

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Мышкина Евгения Константиновна

О ВЫЧЕТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ И СТЕПЕННЫХ СУММАХ
КОРНЕЙ СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{C}^n$

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Кытманов Александр Мечиславович

Красноярск – 2014

Оглавление

Введение	4
1. Предварительные сведения	19
1. Вычеты	19
2. Целые и мероморфные функции	23
2. Вычетные интегралы и степенные суммы корней определенных типов систем неалгебраических уравнений	26
3. Вычетные интегралы и степенные суммы корней простейших систем неалгебраических уравнений	26
3.1. Вычисление вычетных интегралов	26
3.2. Интегральные представления для степенных сумм	31
4. Вычетные интегралы и степенные суммы корней систем неалгебраических уравнений треугольного вида	39
4.1. Вычисление вычетных интегралов	39
4.2. Интегральные представления для степенных сумм	47
5. Вычетные интегралы и степенные суммы корней специальных систем уравнений, состоящих из целых функций	54
5.1. Вычисление вычетных интегралов	54
5.2. Вычетные интегралы и степенные суммы	58
6. О разложении целых функций в бесконечные произведения	68
3. Нахождение сумм кратных рядов с помощью вычетных интегралов	72
7. Нахождение сумм многомерных рядов с помощью вычетных интегралов для простейших систем	72

8.	Нахождение сумм многомерных рядов с помощью вычетных интегралов для систем треугольного вида	81
9.	Нахождение сумм многомерных рядов с помощью вычетных интегралов для систем специального вида	87
Заключение		95
Список литературы		97

Введение

Исследование систем алгебраических уравнений является классической задачей. Частью ее является задача исключения неизвестных. Для двух переменных и систем из двух уравнений она решается с помощью результата Сильвестра (см., например, [17]). Для систем из большего числа уравнений построена классическая схема исключения неизвестных (см., например, [12]), но она, как правило, является весьма трудоемкой. В настоящее время общепринятым методом исключения неизвестных является метод базисов Гребнера, созданный в работах Бухбергера и его учеников (основы этого метода можно, например, найти в [6]).

Модифицированный метод исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ возник в работе Л.А.Айзенберга [1]. Основная идея метода заключается в нахождении степенных сумм корней системы с помощью формулы многомерного логарифмического вычета, не вычисляя самих корней, а затем в использовании классических рекуррентных формул Ньютона для построения результата. В отличие от классического метода исключения он менее трудоемок и не увеличивает кратности корней. Дальнейшая его разработка продолжена в монографиях [5, 7, 30]. В качестве приложений этой теории были рассмотрены системы нелинейных уравнений, возникающих в химической кинетике (см. [2, 3, 4, 8, 19, 37, 39]) и зависящих от параметров.

Во многих прикладных задачах возникают также неалгебраические системы уравнений, состоящих из экспоненциальных многочленов, т.е. из функций конечного порядка роста (см., например, [11]). Для систем неалгебраических уравнений, множество корней которых, как правило, бесконечно, степенные суммы корней в положительной степени, вообще говоря, являются расходящимися рядами. Но степенные суммы корней в отрицательной степени часто являются сходящимися. Возникает задача о их вычислении через коэффициенты Тейлора функций, входящих в систему. Это вычисление можно осуществить с помощью вычетных интегралов. В работах [9, 21] рассмотрен простейший класс

систем уравнений для целых и мероморфных функций, фактически функций не выше первого порядка роста. В работе [18] для этих формул дана их компьютерная реализация в системе MAPLE. Тем самым тематика работы является актуальной.

Цель диссертации

Целью работы является изучение и нахождение степенных сумм корней разного вида систем неалгебраических уравнений, состоящих из целых или мероморфных функций конечного порядка роста. Установление связи между степенными суммами и вычетными интегралами, построенными по заданной системе функций. Нахождение сумм некоторых видов кратных рядов на основе разработанной теории.

Методика исследования

В основу исследования положены методы многомерного комплексного и функционального анализа, а также системы компьютерной алгебры.

Научная новизна

Результаты работы являются новыми. Они заключаются в изучении некоторых типов систем неалгебраических уравнений; в рассмотрении вычетных интегралов и доказательстве формул для их вычисления, содержащих конечное число коэффициентов Тейлора функций, входящих в уравнения; в установлении связи между интегралами и степенными суммами корней в отрицательной степени.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты, полученные автором, являются теоретическими. Их ценность состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, в математических задачах химической кинетики, а также в компьютерной алгебре.

Практическое применение полученных результатов состоит в их внедрении в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов по современным проблемам многомерного комплексного анализа кафедры теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Степень достоверности и апробация работы

Достоверность результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами.

Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих конференциях: VIII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых (Красноярск, Россия, 2012); IV российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, Россия, 2012); IX Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием (Красноярск, Россия, 2013); международные научные студенческие конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, Россия, 2013, 2014); школа-конференция (Ярославль, Россия, 2013); XIII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2014» (Казань, Россия, 2014); V российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, Армения, 2014); международная школа-конференция по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, Россия, 2014).

Результаты работы неоднократно докладывались на Красноярском городском семинаре по многомерному комплексному анализу (2012–2015 г. г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [42–55], из них 5 работ [42–46] в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, 5 публикаций [47–51] в материалах конференций, 4 публикации [52–55] являются тезисами конференций.

Личный вклад автора

В соавторстве выполнены три работы [42, 43, 46]. В диссертации приведены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 55 наименований. Общее число страниц диссертационной работы 102.

Содержание работы

Первая глава является предварительной и включает в себя математические сведения, определения, теоремы и формулы, которые используются в диссертационной работе.

Вторая глава состоит из четырех параграфов и посвящена вычетным интегралам и степенным суммам корней различных типов систем неалгебраических уравнений.

В первом параграфе рассматриваются вычетные интегралы и степенные суммы корней простейших систем.

Рассмотрим систему функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_j(z) = (z^{\beta^j} + Q_j(z))e^{P_j(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (0.1)$$

где $\beta^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + \beta_2^j + \dots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Функции Q_j , P_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| > k_j} a_\alpha^j z^\alpha, \quad (0.2)$$

$$P_j(z) = \sum_{\|\gamma\| \geq 0} b_\gamma^j z^\gamma, \quad (0.3)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j \geq 0$, $\gamma_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \cdot z_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n}$.

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)$

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_1 > 0, \dots, r_n > 0.$$

При достаточно малых r_j определены интегралы вида

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot z_2^{\beta_2+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0, \dots, \beta_n \geq 0$, $\beta_j \in \mathbb{Z}$, $I = (1, 1, \dots, 1)$.

В соответствии с [41] назовем их *вычетными интегралами*. К этим интегралам не применима теорема о логарифмическом вычете и они не являются стандартными вычетами Гротендика.

Обозначим через $\tilde{f}_j$ функции $\tilde{f}_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z)$, $j = 1, \dots, n$. Пусть I_s — мультииндекс длины n , содержащий s единиц и $n - s$ нулей ($s = 0, 1, \dots, n$). Рассмотрим Δ_{I_s} — якобиан системы функций, таких, что единице, стоящей на j -ом месте из I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции $\tilde{f}_j$, а нулю, стоящему на k -ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k .

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях для функции f_j вида (0.1), (0.2), (0.3) справедливы формулы:*

$$\begin{aligned} J_\beta &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leq \|\beta\| + \min(s, k_{i_1} + \dots + k_{i_s})} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{(\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s})!} \times \\ &\quad \times \frac{\partial^{l_s}(\Delta_{I_s} \cdot Q^{\alpha^s}(I_s))}{\partial z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \Big|_{z=0} = \\ &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leq \|\beta\| + \min(n, k_{i_1} + \dots + k_{i_s})} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_{I_s} \cdot Q^{\alpha^s}(I_s)}{z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \right], \end{aligned}$$

где α^s — мультииндекс порядка s , i_k — номер k -ой единицы в I_s , $l_s = \|\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}\|$, $\beta! = \beta_1! \dots \beta_n!$, $Q^{\alpha^s}(I_s) = Q_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot Q_{i_2}^{\alpha_2^s} \dots Q_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2} \dots \partial z_n^{\gamma_n}}$ и, наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

Далее в параграфе рассмотренные интегралы связываются со степенными суммами корней системы. Для этого мы сузим класс функций f_j . Возьмем в качестве функций Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) многочлены вида

$$Q_j(z) = \sum_{\alpha \in M_j} a_\alpha^j z^\alpha, \quad (0.4)$$

где M_j — конечное множество мультииндексов такое, что при $\alpha \in M_j$ координаты $\alpha_k \leq \beta_k^j$, $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq j$. (Но по прежнему предполагается, что $\|\alpha\| > k_j$ для всех $\alpha \in M_j$). А для функций P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} b_\gamma^j z^\gamma. \quad (0.5)$$

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \dots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \dots z_{n(k)}^{\beta_n+1}},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — некоторый мультииндекс. Здесь $(z_{1(k)}, \dots, z_{n(k)})$ корни системы, не лежащие на координатных плоскостях, взятые столько раз какова их кратность (как показано в данном параграфе, их число конечно).

Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, системы, но в отрицательной степени (степенной суммой от обратных величин корней).

Теорема 2.2. Для системы с функциями f_j вида (0.1) и многочленами Q_j вида (0.4), P_j вида (0.5) и для произвольного мультииндекса β такого, что

$$l^1 + \dots + l^n \leq \beta, \quad (0.6)$$

справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I},$$

где $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$ и l_i^j — степень i -ого многочлена P_i по j -ой переменной z_j ; $i, j = 1, \dots, n$ (для мультииндексов $\alpha \leq \beta$, если данное неравенство выполняется для всех их координат).

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (0.7)$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста не выше ρ , разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$,

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $(z^{\beta_{j,s}} + Q_{j,s}(z))e^{P_{j,s}(z)}$, а $Q_{j,s}(z)$, $P_{j,s}(z)$ — функции вида (0.4), (0.5) и степени всех многочленов $P_{j,s}$, входящих в систему, $\deg P_{j,s} \leq \rho$, $j = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots$

Для каждого набора индексов $j_1, \dots, j_n$, где $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \dots, i_n$, где $i_1, \dots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных уравнений

$$f_{1,j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2,j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \quad \dots, \quad f_{n,j_n}^{(i_n)}(z) = 0, \quad (0.8)$$

имеют конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей): $z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(l)}, \dots$

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdot \dots \cdot z_{n(l)}^{\beta_n+1}}. \quad (0.9)$$

Здесь $\beta_1, \dots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (0.8), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{j_s}^{(2)}$; и равен -1 , если в систему вида (0.8), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{j_s}^{(2)}$.

