоморфизмами групп могут быть построены с помощью данного метода.

Инварианты узлов и зацеплений. Для целого $n \geq 1$ зацеплением с n компонентами называется вложение независимого объединения n окружностей S^1 в $\mathbb{R}^3$. Зацепление с одной компонентой называется узлом. Далее мы будем использовать слова «узел» и «зацепление» как синонимы.

Обычно зацепления задаются посредством диаграмм зацеплений. Диаграммой зацепления называется такая регулярная проекция зацепления на некоторую плоскость, что в каждом перекрестке задана информация о том, какая нить зацепления проходит сверху, а какая снизу.

Два зацепления L_1, L_2 называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, сохраняющий ориентацию пространства $\mathbb{R}^3$, такой что $\varphi(L_1) = L_2$. В 1927 году Райдемайстер доказал, что две диаграммы задают эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью плоских изотопий и конечного числа так называемых преобразований Райдемайстера [6, теорема 1.7].

В 1999 году в работе [29] Кауффман ввел теорию виртуальных узлов. Диаграммой виртуального зацепления с n-компонентами называется система из n замкнутых кривых на плоскости, которая не имеет точек касания, имеет лишь конечное число точек пересечения, в каждой точке пересечения пересекаются ровно две кривые, и каждый перекресток является либо классическим, либо виртуальным.

Диаграммы D_1, D_2 виртуальных зацеплений называются эквивалентными, если диаграмма D_1 может быть переведена в диаграмму D_2 посредством плоских изотопий и так называемых обобщенных преобразований Райдемайстера. Класс эквивалентности диаграммы виртуального зацепления с n компонентами называется виртуальным n-компонентным зацеплением.

На протяжении многих лет, исходя из различных соображений, были введены новые обобщения и упрощения классических и виртуальных узлов: сингулярные узлы, узлы со спайками, узлы с двойными спайками, и т. д. Во всех этих теориях зацепления определяются при помощи диаграмм, а эквивалентность диаграмм определяется посредством локальных преобразований, обобщающих преобразования Райдемайстера. Основным вопросом в каждой из перечисленных теорий узлов является следующий вопрос, именуемый проблемой распознавания эквивалентности.

(B.1) *Построить алгоритм, который определяет являются ли две наперед заданные диаграммы узлов/виртуальных узлов/узлов со спайками/узлов с двойными спайками эквивалентными или нет.*

Одним из возможных подходов к решению проблемы **(B.1)** является построение инвариантов для узлов и зацеплений. Пусть A – некоторое множество. Отображение f из множества всех зацеплений в множество A называется инвариантом зацеплений, если для любых эквивалентных зацеплений L_1, L_2 выполнено равенство $f(L_1) = f(L_2)$. Отсюда следует, в частности, что если $f(L_1) \neq f(L_2)$, то зацепления L_1, L_2 неэквивалентны. Таким образом, построение инвариантов играет очень важную роль при решении вопроса о распознавании эквивалентности двух зацеплений. Отметим, что если f – инвариант зацеплений, то равенство $f(L_1) = f(L_2)$ не обязательно влечет эквивалентность зацеплений L_1, L_2. Инвариант f называется полным, если равенство $f(L_1) = f(L_2)$ выполнено тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 эквивалентны. Вопрос $(B.1)$ можно переформулировать в следующем виде.

(B.2) *Построить полный легко вычислимый инвариант для узлов/виртуальных узлов/узлов со спайками/узлов с двойными спайками.*

Инварианты со значениями в множестве алгебраических систем из некоторой фиксированной категории представляют особый интерес, так как обычно эти инварианты являются сильными (например, фундаментальный квандл узла является «почти полным» инвариантом для классических узлов), и с помощью этих инвариантов можно строить новые инварианты, которые легко вычислять и сравнивать между собой.

В работе [21] Фенна, Джордан-Сантаны и Кауффмана приведен способ, как решения теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера могут быть использованы для построения целочисленных инвариантов виртуальных узлов.

В диссертации разработан метод мульти-переключателей, который позволяет по специальным решениям теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера строить инварианты классических и виртуальных зацеплений, которые являются алгебраическими системами. С помощью этого метода построены новые инварианты классических и виртуальных зацеплений, а также установлено, что многие известные инварианты, которые являются алгебраическими системами, могут быть получены, используя данный метод.

Проблема эквивалентности для узлов с двойными спайками изучалась, например, в работах [8, 23, 28]. Следующий результат, установленный Каненобу в работе [28], говорит о том, что любой узел (т. е. зацепление с одной компонентой) в теории узлов с двойными спайками тривиален.

Теорема 1. *Пусть K – узел с двойными спайками. Тогда K – тривиальный узел.*

Этот результат говорит о том, что при исследовании проблемы эквивалентности для зацеплений с двойными спайками стоит обращать внимание лишь на зацепления с более чем одной компонентой. Фиш и Кейман в работе [23] установили следующий результат, который дает классификацию узлов с двойными спайками, у которых нет виртуальных перекрестков, используя очень простой инвариант классических узлов – коэффициент зацеплений.

Теорема 2. *Пусть K – зацепление с двойными спайками, которое не имеет виртуальных перекрестков. Тогда K полностью определено коэффициентами зацеплений между своими компонентами.*

В диссертации построен полный быстро вычислимый инвариант для узлов с двойными спайками со значениями в свободной абелевой группе бесконечного ранга. Конструкция построенного инварианта влечет теорему 1 и теорему 2.

Кауффман нашел геометрическую интерпретацию виртуальных узлов и зацеплений. Он установил, что виртуальные зацепления можно понимать геометрически как зацепления внутри утолщенных поверхностей [29]. С развитием теории трехмерных многообразий все больше внимания стало уделяться зацеплениям в различных трехмерных многообразиях: расслоениях Зейферта [24], в частности, в линзовых пространствах (Каттабрига, Манфреди, Мулацани, Пшитицкий, Хосте и т. д.), утолщенных поверхностях (Ильютко, Кауффман, Ламброполу, Мантуров и т. д.), произвольных трехмерных многообразиях (Ламброполу, Рурк, Фенн и т. д.).

