На правах рукописи

Шефер Юлия Львовна

О регуляризации задачи Коши для эллиптических операторов в весовых пространствах и некоторых ее применениях

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Красноярск 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор **Шлапунов Александр Анатольевич**

Официальные оппоненты:
Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт математики им. С.Л. Соболева» СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, главный научный сотрудник;
Фалалеев Михаил Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, заведующий.

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет им. Н.И. Лобачевского», г. Казань.

Защита состоится «15» сентября 2022 г. в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «____» июня 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Е. Мих Михалкин Е.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Теория эллиптических дифференциальных операторов активно развивалась в течении последнего столетия. Многими математиками XX века решались как корректные краевые задачи для них, такие как задача Неймана, Зарембы, Дирихле, так и некорректные, как задача Коши.

Некорректные задачи для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений являются давней проблемой, связанной с приложениями в физике, электродинамике, механики жидкости и т.д. (см., например, книгу М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова и С.П. Шишацкого[1] и др.). Метод регуляризации в рамках теории операторных уравнений в пространствах Банаха (см., например, книгу А.Н. Тихонова и В.Я.Арсенина[2]), как кажется, является наиболее результативным в изучении некорректных задач. Однако, существуют различные способы реализации регуляризации (см., например, работы Л.А. Айзенберга[3] , Т. Карлемана[4] для задач голоморфного продолжения в комплексном анализе и работы В.А. Козлова, В.Г. Мазьи и А.В. Фомина[5], М.М. Лаврентьева[6], В.Г. Мазьи и В.П. Хавина[7] для задачи Коши для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка). Книга Н.Н. Тарханова[8] дает довольно полное описание условий разрешимости и способов регуляризации задачи Коши для эллиптических матричных дифференциальных операторов, имеющих вещественно-аналитические коэффициенты, в пространствах Соболева и пространствах Харди.

Недавно был разработан подход, (см. например, работы Б.В. Шульца , А.А. Шлапунова и Н.Н, Тарханова [9], С. Симанки [10] и др.), который основан

---

[1] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишацкий С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа: учебное пособие // Москва: Наука, 1980.

[2] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач: учебное пособие // Москва: Наука, 1986.

[3] Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения: монография* //-Новосибирск: Наука.

[4] Carleman T. Les fonctions quasianalytiques // Paris:Gauthier-Villars, 1926.

[5] Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.-1991.- Т.31 №1- 45–52 с.

[6] Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР, Т. 112(2), 1957, 195–197.

[7] Мазья В.Г., Хавин В.П. *О решениях задачи Коши для уравнения Лапласа (единственность, нормальность, аппроксимация)* //Тр. ММО. - 1974. - Т.30. - 61–114 с.

[8] Tarkhanov N. *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations* // Berlin, Akademie-Verlag, 1995.

[9] Schulze B.W., Shlapunov A.A., Tarkhanov N. Green integrals on manifolds with cracks // Annals of Global Analysis and Geometry, V.24 (2003), p. 131–160.

[10] Simanca S. Mixed elliptic boundary value problems // Comm. in PDE **12** (1987), 123–200.

на простом наблюдении, что разрешимость задач Коши для эллиптических уравнений эквивалентна разрешимости смешанных краевых задач типа Зарембы для эллиптических уравнений с параметром. Таким образом, можно получить подходящую регуляризацию задачи Коши для эллиптических уравнения в пространствах Соболева, см., например, статью А.А. Шлапунова и Н.Н. Тарханова [11].

Однако локальный анализ формальных решений уравнений с частными производными (особенно в областях с негладкой границей) показывает, что существуют решения с типичным поведением, адекватно описываемым только в весовых пространствах. Неудивительно, что наиболее существенные результаты по смешанным задачам для эллиптических операторов были получены в весовых пространствах Соболева,(см., например, книги М.В. Борсука и В.А. Кондратьева [12], С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [13]). Зачастую, весовые функции выбираются подходящим образом для контроля поведения решения вблизи поверхности границы, где граничные условия меняют свой характер, см., например, статьи А.А. Шлапунова и Н.Н. Тарханова [14]. Другая мотивация введения весовых функций заключается в возможных геометрических особенностях границы области, в которой рассматривается задача. Вот почему хотелось бы строить регуляризации некорректной задачи Коши для эллиптических дифференциальных операторов в подходящих весовых пространствах.

Отметим также, что хотя рассмотренная задача Коши, как хорошо известно, принадлежит классу условно-корректных задач, см. например, работы А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина[2] , Л.А. Айзенберга и Н.Н. Тарханова[15], выделение множеств ее устойчивости не было среди целей диссертации.

Также в работе отмечаются некоторые применения некорректной задачи

---

[11] Shlapunov A.A. and Tarkhanov N. Mixed problems with a parameter // Russ. J. Math. Phys., 12 (2005), N 1, P. 97–124.

[12] Borsuk M., Kondrat'ev V. Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains // Elsevier, Amsterdam-London, 2006.

[13] Nazarov S. A., Plamenevskii B. A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries // Walter de Gruyter, Berlin et al., 1994.

[14] Тарханов Н.Н., Шлапунов А.А. Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I // Мат. труды, 18(1) (2015), 118–189. Тарханов Н.Н., Шлапунов А.А. Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. II // Мат. труды, 18(2) (2015), 133–204. Shlapunov A.A., Tarkhanov N.N. On completeness of root functionsof Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators // Journal of Differential Equations, 255 (2013), 3305-3337.

[15] Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. Условно-устойчивые линейные задачи и формула Карлемана // Сиб. матем. журн., 31:6 (1990), 9–15.

