На правах рукописи

Кравцова Ольга Вадимовна

ВОПРОСЫ СТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ КВАЗИПОЛЕЙ И ГРУПП КОЛЛИНЕАЦИЙ ПОЛУПОЛЕВЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Красноярск – 2022

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Научный консультант:

д-р физ.-мат. наук, профессор, академик РАО **Подуфалов Николай Дмитриевич**

Официальные оппоненты:

Бардаков Валерий Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, доцент, ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», лаборатория обратных задач математической физики, главный научный сотрудник

Крылов Петр Андреевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет», кафедра алгебры, заведующий кафедрой

Махнев Александр Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАН, ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук», отдел алгебры и топологии, заведующий отделом

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»

Защита состоится 16 сентября 2022 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» https://www.sfu-kras.ru

Автореферат разослан «___» июня 2022 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Е. Мих Михалкин Евгений Николаевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. Известно, что конечная дезаргова проективная плоскость всегда координатизируется полем, а ее группа коллинеаций неразрешима, по основной теореме проективной геометрии. Понятие проективной плоскости сформировалось еще в 19-м веке, см. монографию М. Холла [1], глава 20 и дополнение к ней на стр. 459.

В диссертации исследуются конечные недезарговы проективные плоскости трансляций вместе с их группами коллинеаций. Для координатизации таких плоскостей с начала прошлого века применяют понятия полуполя (отказываясь в понятии поля от коммутативности и ассоциативности) и квазиполя (ослабляется также двусторонняя дистрибутивность до односторонней).

Центральной для диссертационного исследования является гипотеза 1959 года Д. Хьюза [2] о разрешимости группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости. С 1960-х годов и ранее гипотеза подтверждалась для плоскостей ранга два над двумя из трех полу-ядер, для p-примитивных полуполевых плоскостей порядка p^4 и других специфических классов полуполевых плоскостей, Д. Кнут [3], Д. Хьюз и М. Каллахер [4], Т. Остром [5], М. Ганли и В. Джа [6, 7], Х. Хуанг и Н. Джонсон [8], М. Кордеро [9]. Гипотеза редуцируется к вопросу о разрешимости группы автотопизмов (то есть коллинеаций, фиксирующих треугольник), см. монографию Д. Хьюза и Ф. Пайпера [10].

Недезарговы проективные плоскости и неассоциативные алгебраические системы находят применение в криптографии и теории кодирования (см. В. Т. Марков, А. В. Михалев, А. А. Нечаев [11], Н. Д. Подуфалов [12]).

Результаты исследования конечных квазиполей и ассоциированных плоскостей, полученные к 2007 году, отражает объемный обзор Н. Джонсона, В. Джа и М. Билиотти [13]. Они систематически используют методы компьютерной алгебры, начиная с работ Д. Кнута и Э. Клейнфилда [14, 15].

С другой стороны, с 1980-х годов Н. Д. Подуфалов акцентировал важность использования регулярных множеств при построении и изучении проективных плоскостей и записал **проблему Хьюза** в Коуровской тетради [16] (вопросы 9.43, 10.48, 11.76, 11.77 и 12.66). В 2003 году У. Кантор [17] записал: «Исследование конечных коммутативных полуполей начато Диксоном почти столетие назад … . Удивительно, что до сих пор о них так мало известно».

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00968 А, 15-01-04897 А, 16-01-00707 А, 19-01-00566 А) и Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2022-876).

Ясно, что если неразрешимая группа коллинеаций существует, то ее минимальная неразрешимая подгруппа G либо сама, либо ее фактор-группа является минимальной простой неабелевой группой. Давний интерес вызывал случай, когда G – простая неабелева группа наименьшего возможного порядка, то есть

$$G \simeq A_5 \simeq SL(2,4) \simeq PSL(2,5).$$

По теореме Томпсона [18], минимальная конечная простая неабелева группа изоморфна одной из групп $SL(2,2^p)$ или $PSL(2,3^p)$ (p – простое число), групп $PSL(2,p)$ ($p>3$), групп Судзуки $Sz(2^p)$ ($p>2$) или группе $PSL(3,3)$.

Отметим, что данная теорема и метод регулярного множества представляют реальный путь исследования контрпримера к гипотезе Хьюза.

Предположение о разрешимости группы коллинеаций любой конечной недезарговой плоскости трансляций не верно. Плоскости, допускающие простые неабелевы группы $Sz(2^p)$, $PSL(2,p)$ и другие, см., например, [19, 20].

Мультипликативную лупу ненулевых элементов квазиполя Q обозначим через Q^*. Если ее исчерпывают левоупорядоченные степени фиксированного элемента, то Q и Q^* называют *левопримитивными*; аналогично вводят *правопримитивность.*

С 1991 года известна **гипотеза Г. Венэ** [21]: *Всякое конечное полуполе левопримитивно или правопримитивно.*

В 2004 году контрпример к гипотезе Венэ – *полуполе Кнута–Руа* – нашел И. Руа [22], пользуясь классификацией Д. Кнута полуполей порядка 32. Другой контрпример дает *полуполе Хентзела–Руа* порядка 64, указанное в 2007 году в [23]. Гипотеза подтверждена в [24] для полуполей порядков 81, 125, 243, более общие результаты получены И. Руа, Р. Гау, Д. Шики, М. Кордеро и В. Джа. Контрпримеры полуполей нечетного порядка до сих пор не найдены. Работы по гипотезе Венэ и проблеме Хьюза для плоскостей малых порядков, как правило, используют вычислительную технику.

Вопросы строения полуполей и квазиполей возникали в той или иной степени с 1970-х годов. Следующие вопросы В. М. Левчук выделил в 2013 году на семинаре кафедры высшей алгебры МГУ и в 2014 году на конференции [25] и в статье [26].