Одним из наиболее содержательных направлений в теории узлов в трехмерных многообразиях является теория узлов в линзовых пространствах. Это связано, в первую очередь, с тем, что линзовые пространства являются наиболее простыми (после трехмерной сферы S^3) трехмерными многообразиями, а именно, линзовое пространство $L(p,q)$ может быть получено из трехмерной сферы S^3 при помощи хирургии Дэна на тривиальном узле, в то время как другие трехмерные многообразия могут быть получены из трехмерной сферы S^3 при помощи хирургии Дэна на гораздо более сложных узлах и зацеплениях. Более того, изучение зацеплений в линзовых пространствах мотивировано также тем фактом, что они связаны с другими науками: в работе [35] зацепления в линзовых пространствах используются для описания топологической теории струн, а в работе [12] зацепления в линзовых пространствах используются для описания решения проблемы биологической рекомбинации ДНК.

Несмотря на то, что многие инварианты зацеплений в S^3 могут быть обобщены на зацепления в линзовых пространствах, многие из этих инвариантов весьма сложно использовать. Так, например, фундаментальный квандл зацепления, который имеет очень простое геометрическое описание для зацеплений в S^3, естественным образом обобщается на зацепления в линзовых пространствах $L(p,q)$. Однако, явная запись этого квандла с помощью порождающих и соотношений по диаграмме конкретного зацепления в $L(p,q)$ известна лишь в случае, когда $(p,q) = (2,1)$ [2]. Другой существенный недостаток фундаментального квадла для зацеплений в линзовых пространствах $L(p,q)$ состоит в том, что фундаментальный квандл зацепления $K \subset L(p,q)$ изоморфен фундаментальному квандлу его поднятия $p^{-1}(K) \subset S^3$, где $p : S^3 \to L(p,q)$ обозначает универсальное накрытие. Таким образом, фундаментальный квандл зацеплений в $L(p,q)$ не отличает зацепления с эквивалентными накрытиями [15].

В диссертации построен виртуальный квандл для зацеплений в линзовых пространствах. Порождающие и определяющие соотношения этого виртуального квадла могут быть напрямую найдены из диаграммы зацепления в $L(p,q)$. Более того, этот виртуальный квандл может отличать зацепления с эквивалентными поднятиями. Виртуальные квандлы были введены Мантуровым в работах [4,31], как обобщение квандлов [5,26] с теории классических узлов на виртуальные узлы.

Аддитивная и мультипликативная группы косых брэйсов. Косым брэйсом называется алгебраическая система $A = (A, \oplus, \odot)$ с двумя бинарными алгебраическими операциями $\oplus$, $\odot$, такими что алгебраические системы $A_{\oplus} = (A, \oplus)$, $A_{\odot} = (A, \odot)$ являются группами, и равенство

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \ominus a \oplus (a \odot c)$$

выполняется для всех $a, b, c \in A$, где $\ominus a$ обозначает элемент обратный к a в $A_{\oplus}$. Группа $A_{\oplus}$ называется аддитивной группой косого брэйса A, группа $A_{\odot}$ называется мультипликативной группой косого брэйса A.

Если аддитивная группа $A_{\oplus}$ косого брэйса A абелева, то косой брэйс A называется брэйсом. Брэйсы впервые появились в работе Румпа [32] как инструмент для конструирования невырожденных инволютивных решений теоретико множественного уравнения Янга-Бакстера. Косые брэйсы были введены Гуарниери и Вендрамином [25] как инструмент для конструирования невырожденных решений теоретико множественного уравнения Янга-Бакстера, которые не обязательно инволютивны. Пусть X – косой брэйс, тогда отображение $S : X^2 \to X^2$, заданное правилом

$$S(x, y) = \Big(\ominus x \oplus (x \odot y), (\ominus x \oplus (x \odot y))^{-1} \odot x \odot y \Big)$$

для $x, y \in X$, является решением теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера.

Аксиома косого брэйса делает аддитивную группу $A_{\oplus}$ и мультипликативную группу $A_{\odot}$ косого брэйса A тесно связанными друг с другом. Так, Вендрамином, Смоктунович и Лебедь в Коуровской тетради были сформулированы следующие вопросы [3, вопросы 19.49, 19.90].

(C.1) *Пусть A – косой брэйс с левоупорядочиваемой мультипликативной группой. Верно ли, что аддитивная группа косого брэйса A левоупорядочиваема?*

(C.2) *Пусть A – косой брэйс с разрешимой аддитивной группой. Верно ли, что мультипликативная группа косого брэйса A разрешима?*

(C.3) *Пусть A – косой брэйс с нильпотентной мультипликативной группой. Верно ли, что аддитивная группа косого брэйса A разрешима?*

Смоктунович и Вендрамин в работе [33, следствие 1.23] получили следующий результат, который можно воспринимать как положительный ответ на вопрос **(C.2)** в частном случае.

Теорема 3. *Пусть A – конечный косой брэйс. Если аддитивная группа $A_{\oplus}$ косого брэйса A нильпотентна, то мультипликативная группа $A_{\odot}$ косого брэйса A разрешима.*

Следующий результат был сформулирован Бьоттом и Вендрамином в работе [33, теорема A.9] в терминах косых брэйсов и доказан в работе [14, теорема 2] в терминах структур Хопфа-Галуа.

Теорема 4. *Пусть A – конечный косой брэйс. Если мультипликативная группа $A_{\odot}$ косого брэйса A абелева, то аддитивная группа $A_{\oplus}$ косого брэйса A разрешима.*

Этот результат можно воспринимать как положительный ответ на вопрос **(C.3)** в частном случае. Положительный ответ на вопрос **(C.3)** для конечных косых брэйсов был получен Цанг и Цинь в работе [36]. Они установили следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть A – конечный косой брэйс. Если мультипликативная группа $A_{\odot}$ косого брэйса A нильпотентна, то аддитивная группа $A_{\oplus}$ косого брэйса A разрешима.*

В диссертации вопросы [3, вопросы 19.49, 19.90] из Коуровской тетради исследуются для косых брэйсов, которые не обязательно конечны. В общем случае построены примеры, дающие отрицательные ответы на вопросы **(C.1)** и **(C.2)**. В случае двусторонних косых брэйсов получены положительные результаты.