Коши в задачах трансмиссии для дифференциальных уравнений, см., например, работы М.В. Борсука[16] по отношению к эллиптической теории и С.Д. Эйдельмана[17] к параболической. Одним из актуальных примеров является обратная задача электрокардиографии. Именно задача (численной) реконструкции электрической активности сердца по измерениям ЭКГ на поверхности тела имеет важное значение для диагностики и лечения сердечных аритмий, см, например, работы М. Бюргера, К. Мардала и Б. Нильсена[18], Д. Гезеловитца и В. Миллера[19], Ж. Санднеса с соавторами[20] и другие. Эта задача включает в себя несколько краевых задач для эллиптических и параболических дифференциальных операторов. Во-первых, это задача Коши для эллиптических операторов, которую можно рассматривать в рамках теории некорректных задач, см. работы В.А. Козлова, В.Г. Мазьи и А.В. Фомина[5], М.М. Лаврентьева[6], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина[2], Н.Н. Тарханова[8]. Во-вторых, это задача Дирихле и задача Неймана для сильно эллиптических операторов, которые обладают свойством Фредгольма (см., например, работы В.П. Михайлова[21], Д. Гилбарга и Н. Трудингера [22] , В. Маклина [23], Я. Ройтберга[24] и С. Симанки[10]). Модель также содержит эволюционную часть, см. работы Р. Алиева и А. Панфилова[25], Ж. Санднеса с соавторами[20], в которой содержатся довольно общие нелинейные параболические уравнения, которые в некоторых частных случаях могут быть решены классическими методами, см., например, книги О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н.

---

[16] Borsuk M. Transmission problem for Elliptic second-order Equations in non-smooth domains, Birkhäuser, Berlin, 2010.

[17] Эйдельман С.Д. Параболические уравнения // Дифференциальные уравнения с частными производными – 6, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 63, ВИНИТИ, М., 1990, 201–313.

[18] Burger M., Mardal K.A., Nielsen B.F. Stability analysis of the inverse transmembrane potential problem in electrocardiography // Inverse Problems, 26 (2010), 10, 105012.

[19] Geselowitz D.B., Miller V. A bidomain model for isotropic cardiac muscle // Ann. Biomed. Eng., 1983; 11 (3-4), 191–206.

[20] Sundnes J., Lines G.T.,Cai X., Nielsen B.F., Mardal K.A., Tveito A. Computing the Electrical Activity in the Heart // Springer-Verlag, 2006.

[21] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных// М.: Наука, 1976.

[22] Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of second order, Berlin, Springer-Verlag, 1983.

[23]McLean W. Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[24] Roitberg Ya. Elliptic Boundary Value Problems in Spaces of Distributions // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, NL, 1996.

[25] Aliev R.R., Panfilov A.V. A simple two-variable model of Cardiac Excitation // Chaos, Solitons and Fractals, V. 7:3 (1996), 293–301.

Уральцевой [26], Ж. Лионса[27].

В последнее время теоретические исследования стационарной части модели привели к интересным результатам о не единственности и существовании ее решений в пространствах типа Харди, см. статью В. Калинина с соавторами[28]. Статья [6] была посвящена более широкому классу подобных задач трансмиссии в пространствах Соболева в рамках общей теории эллиптических операторов с постоянными коэффициентами. Однако оба результата были получены при следующих предположениях: все эллиптические операторы, задействованные в модели, должны быть пропорциональны.

Цель диссертационной работы: Описать пути регуляризации некорректной задачи Коши для эллиптических уравнений и систем в весовых пространствах Соболева, и указать некоторые применения задачи Коши в задачах трансмиссии.

Основные результаты работы:

1. Доказаны теоремы существования и единственности для одного класса нелинейных возмущений задачи Римана-Гильберта;

2. доказана теорема о разложении Ходжа задачи Дирихле для обобщенного лапласиана в весовых пространствах Соболева;

3. указан один из способов регуляризации решения задачи Коши для эллиптических дифференциальных операторов в весовых пространствах Соболева;

4. доказана теорема единственности одной стационарной задачи трансмиссии, связанной с обобщением обратной задачи электрокардиографии;

5. описаны условия существования решения этой задачи трансмиссии;

6. доказана теорема единственности для одного эволюционного обобщения данной задачи трансмиссии.

[26] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // Москва: Наука, 1967.

[27] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéare // Dunod/Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[28] Kalinin V., Kalinin A., Schulze W.H.W., Potyagaylo D., Shlapunov, A. On the correctness of the transmembrane potential based inverse problem of ECG // Computing in Cardiology, 2017, 1–4.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В работе использованы методы функционального анализа, методы комплексного анализа, а также метод интегральных представлений.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в приложениях математики в физике, электродинамике, механики жидкости, электрокардиологии и др.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих семинарах и научных конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: проспект Свободный», (Красноярск, 2018–2022);

2. Красноярский городской семинар по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2021–2022);

3. Межгородской научно-исследовательский семинар «Неклассические задачи математической физики» (2022);

4. Научный семинар кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений (Сибирский федеральный университет, 2021–2022).

Публикации и личный вклад. Диссертационная работа написана автором самостоятельно. Результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. Основные результаты диссертации опубликованы в 3-х статьях ([4], [5], [6]) и 3-х тезисах ([1], [2], [3]). Все статьи опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций, а статьи [4], [5], [6] опубликованы в журналах, индексируемых в наукометрических базах данных SCOPUS и Web of Science.

Результаты статьи [6] получены автором самостоятельно, статьи [4], [5] получены в неразделимом соавторстве с научным руководителем А.А. Шлапуновым. Личный вклад соавтора в совместные работы составляет 50%.

Финансовая поддержка. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876). Часть результатов диссертационной работы была получена соискателем

при финансовой поддержке фонда развития теоретической физики и математики "Базис".

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 63 наименования, а список работ автора по теме диссертации 6 наименований. Общий объем диссертации: 107 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертационной работы посвящена общим сведениям функционального и комплексного анализа, необходимым для дальнейшего изложения, и некоторым побочным результатам. Результаты данного параграфа опубликованы в [4].

Во **второй главе** описывается один из путей регуляризации некорректной задачи Коши для эллиптических дифференциальных операторов в весовых пространствах Соболева. В **параграфе 2.1** рассматривается один из общих подходов к решению некорректных задач в пространствах Гильберта и уточняется формулировка задачи Коши в весовых пространствах Соболева. Более точно, пусть $\mathcal{A}$ – ненулевой ограниченный линейный оператор, который действует из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2. Как обычно, обозначим через $\ker(\mathcal{A})$ ядро оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}^\star$ обозначает сопряженный оператор к $\mathcal{A}$ (в смысле теории гильбертовых пространств), который действует из H_2 в H_1 и I_{H_j} – единичный оператор в пространстве H_j. Поскольку образ оператора $\mathcal{A}$ может быть не замкнут, то решение операторного уравнения

$$\mathcal{A}u = f \tag{1}$$

может являться некорректной задачей (см. книги[1,2]).