(A) *Перечислить максимальные подполя квазиполя Q, найти их число и возможные порядки.*

(B) *Выявить конечные квазиполя Q с неоднопорожденной лупой Q^*.*

Гипотеза: *лупа Q^* всякого конечного полуполя Q однопорождена.*

Теоретико-групповое понятие порядка элемента переносится на лупы в [26]; там же введены левый и правый порядки элемента, спектр, левый и правый спектры лупы.

(C) *Выявить возможные спектры лупы Q^* конечного полуполя и квазиполя Q.*

Для квазиполей и полуполей X. Цассенхауз, Д. Кнут, А. А. Альберт и другие (см. обзоры [10], [13]) исследовали автоморфизмы, в частности, вопрос

(D) *Найти порядок группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, Q$.*

Известно, что ядро конечного квазиполя является подполем и поэтому содержит простое подполе [10]. В случае полуполя простое подполе лежит в центре, но это не всегда верно даже для ассоциативного квазиполя (почти-поля).

В [1] выделено *квазиполе Холла* как квазиполе Q степени 2 над центром F, совпадающим с ядром, характеризуемое также квадратичным неприводимым многочленом f над центром. Из теоремы М. Холла [1, Теорема 20.4.7] сразу же следует, например, когда коэффициенты многочлена f лежат в простом подполе, что единственным максимальным подполем в Q является центр F.

Вопросы **(A)–(C)** решены П. К. Штуккерт в кандидатской диссертации (см. [68], [26], а также [27], [54]) полностью для полуполей наименьшего порядка 16 (согласно [26] и Э. Клейнфилду [15], их всего 16, с точностью до изоморфизмов и антиизоморфизмов) и для представителей классов изотопизма полуполей и квазиполей порядка 32.

Отметим, что теоремы Лагранжа, Силова и другие классические теоретико-групповые теоремы удается переносить на бинарно ассоциативные лупы или *лупы Муфанг.* (А. Н. Гришков, А. В. Заварницин [28, 29], С. М. Гагола [30] и др.). По теореме Артина–Цорна, альтернативное или бинарно ассоциативное конечное полуполе является полем. Более того, как доказал А. А. Альберт [31], конечное полуполе характеристики > 2 с ассоциативными степенями является полем, если порядок его центра больше пяти.

Л. Диксон выделил широкий класс почти-полей $DF(p^l, n)$ (*почти-поля Диксона*) с центром $GF(p^l)$, где n – степень расширения почти-поля над центром. В 1936 году X. Цассенхауз [32] доказал, что кроме почти-полей Диксона существует только семь исключительных конечных почти-полей.

По аналогии с конечными полями, для любого почти-поля $Q \in DF(p^l, n)$ в 1971 году С. Данкс [33] установила биективное соответствие между под-почти-полями и делителями числа ln. Для любого конечного почти-поля У. Фелгнер [34] в 1978 году доказал единственность максимального подполя, содержащего центр. Естественны вопросы о возможном числе максимальных подполей и об ограниченности их числа в совокупности. В 2019 году на семинаре кафедры высшей алгебры МГУ В. М. Левчук поставил вопрос:

(A1) *Существует ли такое натуральное число N, что число максимальных подполей в произвольном конечном почти-поле меньше, чем N?*

Вопрос о существовании квазиполей, мультипликативная лупа которых есть лупа Муфанг, отмечал А. В. Заварницин на Мальцевских чтениях в 2020 году.

Отметим, что ослабление ассоциативности до условия ассоциативности степеней элементов квазиполя является предельным, когда известные методы исследования кольца многочленов продолжают работать.

Целью диссертации является развитие направления:

– исследования групп коллинеаций проективных плоскостей и разработка решения проблемы Хьюза на основе метода регулярного множества и теоремы Томпсона о минимальных конечных простых неабелевых группах;

– решение или существенное продвижение в решении вопросов **(A)–(D), (A1)** для конечных полуполей и квазиполей с ослабленной ассоциативностью.

Основные методы исследования. С 2000-х годов автор развивала метод регулярного множества как для построения проективных плоскостей, так и для построения координатизирующих полуполей и квазиполей. Наряду с методами компьютерной алгебры используются общие методы линейной алгебры, теории групп, колец и конечных полей.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться в развитии направления проективных плоскостей трансляций и координатизирующих квазиполей, криптографии и информационной безопасности, а также в специальных курсах для бакалавров, магистрантов и аспирантов математических направлений подготовки.

Апробация диссертации. Результаты диссертации апробировались на алгебраических семинарах в МГУ (2019), ИМ СО РАН (Новосибирск, 2019-2020), ИМФИ СФУ (2015–2022). Они были представлены на Международных алгебраических конференциях (Москва, 1998, 2018, 2019; Екатеринбург, 2021), на международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2016, 2021) и на Международных конференциях «Group theory in Ankara» (Анкара, 2019), «Алгебра и ее приложения» (Красноярск, 2002, 2007), «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2014), «Группы и графы», G2A2

(Екатеринбург, 2015; Новосибирск, 2016), «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2010, 2013, 2016), «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017), «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2018), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2020, 2021), «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, 2021, 2022), на XIII школе-конференции по теории групп (Екатеринбург, 2020), на Всероссийских конференциях по математике и механике (Томск, 2018) и «Алгебра и теория алгоритмов» (Иваново, 2018), на Всесибирском Конгрессе женщин-математиков (Красноярск, 2004, 2006, 2012).

Основные публикации. Список публикаций по теме диссертации включает 25 статей [45]–[69] в рецензируемых журналах. Все основные результаты диссертации опубликованы в 23 статьях [45]–[67] изданий перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 225 страницах. Она состоит из введения, семи глав и списка литературы из 193 наименований. Номер теоремы, леммы и др. включает последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе; нумерация таблиц сквозная.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Продвижение в диссертации решения проблемы Хьюза соответствует классификации Томпсона минимальных конечных простых неабелевых групп.