Теорема 2.3. *Для системы с функциями вида (0.7), для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и выполняется неравенство $l^1 + \dots + l^n \leq \beta$, ряд (0.9) сходится и справедливы формулы: $J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}$.*

Во втором параграфе рассматриваются вычеты интегралы и степенные суммы корней систем уравнений треугольного вида.

Рассмотрим систему функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_i(z) = (z^{\beta^i} + \psi_i(z))e^{P_i(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (0.10)$$

где $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $\|\beta^i\| = \beta_1^i + \beta_2^i + \dots + \beta_n^i = k_i$, степени мономов z^{β^i} удовлетворяют условию $k_i \leq \text{ord } \psi_i(z)$; $i = 1, 2, \dots, n$, и данные мономы не содержатся в $\psi_i(z)$. (Здесь и в дальнейшем под порядком ord голоморфной функции понимается наименьшая (по совокупности переменных) из степеней мономов, входящих в разложение Тейлора этой функции в точке 0.)

Кроме того, предположим, что система (0.10) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{ord}_{z_i \dots z_n} \psi_i > \beta_i^i + \dots + \beta_n^i, \\ \text{ord}_{z_i \dots z_n} P_i > \beta_i^i + \dots + \beta_n^i, \\ \text{ord}_{z_i \dots z_n} \psi_j \geq \beta_j^j + \dots + \beta_n^j, \\ \text{ord}_{z_i \dots z_n} P_j \geq \beta_j^j + \dots + \beta_n^j, \\ i = 1, \dots, n; j = i + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (0.11)$$

Здесь $\text{ord}_{z_i \dots z_n} \psi_j$ порядок голоморфной функции ψ_j по переменным $z_i \dots z_n$ при фиксированных остальных.

Если система (0.10) удовлетворяет условиям (0.11), то она может быть записана

В ВИДЕ

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(z) = (z^{\beta^1} + Q_1(z))e^{P_1(z)}, \\ f_2(z) = (z^{\beta^2} + \varphi_{21}(z) + Q_2(z))e^{P_2(z)}, \\ \\ f_n(z) = (z^{\beta^n} + \varphi_{n1}(z) + \dots + \varphi_{nn-1}(z) + Q_n(z))e^{P_n(z)}, \end{array} \right. \quad (0.12)$$

где φ_{ij} — однородные полиномы степени $\|\beta^i\| = k_i$, удовлетворяющие

$$\deg_{z_j} \varphi_{ij} < \beta_j^i, \quad (0.13)$$

для $i = 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i - 1$. А порядок Q_j по совокупности переменных строго больше $k_j, j = 1, \dots, n$.

Таким образом получаем, что

$$\psi_i(z) = \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_{ij}(z) + Q_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (0.14)$$

При некоторых условиях на $r_1, \dots, r_n$ определены вычеты интегралов вида J_β .

Теорема 2.4. При сделанных предположениях для функций f_j вида (0.10), удовлетворяющим условиям (0.11)–(0.14) справедливы формулы:

$$\begin{aligned} J_\beta &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{(\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s})!} \times \\ &\quad \times \frac{\partial^{l_s}(\Delta_{I_s} \cdot \psi_{I_s}^{\alpha^s})}{\partial z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \Big|_{z=0} = \\ &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_{I_s} \cdot \psi_{I_s}^{\alpha^s}}{z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \right], \end{aligned}$$

где α^s — мультииндекс длины s , i_k — номер k -ой единицы в I_s , $l_s = \|\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}\|$, $\beta! = \beta_1! \cdot \beta_2! \cdot \dots \cdot \beta_n!$, $\psi^{\alpha^s}(I_s) = \psi_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot \psi_{i_2}^{\alpha_2^s} \cdot \dots \cdot \psi_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial z_1^{\gamma_1}} \frac{\partial^{\gamma_2}}{\partial z_2^{\gamma_2}} \dots \frac{\partial^{\gamma_n}}{\partial z_n^{\gamma_n}}$ u ,
наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

Суммирование ведется по конечному множеству мультииндексов α^s , удовлетворяющих условиям $\alpha_1^s \leq \|\beta\| + \min(s, k_{i_1} + \dots + k_{i_s})$, $\alpha_2^s \leq \beta_2 + \dots + \beta_n + 2(n-1) + (\alpha_1^s + 1)(\beta_2^{i_1} + \dots + \beta_n^{i_1})$, $\dots$, $\alpha_s^s \leq \beta_n + 2 + \beta_n^{i_1} \alpha_1^s + \dots + \beta_n^{i_s-1} \alpha_{s-1}^s$.

Далее рассмотренные интегралы связываются со степенными суммами корней системы (0.11).

Обозначим через $q_i(z_1, \dots, z_n)$ выражение вида

$$q_i(z_1, \dots, z_n) = (1 - a_{i1}z_1)^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (1 - a_{in}z_n)^{m_{in}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (0.19)$$

тогда наша система примет вид

$$f_i(z_1, \dots, z_n) = [q_i(z_1, \dots, z_n) + Q_i(z_1, \dots, z_n)] e^{P_i(z_1, \dots, z_n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (0.20)$$

Определим функции

$$h_i(z) = \begin{cases} q_i(z), & \text{если } a_{ij} \neq 0, \quad \text{для всех } j; \\ q_i(z) \cdot \frac{1}{z_{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z_{j_k}}, & \text{если } a_{ij_1} = \dots = a_{ij_k} = 0. \end{cases} \quad (0.21)$$

Система уравнений $h_i(z) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ имеет $n!$ изолированных корней в $\overline{\mathbb{C}}^n$ ($\overline{\mathbb{C}}^n$ пространство теории функций). Пусть $J = (j_1, \dots, j_n)$ — мультииндекс, являющийся перестановкой $(1, \dots, n)$, тогда эти корни можно записать в виде

$$a_J = \begin{cases} (1/a_{1j_1}, \dots, 1/a_{nj_n}), & \text{если все } a_{kj_k} \neq 0, \quad k = 1, \dots, n; \\ (1/a_{1j_1}, \dots, \infty_{[i_1]}, \dots, \infty_{[i_k]}, \dots, 1/a_{nj_n}), & \text{если } a_{i_1j_{i_1}} = \dots = a_{i_kj_{i_k}} = 0. \end{cases}$$

где $k, j = 1, \dots, n$.

Обозначим через Γ_h цикл

$$\Gamma_h = \{z \in \mathbb{C}^n : |h_i| = r_i, \quad r_i > 0, \quad i = \overline{1, n}\}. \quad (0.22)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(z, t) = (q_i(z) + t \cdot Q_i(z)) e^{P_i(z)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (0.23)$$

зависящую от действительного параметра $t \geq 0$.

Как показано в этом параграфе определен вычетный интеграл $J_\gamma(t)$

$$J_\gamma(t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \dots \wedge \frac{dF_n}{F_n}, \quad (0.24)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс.

Пусть I_s — мультииндекс длины n , состоящий из s единиц и $n - s$ нулей ($s = 0, \dots, n$). Обозначим через G_i функции $G_i(z, t) = q_i(z) + t \cdot Q_i(z), i = 1, 2, \dots, n$. Пусть I_s — мультииндекс порядка n , состоящий из s единиц и $n - s$ нулей ($s = 0, \dots, n$). Рассмотрим определители Δ_{I_s} — якобианы системы функций, таких, что единице, стоящей на j -ом

месте из I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции G_j , а нулю, стоящему на k -ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k .

Теорема 2.7. При сделанных предположениях для функций F_i вида (0.23) справедливы формулы для $J_\gamma(t)$ в виде сходящихся при достаточно малых t рядов:

$$J_\gamma(t) = \sum_{s=0}^n \sum_J \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-t)^{|\alpha^s|} (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(\alpha^s, J)!} \cdot \frac{\partial^{|\beta^s|}}{\partial z^{\beta^s}} \left[\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q^{\alpha^s}(I_s)}{q^{\alpha^s+I}(I_s, J)} \right]_{z=a_J},$$

где $(-1)^{s(J)} = 1$, когда J — четная перестановка и $(-1)^{s(J)} = -1$, когда J — нечетная перестановка, α^s — мультииндекс порядка s , i_l — номер l -й единицы в I_s , $q^{\alpha^s+I}(I_s, J) = q_1^{\alpha_1^s+1}[j_1] \cdots q_s^{\alpha_s^s+1}[j_n]$, а $q_p[j_p]$ — это произведение всех $(1-a_{p1}z_1)^{m_{p1}} \cdots (1-a_{pn}z_n)^{m_{pn}}$ кроме $(1-a_{pj_p}z_{j_p})^{m_{pj_p}}$, $Q^{\alpha^s}(I_s) = Q_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdots Q_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\beta(\alpha^s, J) = (m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1, \dots, m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1)$,

$$\beta(\alpha^s, J)! = \prod_p (m_{pj_p} \cdot (\alpha_{j_p}^s + 1) - 1)!,$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta} = \frac{\partial^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1 + \dots + m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}{\partial z_1^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1} \cdots \partial z_n^{m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}.$$

При некоторых ограничениях на Q_i и P_i вычеты интегралы можно связать со степенными суммами корней системы (0.18)

Предположим, что $Q_i(z)$ — многочлены вида

$$Q_i(z) = z_1 \cdots z_n \sum_{|\alpha| \geq 0} C_\alpha^i z^\alpha \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (0.25)$$

где α — мультииндекс, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $\deg_{z_j} Q_i \leq m_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, для тех a_{ij} , для которых $a_{ij} \neq 0$. Если $a_{ij} = 0$, то ограничение на степень $\deg_{z_j} Q_i$ отсутствует.

Функции P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leq \|\eta\| \leq p_j} b_\eta^j z^\eta, \quad (0.26)$$

где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — мультииндекс.

Обозначим $z^{(j)} = (z_{j1}, \dots, z_{jn}) = (z_{j1}(1), \dots, z_{jn}(1))$, $j = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$ — нули системы (0.20) с учетом их кратностей, не лежащие на координатных плоскостях.

Рассмотрим цикл

$$\tilde{\Gamma}_h = \{w \in \mathbb{C}^n : \left| h_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right| = \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Цикл $\tilde{\Gamma}_h$ гомологичен сумме циклов $\tilde{\Gamma}_{h,\tilde{a}_J}$, получающихся заменой $z_j = \frac{1}{w_j}$ из циклов Γ_{h,a_J} .

Обозначим через $\tilde{G}_i$ функции $\tilde{G}_i = \tilde{q}_i(w) + \tilde{Q}_i(w)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $\tilde{q}_i = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$, а $\tilde{Q}_i = w_1^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot w_n^{m_{in}} \cdot Q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)$.