Следующая хорошо известная теорема дает один из возможных путей ее регуляризации, см., например, книгу[1] или статью[29].

Теорема 2.1.1 *Пусть* $a = \max(\|\mathcal{A}\|, 1)$. *Для данного* $f \in H_2$ *существует решение* $u \in H_1$ *уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда*

1. $(f, g) = 0$ *для всех* $g \in \ker(\mathcal{A}^\star)$*;*

[29] Shlapunov A.A. Iterations of self-adjoint operators and their applications to elliptic systems // Math. Nachrichten, 218 (2000), p. 165–174.

2. *ряд Неймана* $u(f) = a^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(I_{H_1} - a^{-2}\mathcal{A}^\star\mathcal{A})^\nu \mathcal{A}^\star f$ *сходится в пространстве* H_1.

Более того, функция $u(f)$ *является единственным решением задачи* (1), *ортогональным к* $\ker(\mathcal{A})$.

В работе задача Коши в ограниченной области $\mathcal{D}$ из $\mathbb{R}^n$ для эллиптического дифференциального оператора $A = A(x, \partial)$ (возможно, обладающего сингулярными коэффициентами младшего порядка) с граничными условиями на относительно открытом множестве S на границе $\partial\mathcal{D}$ сводится к уравнению (1) в подходящих весовых пространствах Соболева $H^{s,\gamma}(\mathcal{D})$, содержащих элементы с предписанными гладкостью $s \in \mathbb{N}$ и ростом вблизи ∂S в $\mathcal{D}$, контролируемым весовой функцией ρ и вещественным числом γ.

Рассмотрим дифференциальный (весовой) матричный оператор первого порядка

$$A = A(x, \partial) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\partial_j + A_0(x)\rho^{-1}(x), \tag{2}$$

где ρ – непрерывная весовая функций, обращающаяся в нулю только на некотором фиксированном множестве $\Xi \subset \mathcal{X}$. Это означает, что A_j является $(l \times k)$-матрицей с гладкими компонентами в $\overline{\mathcal{X}}$ для некоторой области $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что оператор A имеет инъективный символ на $\overline{\mathcal{X}}$, т.е. $l \geq k$ и отображение $\sigma(A)(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\xi_j : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^l$инъективно для всех $x \in \overline{\mathcal{X}}$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

В данной главе рассматривается задача Коши в области $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ на шкале весовых пространств $\left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})\right]^k$, ассоциированных с весовой функцией ρ, см. статью[30]. Дифференциальный оператор A порождает непрерывный линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})\right]^k$ в $\left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l$. Более того, можно рассмотреть задачу Коши с данными на $S \subset \partial\mathcal{D}$: по заданным $g \in \left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l$ и $v_0 \in \left[H^{1/2,\gamma}(\partial\mathcal{D})\right]^k$, найти (если возможно) $v \in \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})\right]^k$, удовлетворяющую

$$\begin{cases} Av = g & \text{в} \quad \mathcal{D}, \\ t_1^{(\gamma)}(v) = v_0 & \text{на} \quad S. \end{cases} \tag{3}$$

Предполагается, что ∂S совпадает с сингулярным множеством Ξ.

Сначала укажем один класс операторов, для которых справедлива теоре-

[30]Тарханов Н.Н., Шлапунов А.А. Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I // Мат. труды, 18(1) (2015), 118–189.

ма единственности для такой задачи Коши.

Предложение 2.1.1 *Пусть элементы матриц A_i, $0 \le i \le n$, вещественно-аналитические в окрестности $\overline{\mathcal{D}}$, ρ вещественно-аналитическая функция вне Ξ. Если S содержит относительно открытое подмножество $\partial\mathcal{D}$, то задача (3) имеет не более одного решения в $\left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})\right]^k$.*

Укажем, когда задача Коши плотно разрешима. В следующей теореме $\left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})\right]^k$ есть замыкание подпространства $\left[C^\infty_{\mathrm{comp}}(\overline{\mathcal{X}} \setminus \Gamma)\right]^k$ в $\left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})\right]^k$.

Теорема 2.1.2 *Пусть $l = k$, элементы матриц A_i, $0 \le i \le n$, вещественно-аналитические, ρ вещественно-аналитическая функция вне Ξ. Если $\partial\mathcal{D}$ гладкая и $\partial\mathcal{D} \setminus \overline{S}$ содержит относительно открытое подмножество $\partial\mathcal{D}$, то дифференциальный оператор A порождает непрерывный линейный оператор*

$$\mathcal{A} : \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})\right]^k \to \left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l, \tag{4}$$

образ которого плотен в $\left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l$.

Далее, для того чтобы построить сопряженный оператор к $\mathcal{A}$ в (4), в **параграфе 2.2** описывается решение вспомогательной задачи Дирихле для сильно эллиптических весовых лапласианов в весовых пространствах Соболева. Хотя задача Дирихле хорошо изучена в различных функциональных пространствах, см., например, пионерскую работу М.И. Вишика[31] или монографию Я. Ройтберга[24] для обычных пространств Соболева, и книги М.В. Борсука и В.А. Кондратьева[12], С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского[13] – для весовых, в диссертации сформулированы и доказаны отдельные результаты о ней в весовых пространствах в некотором специальном виде, позволяющем использовать их как инструмент для изучения задачи Коши и задач трансмиссии. В частности, получена теорема о разложении Ходжа задачи Дирихле для обобщенных лапласианов в весовых пространствах Соболева.

Зафиксируем гладкую ориентированную $(n-1)$-мерную поверхность $\tilde{\Gamma}$ в $\mathcal{X}$. Пусть $\Gamma \subset \mathcal{X}$– замыкание относительно открытого связного множества из $\tilde{\Gamma}$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Gamma$. Будем рассматривать область $\mathcal{X} \setminus \Gamma$ как многообразие с трещиной Γ. Далее, для любой области Ω такой, что $\Omega \setminus \Gamma \subset \mathcal{X} \setminus \Gamma$, и либо $\Gamma \subset \Omega$, либо $\Gamma \subset \partial\Omega$ и Ω имеет липшицеву границу

[31]Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений //Матем. сб.- 1951.- Т.29. №3. 615–676 с.