Пусть π – недезаргова полуполевая проективная плоскость порядка p^N, где p – простое число и $N = 2^m \cdot s$, где s нечетно. Размерность N координатизирующего полуполя над его простым подполем в дальнейшем называется *рангом.*

К **основным результатам** диссертации относятся следующие.

1. Доказано, что при $p > 2$ в группе автотопизмов плоскости π нет подгрупп, изоморфных A_5. Если $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, причем $m \leq 1$ или $N = 4$, то нет и подгрупп, изоморфных $SL(2, 5)$.

2. Доказано, что при $p > 2$ в группе автотопизмов плоскости π нет подгрупп, изоморфных группе Судзуки $Sz(2^n)$ для всех $n > m$.

3. Доказано, что при $p \equiv 1 \pmod 4$ в группе автотопизмов плоскости π нет диэдральной группы порядка 8 без гомологий.

4. Доказано, что при $p \not\equiv -1 \pmod 4$ в группе автотопизмов плоскости π нет подгрупп, изоморфных $PSL(2, q)$, где $q \equiv 1 \pmod{2^{m+2}}$.

5. Вопросы **(A)**–**(D)** строения конечных квазиполей завершены для полуполей порядка 16 и решены:

– для полуполей Кнута–Руа и Хентзела–Руа,

– для полуполей порядков 3^4, 5^4, 13^4 с ограничениями.

6. Для квазиполей порядка 25 дан отрицательный ответ на вопрос А. В. Заварницина о существовании квазиполей, мультипликативная лупа которых есть лупа Муфанг.

7. Вопросы **(A)**–**(D)**, в основном, решены для всех конечных почти-полей. Доказано существование минимальных собственных почти-полей произвольной простой степени расширения $n > 2$ над центром. Вопрос **(A1)** об ограниченности, в целом, числа максимальных подполей конечного почти-поля решен отрицательно даже в классе минимальных собственных почти-полей.

Другие результаты, имеющие самостоятельное значение, следующие.

8. Построено матричное представление регулярного множества и примеры конечных квазиполей и полуполевых проективных плоскостей с ограничениями, в том числе новые примеры 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81, дополняющие список М. Кордеро. Примеры найдены с помощью авторских компьютерных программ.

9. Разработан метод односторонне упорядоченных минимальных многочленов в конечных полуполях, обобщающий классическое понятие минимального многочлена элемента конечного поля.

Глава 1 содержит, главным образом, основные определения и технические результаты, необходимые для дальнейшей работы.

В § 1.1 вводятся определения квазиполя, полуполя, почти-поля, лево- и правоупорядоченных степеней элементов мультипликативной лупы, левых и правых порядков, левых и правых спектров.

В § 1.2 приводится используемая терминология, в соответствии, в основном, с монографией Д. Хьюза и Ф. Пайпера [10]. Перечисляются основные понятия проективной геометрии, кратко описывается схема координатизации конечной проективной плоскости, устанавливается связь геометрических свойств плоскости и алгебраических свойств координатизирующего множества.

Основные задачи диссертационной работы перечисляются в § 1.3.

Глава 2 содержит предварительное обсуждение предлагаемой программы решения проблемы Хьюза и описание основного применяемого метода.

В § 2.1 вводится основное для дальнейших исследований понятие регулярного множества (spread set) плоскости трансляций и, соответственно, координатизирующего квазиполя. Устанавливается естественная взаимосвязь между свойствами регулярного множества и свойствами квазиполя. Приводится обоснование представления регулярного множества над простым подполем квазиполя (так называемого «гиперкуба», в случае полуполя).

В § 2.2 кратко описываются особенности строения группы коллинеаций полуполевой проективной плоскости. Вводятся понятия ядер полуполя, группы автотопизмов, приводится матричное представление центральных коллинеаций в группе автотопизмов.

§ 2.3 посвящен обсуждению гипотезы разрешимости недезарговой полуполевой проективной плоскости конечного порядка, с обоснованием редукции к разрешимости группы автотопизмов и, далее, к случаю существования бэровской инволюции в группе автотопизмов. Перечислены некоторые известные результаты, в том числе доказанные автором в кандидатской диссертации (теорема 2.3.2, подробно обзор [46]). Предложена программа дальнейшего исследования проблемы.

Результаты, приведенные в главах 1–2, являются, в-основном, известными фактами. Лемма 2.1.5 доказана автором в [53], лемма 2.2.6 опубликована в совместной работе [46] (соавторы Н. Д. Подуфалов, Б. К. Дураков, Е. Б. Дураков) в нераздельном соавторстве.

В **главе 3** рассматривается проблема Хьюза. В предположении неразрешимости группы автотопизмов недезарговой полуполевой плоскости конечного порядка среди композиционных факторов должны быть простые неабелевы группы [35, гл. 5, § 16]. Представленная программа исследований заключается в исключении из списка подгрупп группы автотопизмов некоторых минимальных простых групп. Особое внимание уделяется знакопеременной группе A_5 и диэдральной группе D_8 – подгруппам значительного количества простых неабелевых групп.

Основным результатом главы 3 является доказательство для любой недезарговой полуполевой плоскости нечетного порядка отсутствия в группе автотопизмов подгруппы, изоморфной A_5, и при условии на характеристику основного поля – изоморфной D_8. Для доказательства потребовалось построить матричное представление регулярного множества для полуполевых плоскостей с ограничениями на группу автотопизмов.

В § 3.1 построено матричное представление бэровской инволюции в группе автотопизмов полуполевой плоскости конечного порядка, а также матричное представление регулярного множества плоскости, допускающей бэровскую инволюцию – отдельно для четного и для нечетного порядков.

Основными результатами этого параграфа являются теоремы 3.1.2, 3.1.3, 3.1.5, обобщающие двумерный случай, рассмотренный М. Билиотти и другими в [36], на случай линейного пространства произвольной размерности над полем простого порядка.