Пусть $\tilde{\Delta}$ — якобиан системы функций $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n$.

Теорема 2.9. Для системы (0.18) с функциями f_j вида (0.20) и Q_i вида (0.25) справедливы формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma+I} &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{\|K\| \geq 0} (-1)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \int_{\tilde{\Gamma}_{h,\tilde{a}_J}} \tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \tilde{Q}_n^{k_n}}{\tilde{q}_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \tilde{q}_n^{k_n+1}} dw = \\ &= \sum_{K \in \mathfrak{R}} (-1)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K, J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K}{\tilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=\tilde{a}_J}, \end{aligned}$$

где $z^{(j)} = z^{(j)}(1)$, а множество индексов $\mathfrak{R} = \{K = (k_1, \dots, k_n) : \exists i, \text{ что } \|K\| < \gamma_i + 2, \ i = 1, \dots, n\}$, $\tilde{a}_J = (a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n})$, $(-1)^{s(J)} = 1$, когда J — четная перестановка и $(-1)^{s(J)} = -1$, когда J — нечетная перестановка, $\tilde{q}^{K+I}(J) = \tilde{q}_1^{k_1+1}[i_1] \cdot \dots \cdot \tilde{q}_n^{k_n+1}[i_n]$, а $\tilde{q}_j[i_j]$ — это произведение всех $(w_1 - a_{j1})^{m_{j1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{jn})^{m_{jn}}$ кроме $(w_{i_j} - a_{ji_j})^{m_{ji_j}}$, $\tilde{Q}^K = \tilde{Q}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \tilde{Q}_n^{k_n}$, $\beta(K, J) = (m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1, \dots, m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1)$,

$$\beta(K, J)! = \prod_j (m_{ji_j} \cdot (k_{i_j} + 1) - 1)!,$$

$$\frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} = \frac{\partial^{m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1 + \dots + m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1}}{\partial w_1^{m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1} \cdot \dots \cdot \partial w_n^{m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1}}.$$

Далее приводится теорема 2.10, аналогичная теореме 2.3 второго параграфа.

Хорошо известно, что целые функции конечного порядка роста в $\mathbb{C}^n$, вообще говоря, не допускают разложения в бесконечное произведение, связанное с нулями функции. В четвертом параграфе доказывается теорема о разложении некоторых типов целых функций в бесконечные произведения.

Пусть Q_j — многочлены в $\mathbb{C}^n$, $[1 - Q_j]$ — нулевое множество (дивизор) функций $1 - Q_j$. Если существует целая функция $f(z)$, у которой нулевое множество равно $\bigcup_{j=1}^\infty [1 - Q_j]$, то необходимым условием для этой $f(z)$ является то, что в любом шаре из $\mathbb{C}^n$, содержатся точки конечного числа множеств $[1 - Q_j]$.

Рассмотрим каноническое произведение

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} E(Q_j(z), p_j - 1) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - Q_j(z)) e^{Q_j(z) + \frac{Q_j^2(z)}{2} + \dots + \frac{Q_j^{p_j-1}(z)}{p_j-1}}, \quad (0.27)$$

где выражение

$$E(Q, p) = (1 - Q(z)) e^{Q(z) + \frac{Q^2(z)}{2} + \dots + \frac{Q^p(z)}{p}}, \quad (0.28)$$

($p = 1, 2, \dots$) назовем *первичным множителем*.

Теорема 2.11. *Для всякой последовательности многочленов Q_j , $j = 1, \dots, n, \dots$, в которой степени всех Q_j ограничены числом q , Q_j имеют вид*

$$Q_j(z) = \sum_{\|\beta\| \leq q} c_{\beta}^j z^{\beta}, \quad (0.29)$$

и выполнено условие

$$\alpha_j = \max_{\alpha} |c_{\alpha}^j| \rightarrow 0, \quad (0.30)$$

существует целая функция, имеющая нули на этих и только этих нулевых множествах, т.е. на множестве $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$. Здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс.

Данная теорема является аналогом классической теоремы Вейерштрасса.

В дальнейшем будем считать $f(0) = 1$. Пусть для функции $f(z)$ ряд $\sum_j \alpha_j^{\beta}$ сходится при некотором $\beta > 0$.

Нижнюю грань положительных чисел β , для которых ряд $\sum_j \alpha_j^{\beta}$ сходится, назовем *показателем сходимости ряда* и обозначим через ρ_1 .

Теорема 2.12. *Если для целой функции $f(z)$, вида (0.27) имеющей нулевые множества $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$, показатель сходимости $\rho_1 > 0$, то f имеет конечный порядок роста $\rho \leq q\rho_1$.*

Теорема 2.13 (Аналог теоремы Адамара о разложении на множители). *Если функция $f(z)$ — целая функция с нулевым множеством $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$, причем $f(0) = 1$ и $\rho_1 > 0$, то*

$$f(z) = e^{M(z)} P(z),$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$, а $M(z)$ — многочлен, степень которого не выше $q\rho_1$.

Третья глава состоит из трех параграфов и посвящена нахождению суммы кратных рядов с помощью вычетных интегралов.

В первом параграфе рассматриваются простейшие системы.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему уравнений от трех комплексных переменных

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_1 - a^2}}{\sqrt{z_1 - a^2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1 - a^2}{k^2 \pi^2}\right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_2 - z_1 - a^2}}{\sqrt{z_2 - z_1 - a^2}} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_2 - z_1 - a^2}{m^2 \pi^2}\right) = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_3 - z_2 - a^2}}{\sqrt{z_3 - z_2 - a^2}} = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_3 - z_2 - a^2}{s^2 \pi^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Применяя теорему 2.1, можно получить

$$\begin{aligned} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2) \cdot (\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2) \cdot (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)} = \\ = \frac{(a \operatorname{cth} a - 1)^3}{48a^6}. \end{aligned}$$

Во втором параграфе рассматриваются системы треугольного вида.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = \frac{\sin \sqrt{a_1 z_1 - a_2 z_2}}{\sqrt{a_1 z_1 - a_2 z_2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_1 z_1 - a_2 z_2}{k^2 \pi^2}\right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = \frac{\sin \sqrt{-b_1 z_1 + b_2 z_2}}{\sqrt{-b_1 z_1 + b_2 z_2}} = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{-b_1 z_1 + b_2 z_2}{s^2 \pi^2}\right) = 0. \end{cases}$$

На основе теоремы 2.4 получена

Теорема 3.1. *Справедливо интегральное представление*

$$\begin{aligned} \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{180 a_1 b_2} - \frac{\pi(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2})\zeta(3)}{2\sqrt{a_1 b_2}} \\ - \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \cdot \frac{\pi}{2 \left(e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi} - 1 \right)} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, u) dy - \\ - \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} \cdot \frac{\pi}{2 \left(e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi} - 1 \right)} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, u) dy, \end{aligned}$$

где ${}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x)$ — базисный гипергеометрический ряд.

В третьем параграфе рассматриваются системы специального вида.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 - a_1 a_2 z_1 z_2 - a_1 a_3 z_1 z_3 - a_3 a_2 z_2 z_3}}{\sqrt{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 - a_1 a_2 z_1 z_2 - a_1 a_3 z_1 z_3 - a_3 a_2 z_2 z_3}} = \\ = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 - a_1 a_2 z_1 z_2 - a_1 a_3 z_1 z_3 - a_3 a_2 z_2 z_3}{k^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 - b_1 b_2 z_1 z_2 - b_1 b_3 z_1 z_3 - b_3 b_2 z_2 z_3}}{\sqrt{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 - b_1 b_2 z_1 z_2 - b_1 b_3 z_1 z_3 - b_3 b_2 z_2 z_3}} = \\ = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 - b_1 b_2 z_1 z_2 - b_1 b_3 z_1 z_3 - b_3 b_2 z_2 z_3}{s^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 - c_1 c_2 z_1 z_2 - c_1 c_3 z_1 z_3 - c_3 c_2 z_2 z_3}}{\sqrt{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 - c_1 c_2 z_1 z_2 - c_1 c_3 z_1 z_3 - c_3 c_2 z_2 z_3}} = \\ = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 - c_1 c_2 z_1 z_2 - c_1 c_3 z_1 z_3 - c_3 c_2 z_2 z_3}{m^2 \pi^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Тогда, применяя теорему 2.9, получим, при условии $\sqrt{\frac{ad}{bc}} = 2$,

$$\begin{aligned} \sigma_{(1,1,1)} &= \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^6 s^2 (as^2 - bk^2)(cs^2 - dm^2)} = \frac{1}{3780ac} + \\ &+ \frac{1}{4\pi^5 \sqrt{-cda}} \cdot \left(\zeta(5) + \frac{1}{2(e^{4\pi \sqrt{-c/d}} - 1)} \int_0^1 \ln^4 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi \sqrt{-c/d}}, e^{2\pi \sqrt{-c/d}}; e^{4\pi \sqrt{-c/d}}, y) dy \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi^5 \sqrt{-abc}} \cdot \left(\zeta(5) + \frac{1}{2(e^{4\pi \sqrt{-a/b}} - 1)} \int_0^1 \ln^4 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi \sqrt{-a/b}}, e^{2\pi \sqrt{-a/b}}; e^{4\pi \sqrt{-a/b}}, y) dy \right) + \\ &+ \frac{1}{360\sqrt{abcd}} - \frac{1}{4\pi^4 \sqrt{abcd}} \cdot \frac{1}{(e^{4\pi \sqrt{-a/b}} - 1)} \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi \sqrt{-a/b}}, e^{2\pi \sqrt{-a/b}}; e^{4\pi \sqrt{-a/b}}, y) dy - \\ &- \frac{1}{4\pi^4 \sqrt{abcd}} \cdot \frac{1}{(e^{4\pi \sqrt{-c/d}} - 1)} \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi \sqrt{-c/d}}, e^{2\pi \sqrt{-c/d}}; e^{4\pi \sqrt{-c/d}}, y) dy + \\ &+ \frac{3}{32\pi^4 \sqrt{abcd}} \cdot \frac{1}{(e^{4\pi \sqrt{-c/d}} - 1)} \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi \sqrt{-c/d}}, e^{2\pi \sqrt{-c/d}}; e^{4\pi \sqrt{-c/d}}, y) dy - \\ &- \frac{1}{8\pi^4 \sqrt{abcd}} \cdot \int_0^1 \ln^4 y \cdot \frac{\partial}{\partial \pi \sqrt{-c/d}} \left[\frac{1}{e^{4\pi \sqrt{-c/d}} - 1} {}_2\Phi_1(e^{2\pi \sqrt{-c/d}}, e^{2\pi \sqrt{-c/d}}; e^{4\pi \sqrt{-c/d}}, y) \right] dy - \\ &- \frac{1}{32\pi^4 \sqrt{abcd}} - \frac{1}{64\pi^4 \sqrt{abcd}} \cdot \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi \sqrt{-c/d}}, -1; -e^{2\pi \sqrt{-c/d}}, y) dy, \end{aligned}$$

где ${}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x)$ — базисный гипергеометрический ряд.