(случай $\Omega = \mathcal{X} \setminus \Gamma$ включен), введем эрмитову форму первого порядка

$$h_{\Omega,\gamma}(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_j u, \partial_i v)_{H^{0,\gamma}(\Omega)} + (a_{0,0}u, v)_{H^{0,\gamma+1}(\Omega)} +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left((a_{j,0}\partial_j u, \rho^{-1} v)_{H^{0,\gamma}(\Omega)} + (\rho^{-1} u, a_{j,0}\partial_j v)_{H^{0,\gamma}(\Omega)} \right)$$

в пространстве $\left[H^{1,\gamma}(\Omega)\right]^k$, где предполагается, что коэффициенты $a_{i,j}$ суть $(k \times k)$-матрицы с комплекснозначными элементами класса $L^\infty(\mathcal{X})$.

Через $\mathcal{H}_\gamma(\Omega)$ обозначим подпространство в $\left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k$, состоящее из функций w, удовлетворяющих $h_{\Omega,\gamma}(w,v) = 0$ для всех $v \in \left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k$. По теореме о прямой сумме, можно разложить пространство $\left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k$ в виде $\left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k = \mathcal{H}_\gamma(\Omega) \oplus \mathcal{H}_\gamma^\perp(\Omega)$. Такое разложение определяет два ортогональных проектора, из которых нам понадобится один, действующий в $\mathcal{H}_\gamma(\Omega)$ (обозначим его через $\Pi^{(\Omega)}$).

Предположим, что существует положительная константа m_Ω такая, что

$$\|u\|^2_{[H^{1,\gamma}(\Omega)]^k} \le m_\Omega \left(h_{\Omega,\gamma}(u,u) + \|u\|^2_{[H^{0,\gamma}(\Omega)]^k} \right) \tag{5}$$

для всех $u \in \left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k$.

Из предположения следует, что эрмитова форма $h_{\mathcal{X},\gamma}(\cdot,\cdot)$ индуцирует фредгольмовую задачу Дирихле для дифференциального (весового) оператора второго порядка

$$\Delta_\gamma = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{i,j}\partial_j u) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_{j,0}\partial_j u}{\rho} - \partial_j \left(\frac{a^*_{j,0} u}{\rho} \right) \right) + \frac{a_{0,0}\, u}{\rho^2} \tag{6}$$

в области Ω. Этот оператор непрерывно действует из $H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)$ в пространство, двойственное к $H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)$.

Пространство $\tilde{H}^{-1,\gamma}(\Omega)$ может быть идентифицировано как двойственное к пространству $H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)$, см. статью[32] или книгу[33]. Рассмотрим задачу:

[32] Schechter M. Negative norms and boundary problems // Ann. Math. - 1960.-V.3.- pp.581–593.

[33] Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов* // Киев: Наук. думка, 1965.

для $f \in \left[\tilde{H}^{-1,\gamma}(\Omega)\right]^k$ найти $u \in \left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k$, удовлетворяющую

$$h_{\Omega,\gamma}(u, v) = \langle f, v\rangle_{\Omega,\gamma} \tag{7}$$

для всех $v \in \mathcal{H}^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega,\gamma}$ есть отношение двойственности для $H^0 = \left[H^{0,\gamma}(\Omega)\right]^k$ и $H^+ = \left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k$.

Как обычно, обобщенную постановку задачи 7 можно интерпретировать следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u = f & \text{в} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Теорема 2.2.1 *Если выполнено* (5), *то задача Дирихле* (7) *является фредгольмовой. Пространство решений однородной задачи совпадает с конечно-мерным пространством* $\mathcal{H}_\gamma(\Omega)$. *Задача разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\langle f, v\rangle_{\Omega,\gamma} = 0 \text{ для всех } v \in \mathcal{H}_\gamma(\Omega). \tag{8}$$

Более того, существует непрерывный линейный оператор

$$\Phi_\gamma^{(\Omega)} : \left[\tilde{H}^{-1,\gamma}(\Omega)\right]^k \to \left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k$$

такой, что $\Phi_\gamma^{(\Omega)}\Pi_\gamma^{(\Omega)} = \Pi_\gamma^{(\Omega)}\Phi_\gamma^{(\Omega)} = 0$ *и*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_\gamma^{(\Omega)}\Delta_\gamma u &=& u - \Pi_\gamma^{(\Omega)} u \quad \text{для всех} \quad u \in \left[H^{1,\gamma}(\Omega, \partial\Omega)\right]^k, \\ \Delta_\gamma\Phi_\gamma^{(\Omega)} f &=& f - \Pi_\gamma^{(\Omega)} f \quad \text{для всех} \quad f \in \left[\tilde{H}^{-1,\gamma}(\Omega)\right]^k. \end{array}$$

Затем, используя правый обратный оператор $(t_1^{(\gamma)})_r^{-1}$, легко получить решение неоднородной задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u = f & \text{в} \quad \Omega, \\ t_1^{(\gamma)} u = u_0 & \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Следствие 2.2.2 *Если выполнено* (5), *то существует непрерывный линейный оператор*

$$P_\gamma^{(\Omega)} : \left[H^{1/2,\gamma}(\partial\Omega)\right]^k \to \left[H^{1,\gamma}(\Omega)\right]^k$$

такой, что

$$P_\gamma^{(\Omega)}\Pi_\gamma^{(\Omega)} = P_\gamma^{(\Omega)}\Pi_\gamma^{(\Omega)} = 0,\ \Delta_\gamma P_\gamma^{(\Omega)} = 0,$$

$$\begin{array}{rcll} \Phi_\gamma^{(\Omega)}\Delta_\gamma u + P_\gamma^{(\Omega)} t_1^{(\gamma)} u & = & u - \Pi_\gamma^{(\Omega)} u & \textit{для всех}\ \ u \in \left[H^{1,\gamma}(\Omega)\right]^k, \\ t_1^{(\gamma)} P_\gamma^{(\Omega)} u_0 & = & u_0 & \textit{для всех}\ \ u_0 \in \left[H^{1/2,\gamma}(\partial\Omega)\right]^k. \end{array}$$

Таким образом, Φ_γ и P_γ являются аналогами функции Грина задачи Дирихле (7) и интеграла Пуассона, соответственно. Отметим, что теорема 2.2.1 и следствие 2.2.2 дают разложения Ходжа однородной и неоднородной задач Дирихле соответственно, см. статью[9], книгу[34] для обычных пространств Соболева.