Классы скрученной сопряженности в группах. Пусть G – группа, φ – автоморфизм группы G. Элементы x, y группы G называются (скрученно) φ-сопряженными, если для некоторого элемента z группы G выполнено равенство $x = zy\varphi(z^{-1})$. Обозначим символом $R(\varphi)$ число классов эквивалентности отношения φ-сопряженности. Это число либо конечно и принадлежит $\mathbb{N}$, либо бесконечно, и в этом случае мы пишем $R(\varphi) = \infty$.

Отношения φ-сопряженности возникают при построении решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Если G – группа, φ – автоморфизм группы G, то отображение $S : G \times G \to G \times G$, заданное правилом $S(x, y) = (xy\varphi(x)^{-1}, \varphi(x))$ для $x, y \in G$, является невырожденным решением теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. Варьируя группу G и автоморфизм φ, можно получить множество невырожденных решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера, удовлетворяющих тем или иным специальным свойствам.

Помимо решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера, соотношения φ-сопряженности возникают во многих областях математики. Если G — конечная группа, то классическая теорема Бернсайда утверждает, что число классов сопряженности в группе G равно числу классов эквивалентности ее неприводимых комплексных (и, следовательно, унитарных) представлений. В настоящее время активно изучается аналог этой теоремы для скрученной сопряженности. Ищется связь числа $R(\varphi)$ с числом неподвижных точек отображения, индуцированного автоморфизмом φ на множестве всех классов эквивалентности унитарных представлений группы G.

В связи с этой проблемой возникает задача об описании групп, у которых число $R(\varphi)$ бесконечно для всякого автоморфизма φ. Про такие группы говорят, что они обладают свойством R_∞. Некоторые аспекты свойства R_∞, а именно, связь с неабелевыми когомологиями, связь с классами изоградиентности и связь с теорией представлений описаны в работе [19].

Следующий вопрос о том, какие группы обладают свойством R_∞ сформулировали Фельштын и Хилл [20] в 1994 году.

(D.1) *Какие группы обладают свойством R_∞?*

Данный вопрос привлекал многих исследователей, среди которых можно отметить Гонзалвеса, Декимпе, Кукину, Левитта, Люстига, Романькова, Санкарана, Троицкого, Фельштына, Хилла и т. д. В разное время разными авторами было установлено, что неэлементарные гиперболические (по Громову) группы, группы Баумслага-Солитера и обобщенные группы Бамуслага-Солитера, группы Григорчука и группы Гупты-Сидки, некоторые свободные, свободные нильпотентные и свободные разрешимые группы, конечно порожденные финитно аппроксимируемые неаменабельные группы все обладают свойством R_∞. В работе [18] вопрос **(D.1)** сформулирован для линейных групп в следующем виде.

(D.2) *Какие классические линейные группы обладают свойством R_∞?*

В своей кандидатской диссертации автор настоящей диссертации изучал классы скрученной сопряженности и свойство R_∞ в группах Шевалле над полями нулевой характеристики, степень трансцендентности которых над $\mathbb{Q}$ конечна. Частными случаями групп Шевалле являются многие классические группы матриц, такие как $\mathrm{SL}_n(R)$, $\mathrm{SO}_n(R)$ и $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$. Изучением групп Шевалле занимались такие известные математики, как Абе, Бунина, Вавилов, Колесников, Левчук, Нужин, Стейнберг, Хамфри, Шевалле, и многие другие.

В настоящей диссертации свойство R_∞ изучается для редуктивных линейных алгебраических групп, а также для групп Шевалле над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики, степень трансцендентности которых над $\mathbb{Q}$ бесконечна. Получены необходимые условия для того, чтобы редуктивная линейная алгебраическая группа обладала свойством R_∞. Также получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа Шевалле одной из серий A_n, B_n, C_n, D_n обладала свойством R_∞.

Цели диссертационного исследования

В диссертации ставится целью решение или существенное продвижение в решении проблем и задач **(A)** – **(D)**.

Основные результаты диссертации

1. Разработан метод мульти-переключателей построения по специальным решениям уравнения Янга-Бакстера представлений групп (виртуальных) кос автоморфизмами алгебраических систем, и инвариантов (виртуальных) зацеплений, которые являются алгебраическими системами.

   С помощью этого метода построены новые представления групп (виртуальных) кос автоморфизмами, и новые инварианты (виртуальных) зацеплений.

   Данный результат частично решает вопросы **(A.1)**, **(A.2)** для классических и виртуальных кос, а также частично решает вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для классических и виртуальных узлов.

2. Построен полный инвариант для зацеплений с двойными спайками.

   Данный результат полностью решает вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для узлов с двойными спайками.

3. Установлено, что если A – такой двусторонний косой брэйс, что мультипликативная группа $A_{\odot}$ нильпотентна ступени k, то аддитивная группа $A_{\oplus}$ разрешима ступени не выше $2k$.

   Данный результат полностью решает вопрос **(C.3)** для двусторонних косых брэйсов. На пути к получению этого результата полностью решены вопросы **(C.1)**, **(C.2)**.

4. Установлено, что если G – группа Шевалле одного из типов A_n, B_n, C_n, D_n над алгебраически замкнутым полем F нулевой характеристики, то G обладает свойством R_{∞} тогда и только тогда, когда степень трансцендентности F над $\mathbb{Q}$ конечна.

   Данный результат полностью решает вопрос **(D.2)** для групп Шевалле классических серий.

Научная новизна и значимость работы

Работа носит теоретический характер. Все основные результаты диссертации являются новыми. Полученные результаты и методы могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории групп, алгебраической топологии и теории неподвижных точек Нильсена-Райдемайстера. Многие доказанные в диссертации утверждения могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

Методы исследования

В работе используются методы комбинаторной теории групп, теории линейных групп, универсальной алгебры, маломерной топологии, теории моделей. В ходе работы используются многие классические результаты. При работе с группами (виртуальных) кос и их представлениями используются как представления этих групп при помощи порождающих и соотношений, так и геометрическая интерпретация элементов этих групп. При работе с (виртуальными) узлами и зацеплениями используется теорема Райдемайстера, которая описывает диаграммы эквивалентных зацеплений, а также теоремы Александера и Маркова, которые связывают (виртуальные) зацепления с элементами групп кос. При работе с автоморфизмами групп Шевалле используется теорема Стейнберга о строении групп автоморфизмов группы Шевалле над полями и ее аналоги для групп Шевалле над различными кольцами. Кроме того, в работе используются оригинальные методы, разработанные автором.