Рассмотренные примеры отсутствуют в известных справочниках.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Александру Мечиславовичу Кытманову за сотрудничество, внимание и поддержку на всех этапах выполнения данной работы.

Глава 1.

Предварительные сведения

В данной главе сформулируем некоторые известные факты из многомерной теории вычетов, теории целых и мероморфных функций конечного порядка роста, о нахождении степенных сумм корней систем уравнений и их связи с вычетными интегралами.

1. Вычеты

Определение 1.1. *Вычетом* голоморфной функции f относительно базисного цикла σ_γ размерности n , если особенности f не пересекает σ , называют величину

$$R_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\sigma_\gamma} f dz.$$

Теорема 1.1 (о вычетах). *Если функция f мероморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и P -полярное множество этой функции, то для любого n -мерного цикла $\sigma \subset D \setminus P$*

$$\int_{\sigma} f dz = (2\pi\sqrt{-1})^n \sum_{\gamma=1}^p k_\gamma R_\gamma,$$

где k_γ — коэффициенты разложения σ по базе n -мерных гомологий в $D \setminus P$, а R_γ — вычеты f относительно циклов этой базы (смотри [30]).

Теорема 1.2 (Безу). *Пусть $p = (p_1, \dots, p_n)$ — система многочленов, имеющая конечное множество нулей в $\mathbb{C}^n$. Если старшие однородные части этой системы имеют только один общий ноль, начало координат, то тогда число этих нулей с учетом кратностей равно произведению степеней многочленов (см., например, [33]).*

Теорема 1.3 (Коши - Пуанкаре). Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда для любой $(n+1)$ -цепи σ в D интеграл

$$\int_{\partial\sigma} f(z)dz = \int_{\partial\sigma} f(z_1, \dots, z_n)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = 0$$

(смотри [5]).

Определение 1.2. Пусть $D_i \subset \mathbb{C}_{z_i}^1$ — область с кусочно-гладкой границей $i = 1, \dots, n$. Область $D = D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$ называется **полицилиндрической областью**.

Определение 1.3. Множество $\Gamma = \partial D_1 \times \dots \times \partial D_n$ снабженное естественной ориентацией, индуцированной ориентацией области D , называется **остовом области D** .

Класс функций, голоморфных в области D обозначается $A(D)$.

Обозначим $A_C(D) = A(D) \cap C(\overline{D})$ и $A^n(D)$ — класс голоморфных в D отображений $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Теорема 1.4. Пусть D — полицилиндрическая область, a — любая точка D , функция $\varphi \in A_C(D)$, тогда справедлива кратная формула Коши

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)dz}{z-a} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z_1, \dots, z_n)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{(z_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (z_n - a_n)} \end{aligned}$$

(например [5]).

В качестве следствия получается формула *кратного вычета*. Если Γ остов полицилиндра с центром в нуле, то

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma} \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_1 = \dots = \alpha_n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим точку $a \in \mathbb{C}^n$ и U_a — окрестность точки a . Предположим, что отображение $f = (f_1, \dots, f_n) \in A^n(U_a)$ и имеет один общий ноль в a . Пусть *локальный цикл* $\gamma_f = \{z \in U_a : |f_1(z)| = \dots = |f_n(z)|\}$ есть остов аналитического полиэдра. Хорошо известна следующая формула многомерного логарифмического вычета (см., например, [5]), полученная Мартинелли и Сорани [40].

Теорема 1.5. Если функция $\varphi(z) \in A(U_a)$, то

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma_f} \varphi \frac{df}{f} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma_f} \varphi \frac{df_1 \wedge \dots \wedge f_n}{f_1 \dots f_n} = \mu_a \varphi(a),$$

где μ_a — это кратность нуля a отображения f .

Вычетом Гротендика называют интеграл (см., например, [30, 35, 36]).

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma_f} \varphi \frac{dz}{f} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma_f} \varphi \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge z_n}{f_1 \dots f_n}.$$

О способах его вычисления см., например, [30, 35, 36].

Пусть в области $D \subset \mathbb{C}^n$ задано отображение $f \in A^n(D)$ и имеющее в D конечное число нулей. Цикл Γ_f , равный сумме локальных циклов γ_f , называется *глобальным циклом*.

Теорема 1.6 (Южакова). Пусть отображение $f \in A^n(\overline{D})$, $\varphi \in A_c(D)$, D и Γ — заданы выше, а отображение $g \in A^n(\overline{D})$ удовлетворяет на Γ неравенствам

$$|g_j(z)| < |f_j(z)|, j = 1, \dots, n$$

Тогда

- а) отображение f и $f + g$ имеют в D одинаковое число нулей;
- б) справедлива формула

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma} \varphi \frac{d(f+g)}{f+g} = \sum_{a \in E_{f+g}} \mu_a(f+g) \varphi(a)$$

где $E_f = \{a : a \in D, f(a) = 0\}$, а μ_a — это кратность нуля

(смотри, например, [5]).

В работе [29] рассматривается система алгебраических уравнений вида

$$f_i(z) = (z_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (z_n - a_{in})^{m_{in}} + Q_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$, m_{ij} — натуральные числа, $Q_i(z)$ — многочлены, степени которых по переменной z_j меньше, чем m_{ij} , a_{ij} — такие комплексные числа, что для каждого $j = 1, \dots, n$ все $a_{1j}, \dots, a_{nj}$ различны. Показано, что число корней системы (1.1) конечно и их число в $\mathbb{C}^n$ (с учетом их кратности) равно перманенту, составленному из чисел m_{ij} .

С помощью многомерного логарифмического вычета в [29] получена формула для нахождения суммы значений произвольного многочлена в корнях заданной системы алгебраических уравнений. Приведем утверждение из [29], которое мы будем использовать в дальнейшем. Пусть задана система алгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ вида

$$f_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

имеющая конечное число корней в $\mathbb{C}^n$ и не имеющая бесконечных корней в $\overline{\mathbb{C}}^n$ ($\overline{\mathbb{C}}^n$ — пространство теории функций).

Обозначим $m_{ij} = \deg_{z_j} f_i$. А цикл

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n : |f_1(z)| = r_1, \dots, |f_n(z)| = r_n\}$$

при достаточно малых положительных $r_1, \dots, r_n$ гомологичен сумме циклов, лежащих в окрестности корней системы (1.2).

Лемма 1.1 ([29]). *При сделанных предположениях*

$$\int_{\Gamma} \frac{P(z)dz}{f_1(z) \cdots f_n(z)} = 0$$

для любого полинома $P(z)$ такого, что $p_j = \deg_{z_j} P \leq m_{1j} + \dots + m_{nj}$ для всех j от 1 до n .

Лемма доказывается с помощью теоремы о полной сумме вычетов на компактном комплексном многообразии.

В статьях [9], [21] была рассмотрена система функций вида:

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z),$$

голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_j(z) = (z^{\beta^j} + Q_j(z)), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $\beta^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + \beta_2^j + \dots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Функции Q_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| > k_j} a_{\alpha}^j z^{\alpha},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$.

Были получены формулы для вычисления вычетного интеграла

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f}$$

через коэффициенты $Q_j(z)$. При дополнительных условиях на функции f_j установлена связь со степенными суммами корней в отрицательной степени данной системы.

2 Целые и мероморфные функции

Определение 1.4. *Целой* называется функция, голоморфная во всем пространстве $\mathbb{C}^n$.

Определение 1.5. Функция, которая представляется как отношением двух целых функций, называется **мероморфной**.

Определение 1.6. Целая функция $f(z)$ называется **функцией конечного порядка**, если существует такое положительное число A , что при $|z| = r \rightarrow \infty$

$$f(z) = O(e^{r^A}).$$

Определение 1.7. Нижняя грань ρ чисел A , для которых выполняется это соотношение, называется **порядком функции**.

Таким образом, если $f(z)$ — функция порядка ρ , то для всякого положительного ε

$$f(z) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}),$$

но ни для какого отрицательного ε это не так.

Определение 1.8. Говорят, что мероморфная функция $f(z)$ имеет **порядком** ρ , если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r)}{\log r} = \rho,$$

так что для всякого положительного ε

$$T(r) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}),$$

где $T(r)$ — характеристическая функция функции $f(z)$, в то время как ни для какого отрицательного ε это соотношение не выполняется.

На комплексной плоскости функции конечного порядка являются простейшими после многочленов целыми функциями.

Определение 1.9. Выражения $E(u, 0) = 1 - u$,

$$E(u, p) = (1 - u)e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}};$$

$p = 1, 2, \dots$ называются **первичными множителями**.

Теорема 1.7 (теорема Вейерштрасса о разложении на множители). *Всякая целая функция с $f(0) \neq 0$ разлагается в бесконечное произведение вида*

$$f(z) = f(0)P(z)e^{g(z)},$$

где $P(z)$ — некоторое произведение первичных множителей, а $g(z)$ — некоторая целая функция.

Теорему Вейерштрасса можно найти, например, в [27, 31].

Если функция $f(z)$ на комплексной плоскости имеет конечный порядок, то существует такое не зависящее от n целое число p , что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \quad (2.1)$$

сходится для всех значений z , если сходится ряд

$$\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \quad (2.2)$$

где $r_1, r_2, \dots$ — модули нулей функции $f(z)$, а этот ряд сходится для всех значений r , если $p + 1 \geq \rho$.

Определение 1.10. Произведение (2.1) с наименьшим из целых p , для которых сходится ряд (2.2), называется **каноническим произведением**, построенным по нулям функции $f(z)$, а это наименьшее p называется его **родом**.

Теорема 1.8 (Адамара о разложении на множители). *Если функция $f(z)$ — целая функция порядка ρ с нулями $z_1, z_2, \dots$, причем $f(0) \neq 0$, то*

$$f(z) = e^{Q(z)}P(z),$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$, а $Q(z)$ — многочлен, степень которого не выше ρ . (см., например, [27]).

Для функций многих переменных есть аналоги теоремы Адамара, но они имеют более сложный вид (см., например, [22, 27]) и, как правило, функции не разлагаются в бесконечные произведения, связанные с нулями функции.

Глава 2.

Вычетные интегралы и степенные суммы корней определенных типов систем неалгебраических уравнений

В данной главе рассматриваются вычетные интегралы и степенные суммы корней определенных типов систем неалгебраических уравнений.