В **параграфе 2.3** описывается построение сопряженного оператора.

Пусть χ_Ω - характеристическая функция области Ω. Доопределим каждую функцию $u \in L^2(\Omega)$ нулем при продолжении из Ω в $\mathcal{X} \setminus \Gamma$. Более того, такое продолжение порождает линейные ограниченные операторы

$$\chi_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\mathcal{X} \setminus \Gamma),\ \chi_\Omega : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\mathcal{X} \setminus \Gamma),$$

удовлетворяющие $\partial_j(\chi_\Omega u) = \chi_\Omega(\partial_j u),\ 1 \le j \le n$,и

$$\|\chi_\Omega v\|_{L^2(\mathcal{X})} = \|v\|_{L^2(\Omega)},\ \|\chi_\Omega u\|_{H^1(\mathcal{X}\setminus\Gamma)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

для всех $v \in L^2(\Omega)$ и $u \in H_0^1(\Omega)$.

Предложение 2.3.1 *Если существует положительная константа* $m_{\mathcal{X}\setminus\Gamma}$ *такая, что*

$$\|u\|^2_{[H^{1,\gamma}(\mathcal{X}\setminus\Gamma)]^k} \le m_{\mathcal{X}\setminus\Gamma}\left(h_{\mathcal{X}\setminus\Gamma,\gamma}(u,u) + \|u\|^2_{[H^{0,\gamma}(\mathcal{X}\setminus\Gamma)]^k}\right) \tag{9}$$

для всех $u \in \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{X} \setminus \Gamma, \partial(\mathcal{X} \setminus \Gamma))\right]^k$, *то* (5) *выполнено для любой области* $\Omega \subset \mathcal{X} \setminus \Gamma$. *Область* Ω *с липшицевой границей удовлетворяет одному из двух условий:* $\Gamma \subset \Omega$ *или* $\Gamma \subset \partial\Omega$. *Более того, для любого* $v \in \mathcal{H}_\gamma(\Omega)$ *имеем* $\chi_\Omega^{(\gamma)} v \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{X} \setminus \Gamma)$.

Заметим, что сопряженный оператор $\mathcal{A}^\star : \left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l \to \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D}, \overline{S})\right]^k$для оператора (4) всегда существует (см., например, книгу[35]). Чтобы построить

[34] Shlapunov A.A., Tarkhanov N. *Duality by reproducing kernels*// International Journal of Math. and Math. Sciences, **6** (2003), 78pp.

[35]Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: учебное по-

его, для каждого $f \in \left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l$ нужно найти единственное решение $w = \mathcal{A}^\star f \in \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})\right]^k$ для следующей задачи:

$$(w,v)_{[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})]^k} = (f,\mathcal{A}v)_{[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})]^l} \text{ для всех } v \in \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})\right]^k. \tag{10}$$

Из сказанного выше, (10) может рассматриваться как смешанная задача для эллиптического оператора второго порядка, порожденного эрмитовой формой $(\cdot,\cdot)_{H^{1,\gamma}(\mathcal{D})}$, см. также статьи[9,11]. Однако найти решение смешанной задачи в конструктивной форме не так просто. Таким образом, идея нахождения сопряженного оператора $\mathcal{A}^\star : H_2 \to H_1$ для непрерывного линейного оператора $\mathcal{A} : H_1 \to H_2$ состоит в следующем: заменить обычное скалярное произведение пространства H_1 на другое (возможно, более сложное) такое, что 1) новое скалярное произведение порождает норму эквивалентную старой, 2) соответствующий сопряженный оператор задается (относительно) простой формулой (см., например, статьи[9,36] для различных дифференциальных операторов в обычных пространствах Соболева, включая случаи без граничные условия).

Далее будем рассматривать задачу, когда $\Gamma = \overline{S}$ и $\Xi = \partial S$. Введем оператор сужения $R_{\mathcal{D}} : \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{X}\setminus\overline{S})\right]^l \to \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})\right]^k$. Зафиксируем оператор (6) над $\mathcal{X}\setminus\Gamma$, удовлетворяющий (9) и такой, что

$$R_{\mathcal{D}} u \in \ker(\mathcal{A}) \text{ для всех } u \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{X}\setminus\Gamma), \tag{11}$$

где $\ker(\mathcal{A})$ – ядро оператора $\mathcal{A}$ из (4), соответствующего задаче (3). Обозначим через $h_\Omega^{(\mathcal{A})}(\cdot,\cdot)$ эрмитову форму, связанную с областью $\Omega \subset \mathcal{X}\setminus\Gamma$ (случай $\Omega = \mathcal{X}\setminus\Gamma$ включен). Пусть $\Phi^{(\Omega)}_{\gamma,\mathcal{A}}$ и $P^{(\Omega)}_{\gamma,\mathcal{A}}$ обозначают функцию Грина и интеграл Пуассона связанные с $h_\Omega^{(\mathcal{A})}(\cdot,\cdot)$, соответственно.

Тогда для $u \in \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})\right]^k$ определим

$$\mathcal{E}(u) = \begin{cases} u & \text{в} \quad \mathcal{D}, \\ P^{(\mathcal{X}\setminus\overline{\mathcal{D}})}_{\gamma,\mathcal{A}} t^{(\gamma)}_{1,\mathcal{D}} u & \text{в} \quad \mathcal{X}\setminus\overline{\mathcal{D}}. \end{cases}$$

собие // Москва: Физматлит, 2004.

[36] Романов А.В. Сходимость итераций оператора Мартинелли-Бохнера и уравнение Коши-Римана //- Докл. АН СССР.- 1978.- Т.242. 780–783 с.