Апробация

Результаты диссертации докладывались на международной молодежной школе-конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей» (2016, Новосибирск, Россия), международной школе-конференции «Graphs and groups, spectra and symmetries» (2016, Новосибирск, Россия), международной конференции «Nielsen theory and related topics» (2016, Рио Кларо, Бразилия), международной школе-конференции «Groups and graphs, metrics and manifolds» (2017, Екатеринбург, Россия), международной конференции по теории групп «Groups St Andrews 2017 in Birmingham» (2017, Бирмингем, Великобритания), седьмой международной восточноазиатской конференции по алгебраической топологии EACAT7 (2017, Мохали, Индия), международной конференции, посвященной семидесятилетию дипломатических отношений между Индией и Россией (2017, Мохали, Индия), международной конференции «Мальцевские чтения» (2017, 2018, 2021, Новосибирск, Россия), международной конференции «Braid groups, configuration spaces and homotopy theory» (2018, Сальвадор, Бразилия), международной школе-конференции «Graphs and groups, representations and relations» (2018, Новосибирск, Россия), международной конференции «Zeta functions of groups and dynamical systems» (2018, Дюссельдорф, Германия), международной конференции «Rings and associated structures» (2019, Спа, Бельгия), международной конференции «Nielsen theory and related topics in Kortrijk» (2019, Кортрейк, Бельгия), онлайн конференции «Conference on Physical Knotting, Vortices and Surgery in Nature», международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске» (2020, 2021, Новосибирск, Россия), международной конференции «Groups and quandles in low-dimensional topology» (2020, Томск, Россия) а также на семинаре «Теория групп» Института математики им. С. Л. Соболева, семинаре по теории колец им. А. И. Ширшова Института математики им. С. Л. Соболева, семинаре «Эварист Галуа» Новосибирского государственного университета, топологическом семинаре университета Болоньи (Италия), семинаре аспирантов университета Франш-Комте (Франция), семинаре «Knot theory» университета Женевы (Швейцария), семинаре исследовательской группы алгебраической топологии и теории групп Католического Университета Левена (Бельгия), семинаре «Algebra and geometry» университета Сан-Паулу (Бразилия), семинаре «Seminario do DMAT-UFBA» университета Сальвадора (Бразилия), семинаре «Seminar Oberseminar Gruppen und Geometrie» университета Билефельда (Германия), математическом семинаре Индийского Института науки, образования и исследований Мохали (Индия) и Красноярском алгебраическом семинаре (Красноярск).

Публикации

Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 12 статьях [39, 42, 43, 45–53].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из восьми глав, включая введение, и списка литературы. Она изложена на 322 страницах и содержит 55 рисунков. Список литературы содержит 138 наименований.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации

Диссертация разбита на главы, главы на разделы, разделы на подразделы. Формулы имеют двойную нумерацию: первое число – номер главы, второе – номер формулы в текущей главе.

Первая глава является введением к диссертации. В ней приведена общая характеристика работы, в которой обосновывается актуальность темы исследования, освещается степень ее разработанности, изложены цели, методы исследования и основные результаты диссертации, отражены научная новизна и значимость работы и сведения об апробации, приведены сведения о публикации результатов диссертации. Более того, в первой главе приведены обозначения из общей теории групп, используемые в диссертации, а также определения и примеры исследуемых в диссертации алгебраических систем.

Во **второй главе** диссертации разработан метод мульти-переключателей, который позволяет строить представления групп B_n, VB_n автоморфизмами произвольных алгебраических систем, используя специальные решения теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера. В разедле 2.1 приведены предварительные сведения о группах кос. В разделе 2.2 приведен известный способ, как переключатели на алгебраических системах могут быть использованы для построения представлений групп (виртуальных) кос автоморфизмами этих алгебраических систем. В разделе 2.3 введено определение мульти-переключателя а также приведены примеры мульти-переключателей. В разделе 2.4 разработан метод, как мульти-переключатели могут быть использованы для построения представлений групп B_n, VB_n автоморфизмами алгебраических систем. Раздел 2.5 посвящен построению и изучению линейных представлений групп B_n, VB_n.

Пусть X – некоторая алгебраическая система. Основным результатом второй главы диссертации является следующая теорема, которая говорит о том, что отображение $\varphi_{S,V}$, явно построенное по мульти-переключателю (S, V) на алгебраической системе X в разделе 2.4, является представлением группы виртуальных кос автоморфизмами алгебраической системы X.

Теорема 18. *Пусть X – алгебраическая система, (S, V) – автоморфный виртуальный $(m+1)$-переключатель на X по отношению к порождающему множеству $\{x_j^i \mid i = 0, 1, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n\}$. Тогда отображение*

$$\varphi_{S,V} : VB_n \to \mathrm{Aut}(X)$$

является представлением группы виртуальных кос VB_n.

С помощью этой теоремы построено представление группы виртуальных кос VB_n на n нитях автоморфизмами свободного произведения $FQ_n * T_n$ свободного квандла FQ_n с n порождающими и тривиального квандла T_n на n элементах, а также построен ряд линейных представлений группы виртуальных кос. Данные результаты частично решают вопросы **(A.1)**, **(A.2)** для классических и виртуальных кос.

Результаты второй главы (теоремы 17, 18, 21, 22, 23) опубликованы в работах [39, 42, 43] в соавторстве с В. Г. Бардаковым. Основной результат (теорема 18) принадлежит диссертанту, при этом идеи и методы доказательств обсуждались и согласовывались с В. Г. Бардаковым.