3. Вычетные интегралы и степенные суммы корней простейших систем неалгебраических уравнений

Целью параграфа является нахождение вычетных интегралов, построенных по системам неалгебраических уравнений простейшего вида и установление их связи со степенными суммами корней этой системы.

3.1 Вычисление вычетных интегралов

Рассмотрим систему функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_j(z) = (z^{\beta^j} + Q_j(z))e^{P_j(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

где $\beta^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_n^j)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + \beta_2^j + \dots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Функции Q_j , P_j

разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| > k_j} a_\alpha^j z^\alpha, \quad (3.2)$$

$$P_j(z) = \sum_{\|\gamma\| \geq 0} b_\gamma^j z^\gamma, \quad (3.3)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_j \geq 0$, $\gamma_j \in \mathbb{Z}$, а $z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \cdot z_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n}$.

Так что мы считаем, что степени всех мономов (по совокупности переменных), входящих в Q_j строго больше, чем k_j , $j = 1, 2, \dots, n$ (т.е. $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > k_j$).

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)$, являющиеся остовами поликругов:

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_1 > 0, \dots, r_n > 0.$$

При достаточно малых r_j циклы $\gamma(r)$ лежат в области голоморфности функций f_j , поэтому ряды

$$\begin{aligned} \sum_{\|\alpha\| > k_j} |a_\alpha^j| r_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot r_n^{\alpha_n} \\ \sum_{\|\gamma\| \geq 0} |b_\gamma^j| r_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot r_n^{\gamma_n} \end{aligned}$$

сходятся, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда на цикле $\gamma(tr) = \gamma(tr_1, tr_2, \dots, tr_n)$ при достаточно малых $t > 0$, имеем

$$|z|^{\beta^j} = t^{k_j} \cdot r_1^{\beta_1^j} \cdot r_2^{\beta_2^j} \cdot \dots \cdot r_n^{\beta_n^j} = t^{k_j} \cdot r^{\beta^j},$$

а

$$|Q_j(z)| = \left| \sum_{\|\alpha\| > k_j} a_\alpha^j z^\alpha \right| \leq \sum_{\|\alpha\| > k_j} t^{\|\alpha\|} |a_\alpha^j| r^\alpha \leq t^{k_j+1} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} |a_\alpha^j| r^\alpha, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поэтому при таких t на цикле $\gamma(tr)$ выполняются неравенства

$$|z|^{\beta^j} > |Q_j(z)|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

таким образом,

$$f_j(z) \neq 0 \quad \text{на} \quad \gamma(tr), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В дальнейшем будем считать, что $t = 1$. Рассмотрим систему функций вида

$$\begin{cases} f_1(z) = 0, \\ f_2(z) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(z) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Из (3.4), следует, что при достаточно малых r_j , определены интегралы вида

$$\int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \int_{\gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot z_2^{\beta_2+1} \dots z_n^{\beta_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \dots, \beta_n \geq 0, \beta_j \in \mathbb{Z}, I = (1, 1, \dots, 1)$. Назовем их *вычетными интегралами* в соответствии с работой [41]. К этим интегралам не применима теорема о логарифмическом вычете и они не являются стандартными вычетами Гротендика.

Если для двух разных циклов вида $\gamma(r)$ выполнены неравенства (3.4), то эти циклы гомотопны вне нулевых множеств функций $f_1, \dots, f_n$. Поэтому по теореме Коши-Пуанкаре (см. гл. 1) эти интегралы не зависят от $(r_1, \dots, r_n)$.

Введем обозначение

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f}.$$

Обозначим через $\tilde{f}_j$ функции $\tilde{f}_j(z) = z^{\beta_j} + Q_j(z)$, $j = 1, \dots, n$. Пусть I_s — мультииндекс порядка n , состоящий из s единиц и $n - s$ нулей ($s = 0, \dots, n$). Рассмотрим Δ_{I_s} — якобиан системы функций, таких, что единице, стоящей на j -ом месте из I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции $\tilde{f}_j$, а нулю, стоящему на k -ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k .

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях для функции f_j вида (3.1), (3.2), (3.3) справедливы формулы:*

$$J_\beta = \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leq \|\beta\| + \min(s, k_{i_1} + \dots + k_{i_s})} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{(\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s})!} \times \\ \times \frac{\partial^{l_s}(\Delta_{I_s} \cdot Q^{\alpha^s}(I_s))}{\partial z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \Big|_{z=0} =$$

$$= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leq \|\beta\| + \min(n, k_{i_1} + \dots + k_{i_s})} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_{I_s} \cdot Q^{\alpha^s}(I_s)}{z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \right],$$

где α^s — мультииндекс порядка s , i_k — номер k -ой единицы в I_s , $l_s = \|\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}\|$, $\beta! = \beta_1! \cdot \beta_2! \cdot \dots \cdot \beta_n!$, $Q^{\alpha^s}(I_s) = Q_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot Q_{i_2}^{\alpha_2^s} \cdot \dots \cdot Q_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z^\beta} = \frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2} \dots \partial z_n^{\gamma_n}}$ и, наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{df_j}{f_j} &= \frac{d(z^{\beta_j} + Q_j(z))e^{P_j}}{(z^{\beta_j} + Q_j(z))e^{P_j}} = \\ &= \frac{e^{P_j} d(z^{\beta_j} + Q_j(z))}{(z^{\beta_j} + Q_j(z))e^{P_j}} + \frac{(z^{\beta_j} + Q_j(z))e^{P_j} dP_j}{(z^{\beta_j} + Q_j(z))e^{P_j}} = \\ &= \frac{df_j}{\tilde{f}_j} + dP_j. \end{aligned}$$

Поскольку на $\gamma(r)$ выполнены неравенства (3.4), то

$$\frac{1}{\tilde{f}_j} = \frac{1}{z^{\beta_j} + Q_j(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(Q_j(z))^m}{z^{(m+1)\beta_j}}.$$

Причем данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $\gamma(r)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} &= \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n} = \\ &= \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \left(\frac{df_1}{\tilde{f}_1} + dP_1 \right) \wedge \left(\frac{df_2}{\tilde{f}_2} + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{df_n}{\tilde{f}_n} + dP_n \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left(\frac{df_1}{\tilde{f}_1} + dP_1 \right) \wedge \left(\frac{df_2}{\tilde{f}_2} + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{df_n}{\tilde{f}_n} + dP_n \right) = \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \Delta_{I_s} dz,$$

а

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \left(\frac{df_1}{\tilde{f}_1} + dP_1 \right) \wedge \left(\frac{df_2}{\tilde{f}_2} + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{df_n}{\tilde{f}_n} + dP_n \right) &= \\ &= \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \geq 0} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|} \Delta_{I_s} Q(I_s)^{\alpha^s} dz}{z^{\alpha^s \beta^{i_s}}}. \end{aligned}$$

Следовательно, на $\gamma(r)$ получаем

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \geq 0} \int_{\gamma(r)} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|} \Delta_{I_s} dz}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{Q(I_s)^{\alpha^s}}{z^{\alpha^s \beta^{i_s}}}. \quad (3.6)$$

где $\alpha^s = (\alpha_1^s, \dots, \alpha_s^s)$, $z^{\beta^{is} \cdot \alpha^s} = z^{\beta^{i1} \cdot \alpha_1^s + \dots + \beta^{is} \cdot \alpha_s^s}$

Покажем, что в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Для этого подсчитаем степени (по совокупности переменных) мономов, входящих в числитель и знаменатель подынтегрального выражения.

Рассмотрим случай, когда $I_s = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_s, 0, 0, \dots, 0)$, все остальные случаи рассматриваются аналогично:

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} (\tilde{f}_1)'_{(z_1)} & (\tilde{f}_1)'_{(z_2)} & \dots & (\tilde{f}_1)'_{(z_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\tilde{f}_s)'_{(z_1)} & (\tilde{f}_s)'_{(z_2)} & \dots & (\tilde{f}_s)'_{(z_n)} \\ (P_{s+1})'_{(z_1)} & (P_{s+1})'_{(z_2)} & \dots & (P_{s+1})'_{(z_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (P_n)'_{(z_1)} & (P_n)'_{(z_2)} & \dots & (P_n)'_{(z_n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1^1 z^{(\beta^1 - e^1)} + \dots & \beta_2^1 z^{(\beta^1 - e^2)} + \dots & \dots & \beta_n^1 z^{(\beta^1 - e^n)} + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^s z^{(\beta^s - e^1)} + \dots & \beta_2^s z^{(\beta^s - e^2)} + \dots & \dots & \beta_n^s z^{(\beta^s - e^n)} + \dots \\ (P_{s+1})'_{(z_1)} & (P_{s+1})'_{(z_2)} & \dots & (P_{s+1})'_{(z_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (P_n)'_{(z_1)} & (P_n)'_{(z_2)} & \dots & (P_n)'_{(z_n)} \end{vmatrix},$$

где $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, \dots, 0)$, $e^n = (0, 0, \dots, 1)$. Наибольшая степень мономов, входящих в Δ_{I_s} ($\deg \Delta_{I_s}$), не превосходит $\max(\|\beta^{i1}\| + \dots + \|\beta^{is}\| - s, 0) = \max(k_{i_1} + \dots + k_{i_s} - s, 0)$. Для степеней мономов, входящих в $Q(I_s)^{\alpha^s}$, получаем оценку:

$$\deg Q(I_s)^{\alpha^s} \leq \alpha_1^s(1 + \|\beta^{i1}\|) + \dots + \alpha_s^s(1 + \|\beta^{is}\|) = \alpha_1^s(1 + k_{i_1}) + \dots + \alpha_s^s(1 + k_{i_s}).$$

Поэтому степень числителя не меньше, чем

$$\begin{aligned} & \max(\|\beta^{i1}\|(\alpha_1^s + 1) + \alpha_1^s + \dots + \|\beta^{is}\|(\alpha_s^s + 1) + \alpha_s^s - s) = \\ & = \max(k_{i_1} + \dots + k_{i_s} - s, 0) + \alpha_1^s(1 + k_{i_1}) + \dots + \alpha_s^s(1 + k_{i_s}). \end{aligned}$$

Степень знаменателя равна

$$\begin{aligned} & \|\beta\| + \|\beta^{i1}\|(\alpha_1^s + 1) + \dots + \|\beta^{is}\|(\alpha_s^s + 1) = \\ & = \|\beta\| + (\alpha_1^s + 1)k_{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)k_{i_s}. \end{aligned}$$

Поэтому в сумме (3.6) все слагаемые, для которых степень числителя больше степени знаменателя на n , равны нулю. Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$\begin{aligned} & \|\beta^{i_1}\|(\alpha_1^s + 1) + \alpha_1^s + \dots + \|\beta^{i_s}\|(\alpha_s^s + 1) + \alpha_s^s - s \leq \\ & \leq \|\beta\| + \|\beta^{i_1}\|(\alpha_1^s + 1) + \dots + \|\beta^{i_s}\|(\alpha_s^s + 1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \max(k_{i_1} + \dots + k_{i_s} - s, 0) + \alpha_1^s(1 + k_{i_1}) + \dots + \alpha_s^s(1 + k_{i_s}) \leq \\ & \leq \|\beta\| + (\alpha_1^s + 1)k_{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)k_{i_s}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемую оценку. $\square$

Отметим, что (как показывает доказательство) в указанные в теореме 2.1 формулы входит лишь конечное число коэффициентов функций $Q_j(z)$ и $P_j(z)$.