Таким образом, можно ввести эрмитову форму

$$\mathfrak{h}_{\mathcal{D},\gamma}(u,v) = h^{(\mathcal{A})}_{\mathcal{X}\setminus\overline{S},\gamma}(\mathcal{E}(u),\mathcal{E}(v)) + (\Pi^{(\mathcal{X}\setminus\Gamma)}_{\gamma}\mathcal{E}(u),\Pi^{(\mathcal{X}\setminus\Gamma)}_{\gamma}\mathcal{E}(v))_{[H^{0,\gamma}(\mathcal{X}\setminus\Gamma)]^l}$$

в пространстве $\left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})\right]^k$. Также определим для каждой $f \in \left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l$ оператор:

$$T_{\gamma,\mathcal{A}}f = \Phi^{(\mathcal{X}\setminus\overline{S})}_{\gamma,\mathcal{A}}\left(\rho^{2\gamma}\sum_{j=1}^{n}\partial_j\left(\rho^{-2\gamma}A_j^*\chi^{(\gamma)}_{\mathcal{D}}f\right) + \rho^{-1}A_0^*\chi^{(\gamma)}_{\mathcal{D}}f\right). \qquad (12)$$

Теорема 2.3.1 *Пусть выполнены условия* (9) *и* (11). *Тогда эрмитова форма* $\mathfrak{h}_{\mathcal{D},\gamma}(\cdot,\cdot)$ *есть скалярное произведение в* $\left[H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})\right]^k$, *соответствующая ему норма эквивалентна норме* $\|\cdot\|_{[H^{1,\gamma}(\mathcal{D})]^k}$ *в этом пространстве и*

$$\mathfrak{h}_{\mathcal{D},\gamma}(R_{\mathcal{D}}T_{\gamma,\mathcal{A}}f,v) = (f,\mathcal{A}v)_{[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})]^l}$$

для всех $f \in \left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l$ *и* $v \in [H^{1,\gamma}(\mathcal{D},\overline{S})]^k$, *где*

$$T_{\gamma,\mathcal{A}} : \left[H^{0,\gamma}(\mathcal{D})\right]^l \to \left[H^{1,\gamma}(\mathcal{X}\setminus\overline{S},\partial(\mathcal{X}\setminus\overline{S}))\right]^k \qquad (13)$$

является ограниченным линейным оператором (12).

В **параграфе 2.4** приведены примеры построения сопряженных операторов в весовых пространствах Соболева. Результаты данной главы опубликованы в [5].

Наконец, **третья глава** посвящена некоторым применениям некорректной задачи Коши для эллиптических операторов. Более точно, рассматривается один класс задач трансмиссии, см. работы М.В.Борсука[16] и С.Д. Эйдельмана[17], связанных с моделями эластичности, диффузии и электрокардиологии. А именно, в **параграфе 3.1** описана классическая стационарная двуобластная модель электрокардиологии, см. работы[18,19,20]. В **параграфе 3.2** рассматривается обобщение задачи из параграфа 3.1. Для матричного дифференциального оператора $A(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x)\partial^\alpha$ порядка m, где $A_\alpha(x)$ – $(l \times k)$-матрица с коэффициентами из $C^\infty(X)$ на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, рассмотрим задачу трансмиссии.

Пусть Ω_m и Ω - гладкие ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$ такие, что

$\Omega \supset \overline{\Omega}_m$, где $\overline{\Omega}_m$ является замыканием Ω_m. Положим $\Omega_b = \Omega \setminus \overline{\Omega}_m$. Обозначим через $A^{(i)}$, $A^{(e)}$, $A^{(b)}$ матричные дифференциальные операторы с вещественно-аналитическими коэффициентами и инъективными символами в некоторых окрестностях U_m и U_b компактов $\overline{\Omega}_m$ и $\overline{\Omega}_b$, соответственно. Тогда дифференциальные операторы

$$\Delta^{(e)} = (A^{(e)})^* A^{(e)},\ \Delta^{(b)} = (A^{(i)})^* A^{(i)},\ \Delta^{(b)} = (A^{(b)})^* A^{(b)}$$

являются эллиптическими и сильно эллиптическими в U_m и U_b, соответственно.

Также зафиксируем $(k \times k)$-матричные граничные операторы первого порядка $B_1^{(b)}$ вблизи $\partial\Omega_b$ и $B_1^{(i)}$, $B_1^{(e)}$ вблизи $\partial\Omega_m$ так, что $(I_k, B_1^{(b)})$, $(I_k, B_1^{(i)})$ и $(I_k, B_1^{(e)})$ являются парами Дирихле и

$$\int\limits_{\partial\Omega_m} v^* B_1^{(i)} u d\sigma = \int\limits_{\Omega_m} \Big((A^{(i)} v)^* A^{(i)} u - v^* \Delta^{(i)} u \Big) dy, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_m} v^* B_1^{(e)} u d\sigma = \int\limits_{\Omega_m} \Big((A^{(e)} v)^* A^{(e)} u - v^* \Delta^{(e)} u \Big) dy \tag{15}$$

для всех $u \in [H^2(\Omega_m)]^k$, $v \in [H^1(\Omega_m)]^k$,

$$\int\limits_{\partial\Omega_b} v^* B_1^{(b)} u d\sigma = \int\limits_{\Omega_b} \Big((A^{(b)} v)^* A^{(b)} u - v^* \Delta^{(b)} u \Big) dy \tag{16}$$

для всех $u \in [H^2(\Omega_b)]^k$, $v \in [H^1(\Omega_b)]^k$.

Задача 3.2.1 *Пусть* $s \geq 2$ *и* $\alpha_i, \alpha_e, \beta_e, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_e^2 + \alpha_i^2 \neq 0$, $\beta_e^2 + \beta_i^2 \neq 0$. *Для данных векторов*

$$f \in [H^{s-2}(\partial\Omega)]^k,\ f_0 \in [H^{s-1/2}(\partial\Omega)]^k,\ f_1 \in [H^{s-3/2}(\partial\Omega)]^k,$$

найти, если это возможно, вектор-функции $u_i, u_e \in [H^s(\Omega_m)]^k$, $u_b \in [H^s(\Omega_b)]^k$, *удовлетворяющие*

$$\alpha_i \Delta^{(i)} u_i + \alpha_e \Delta^{(e)} u_e = 0 \text{ в } \Omega_m, \tag{17}$$
$$\Delta^{(b)} u_b = f \text{ в } \Omega_b, \tag{18}$$
$$u_e = u_b \text{ на } \partial\Omega_m, \tag{19}$$
$$B_1^{(e)} u_e = \beta_e B_1^{(b)} u_b \text{ на } \partial\Omega_m, \tag{20}$$
$$B_1^{(i)} u_i = \beta_i B_1^{(b)} u_b \text{ на } \partial\Omega_m, \tag{21}$$
$$B_1^{(b)} u_b = f_1 \text{ на } \partial\Omega, \tag{22}$$
$$u_b = f_0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{23}$$

Кроме того, используется предположение, что существует константа c_0 такая , что

$$\int\limits_{\partial\Omega_m} h^*(y)(u_i + c_0 u_e)(y) d\sigma(y) = 0 \text{ для всех } h \in S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k. \tag{24}$$

Частный случай задачи 3.2.1 рассмотрен в [6] в пространствах Соболева в гладких областях.