В § 3.2 получено матричное представление элементарной абелевой 2-подгруппы в группе автотопизмов полуполевой плоскости, единообразное для случаев четного и нечетного порядка (теорема 3.2.1). Если такая подгруппа порядка 2^m порождена бэровскими инволюциями, фиксирующими поточечно различные бэровские подплоскости, то ранг N плоскости π делится на 2^m. К основным результатом параграфа также относится

Теорема 3.2.4. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N ($p > 2$ – простое). Если N не делится на 2^{2m+1}, то группа автотопизмов плоскости π не содержит подгрупп, изоморфных $Sz(2^{2n+1})$ для всех $n \geq m$.*

Для случая полуполевой плоскости четного порядка теорема 3.2.8 и предложение 3.2.9 обсуждают возможность существования подгруппы, изоморфной знакопеременной группе A_4, в группе автотопизмов.

Метод регулярного множества применен в § 3.3 для установления естественного ограничения на порядок 2-элементов в группе автотопизмов, а также для записи матричного представления автотопизмов порядка 4. Основной результат представлен в следующей теореме.

Теорема 3.3.3. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка p^N, p – простое, $p \not\equiv -1 \pmod 4$. Если α – автотопизм порядка 2^n плоскости π и группа $\langle\alpha\rangle$ не содержит гомологий, то N делится на 2^n.*

Следствие 3.3.8 выделяет группы $PSL(2, q)$, которые не могут быть подгруппами автотопизмов полуполевой плоскости данного порядка.

Следствие 3.3.8. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N, где $p = 2$ или $p \equiv 1 \pmod 4$, $N = 2^m \cdot s$, s нечетно. Группа автотопизмов Λ плоскости π не содержит подгрупп, изоморфных $PSL(2, q)$, где $q-1$ делится на 2^{m+2}.*

Сочетание с результатами предыдущего параграфа выявляет еще один класс полуполевых плоскостей с разрешимой группой коллинеаций (следствие 3.3.7).

Матричное представление регулярного множества полуполевой плоскости нечетного порядка, допускающей подгруппу автотопизмов, изоморфную A_4, найдено в § 3.4 (теорема 3.4.2). Для плоскости нечетного порядка ранга 2 над ядром показано, что такая подгруппа автотопизмов отсутствует (лемма 3.4.1).

Параграф 3.5 посвящен доказательству основного результата.

Теорема 3.5.2. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость нечетного порядка p^N ($p > 2$ – простое). Тогда ее группа автотопизмов Λ не может содержать подгруппу, изоморфную знакопеременной группе A_5.*

Эта теорема доказана на основе матричного представления регулярного множества, полученного в теореме 3.5.1. Непосредственно из теоремы 3.5.2 следует, что группа автотопизмов недезарговой полуполевой плоскости произвольного нечетного порядка не может содержать также знакопеременные и симметрические группы A_n и S_n для всех $n \geq 5$, проективные специальные линейные группы $PSL(2, 2^{2n})$, $PSL(2, 5^n)$ для всех $n \geq 1$, а также и некоторые другие неабелевы группы.

Основные результаты § 3.6 доказаны с применением теорем из § 3.2 и 3.3.

Теорема 3.6.1. *Недезаргова полуполевая плоскость π порядка p^N, где $p > 2$ – простое, $p \equiv 1 \pmod 4$, не допускает подгруппы автотопизмов, изоморфной диэдральной группе порядка 8 и не содержащей гомологий.*

К числу основных относится и вытекающая из этого результата теорема 3.6.3. Результаты Д. Голдшмидта о сильно замкнутых подгруппах ([37], см. также Д. Горенстейн [38]) выделяют простые неабелевы группы, не содержащие диэдральной группы D_8.

Теорема 3.6.3. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N, где $p > 2$ – простое, $p \equiv 1 \pmod 4$. Тогда ее группа автотопизмов Λ не содержит простых неабелевых подгрупп, за исключением, возможно, следующих: $PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$, $PSU(3, 2^n)$, $n \geq 2$, $Sz(2^n)$, n нечетно, $n > 1$, $PSL(2, q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, J_1 или ${}^2G_2(3^n)$, n нечетно, $n > 1$.*

Параграф 3.7 посвящен обсуждению возможности существования A_5 как фактор-группы в группе автотопизмов недезарговой полуполевой плоскости нечетного порядка. Так как A_5 изоморфна фактор-группе группы $SL(2, 5)$ по центру, и силовская 2-подгруппа в $SL(2, 5)$ изоморфна группе кватернионов Q_8, то поставлена задача построения матричного представления регулярного множества полуполевой плоскости, допускающей Q_8 в группе автотопизмов. Задача решена в теореме 3.7.1 для полуполевой плоскости нечетного порядка p^N, где $p-1$ делится на 4. Изучение случая $N = 4$ приводит к следующему результату.

Теорема 3.7.2. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость нечетного порядка p^N, $p > 2$ – простое, $p \equiv 1 \pmod 4$. Если $N = 4$ или N не делится на 4, то ее группа автотопизмов Λ не может содержать подгруппу, изоморфную $SL(2, 5)$.*

В § 3.8 метод регулярного множества применяется для изучения полуполевых плоскостей ранга 2 над ядром, допускающих подгруппу автотопизмов, изоморфную S_3. Основные результаты этого параграфа (теоремы 3.8.1, 3.8.3 и 3.8.4) допускают дальнейшее обобщение на многомерный случай.