Следствие 2.1. *Если все $\beta^j = (0, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$, то интеграл*

$$\begin{aligned} J_\beta &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leq \|\beta\|} (-1)^{\|\alpha\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_{I_s} Q(I_s)^{\alpha^s}}{z^\beta} \right] = \\ &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \leq \|\beta\|} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{\beta!} \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta} (\Delta_{I_s} Q(I_s)^{\alpha^s}) \Big|_{z=0}. \end{aligned}$$

3.2 Интегральные представления для степенных сумм

Наша дальнейшая цель — связать рассмотренные интегралы со степенными суммами корней системы (3.5). Для этого мы сузим класс функций f_j . Сначала возьмем в качестве функций Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) многочлены вида

$$Q_j(z) = \sum_{\alpha \in M_j} a_\alpha^j z^\alpha, \quad (3.7)$$

где M_j — конечное множество мультииндексов такое, что при $\alpha \in M_j$ координаты $\alpha_k \leq \beta_k^j$, $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq j$. (Но по прежнему предполагается, что $\|\alpha\| > k_j$ для всех $\alpha \in M_j$). А для функций P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} b_\gamma^j z^\gamma. \quad (3.8)$$

Сделаем замену $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. При такой замене получим

$$\begin{aligned} f_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) &= \left[\frac{1}{w^{\beta_j}} + Q_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right] e^{P_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)} = \\ &= \frac{1}{w^{\beta_j + s_j e^j}} \left(w_j^{s_j} + \tilde{Q}_j(w_1, w_2, \dots, w_n) \right) e^{P_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)}, \end{aligned}$$

где s_j степень w_j , а многочлен

$$\tilde{Q}_j(w_1, w_2, \dots, w_n) = \tilde{Q}_j(w) = w^{\beta_j + s_j e^j} \cdot Q_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)$$

имеет степень (по совокупности переменных) строго меньшую, чем s_j (в силу условий, наложенных на многочлены $Q_j(z)$).

По теореме Безу система нелинейных алгебраических уравнений

$$\tilde{f}_j(w) = w_j^{s_j} + \tilde{Q}_j(w) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.9)$$

имеет конечное число корней, равное (с учетом их кратностей) $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n$, и не имеет корней на бесконечной гиперплоскости $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$. Обозначим корни системы (3.9), не лежащие на координатных плоскостях и с учетом их кратностей, через

$$w_{(k)} = (w_{1(k)}, w_{2(k)}, \dots, w_{n(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad M \leq s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n.$$

Тогда точки $z_{(k)} = \left(\frac{1}{w_{1(k)}}, \frac{1}{w_{2(k)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(k)}} \right)$ и только они являются корнями системы (3.5), не лежащими на координатных плоскостях. Отсюда справедливо утверждение:

Лемма 2.1. Система (3.5) с функциями f_j вида (3.1) и многочленами Q_j вида (3.7), P_j вида (3.8) имеет конечное число корней (с учетом их кратностей) $z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(M)}$, не лежащих на координатных плоскостях $\{z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \dots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \cdot \dots \cdot z_{n(k)}^{\beta_n+1}},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — некоторый мультииндекс.

Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, системы (3.5), но в отрицательной степени (либо степенной суммой от обратных величин корней).

Теорема 2.2. Для системы (3.5) с функциями f_j вида (3.1) и многочленами Q_j вида (3.7), P_j вида (3.8) и для произвольного мультииндекса β такого, что

$$l^1 + \dots + l^n \leq \beta, \quad (3.10)$$

справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I},$$

где $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$ и l_i^j — степень i -ого многочлена P_i по j -ой переменной z_j ; $i, j = 1, \dots, n$ (для мультииндексов α, β неравенство $\alpha \leq \beta$ означает, что оно выполняется для всех координат).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем в J_β замену переменных $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. При такой замене цикл $\gamma(r)$ перейдет в цикл

$$(-1)^n \gamma \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n} \right) = (-1)^n \gamma(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

(с учетом изменения ориентации при данной замене).

Обозначим через γ^j мультииндекс $\beta^j + s_j e^j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда из вида (3.9) многочленов $\tilde{f}_j$ получаем

$$\frac{df_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)}{f_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)} = \frac{d\tilde{f}_j(w)}{\tilde{f}_j(w)} - \sum_{k=1}^n \gamma_k^j \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_j)'_{(z_k)} dw_k.$$

Поэтому

$$J_\beta = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \left(\frac{d\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_1(w)} - \sum_{k=1}^n \gamma_k^1 \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_1)'_{(z_k)} dw_k \right) \wedge \dots$$

$$\dots \wedge \left(\frac{d\tilde{f}_n(w)}{\tilde{f}_n(w)} - \sum_{k=1}^n \gamma_k^n \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_n)'_{(z_k)} dw_k \right).$$

Покажем, что все интегралы вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\tilde{f}_{i_1}(w)}{\tilde{f}_{i_1}(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{f}_{i_l}(w)}{\tilde{f}_{i_l}(w)} \wedge \frac{dw_{j_1}}{w_{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dw_{j_{n-l}}}{w_{j_{n-l}}}, \quad (3.11)$$

не содержащие

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_l)'_{(z_k)} dw_k,$$

равны нулю, если $0 \leq l < n$ и R_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших R_j , $j = 1, 2, \dots, n$, справедливы неравенства

$$|w_j|^{s_j} > |\tilde{Q}_j(w)| \quad \text{на} \quad \gamma(R),$$

поэтому

$$\frac{1}{\widetilde{f}_j(w)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \widetilde{Q}_j^p(w)}{w_j^{(p+1)s_j}}, \quad (3.12)$$

следовательно, интегралы (3.11) являются абсолютно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{w^\alpha dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n}{w_1^{(p_1+1)s_1} \cdot w_2^{(p_2+1)s_2} \dots w_l^{(p_l+1)s_l} \cdot w_{j_{i_1}} \dots w_{j_{n-l}}}.$$

Все они равны нулю по формуле кратного вычета (см. гл. 1).

Аналогично доказывается, что если в подынтегральное выражении входят только дифференциалы dP_j и $\frac{dw_k}{w_k}$, то такие интегралы также равны нулю.

Покажем, что интегралы вида

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\widetilde{f}_1(w)}{\widetilde{f}_1(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\widetilde{f}_l(w)}{\widetilde{f}_l(w)} \wedge \\ & \wedge dP_{l+1} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \wedge \dots \wedge dP_n \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

при условии (3.10), также равны нулю, если $0 \leq l < n$ и R_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших R_j , $j = 1, 2, \dots, n$, справедливы неравенства

$$|w_j|^{s_j} > |\widetilde{Q}_j(w)| \quad \text{на } \gamma(R),$$

поэтому справедливо разложение (3.12), а также

$$\begin{aligned} P_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) &= \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} \frac{b_\gamma^j}{w^\gamma}, \\ dP_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) &= \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} \sum_{k=0}^n \frac{-\gamma_k^j b_\gamma^j dw_j}{w^{\gamma+e^j}}, \end{aligned}$$

следовательно, интегралы (3.13) являются абсолютно и равномерно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{w^\alpha dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n}{w_1^{(p_1+1)s_1} \cdot w_2^{(p_2+1)s_2} \dots w_l^{(p_l+1)s_l} \cdot w^{\gamma^{j_1}+e^{j_1}} \dots w^{\gamma^{j_{n-l}}+e^{j_{n-l}}}.$$

Все они равны нулю по теореме о кратном вычете (см. гл. 1), поскольку $l^1 + \dots + l^n \leq \beta$ и тогда $\gamma^{j_1} + \dots + \gamma^{j_{n-l}} < \beta$.

Аналогично рассматриваются интегралы, в которые входят дифференциалы других функций f_j , лишь бы их было строго меньше n .

Таким образом,

$$J_\beta = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_1(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{f}_n(w)}{\tilde{f}_n(w)}.$$

По теореме Южакова о смещенном острове (см. [5, гл. 2]) (см. также гл. 1) последний интеграл равен сумме значений голоморфной функции $w^{\beta+I}$ во всех корнях системы (3.9). Но значение функции $w^{\beta+I}$ в корне системы (3.9), лежащем на координатной плоскости, равно нулю.

Поэтому

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

□

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.14)$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста не выше ρ , разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$,

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $(z^{\beta_{j,s}} + Q_{j,s}(z))e^{P_{j,s}(z)}$, а $Q_{j,s}(z)$, $P_{j,s}(z)$ — функции вида (3.7), (3.8) и степени всех многочленов $P_{j,s}$, входящих в систему, $\deg P_{j,s} \leq \rho$, $j = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots$

Для каждого набора индексов $j_1, \dots, j_n$, где $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \dots, i_n$, где $i_1, \dots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных уравнений

$$f_{1,j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2,j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \quad \dots, \quad f_{n,j_n}^{(i_n)}(z) = 0, \quad (3.15)$$

имеют (согласно лемме 2.1) конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей):

$$z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(l)}, \dots$$

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}}. \quad (3.16)$$

Здесь $\beta_1, \dots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (3.15), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{j_s}^{(2)}$; и равен -1 , если в систему вида (3.15), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{j_s}^{(2)}$.

Для системы (3.15), составленной из функций вида (3.14), точки $z_{(l)}$ являются корнями или особыми точками (полюсами). Все функции $f_j^{(i)}$ — голоморфны в окрестности нуля и для них определены интегралы J_β , так как они имеют вид (3.1).

Определим мультииндекс $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$, где l^j — максимальная из степеней всех многочленов $P_{j,s}$ по k -ой переменной z_k , $j, k = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots$, входящих в разложение.