В **третьей главе** диссертации разработан метод, как мульти-переключатели могут быть использованы для построения инвариантов для (виртуальных) узлов. В разделе 3.1 приведены предварительные сведения о классических и виртуальных узлах, а также об их обобщениях: раздел 3.1.1 посвящен диаграмматическому подходу к определению узлов, в разделе 3.1.2 приведена связь узлов с группами кос. В разделе 3.2 разработан общий метод, как мульти-переключатели могут быть использованы для построения инвариантов для классических и виртуальных узлов. Как следствие, в разделе 3.2.4 построен новый квандловый инвариант для виртуальных узлов.

Пусть X – некоторая алгебраическая система. Основным результатом второй главы диссертации является следующая теорема, которая говорит о том, что алгебраическая система $X_{S,V}(D)$, явно построенная по алгебраической системе X, мульти-переключателю (S, V) на X и диаграмме виртуального зацепления D в разделе 3.2, является инвариантом для виртуальных зацеплений, т. е. не меняется при применении обобщенных преобразований Райдемайстера к диаграмме D.

Теорема 28. *Пусть X – алгебраическая система, и (S, V) – такой виртуальный $(m+1)$-переключатель на X, что S, V – бивкандловые переключатели на множестве $X \times X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$. Тогда $X_{S,V}(D)$ – инвариант виртуальных зацеплений.*

Порождающие и соотношения алгебраической системы $X_{S,V}(D)$, представленной в теореме 28, могут быть найдены с помощью представления $\varphi_{S,V}$, найденного в теореме 18, следующим образом.

Теорема 29. *Пусть $\beta \in VB_n$ – виртуальная коса, $D = \widehat{\beta}$ – замыкание косы β. Тогда алгебраическая система $X_{S,V}(D)$ есть фактор алгебраической системы $X^{(n)}$ по соотношениям*

$$\varphi_{S,V}(\beta)(x_j^i) = x_j^i$$

для $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

С помощью теорем 28, 29 в диссертации построен новый квандловый инвариант для виртуальных зацеплений, который обобщает известные ранее квандловые инварианты для виртуальных зацеплений. Данные результаты частично решают вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для классических и виртуальных узлов.

Результаты третьей главы (теоремы 28, 29, 30, 31) опубликованы в работах [39, 42, 43] в соавторстве с В. Г. Бардаковым. Основные результаты (теоремы 28, 29) принадлежат Т. Р. Насыбуллову.

Четвертая глава диссертации посвящена построению полного инварианта для зацеплений с двойными спайками со значениями в бесконечно порожденной абелевой группе. В разделе 4.1 приведена конструкция отображения $\varrho^* : UVB_\infty \to UVP_\infty < UVB_\infty$, которое не меняет замыкания косы, т. е. такого отображения, что для любой косы $\beta \in UVB_n < UVB_\infty$ зацепления $\widehat{\beta}$ и $\widehat{\varrho^*(\beta)}$ эквивалентны как зацепления с двойными спайками. В разделе 4.2 сформулировано и доказано основное утверждение главы, описывающее полный инвариант для зацеплений с двойными спайками.

Обозначим образ косы $\alpha \in UVP_n$ относительно естественного гомоморфизма

$$UVP_n \to UVP_n/[UVP_n, UVP_n] = \mathbb{Z}^{n(n-1)}$$

символом $\overline{\alpha}$. Группа $UVP_n/[UVP_n, UVP_n]$ порождается элементами $\overline{\lambda}_{i,j}, \overline{\lambda}_{j,i}$ для $1 \leq i < j \leq n$, и группа $S_n = \langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$ действует на группе $UVP_n/[UVP_n, UVP_n]$, переставляя индексы порождающих $\overline{\lambda}_{i,j}, \overline{\lambda}_{j,i}$. Основным результатом четвертой главы является следующая теорема.

Теорема 32. *Пусть α, β – косы с двойными спайками. Тогда замыкания $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ эквивалентны как зацепления с двойными спайками тогда и только тогда, когда элементы $\overline{\varrho^*(\alpha)}$, $\overline{\varrho^*(\beta)}$ сопряжены при помощи некоторого элемента из S_n.*

Следующее утверждение очевидным образом вытекает из теоремы 32.

Следствие 5. *Отображение $\widehat{\alpha} \to \overline{\varrho^*(\alpha)}^{S_n}$ является полным инвариантом для зацеплений с двойными спайками.*

Отображение $\widehat{\alpha} \to \overline{\varrho^*(\alpha)}^{S_n}$, приведенное в следствии 5, является полным инвариантом для зацеплений с двойными спайками. Если зацепление $\widehat{\alpha}$ имеет n компонент, то значение $\overline{\varrho^*(\alpha)}^{S_n}$ лежит в $\mathbb{Z}^{n(n-1)}$. Таким образом, инвариант $\widehat{\alpha} \to \overline{\varrho^*(\alpha)}^{S_n}$ имеет значения в бесконечно порожденной абелевой группе $\mathbb{Z}^\infty$. Элементы группы $\mathbb{Z}^\infty$ легко сравнивать между собой, что делает построенный инвариант исключительно эффективным в использовании. Полученные результаты полностью решают вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для узлов с двойными спайками.

Результаты четвертой (теорема 32, следствия 5, 6) главы опубликованы в работе [53].

В **пятой главе** диссертации построен виртуальный квандл для зацеплений в линзовых пространствах $L(p, 1)$. Порождающие и определяющие соотношения этого виртуального квандла могут быть напрямую найдены из диаграммы зацепления. Более того, этот виртуальный квандл может отличать зацепления с эквивалентными поднятиями. В разделе 5.1 описан способ, как задавать зацепления в линзовых пространствах при помощи диаграмм. В разделе 5.2 приведены необходимые сведения о виртуальных квандлах. В разделе 5.3 приведена конструкция, как по заданному зацеплению K в линзовом пространстве $L(p, 1)$ построить виртуальный квандл, а также установлено, что полученный виртуальный квандл является инвариантом зацепления K, что является основным результатом главы. Наконец, в разделе 5.4 установлены некоторые свойства построенного инварианта. Полученные результаты частично решают вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для узлов в линзовых пространствах.

Результаты пятой главы (теорема 33, предложения 8, 9) опубликованы в работе [45] в неразделимом соавторстве с А. Каттабрига (Университет Болоньи, Италия).