Результаты третьей главы, относящиеся к бэровской инволюции и группе A_4, опубликованы автором в [50] и [52]; относящиеся к двумерному случаю для A_4 – совместно с дипломницей В. О. Прамзиной в [48], автору принадлежит идея доказательства для группы автотопизмов, дипломнице – перенесение техники на трансляционное дополнение. Основные результаты, связанные с группой A_5, опубликованы совместно с Б. К. Дураковым в [56], а также в [62] без соавторов. Б. К. Дуракову в [56] принадлежит постановка задачи и обсуждение результатов, все результаты доказаны диссертантом лично. Результаты, относящиеся к группе Q_8, опубликованы автором в [63]; об элементарной абелевой 2-подгруппе и группах Судзуки – в [64], о 2-элементах в группе автотопизмов – в [65]. Теоремы о диэдральной группе D_8 представлены в [67]. Результаты, связанные с группой S_3, опубликованы в [58] (соавтор Т. В. Моисеенкова) в нераздельном соавторстве.

В **главе 4** рассматриваются примеры полуполевых плоскостей, иллюстрирующие теоретические результаты главы 3. Запись в общем виде матричного представления регулярного множества полуполевой плоскости при определенных ограничениях на коллинеации не является достаточным условием существования таких плоскостей. Поэтому важно показать, что множество изучаемых объектов не пусто либо, напротив, доказать его пустоту (см. теоремы о подгруппе, изоморфной A_5, 3.5.1 и 3.5.2).

В § 4.1 перечислены минимальные примеры полуполевых плоскостей ранга 2 над ядром, допускающие S_3 в группе автотопизмов (примеры к теоремам 3.8.1 и 3.8.4.) Представлены примеры к теореме 3.1.2 полуполевых плоскостей четного порядка, допускающих бэровскую инволюцию (теорема 4.1.1). Приложениями к теореме 3.7.1 являются примеры полуполевых плоскостей порядков 5^4 и 13^4, допускающих подгруппу автотопизмов, изоморфную группе кватернионов Q_8 (теорема 4.1.2). Кратко описан алгоритм построения полуполевых плоскостей на основе матричного представления их регулярного множества с применением вычислительной техники.

В § 4.2 также обсуждается использование методов компьютерной алгебры для доказательства изоморфизма двух полуполевых плоскостей. Описана возможность оптимизации алгоритма проверки, за счет сокращения перебора, в случае, когда хотя бы одно из ядер координатизирующего полуполя отлично от простого подполя.

Параграф 4.3 посвящен построению примеров полуполевых плоскостей порядка 81, допускающих бэровскую инволюцию (к теореме 3.1.2). Основной результат (теорема 4.3.1) показывает, что все построенные примеры являются 3-примитивными плоскостями. Понятие p-примитивных полуполевых плоскостей возникло в работе Й. Хирамин, М. Мацумото и Т. Ояма [39]. Исследование было продолжено М. Кордеро [40], построившей примеры четырех 3-примитивных плоскостей порядка 81. С использованием результатов И. В. Шевелевой (Бусаркиной) [41] показано существование еще четырех 3-примитивных плоскостей вне перечня М. Кордеро.

Результаты главы 4 о полуполевых плоскостях, допускающих S_3, опубликованы в совместной работе [58] (соавтор Т. В. Моисеенкова) в нераздельном соавторстве. Результаты о полуполевых плоскостях порядков 16 и 81, допускающих бэровскую инволюцию, опубликованы автором в [50, 52], о полуполевых плоскостях, допускающих Q_8 – в [63]. Результаты о 3-примитивных полуполевых плоскостях опубликованы в совместной работе [60] (соавтор И. В. Шевелева), компьютерные вычисления и доказательства основных результатов проведены диссертантом.

Глава 5 посвящена решению вопросов **(A)**–**(D)** для некоторых конечных полуполей. Подчеркнем «аномальность» свойств полуполей даже малых порядков в сравнении с конечными полями. Так, на мультипликативную лупу полуполя не переносится теорема Лагранжа (в отличие от лупы Муфанг), в полуполе возможны несколько подполей одного порядка, причем полуполе не всегда является линейным пространством над своим подполем.

В § 5.1 перечисляются известные классификационные результаты, обсуждается взаимосвязь автотопизмов полуполевой проективной плоскости с автотопизмами и автоморфизмами конечного полуполя (теорема 5.1.7), матричное представление автотопизмов и автоморфизмов с использованием регулярного множества.

В § 5.2 описан геометрический смысл инволютивного автоморфизма конечного полуполя (теорема 5.2.1) и на основе этого результата определен стабилизатор инволютивного автоморфизма (теоремы 5.2.3, 5.2.4). Изучается понятие внутреннего автоморфизма полуполя, введенное Г. Венэ [42]. Лемма 5.2.6 вводит матричное представление внутреннего автоморфизма, теорема 5.2.7 выделяет элементы полуполя, которые не могут порождать нетривиальный внутренний автоморфизм.

Параграф 5.3 вводит понятие лево- и правоупорядоченного минимальных многочленов конечного полуполя, на основе классического понятия минимального многочлена элемента конечного поля, с использованием лево- и правоупорядоченных степеней элемента лупы. Свойства односторонне упорядоченных минимальных многочленов, в сравнении с классическими, демонстрируют теоремы 5.3.5 и 5.3.6. Теорема 5.3.8 выявляет связь правоупорядоченного минимального многочлена элемента с минимальным многочленом ассоциированной матрицы регулярного множества. Следствие 5.3.12 выделяет в конечном полуполе, с использованием минимальных многочленов, объединение всех подполей порядка p^2. При помощи техники минимальных многочленов доказывается также теорема 5.3.13 о минимальных собственных полуполях.

В § 4.5 представлено полное решение вопросов **(A)–(D)** для полуполей порядка 16; это минимальный возможный порядок конечного полуполя. Автор дополняет теорему 5.4.1, доказанную П. К. Штуккерт и В. М. Левчуком [27], более подробной информацией о строении таких полуполей. Эта информация, в том числе об «аномальных» внутренних автоморфизмах, представлена в теоремах 5.4.5, 5.4.6 и табл. 10–13. Кроме записи умножения с помощью регулярного множества, автором предложен способ умножения элементов полуполя, определенный на парах элементов подходящего конечного поля (теорема 5.4.7).