Соотношения (17), (21) приводят нас к следующей задаче Неймана: для данных $g \in [H^{s-2}(\Omega_m)]^k$ и $u_1 \in [H^{s-3/2}(\partial\Omega_m)]^k$, найти, если это возможно, функцию $u \in [H^s(\Omega_m)]^k$ такую, что

$$\begin{cases} \Delta^{(i)} u = g & \text{в} \quad \Omega_m, \\ B_1^{(i)} u = u_1 & \text{на} \quad \partial\Omega_m, \end{cases} \tag{25}$$

см., например, статью[10]. Условия Шапиро-Лопатинского обеспечивают задаче (25) свойство Фредгольма. Фактически, при условии (14), они эквивалентны следующему: существует положительная константа c_i такая, что

$$\|u\|_{H^1(\Omega_m)} \le c_i \|A^{(i)} u\|_{L^2(\Omega_m)} \text{ для всех } u \in (S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^1(\Omega_m)]^k)^\perp,$$

где $(S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^1(\Omega_m)]^k)^\perp$ означает ортогональное дополнение к подпространству $S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^1(\Omega_m)]^k$ в гильбертовом пространстве $[H^1(\Omega_m)]^k$. В частности, условия Шапиро-Лопатинского гарантируют, что пространство

$S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k$ является конечномерным. Условия разрешимости этой задачи хорошо известны см., например, статьи[10,37].

Обозначим через $\mathcal{N}^{(i)}(g, u_1)$ единственное решение задачи (25), удовлетворяющее

$$\int\limits_{\partial D} h^*(x) u(x) d\sigma(x) = 0 \text{ для всех } h \in S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k.$$

Отметим, что задача 3.2.1 содержит задачу Коши (18), (22), (23) для эллиптического оператора $\Delta^{(b)}$, которая обычно является некорректной в стандартных функциональных пространствах, см., например, работы М.М. Лаврентьева[6], Н.Н. Тарханова[8], или другие. Однако теорема единственности для задачи Коши, связанной с эллиптическими уравнениями (см., например, теорему 2.8 в статье[38]), обеспечивает единственность вектор-функции u_b в пространствах типа Лебега и Соболева, если она существует.

Опишем пространство решений задачи 3.2.1 с нулевыми данными.

Теорема 3.2.3 *Пусть $s \geq 2$, (14), (15), (16) выполнены и пара $(\Delta^{(i)}, B_1^{(i)})$ удовлетворяет условиям Шапиро-Лопатинского в $\overline{\Omega}_m$. Если $\alpha_i \neq 0$ и*

$$S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k \subset S_{\Delta^{(e)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k, \tag{26}$$

тогда пространство решений однородной задачи задачи 3.2.1 состоит из троек u_i, u_e, u_b из $[H^s(\Omega_m)]^k \times [H^s(\Omega_m)]^k \times [H^s(\Omega_b)]^k$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} u_b &= & 0 & \textit{в} & \Omega_b, \\ u_e &= & u & \textit{в} & \Omega_m, \\ u_i &= & (-\alpha_e/\alpha_i)\mathcal{N}^{(i)}(\Delta^{(e)}u, 0) + h_0 & \textit{в} & \Omega_m, \end{cases} \tag{27}$$

где h_0 - произвольный элемент конечномерного пространства $S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k$ и u – произвольная вектор-функция из $[H_0^2(\Omega_m) \cap H^s(\Omega_m)]^k$. Более того, если предположение калибровки (24) справедливо для пары u_i, u_e из нулевого пространства, тогда элемент h_0 из (27) равен нулю.

[37] Агранович М. С. *Спектральные задачи в липшицевых областях* // Совеременные проблемы математики. Фундаментальные направления, **39** (2011), 11–35.

[38] Shlapunov A.A., Tarkhanov N. Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols// Proc. London. Math. Soc., 71 (1995), N. 1, p. 1–54.

Сформулируем теорему существования задачи 3.2.1.

Предположим, что выполняются следующие соотношения:

$$S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k \subset S_{A^{(e)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k, \tag{28}$$

$$S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k = S_{A^{(i)}}(\Omega) \cap [H^s(\Omega)]^k \subset S_{A^{(b)}}(\Omega_b) \cap [H^s(\Omega_b)]^k. \tag{29}$$

Теорема 3.2.4 *Пусть выполнено* $s \geq 2$, (14), (15), (16) *и пара* $(\Delta^{(i)}, B_1^{(i)})$ *удовлетворяет условиям Шапиро-Лопатинского в* $\overline{\Omega}_m$ *и пусть вложения* (28), (29) *верны. Если* $\alpha_i \neq 0$, *тогда для данных* $f \in [H^{s-2}(\partial\Omega_b)]^k$, $f_0 \in [H^{s-1/2}(\partial\Omega_b)]^k$, $f_1 \in [H^{s-3/2}(\partial\Omega_b)]^k$ *существует решение* $u_b \in [H^s(\Omega_b)]^k$ *к* (18), (22) *и* (23), *существуют функции* $u_e, u_i \in [H^s(\Omega_m)]^k$, *удовлетворяющие* (17), (19), (20), (21), *тогда и только тогда, когда*

$$(\beta_e\alpha_e + \alpha_i\beta_i)\Big(\int\limits_{\Omega_b} h^*(y)f(y)dy + \int\limits_{\partial\Omega_b} h^*(y)f_1(y)d\sigma(y)\Big) = 0 \tag{30}$$

для всех $h \in S_{A^{(b)}}(\Omega_b) \cap [H^s(\Omega_b)]^k$.

В **параграфе 3.3** приведены примеры такого типа задач и пути их решения для частных случаев модели 3.2.

В параграфе **параграфе 3.4** рассматривается одна эволюционная модель обобщенной задачи трансмиссии. Для нее получена теорема единственности.

Чтобы описать соответствующие результаты, введем подходящие пространства для исследования параболических уравнений см., например, гл. 1 в книге[26].