Обозначим через $[Q_{j,s}]$ множество нулей (дивизор) функции $Q_{j,s}$. Поскольку f_j^i являются целыми функциями, то объединение (по s) нулевых множеств функций $Q_{j,s}$ есть аналитическое множество. Следовательно расстояние от начала координат до множеств $[Q_{j,s}]$ (при фиксированном j) стремится к бесконечности. В частности, начиная с некоторого номера s , все координаты всех мультииндексов $\beta^{j,s}$ равны нулю.

Существует также связь между ростом нулевого множества голоморфной функции конечного порядка роста и самим порядком (см. [22, гл. 3]), похожая на аналогичную связь для функций одного переменного.

Для многих переменных, вообще говоря, отсутствует связь между порядками целых функций и ростом их общих нулей. Так в работе [34] (см. также [22, гл. 5]) построен пример двух целых функций минимального типа в $\mathbb{C}^2$, общими нулями которых служат точки $\{2^m, 1/j\}$, $m \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, c_m$, где $\{c_m\}$ произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел.

Тогда ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{c_m} \frac{j^k}{2^{mp}}$$

расходится для любых положительных k и p , если c_m выбирать так, что

$$\sum_{j=1}^{c_m} j^p \geq 2^{mk}.$$

Поэтому сходимость ряда (3.16) нужно доказывать.

Теорема 2.3. Для системы (3.5) с функциями вида (3.14), для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и выполняется неравенство

$$l^1 + \dots + l^n \leq \beta,$$

ряд (3.16) сходится и справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$d \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)} = \frac{d f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(1)}(z)} - \frac{d f_j^{(2)}(z)}{f_j^{(2)}(z)},$$

то

$$\begin{aligned} & d \frac{f_1^{(1)}(z)}{f_1^{(2)}(z)} \wedge d \frac{f_2^{(1)}(z)}{f_2^{(2)}(z)} \wedge \dots \wedge d \frac{f_n^{(1)}(z)}{f_n^{(2)}(z)} = \\ & = \left(\frac{d f_1^{(1)}(z)}{f_1^{(1)}(z)} - \frac{d f_1^{(2)}(z)}{f_1^{(2)}(z)} \right) \wedge \left(\frac{d f_2^{(1)}(z)}{f_2^{(1)}(z)} - \frac{d f_2^{(2)}(z)}{f_2^{(2)}(z)} \right) \wedge \\ & \quad \wedge \dots \wedge \left(\frac{d f_n^{(1)}(z)}{f_n^{(1)}(z)} - \frac{d f_n^{(2)}(z)}{f_n^{(2)}(z)} \right) = \\ & = \sum (-1)^s \frac{d f_1^{(i_1)}(z)}{f_1^{(i_1)}(z)} \wedge \frac{d f_2^{(i_2)}(z)}{f_2^{(i_2)}(z)} \wedge \dots \wedge \frac{d f_n^{(i_n)}(z)}{f_n^{(i_n)}(z)}, \end{aligned}$$

где s — это число сомножителей, для которых $i_l = 2$, а сумма берется по всевозможным наборам чисел $i_1, i_2, \dots, i_n$, равных 1 или 2.

Поэтому теорему достаточно доказать для целых функций $f_j(z)$. В этом случае

$$\frac{d f_j(z)}{f_j(z)} = \frac{d \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d f_{js}(z)}{f_{js}(z)}.$$

Причем рассматриваемый ряд сходится равномерно на γ_r . Действительно, легко проверить, что если задана последовательность непрерывных функций f_m на компакте K , равномерно на нем сходящаяся к функции f , и $f \neq 0$ на K , то начиная с некоторого номера функции $f_m \neq 0$ на K и последовательность $1/f_m$ равномерно сходится к $1/f$ на K . Точно также проверяется, что последовательности функций, равномерно сходящиеся на компакте, можно почленно умножать и равномерная сходимость остается.

По условию все $\prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)$ сходятся равномерно к ненулевой на γ_r функции. Поэтому ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{d f_{js}(z)}{f_{js}(z)} = \frac{d \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d \prod_{s=1}^m f_{js}}{\prod_{s=1}^m f_{js}}$$

сходится равномерно на $\gamma(r)$. Таким образом, интеграл J_{β} определен и равен сходящемуся ряду из интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{d f_{1s_1}(z)}{f_{1s_1}(z)} \wedge \frac{d f_{2s_2}(z)}{f_{2s_2}(z)} \wedge \dots \wedge \frac{d f_{ns_n}(z)}{f_{ns_n}(z)},$$

в котором суммирование ведется по кубам с центром в нуле. Поэтому ряд из $\sigma_{\beta+I}$ сходится. А для каждого из этих интегралов нужная формула доказана (теорема 2.2). $\square$

При $n = 1$ эта теорема вполне согласуется с классическим результатом (см., например, [27, гл. 8]).

4. Вычетные интегралы и степенные суммы корней систем неалгебраических уравнений треугольного вида

В предыдущем параграфе был рассмотрен простейший вид систем, целью этого параграфа является перенесение результатов предыдущего параграфа на системы неалгебраических уравнений треугольного вида.

4.1 Вычисление вычетных интегралов

Рассмотрим систему функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_i(z) = (z^{\beta^i} + \psi_i(z))e^{P_i(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

где $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами,

$$\|\beta^i\| = \beta_1^i + \beta_2^i + \dots + \beta_n^i = k_i,$$

степени мономов z^{β^i} удовлетворяют условию $k_i \leq \text{ord}_{z_i \dots z_n} \psi_i(z)$; $i = 1, 2, \dots, n$, и данные мономы не содержатся в $\psi_i(z)$. (Здесь и в дальнейшем под порядком голоморфной функции (в точке 0) понимается наименьшая (по совокупности переменных) из степеней мономов, входящих в разложение Тейлора этой функции в точке 0.)

Кроме того, предположим, что (4.1) удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\begin{cases} \text{ord}_{z_i \dots z_n} \psi_i > \beta_1^i + \dots + \beta_n^i, \\ \text{ord}_{z_i \dots z_n} P_i > \beta_1^i + \dots + \beta_n^i, \\ \text{ord}_{z_i \dots z_n} \psi_j \geq \beta_1^j + \dots + \beta_n^j, \\ \text{ord}_{z_i \dots z_n} P_j \geq \beta_1^j + \dots + \beta_n^j, \\ i = 1, \dots, n; j = i + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь $\text{ord}_{z_i \dots z_n} \psi_j$ порядок голоморфной функции ψ_j по переменным $z_i \dots z_n$ при фиксированных остальных.

Фактически условия (4.2) означают следующее: степень k_1 строго меньше, чем порядок (нуля) функций ψ_1 и P_1 для первой функции f_1 , для остальных функций f_j

При фиксированном z_1 по $z_2, \dots, z_n$ положим $\varphi_{21} = R_2$. Из системы (4.3) и условий (4.2) получаем

$$\begin{aligned}\deg_{z_2 \dots z_n} \varphi_{21} &> \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2 \iff \deg_{z_1} \varphi_{21} < \beta_1^2, \\ \text{ord}_{z_2 \dots z_n} Q_2 &> \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2, \\ \text{ord}_{z_2 \dots z_n} P_2 &> \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2.\end{aligned}$$

При фиксированных z_1, z_2 по $z_3, \dots, z_n$ представим $R_3 = \varphi_{31} + \varphi_{32}$. Из условий (4.2) получаем

$$\deg_{z_3 \dots z_n} (\varphi_{31} + \varphi_{32}) > \beta_3^3 + \dots + \beta_n^3 \iff \deg_{z_1 z_2} (\varphi_{31} + \varphi_{32}) < \beta_1^3 + \beta_2^3.$$

Помещаем в φ_{31} все мономы из R_3 , для которых выполняется $\deg_{z_1} \varphi_{31} < \beta_1^3$. Тогда для оставшихся мономов, т.е. мономов из φ_{32} , получаем $\deg_{z_2} \varphi_{32} < \beta_2^3$,

$$\text{ord}_{z_3 \dots z_n} Q_3 > \beta_3^3 + \dots + \beta_n^3, \quad \text{ord}_{z_3 \dots z_n} P_3 > \beta_3^3 + \dots + \beta_n^3.$$

Аналогично рассматриваются следующие функции.

Наконец, при фиксированных $z_1, \dots, z_{n-1}$ представим

$$R_n = \varphi_{n1} + \dots + \varphi_{nn-1}$$

$$\deg_{z_n} (\varphi_{n1} + \dots + \varphi_{nn-1}) > \beta_n^n \iff \deg_{z_1 \dots z_{n-1}} (\varphi_{n1} + \dots + \varphi_{nn-1}) < \beta_1^n + \dots + \beta_{n-1}^n,$$

$$\deg_{z_1} \varphi_{n1} < \beta_1^n, \dots, \deg_{z_{n-2}} \varphi_{nn-2} < \beta_{n-2}^n \Rightarrow \deg_{z_{n-1}} \varphi_{nn-1} < \beta_{n-1}^n,$$

$$\text{ord}_{z_n} Q_n > \beta_n^n, \quad \text{ord}_{z_n} P_n > \beta_n^n.$$

□

Таким образом получаем, что

$$\psi_i(z) = \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_{ij}(z) + Q_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.8)$$

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)$, являющиеся остовами поликругов $\Gamma(r) = \{|z_s| < r_s, s = 1, 2, \dots, n\}$, т.е.

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, 2, \dots, n\}, \quad r_1 > 0, \dots, r_n > 0.$$

При достаточно малых r_j циклы $\gamma(r)$ лежат в области голоморфности функций f_j , поэтому ряды

$$\sum_{\|\alpha\| > k_j} |a_\alpha^j| r_1^{\alpha_1} \dots r_n^{\alpha_n}$$

$$\sum_{\|\gamma\| \geq 0} |b_\gamma^j| r_1^{\gamma_1} \cdots r_n^{\gamma_n}$$

сходятся, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда на цикле $\gamma(tr) = \gamma(tr_1, tr_2, \dots, tr_n)$ при достаточно малых $t > 0$, имеем

$$|z|^{\beta^j} = t^{k_j} \cdot r_1^{\beta_1^j} \cdot r_2^{\beta_2^j} \cdots r_n^{\beta_n^j} = t^{k_j} \cdot r^{\beta^j},$$

а

$$|Q_j(z)| = \left| \sum_{\|\alpha\| > k_j} a_\alpha^j z^\alpha \right| \leq \sum_{\|\alpha\| > k_j} t^{\|\alpha\|} |a_\alpha^j| r^\alpha \leq t^{k_j+1} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} |a_\alpha^j| r^\alpha, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поэтому при таких t на цикле $\gamma(tr)$ выполняются неравенства

$$|z|^{\beta^j} > |Q_j(z)|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

В дальнейшем будем считать, что $t = 1$.