Параграф 5.5 представляет обсуждение гипотезы лево-(право-)примитивности конечного полуполя, выдвинутой Г. Венэ в 1991 г., ее контрпримеров и обобщений. Автор использует введенную технику минимальных многочленов для доказательства лево-(право-)цикличности некоторых полуполей порядка p^4 (теорема 5.5.8).

В § 5.6 и 5.7 представлено полное решение вопросов **(A)–(D)** для исключительных непримитивных полуполей Кнута–Руа порядка 32 и Хентзела–Руа порядка 64, опровергающих гипотезу Венэ, дополненное информацией о внутренних автоморфизмах и минимальных многочленах. Основные результаты этих параграфов изложены в теоремах 5.6.2, 5.6.3, 5.7.1 и табл. 14–15.

Параграф 5.8 содержит решение вопросов **(A)–(D)** для некоторых полуполей порядка p^4, $p = 3, 5, 13$, построенных для иллюстрации теоретических результатов главы 3 (подробнее эти примеры описаны в главе 4). Основными результатами параграфа являются теоремы 5.8.1, 5.8.2, 5.8.3, информация обобщена в табл. 16–19.

Теоремы об автотопизмах, автоморфизмах и минимальных многочленах опубликованы автором в [53] и [55]. Результаты о полуполях порядка 16 и исключительных полуполях порядков 32 и 64 получены автором лично и опубликованы в совместной работе [54] (соавтор В. М. Левчук), а также в [69] – о полуполе Хентзела–Руа. Результаты о полуполях порядка 81 опубликованы в [52], а также, с дополнениями, в совместной работе [60] (соавтор И. В. Шевелева), результаты получены автором лично. Результаты о полуполях порядков 5^4 и 13^4 опубликованы в [63].

Глава 6 содержит решение вопросов **(B)–(D)** для конечных почти-полей. Параграф 6.1 напоминает способ построения конечных почти-полей на основе 2-транзитивных групп, а также конструкцию Диксона–Цассенхауза. Теорема 6.1.6 устанавливает связь между центром, ядром и простым подполем, она демонстрирует, в качестве исключений, точно четыре почти-поля Цассенхауза, в которых простое подполе не лежит в центре.

Параграф 6.2 представляет спектр групповых порядков мультипликативной группы (теорема 6.2.4) и известные результаты Цассенхауза об автоморфизмах почти-полей. Параграф 6.3 предлагает необходимый признак регулярного множества почти-поля порядка q^2 с ядром порядка q (теорема 6.3.2). В § 6.4 кратко представлена взаимосвязь бесконечных точно дважды транзитивных групп с почти-областями и почти-полями. С учетом новых результатов К. Тент и других авторов [43, 44], не каждая почти-область является почти-полем.

Выполнение ассоциативного закона умножения при определенном порядке записи элементов конечной лупы приводит к переносу некоторых важных групповых свойств на лупы Муфанг. Параграф 6.5 представляет обсуждение вопроса А.В. Заварницина (Мальцевские чтения, 2020, устная постановка) о существовании нетривиальных конечных квазиполей с мультипликативной лупой Муфанг. Теорема 6.5.1 использует метод регулярного множества и дает отрицательный ответ для квазиполей порядка 25.

Глава 7 решает, в-основном, вопрос **(A)** о максимальных подполях в конечных почти-полях (§ 7.1, теоремы 7.1.3 и 7.1.4). Решение существенно использует соответствие С. Данкс под-почти-полей и делителей степени расширения почти-поля над простым подполем [33].

В § 7.2 обсуждаются минимальные собственные почти-поля, т.е. нетривиальные почти-поля Q, в которых каждое под-почти-поле $H \neq Q$ является подполем. Теорема 7.2.3 демонстрирует существование минимальных собственных почти-полей в классе почти-полей Диксона $DF(q, n)$ для любого простого $n > 2$.

Теорема 7.2.3. *Для любого простого числа $n > 2$ существует бесконечно много конечных почти-полей степени расширения n над своим центром, в каждом из которых все под-почти-поля являются подполями.*

Для минимальной степени расширения $n = 2$ этот результат, в общем случае, неверен, что показывает теорема 7.2.2. Теорема 7.2.4 представляет отрицательное решение вопроса **(A1)** об ограниченности числа максимальных подполей даже для минимальных собственных почти-полей Диксона.

Теорема 7.2.4. *Для любого натурального числа s существует минимальное собственное почти-поле Диксона, имеющее более чем s максимальных подполей.*

Основные теоремы параграфов 6.2, 7.1 опубликованы в совместной работе [59] (соавтор В. М. Левчук); В. М. Левчуку принадлежит постановка задачи, автору – доказательства результатов. Все теоремы § 7.2 опубликованы автором в [61]. Результаты параграфов 6.3 и 6.5 представлены в совместной работе [66] (соавтор Д. С. Скок, магистрант); автору принадлежат основные теоремы, Д. С. Скок – построение примеров.

Автор выражает благодарность своему научному консультанту Николаю Дмитриевичу Подуфалову за помощь и консультации. Автор благодарит Владимира Михайловича Левчука, научного консультанта докторантуры, за предложенное расширение тематики исследования, за постоянную активную поддержку. Автор выражает искреннюю признательность Борису Константиновичу Дуракову, учителю и руководителю, за всестороннюю помощь, поддержку и постоянное внимание к работе, а также Виктору Даниловичу Мазурову и Анатолию Ильичу Созутову за неизменные интерес и поддержку исследований.

Список литературы

[1] Холл М. Теория групп. – М.: Госиноиздат, 1962, 468 с.