Более точно, для $T > 0$ определим $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Пусть $C^{2s,s}(\Omega_T)$ – множество всех непрерывных функций u на Ω_T, которые имеют на Ω_T непрерывные частичные производные $\partial_t^j \partial_x^\alpha u$ для всех мульти-индексов $(\alpha, j) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих $|\alpha| + 2j \leq 2s$. Также обозначим через $H^{2s,s}(\Omega_T)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, анизотропные (параболические) пространства Соболева.

Теперь рассмотрим модифицированную задачу 3.2.1 с добавлением переменной времени $t \in [0, T]$.

Задача 3.4.1 *Пусть* $\alpha_i, \alpha_e, \beta_e, \beta_i, \mu_i, \mu_e \in \mathbb{R}$, $\alpha_i^2 + \alpha_e^2 \neq 0$, $\beta_e^2 + \beta_i^2 \neq 0$, $\mu_i^2 + \mu_e^2 \neq 0$. *Для данных векторных функций*

$$f \in [L^2(\Omega_m \times (0,T))]^k,\ f_0 \in [L^2([0,T], H^{3/2}(\partial\Omega_m)]^k,\ f_1 \in [L^2([0,T], H^{1/2}(\partial\Omega_m)]^k,$$

и отображение $I : [H^{2,1}(\Omega_m \times (0,T)]^k \to [L^2(\Omega_m \times (0,T)]^k$, *найти неизвестные векторные функции* $u_b \in [H^{2,1}(\Omega_b \times (0,T)]^k$, $u_i, u_e \in [H^{2,1}(\Omega_m \times (0,T)]^k$, *удовлетворяющие*

$$\alpha_i \Delta^{(i)} u_i + \alpha_e \Delta^{(e)} u_e = 0 \text{ в } \Omega_m \times [0,T], \tag{31}$$
$$\Delta^{(b)} u_b = f \text{ в } \Omega_b \times [0,T], \tag{32}$$
$$u_e = u_b \text{ на } \partial\Omega_m \times [0,T], \tag{33}$$
$$B_1^{(e)} u_e = \beta_e B_1^{(b)} u_b \text{ на } \partial\Omega_m \times [0,T], \tag{34}$$
$$B_1^{(i)} u_i = \beta_i B_1^{(b)} u_b \text{ на } \partial\Omega_m \times [0,T], \tag{35}$$
$$B_1^{(b)} u_b = f_1 \text{ на } \partial\Omega \times [0,T], \tag{36}$$
$$u_b = f_0 \text{ на } \partial\Omega \times [0,T], \tag{37}$$
$$-\mu_i \Delta^{(i)} u_i + \mu_e \Delta^{(e)} u_e = \frac{\partial(u_i - u_e)}{\partial t} + I(u_i - u_e) \text{ в } \Omega \times (0,T). \tag{38}$$

Как и раньше, разумно дополнить задачу предположением калибровки: существует функция $c_0(t) \in C[0,T]$ такая, что

$$\int\limits_{\partial\Omega_m} h^*(y)(u_i(y,t) + c_0(t) u_e(y,t)) d\sigma(y) = 0 \tag{39}$$

для всех $h \in S_{A^{(i)}}(\Omega_m) \cap [H^s(\Omega_m)]^k$ и почти для всех $t \in [0,T]$.

Теорема 3.4.1 *Пусть* $s \geq 1$, $\alpha_i \neq 0$, $\mu_i \alpha_e + \mu_e \alpha_i \neq 0$, (14), (15), (16) *выполнено и пара* $(\Delta_i, B_1^{(i)})$ *удовлетворяет условиям Шапиро-Лопатинского в* $\overline{\Omega}_m$. *Пусть также коэффициенты оператора* Δ_i *постоянны. Если* $\Delta^{(e)} = \gamma \Delta^{(i)}$ *с некоторой* $\gamma > 0$ *и выполнено условие* (39), *и*

$$I(v) = \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j v + a_0 v + g \tag{40}$$

с некоторой векторной функцией $g \in [L^2(\Omega_m \times (0,T))]^k$, *и с некоторыми* $(k \times k)$*-матрицами* a_j, $0 \leq j \leq n$, *тогда задача 3.4.1. имеет не более одного решения* (u_i, u_e, u_b) *в пространстве* $[H^{2,1}(\Omega_m \times (0,T))]^k \times [H^{2,1}(\Omega_m \times (0,T))]^k \times [H^{2,1}(\Omega_b \times (0,T))]^k$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе

1. исследованы вопросы существования и единственности решений одного класса нелинейных возмущений задачи Римана-Гильберта;

2. развиты элементы теории Ходжа задачи Дирихле обобщенного лапласиана в весовых пространствах Соболева;

3. описан один из способов регуляризации задачи Коши для эллиптических дифференцальных операторов в весовых пространствах Соболева;

4. изучены вопросы существования и единственности решений одной стационарной задачи трансмиссии, связанной с задачами кардиографии, упругости и диффузии, а также одного ее эволюционного обобщения.

Изложенные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в различных областях анализа и дифференциальных уравнений.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Шлапунову Александру Анатольевичу за неоценимую помощь и поддержку на всех этапах выполнения работы.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Черепанова Ю.Л. *О формуле для восстановления функции по ее действительной части и формальной комплексной производной* // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: проспект Свободный-2015». Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015.

2. Черепанова Ю.Л. *Об аналоге задачи Римана-Гильберта для одного нелинейного возмущения оператора Кони-Римана* // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых

ученых «Молодежь и наука: проспект Свободный-2016». Красноярск, 15–25 апреля 2016. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016.

3. Шефер Ю.Л. *О регуляризации задачи Коши для эллиптических уравнений в весовых пространствах Соболева* // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: проспект Свободный-2021». Красноярск, 19–24 апреля 2021. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016.

4. Cherepanova Yu.L., Shlapunov A.A. *On an analogue of the Riemann-Hilbert problem for a non-linear perturbation of the Cauchy-Riemann operator* // Journal of Siberian federal university. Math. and Physics, **9**(2016), 4, 427–431.

5. Shefer Yu.L., Shlapunov A.A. *On regularization of the Cauchy problem for elliptic systems in weighted Sobolev spaces* // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **27**(2019), 6, 815–835.

6. Shefer Yu.L. *On a Transmission Problem Related to Models of Electrocardiology* // Journal of Siberian federal university. Math. and Physics, **13**(2020), 5, 596–607.