Шестая глава диссертации посвящена изучению связей между аддитивной и мультипликативной группами косых брэйсов. В разделе 6.1 сконструированы примеры косых брэйсов, которые дают отрицательные ответы на **(C.1)** и **(C.2)**. В разделе 6.2 приведены основные определения, обозначения и предварительные результаты о косых брэйсах, необходимые для доказательства основных результатов главы. Наконец, в разделе 6.3 установлены положительные результаты по вопросам **(C.2)**, **(C.3)**. Опишем далее эти результаты.

Следующее утверждение, установленное в диссертации, обобщает результат теоремы 3 в случае двусторонних косых брэйсов, и дает, в частности, положительный ответ на вопрос **(C.2)** для конечных двусторонних косых брэйсов.

Теорема 34. *Пусть A – двусторонний косой брэйс. Тогда*

1. *Если $|A| < \infty$ и группа $A_\oplus$ разрешима, то группа $A_\odot$ разрешима,*

2. *Если $A_\oplus$ – конечно порожденная нильпотентная группа, то $A_\odot$ – разрешимая группа,*

3. *Если $A_\oplus$ – конечно порожденная группа, аппроксимируемая нильпотентными группами, то группа $A_\odot$ аппроксимируема разрешимыми группами,*

4. *Если $A_\oplus$ – конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа, то $A_\odot$ – финитно аппроксимируемая группа.*

Следующая теорема является основным результатом шестой главы диссертации. Она положительно отвечает на вопрос **(С.3)** в случае двусторонних косых брэйсов.

Теорема 35. *Пусть A – двусторонний косой брэйс. Если группа $A_\odot$ нильпотентна ступени k, то группа $A_\oplus$ разрешима ступени не более $2k$.*

Из теоремы 35 вытекает следующее утверждение, которое обобщает теорему 4.

Следствие 9. *Пусть A – косой брэйс. Если группа $A_\odot$ абелева, то группа $A_\oplus$ разрешима ступени не более 2.*

Следствие 9 обобщает теорему 4 в двух направлениях: во-первых, следствие 9 справедливо для косых брэйсов произвольной мощности, в то время как теорема 4 справедлива лишь для конечных косых брэйсов, во-вторых, следствие 9 дает верхнюю оценку на ступень разрешимости группы $A_\oplus$ (ступень разрешимости не превосходит 2). Более того, доказательство теоремы 35 (которое влечет следствие 9) элементарно, т. е. оно не использует классификацию конечных простых групп и другие сложные результаты теории конечных групп, используемые в работе [14] при доказательстве теоремы 4.

Результаты шестой главы (примеры 35, 36, теоремы 34, 35, следствие 9) опубликованы в работе [52].

В **седьмой главе** диссертации изучаются классы скрученной сопряженности в линейных алгебраических группах. В разделах 7.1, 7.2, 7.3 приведены соответственно предварительные сведения о классах скрученной сопряженности и классах изоградиентности в группах, предварительные сведения из теории колец и полей и предварительные сведения о группах Шевалле. В разделах 7.4, 7.5 установлены основные результаты главы о свойстве R_∞ для групп Шевалле: в разделе 7.4 рассмотрены группы Шевалле над полем F нулевой характеристики с $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}F < \infty$, в разделе 7.5 рассмотрены группы Шевалле над полем F нулевой характеристики с $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}F = \infty$. В разделе 7.6 установлены основные результаты главы о свойстве R_∞ для редуктивных линейных алгебраических групп. Наконец, в разделе 7.7 установлены основные результаты главы о свойстве R_∞ для групп унитреугольных матриц.

Основным результатом седьмой главы диссертации является следующее утверждение.

Теорема 52. *Пусть F – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда группа Шевалле типа $\Phi \in \{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ над подем F обладает свойством R_∞ тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}} F < \infty$.*

Данный результат дает исчерпывающий ответ на вопрос **(D.2)** для групп Шевалле классических серий.

Результаты седьмой главы (теоремы 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 56) опубликованы в работах [46,48–51]. Работа [46] опубликована в неразделимом соавторстве с А. Л. Фельштыным (Университет Щецина, Польша), работы [48–51] опубликованы диссертантом лично. Основной результат диссертации (теорема 52) следует из совокупности результатов [46, 48–51], основной вклад в написание которых сделал диссертант.

Восьмая глава диссертации посвящена изучению класса скрученной сопряженности единичного элемента для различных автоморфизмов, а также его связи со строением группы. В разделе 8.1 сформулированы известные результаты о классе скрученной сопряженности единичного элемента. В разделе 8.2 изучаются нижние центральные ряды групп, в которых класс скрученной сопряженности $[e]_\varphi$ является подгруппой для всех автоморфизмов φ, в частности, изучается вербальная ширина членов нижнего центрального ряда. В разделе 8.3 установлены некоторые положительные результаты касательно гипотезы [3, проблема 18.14] про классы скрученной сопряженности в общем случае, а в разделе 8.4 гипотеза [3, проблема 18.14] доказана для групп, которые являются расширениями абелевых групп при помощи циклических. Наконец, в разделе 8.5 изучается класс скрученной сопряженности единичного элемента в общей линейной группе.

Результаты восьмой главы (теоремы 58, 59, 60, 61, следствия 18, 19, 20) опубликованы в работах [47, 49]. Работа [47] опубликована в неразделимом соавторстве с Д. Л. Гонзалвесом (Университет Сан Паулу, Бразилия), работа [49] опубликована диссертантом лично.

Заключение

В работе исследованы свойства различных алгебраических систем, возникающих при решении теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера, а также изучены приложения этих алгебраических систем и решений теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера на этих алгебраических системах в таких областях алгебры и топологии, как представления групп кос и групп виртуальных кос, инварианты узлов, виртуальных узлов, узлов с двойными спайками и узлов в линзовых пространствах, аддитивные и мультипликативные группы косых брэйсов, классы скрученной сопряженности в линейных группах. Установлены следующие результаты:

1. Введено понятие мульти-переключателя, которое обобщает понятие переключателя, а также разработан метод мульти-переключателей, который позволяет по специальным решениям теоретико-множественного уравнения Янга-Бакстера строить представления групп (виртуальных) кос автоморфизмами алгебраических систем, а также инварианты (виртуальных) зацеплений, которые являются алгебраическими системами.