[2] Hughes D. R. Review of some results in collineation groups // Proc. Sympos. Pure Math., American Mathematical Society, Providence, R. I., v. 1 (1959), p. 42–55.

[3] Knuth D. E. Finite semifields and projective planes // J. Algebra, vol. 2 (1965), p. 182–217.

[4] Hughes D. R., Kallaher M. J. On the Knuth semi-fields // Internat. J. Math. & Math. Sci., vol. 3 (1980), no. 1, p. 29–45.

[5] Ostrom T. G. Translation planes of odd order and odd dimension // Internat. J. Math.& Math. Sci., vol. 2 (1979), no. 2, p. 187–208.

[6] Ganley M. J. Baer involutions in semi-field planes of even order // Geom. Dedi., vol. 2 (1974), p. 499–508.

[7] Ganley M. J., Jha V. On translation planes with a 2-transitive orbit on the line at infinity // Arch. Math., vol. 47 (1986), p. 379–384.

[8] Huang H., Johnson N. L. 8 semifield planes of order 8^2 // Discrete Math., vol. 80 (1990), no. 1, p. 69–79.

[9] Cordero M. Semifield plans of order p^4 that admit a p-primitive Baer collineation // Osaka J. Math., vol. 28 (1991), p. 305–321.

[10] Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes. – Springer–Verlag New–York Inc., 1973, 292 p.

[11] Марков В. Т., Михалев А. В., Нечаев А. А. Неассоциативные алгебраические структуры в криптографии и кодировании // Фундамент. и прикл. матем., т. 21 (2016), № 4, с. 99–124.

[12] Подуфалов Н. Д. О функциях на линейных пространствах, связанных с конечными проективными плоскостями // Алгебра и логика, т. 41 (2002), № 1, с. 83–103.

[13] Johnson N. L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes. – Chapman and Hall, Boca Raton, London, New York, 2007, 861 p.

[14] Knuth D. E. Finite semifields and projective planes (PhD dissertation). – Pasadena: California Inst. of Thechnology, 1963.

[15] Kleinfeld E. Techniques for enumerating Veblen-Wedderburn systems // J. Assoc. Comput. Mach., vol. 7 (1960), p. 330–337.

[16] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь / Сост. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. – 16 изд., доп. – Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2006, 193 с. (Mazurov V. D. and Khukhro E. I. (eds.), The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory, 16th ed., Sobolev Inst. Math., Novosibirsk (2006). 195 p.)

[17] Kantor W. M. Commutative semifields and symplectic spreads // Journal of Algebra, vol. 270 (2003), no. 1, p. 96–114.

[18] Thompson J. G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc., vol. 74 (1968), p. 383–437.

[19] Moorhouse G. E. $PSL(2, q)$ as a collineation group of projective planes of small orders // Geom. Dedicata, vol. 31 (1989), no. 1, p. 63–88.

[20] Büttner W. On 4-Dimensional Translation Planes Admitting a Suzuki Group as Group of Automorphisms // J. Comb. Theory, Ser. A, vol. 37 (1984), no. 1, p. 76–79.

[21] Wene G. P. On the multiplicative structure of finite division rings // Aequationes Math., vol. 41 (1991), no. 1, p. 222–233.

[22] Rúa I. F. Primitive and Non-Primitive Finite Semifields // Commun. Algebra, vol. 22 (2004), p. 223–233.

[23] Hentzel I. R., Rúa I. F. Primitivity of finite semifields with 64 and 81 elements // International Journal of Algebra and Computation, vol. 17 (2007), no. 7, p. 1411–1429.

[24] Rúa I. F., Combarro E. F., Ranilla J. Determination of division algebras with 243 elements // Finite Fields and their Applications, vol. 18 (2012), p. 1148–1155.

[25] Levchuk V. M., Panov S. V., Shtukkert P. K. The structure of finite quasifields and their projective translation planes // Proc. XII Int. conf. on Algebra and Number Theory, Tula (2014), p. 106–108.

[26] Levchuk V. M, Shtukkert P. K. Problems on structure for quasifields of orders 16 and 32 // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, т. 7 (2014), № 3, с. 362–372.

[27] Левчук В. М., Штуккерт П. К. Строение квазиполей малых четных порядков // Тр. ИММ УрО РАН, т. 21 (2015), № 3, с. 197-212.

[28] Grishkov A. N., Zavarnitsyn A. V. Lagrange's theorem for Moufang loops // Math. Proc. Phil. Soc., vol. 139 (2005), p. 41–57.

[29] Grishkov A. N., Zavarnitsyn A. V. Sylow's theorems for Moufang loops // J. Algebra, vol. 321 (2009), no. 7, p. 1813–1825.

[30] Gagola S. M. The conjugacy of triality subgroups of Sylow subloops of Moufang loops // Journal of Group Theory, vol. 13 (2010), is. 6, p. 821–840.

[31] Albert A. A. On nonassociative division algebras // Trans. Amer. Math. Soc., vol. 72 (1952), p. 296–309.

[32] Zassenhaus H. Uber endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Hamburg, vol. 11 (1936), p. 187–220.

[33] Dancs S. The sub-near-field structure of finite near-fields // Bull. Austral. Math. Soc., vol. 5 (1971), p. 275–280.

[34] Felgner U. Pseudo-finite near-fields. – In «Near-rings and near-fields». Elsevier Science Publisher B. V. North-Holland, 1987, p. 15–29.

[35] Курош А. Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967, 648 с.

[36] Biliotti M., Jha V., Johnson N. L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 // Geom. Dedicata, vol. 29 (1989), p. 7–43.

[37] Goldschmidth D. M. 2-fusion in finite groups // Ann. Math., vol. 99 (1974), no 1, p. 70–117.

[38] Gorenstein D. Finite simple groups. An introduction to their classification. Plenum Press, New York, 1982, 352 p.

[39] Hiramine Y., Matsumoto M., Oyama T. On some extension of 1-sread sets // Osaka J. Math., vol. 24 (1987), p. 123–137.

[40] Cordero M. Matrix spread sets of p-primitive semifeld planes // Internat. J. Math. and Math. Sci., vol. 20 (1997), no. 2, p. 293–298.

[41] Подуфалов Н. Д., Бусаркина И. В. Группа автотопизмов полуполевой p-примитивной плоскости порядка q^4 // Алгебра и логика, т. 35 (1996), № 3, с. 334–344.

[42] Wene G. P. Inner automorphisms of finite semifields // Note Mat., vol. 29 (2009), suppl. no. 1, p. 231–242.

[43] Tent K. Sharply 3-tranzitive groups // Advances in Mathematics, vol. 286 (2016), p. 722–728.

[44] Tent K., Ziegler M. Sharply 2-transitive groups // Advances in Geometry, vol. 16 (2016), no. 1, p. 131–134.

Работы автора по теме диссертации

Издания из перечня ВАК

[45] Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К., Кравцова О. В., Дураков Е. Б. О полуполевых плоскостях порядка 16^2 // Сиб. Мат. Журн., т. 37 (1996), № 3, с. 616–623.

[46] Podufalov N. D., Durakov B. K., Busarkina I. V., Kravtsova O. V., Durakov E. B. Some results on finite projective planes // Journal of Mathematical Sciences, vol. 102 (2000), no. 3, p. 4032–4038. (Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К., Бусаркина И. В., Кравцова О. В., Дураков Е. Б. Некоторые результаты о конечных полуполевых плоскостях // Итоги науки и техники, Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры», том 63, Алгебра (1999), № 13.)

[47] Кравцова О. В. Полуполевая плоскость ранга 2, допускающая нелинейную бэровскую инволюцию // Фундамент. и прикл. матем., т. 6 (2000), № 1, с. 163–170.

[48] Кравцова О. В., Прамзина В. О. О подгруппе коллинеаций полуполевой плоскости, изоморфной A_4 // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, т. 4 (2011), № 4, с. 498–504.

[49] Kravtsova O. V., Panov S. V., Shevelyova I. V. Some results on isomorphisms of finite semifield planes // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, т. 6 (2013), № 1, с. 33–39.

[50] Кравцова О. В. Полуполевые плоскости, допускающие бэровскую инволюцию // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», (2013), № 2, с. 26–38.

[51] Дураков Б. К., Кравцова О. В. Построение и исследование полуполевых плоскостей порядка 256 // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева, т. 23 (2013), № 1, с. 207–210.

[52] Кравцова О. В. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_4 // Изв. вузов. Матем., (2016), № 9, с. 10–25 (Russian Math. (Iz. VUZ), vol. 60 (2016), no. 9, p. 7–22).

[53] Kravtsova O. V. On automorphisms of semifields and semifield planes // Сибирские электронные математические известия, т. 13 (2016), с. 1300–1313.

[54] Levchuk V. M., Kravtsova O. V. Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 38 (2017), no 4, p. 688—698.

[55] Kravtsova O. V. Minimal polynomials in finite semifields // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, т. 11 (2018), № 5, с. 588–596.

[56] Кравцова О. В., Дураков Б. К. Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_5 // Сиб. матем. журн., т. 59 (2018), № 2, с. 396–411 (Siberian Math. J., vol. 59 (2018), no. 2, p. 309–322).

[57] Созутов А. И., Кравцова О. В. О KT-полях и точно трижды транзитивных группах // Алгебра и логика, т. 57 (2018), № 2, с. 232–242 (Algebra and Logic, vol. 57 (2018), no. 2, 153-160).

[58] Кравцова О. В., Моисеенкова Т. В. Полуполевые плоскости ранга 2, допускающие группу S_3 // Тр. ИММ УрО РАН, т. 25 (2019), № 4, с. 118–128.

[59] Кравцова О. В., Левчук В. М. Вопросы строения конечных почти-полей // Тр. ИММ УрО РАН, т. 25 (2019), № 4, с. 107–117.

[60] Кравцова О. В., Шевелева И. В. О некоторых 3-примитивных полуполевых плоскостях // Чебышевский сборник, т. 20, (2019), вып. 3, с. 316–332.

[61] Kravtsova O. V. Minimal proper quasifields with additional conditions // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, т. 13 (2020), № 1, с. 104–113.

[62] Kravtsova O. V. On alternating subgroup A_5 in autotopism group of finite semifield plane // Сибирские электронные математические известия, т. 17 (2020), с. 47–50.

[63] Кравцова О. В. Полуполевые плоскости, допускающие группу кватернионов Q_8 // Алгебра и логика, т. 59 (2020), № 1, с. 101–115.

[64] Kravtsova O. V. Elementary abelian 2-subgroups in an autotopism group of a semifield projective plane // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», т. 32 (2020), с. 49–63.

[65] Kravtsova O. V. 2-elements in an autotopism group of a semifield projective plane // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика», т. 39 (2022), с. 96–110.

[66] Кравцова О. В., Скок Д. С. Метод регулярного множества построения конечных квазиполей // Тр. ИММ УрО РАН, т. 28 (2022), № 1, с. 164–181.

[67] Kravtsova O. V. Dihedral group of order 8 in an autotopism group of a semifield projective plane of odd order // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, т. 15 (2022), № 3, с. 379–385.

Другие публикации в рецензируемых журналах

[68] Кравцова О. В., Куршакова (Штуккерт) П. К. К вопросу об изоморфизме полуполевых плоскостей // Вестник КГТУ. Математические методы и моделирование, Красноярск, вып. 42 (2006), с. 13–19.

[69] Кравцова О. В. О гипотезе левопримитивности конечного полуполя // Вестник московского университета им. С. Ю. Витте, серия "Образовательные ресурсы и технологии т. 14 (2016), № 2, с. 330–336