С помощью этого метода построены новые представления групп B_n, VB_n автоморфизмами, а также установлено, что все известные на данный момент представления групп B_n, VB_n автоморфизмами групп могут быть построены с помощью данного метода. Более того, с помощью этого метода построены новые инварианты классических и виртуальных зацеплений, а также установлено, что многие известные инварианты, которые являются алгебраическими системами, могут быть получены, используя данный метод.

Указанный результат частично решает вопросы **(A.1)**, **(A.2)** для классических и виртуальных кос, а также частично решает вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для классических и виртуальных узлов.

2. Построен полный быстро вычислимый инвариант для узлов с двойными спайками со значениями в свободной абелевой группе бесконечного ранга.

Данный результат полностью решает вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для узлов с двойными спайками.

3. Построен виртуальный квандл для зацеплений в линзовых пространствах $L(p,q)$, порождающие и определяющие соотношения которого могут быть напрямую найдены из диаграммы зацепления в $L(p,q)$. Этот виртуальный квандл может отличать зацепления с эквивалентными поднятиями.

Данный результат частично решает вопросы **(B.1)**, **(B.2)** для узлов в линзовых пространствах.

4. Исследованы связи между аддитивной и мультипликативной группами двусторонних косых брэйсов. В частности, установлено, что если A – такой двусторонний косой брэйс, что мультипликативная группа $A_{\odot}$ нильпотентна ступени k, то аддитивная группа $A_{\oplus}$ разрешима ступени не выше $2k$. Более того, установлено, что если A – такой конечный двусторонний косой брэйс, что аддитивная группа $A_{\oplus}$ разрешима, то мультипликативная группа $A_{\odot}$ также разрешима.

Данный результат полностью решает вопрос **(C.3)** для двусторонних косых брэйсов. На пути к получению этого результата полностью решены вопросы **(C.1)**, **(C.2)**.

5. Исследованы классы скрученной сопряженности и свойство R_∞ в линейных алгебраических группах. В частности, установлено, что все редуктивные линейные алгебраические группы над полем F нулевой характеристики с $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}F < \infty$ обладают свойством R_∞, а группы Шевалле типов A_n, B_n, C_n, D_n над полем F нулевой характеристики с $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}F = \infty$ не обладают

свойством R_∞. Более того, изучены свойства класса скрученной сопряженности единичного элемента в различных группах и их связь со свойствами самой группы и ее строением.

Данный результат полностью решает вопрос **(D.2)** для групп Шевалле классических серий.

Благодарности

Я выражаю искреннюю благодарность своему научному консультанту Валерию Георгиевичу Бардакову за неизменную всестороннюю помощь и поддержку. Его вклад в мое развитие как математика, а также постоянная поддержка неоценимы. Я также искренне благодарю Евгения Петровича Вдовина за регулярную помощь и консультации в ходе выполнения работы, а также за увлекательные беседы о математике в целом. Бóльшая часть работы была выполнена во время моей стажировки в университете Болоньи (Италия) и Католическом университете Левена (Бельгия), и я благодарен этим университетам, всем сотрудникам и студентам кафедр алгебры, геометрии и топологии этих университетов и, особенно, профессору М. Мулацани (университет Болоньи) и профессору К. Декимпе (Католический университет Левена) за их помощь и поддержку. Я также признателен всем сотрудникам лаборатории алгебры Института математики им. С. Л. Соболева и кафедры алгебры и логики Новосибирского государственного университета. Присущая этим коллективам творческая и благожелательная атмосфера располагает к плодотворной научной деятельности.

Литература

[1] В. А. Васильев. Топология дополнений к дискриминантам. – М.: Фазис. – 1997.

[2] Д. В. Горковец. Дистрибутивные группоиды для узлов в проективном пространстве // Вестник ЧелГУ. – Т. 10. – 2008. – С. 89–93.

[3] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Под ред. В. Д. Мазурова и Е. И. Хухро // 19-е изд. – 2018. – Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева.

[4] В. О. Мантуров. Инварианты виртуальных зацеплений // Докл. РАН. – Т. 384, № 1. – 2002. – С. 11–13.

[5] С. В. Матвеев. Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Матем. сб. – Т. 119(161), № 1(9). – 1982. – С. 78–88.

[6] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. – М.: МЦНМО. – 1997.

[7] E. Artin. Theorie der Zopfe // Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. – V. 4. – 1925. – P. 47–72.

[8] B. Audoux, P. Bellingeri, J.-B. Meilhan, E. Wagner. Extensions of some classical local moves on knot diagrams // Michigan Math. J. – V. 67, № 3. – 2018. – P. 647–672.

[9] V. Bardakov, P. Bellingeri, C. Damiani. Unrestricted virtual braids, fused links and other quotients of virtual braid groups // J. Knot Theory Ramifications. – V. 24, № 12. – 2015.

[10] R. Baxter. Partition function of the eight-vertex lattice model // Ann. Physics. – V. 70. – 1972. – P. 193–228.

[11] R. Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics. – Academic Press, Inc., London. – 1982.

[12] D. Buck, M. Mauricio. Connect sum of lens spaces surgeries: application to Hin recombination // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – V. 150. – 2011. – P. 505–525.

[13] W. Burau. Uber Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. – V. 11. – 1936. – P. 179–186.

[14] N. Byott. Solubility criteria for Hopf-Galois structures // New York J. Math. – V. 21. – 2015. – P. 883–903.

[15] A. Cattabriga, E. Manfredi, L. Rigolli. Equivalence of two diagram representations of links in lens spaces and essential invariants // Acta Math. Hungar. – V. 146, № 1. – 2015. – P. 168–201.

[16] E. Clark, M. Saito, L. Vendramin. Quandle coloring and cocycle invariants of composite knots and abelian extensions // J. Knot Theory Ramifications. – V. 25, № 5. – 2016.

[17] A. Crans, A. Henrich, S. Nelson. Polynomial knot and link invariants from the virtual biquandle // J. Knot Theory Ramifications. – V. 22, № 4. – 2013.

[18] A. Fel'shtyn, E. Gonçalves. Twisted conjugacy classes in symplectic groups, mapping class groups and braid groups (with an appendix written jointly with Francois Dahmani) // Geom. Dedicata. – V. 146. – 2010. – P. 211–223.

[19] A. Fel'shtyn, E. Troitsky. Aspects of the property R_∞ // J. Group Theory. – V. 18, № 6. – 2015. – P. 1021–1034.

[20] A. Fel'shtyn, R. Hill. The Reidemeister zeta function with applications to Nielsen theory and a connection with Reidemeister torsion // K-Theory. – V. 8, № 4. – 1994. – P. 367–393.

[21] R. Fenn, M. Jordan-Santana, L. Kauffman. Biquandles and virtual links // Topology Appl. – V. 145, № 1–3. – 2004. – P. 157–175.

[22] R. Fenn, R. Rimanyi, C. Rourke. The braid–permutation group // Topology. – V. 36, № 1. – 1997. – P. 123–135.

[23] A. Fish, E. Keyman. Classifying links under fused isotopy // J. Knot Theory Ramifications. – V. 25, № 7. – 2016.

[24] B. Gabrovšek, E. Manfredi. On the Seifert fibered space link group // Topology Appl. – V. 206. – 2016. – P. 255–275.

[25] L. Guarnieri, L. Vendramin. Skew braces and the Yang-Baxter equation // Math. Comp. – V. 86, № 307. – 2017. – P. 2519–2534.

[26] D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. – V. 23. – 1982. – P. 37–65.

[27] Z. Kadar, P. Martin, E. Rowell, Z. Wang. Local representations of the loop braid group // Glasgow Math. J. – V. 59. – 2017. – P. 359–378.

[28] T. Kanenobu. Forbidden moves unknot a virtual knot // J. Knot Theory Ramifications. – V. 10, № 1. – 2001. – P. 89–96.

[29] L. Kauffman. Virtual knot theory // Eur. J. Comb. – V. 20. – 1999. – P. 663–690.

[30] R. Lawrence. Homological representations of the Hecke algebra // Comm. Math. Phys. – V. 135, № 1. – 1990. – P. 141–191.

[31] V. Manturov. On invariants of virtual links // Acta Appl. Math. – V. 72, № 3. – 2002. – P. 295–309.

[32] W. Rump. Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation // J. Algebra. – V. 307, № 1. – 2007. – P. 153–170.

[33] A. Smoktunowicz, L. Vendramin. On skew braces (with an appendix by N. Byott and L. Vendramin) // J. Comb. Algebra. – V. 2, № 1. – 2018. – P. 47–86.

[34] R. Steinberg. Endomorphisms of Linear Algebraic Groups. – Memoirs of AMS. – V. 80. – 1968.

[35] S. Stevan. Torus knots in lens spaces and topological strings // Ann. Henri Poincare. – V. 16, № 8. – 2015. – P. 1937–1967.

[36] C. Tsang, Q. Chao. On the solvability of regular subgroups in the holomorph of a finite solvable group // Internat. J. Algebra Comput. – V. 30, № 2. – 2020. – P. 253–265.

[37] C. Yang. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction // Phys. Rev. Lett. – V. 19. – 1967. – P. 1312–1315.

Работы автора по теме диссертации

[38] В. Г. Бардаков, Т. Р. Насыбуллов, М. В. Нещадим. Классы скрученной сопряженности единичного элемента // Сиб. мат. журн. – Т. 54, № 1. – 2013. – С. 20–34.

[39] В. Г. Бардаков, Т. Р. Насыбуллов. Мульти-переключатели, представления виртуальных кос и инварианты виртуальных узлов // Алгебра и Логика – Т. 59, № 4. – 2020. – С. 500–506.

[40] Т. Р. Насыбуллов. Классы скрученной сопряженности в общей и специальной линейных группах // Алгебра и Логика. – Т. 51, №3. – 2012. – С. 331-346.

[41] Т. Р. Насыбуллов. Классы скрученной сопряженности в группах Шевалле // Алгебра и Логика. – Т. 53, № 6. – 2014. – С. 735–763.

[42] V. Bardakov, T. Nasybullov. Embeddings of quandles into groups // J. Algebra Appl. – V. 19, № 7. – 2020.

[43] V. Bardakov, T. Nasybullov. Multi-switches and virtual knot invariants // Topology Appl. – V. 293. – 2021.

[44] V. Bardakov, T. Nasybullov, M. Singh, Automorphism groups of quandles and related groups // Monatsh. Math. – V. 189, №. 1. – 2019. – P. 1–21.

[45] A. Cattabriga, T. Nasybullov, Virtual quandle for links in lens spaces // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM. – V. 112, № 3. – 2018. – P. 657–669.

[46] A. Fel'shtyn, T. Nasybullov. The R_∞ and S_∞ properties for linear algebraic groups // J. Group Theory. – V. 19, № 5. – 2016. – P. 901–921.

[47] D. Gonçalves, T. Nasybullov. On groups where the twisted conjugacy class of the unit element is a subgroup // Comm. Algebra. – V. 47, № 3. – 2019. – P. 930–944.

[48] T. Nasybullov. Twisted conjugacy classes in unitriangular groups // J. Group Theory. – V. 22, № 2. – 2019. – P. 253–266.

[49] T. Nasybullov. Reidemeister spectrum of special and general linear groups over some fields contains 1 // J. Algebra Appl. – V. 18, № 8. – 2019.

[50] T. Nasybullov. The R_∞-property for Chevalley groups of types B_l, C_l, D_l over integral domains // J. Algebra. – V. 446. – 2016. – P. 489–498.

[51] T. Nasybullov. Chevalley groups of types B_n, C_n, D_n over certain fields do not possess the R_∞-property // Topol. Methods Nonlinear Anal. – V. 56, № 2. – 2020. – P. 401–417.

[52] T. Nasybullov. Connections between properties of the additive and the multiplicative groups of a two-sided skew brace // J. Algebra. – V. 540. – 2019. – P. 156–167.

[53] T. Nasybullov. Classification of fused links // J. Knot Theory Ramifications. – V. 25, № 14. – 2016.