Для функции φ_{ij} вначале выберем r_j так, чтобы на $\gamma(r)$ выполнялись неравенства

$$|z^{\beta^i}| > \left| \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_{ij}(z) \right|, \quad (4.10)$$

где $i = 1, \dots, n$ (для этого можно зафиксировать r_n и выбрать $r_1, \dots, r_{n-1}$ такими, чтобы выполнялось неравенство при $i = n$; далее уменьшать $r_1, \dots, r_{n-2}$ так, чтобы выполнялось неравенство при $i = n - 1$, и т.д.). Отсюда и из (4.8) и (4.9), пропорционально уменьшая r_j , следует, что

$$|z|^{\beta^j} > |\psi_j(z)|, \quad f_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.11)$$

Рассмотрим систему уравнений вида

$$f_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

Из (4.12), следует, что при соответствующем выборе $\gamma(r)$, определены *вычетные* интегралы вида

$$\int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \int_{\gamma(r_1, r_2, \dots, r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot z_2^{\beta_2+1} \cdots z_n^{\beta_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \cdots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где β — мультииндекс с неотрицательными координатами, $I = (1, \dots, 1)$, которые по теореме Коши-Пуанкаре не зависят от $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ (см. предыдущий параграф). Введем обозначение:

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f}.$$

Обозначим через $\tilde{f}_j$ функции $\tilde{f}_j(z) = z^{\beta^j} + \psi_j(z)$, $j = 1, \dots, n$. Пусть I_s — мультииндекс порядка n , состоящий из s единиц и $n - s$ нулей ($s = 0, \dots, n$). Рассмотрим определители Δ_{I_s} — якобианы системы функций, таких, что единице, стоящей на j -ом месте из I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции $\tilde{f}_j$, а нулю, стоящему на k -ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k .

Теорема 2.4. *При сделанных предположениях для функций f_j вида (4.1), удовлетворяющим условиям (4.2)–(4.8) справедливы формулы:*

$$\begin{aligned} J_\beta &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{(\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s})!} \times \\ &\quad \times \frac{\partial^{l_s}(\Delta_{I_s} \cdot \psi_{I_s}^{\alpha^s})}{\partial z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \Big|_{z=0} = \\ &= \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_{I_s} \cdot \psi_{I_s}^{\alpha^s}}{z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \right], \end{aligned}$$

где α^s — мультииндекс длины s , i_k — номер k -ой единицы в I_s , $l_s = \|\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}\|$, $\beta! = \beta_1! \cdot \beta_2! \cdot \dots \cdot \beta_n!$, $\psi^{\alpha^s} = \psi_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot \psi_{i_2}^{\alpha_2^s} \cdot \dots \cdot \psi_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2} \dots \partial z_n^{\gamma_n}}$ и, наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

Суммирование ведется по конечному множеству мультииндексов α^s , удовлетворяющих условиям $\alpha_1^s \leq \|\beta\| + \min(s, k_{i_1} + \dots + k_{i_s})$, $\alpha_2^s \leq \beta_2 + \dots + \beta_n + 2(n - 1) + (\alpha_1^s + 1)(\beta_2^{i_1} + \dots + \beta_n^{i_1})$, $\dots$, $\alpha_s^s \leq \beta_n + 2 + \beta_n^{i_1} \alpha_1^s + \dots + \beta_n^{i_{s-1}} \alpha_{s-1}^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражения

$$\begin{aligned} \frac{df_j}{f_j} &= \frac{d(z^{\beta^j} + \psi_j(z))e^{P_j}}{(z^{\beta^j} + \psi_j(z))e^{P_j}} = \frac{e^{P_j} d(z^{\beta^j} + \psi_j(z))}{(z^{\beta^j} + \psi_j(z))e^{P_j}} + \frac{(z^{\beta^j} + \psi_j(z))e^{P_j} dP_j}{(z^{\beta^j} + \psi_j(z))e^{P_j}} = \\ &= \frac{d\tilde{f}_j}{\tilde{f}_j} + dP_j. \end{aligned}$$

Поскольку на $\gamma(r)$ выполнены неравенства (4.11), то

$$\frac{1}{\tilde{f}_j} = \frac{1}{z^{\beta^j} + \psi_j(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(\psi_j(z))^s}{z^{(s+1)\beta^j}}.$$

Причем данный ряд сходится абсолютно и равномерно на $\gamma(r)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Далее

$$\frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n} =$$

$$= \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \left(\frac{d\tilde{f}_1}{\tilde{f}_1} + dP_1 \right) \wedge \left(\frac{d\tilde{f}_2}{\tilde{f}_2} + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\tilde{f}_n}{\tilde{f}_n} + dP_n \right).$$

Поэтому

$$\left(d\tilde{f}_1 + dP_1 \right) \wedge \left(d\tilde{f}_2 + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(d\tilde{f}_n + dP_n \right) = \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \Delta_{I_s} dz,$$

а

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \left(\frac{d\tilde{f}_1}{\tilde{f}_1} + dP_1 \right) \wedge \left(\frac{d\tilde{f}_2}{\tilde{f}_2} + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\tilde{f}_n}{\tilde{f}_n} + dP_n \right) = \\ = \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \geq 0} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|} \Delta_{I_s} \psi_{I_s}^{\alpha^s} dz}{z^{\alpha^s \beta^{is}}}. \end{aligned}$$

Следовательно, на $\gamma(r)$ получаем

$$J_\beta = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \geq 0} \int_{\gamma(r)} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|} \Delta_{I_s} dz}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{\psi_{I_s}^{\alpha^s}}{z^{(\alpha^s+1)\beta^{is}}}. \quad (4.13)$$

где $\alpha^s = (\alpha_1^s, \dots, \alpha_s^s)$, $z^{\beta^{is} \cdot (\alpha^s+1)} = z^{\beta^{i1} \cdot (\alpha_1^s+1) + \dots + \beta^{is} \cdot (\alpha_s^s+1)}$

Покажем, что так как выполняется (4.2), то в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Для этого подсчитаем порядок нуля (по совокупности переменных) мономов, входящих в числитель и знаменатель подынтегрального выражения.

Рассмотрим случай, когда $I_s = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_s, 0, 0, \dots, 0)$, все остальные случаи рассматриваются аналогично:

$$\begin{aligned} \Delta_{I_s} &= \begin{vmatrix} (\tilde{f}_1)'_{(z_1)} & (\tilde{f}_1)'_{(z_2)} & \dots & (\tilde{f}_1)'_{(z_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\tilde{f}_s)'_{(z_1)} & (\tilde{f}_s)'_{(z_2)} & \dots & (\tilde{f}_s)'_{(z_n)} \\ (P_{s+1})'_{(z_1)} & (P_{s+1})'_{(z_2)} & \dots & (P_{s+1})'_{(z_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (P_n)'_{(z_1)} & (P_n)'_{(z_2)} & \dots & (P_n)'_{(z_n)} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \beta_1^1 z^{(\beta^1-e^1)} + \dots & \beta_2^1 z^{(\beta^1-e^2)} + \dots & \dots & \beta_n^1 z^{(\beta^1-e^n)} + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^S z^{(\beta^S-e^1)} + \dots & \beta_2^S z^{(\beta^S-e^2)} + \dots & \dots & \beta_n^S z^{(\beta^S-e^n)} + \dots \\ (P_{s+1})'_{(z_1)} & (P_{s+1})'_{(z_2)} & \dots & (P_{s+1})'_{(z_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (P_n)'_{(z_1)} & (P_n)'_{(z_2)} & \dots & (P_n)'_{(z_n)} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e^2 = (0, 1, \dots, 0)$, $e^n = (0, 0, \dots, 1)$.

Степень мономов, входящих в Δ_{I_s} ($\text{ord}\Delta_{I_s}$), не меньше, чем $\max(\|\beta^{i_1}\| + \dots + \|\beta^{i_s}\| - s, 0) = \max(k_{i_1} + \dots + k_{i_s} - s, 0)$. Для степени мономов, входящих в ψ^{α^s} , получаем оценку:

$$\text{ord}\psi_1^{\alpha^s} = \text{ord}Q_1^{\alpha^s} \geq \alpha_1^s(1 + \|\beta^{i_1}\|) = \alpha_1^s(1 + k_{i_1}),$$

$$\text{ord}\psi_j^{\alpha^s} \geq \alpha_j^s \|\beta^{i_j}\| = \alpha_j^s k_{i_j},$$

$j = 2, \dots, s$. Поэтому порядок числителя не меньше, чем

$$\max(k_{i_1} + \dots + k_{i_s} - s, 0) + \alpha_1^s(1 + k_{i_1}) + \alpha_2^s k_{i_2} + \dots + \alpha_s^s k_{i_s}.$$

Степень знаменателя равна

$$\begin{aligned} \|\beta\| + n + \|\beta^{i_1}\|(\alpha_1^s + 1) + \dots + \|\beta^{i_s}\|(\alpha_s^s + 1) = \\ = \|\beta\| + n + (\alpha_1^s + 1)k_{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)k_{i_s}. \end{aligned}$$

Поэтому в сумме (4.13) все слагаемые, для которых порядок числителя больше степени знаменателя на n , равны нулю. Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$\begin{aligned} \max(k_{i_1} + \dots + k_{i_s} - s, 0) + \alpha_1^s(1 + k_{i_1}) + \alpha_2^s k_{i_2} + \dots + \alpha_s^s k_{i_s} \leq \\ \leq \|\beta\| + n + (\alpha_1^s + 1)k_{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)k_{i_s}, \\ \alpha_1^s \leq \|\beta\| + \min(s, k_{i_1} + \dots + k_{i_s}). \end{aligned}$$

При фиксированном z_1 по $z_2, \dots, z_n$ степени мономов, входящих в Δ_{J_s} по $z_2, \dots, z_n$, ограничены снизу выражением

$$\text{ord}_{z_2 \dots z_n} \Delta_{I_s} \geq \beta_2^{i_2} + \dots + \beta_n^{i_2} + \dots + \beta_2^{i_s} + \dots + \beta_n^{i_s} - (n - 1).$$

Для степеней мономов, входящих в ψ^{α^s} , получаем оценку:

$$\text{ord}_{z_2 \dots z_n} \psi_1^{\alpha^s} \geq 0,$$

$$\text{ord}_{z_2 \dots z_n} \psi_2^{\alpha^s} \geq \alpha_2^s(\beta_2^{i_2} + \dots + \beta_n^{i_2} + 1),$$

$$\text{ord}_{z_2 \dots z_n} \psi_j^{\alpha^s} \geq \alpha_j^s(\beta_2^{i_j} + \dots + \beta_n^{i_j}),$$

$j = 3, \dots, s$. Степень знаменателя по $z_2 \dots z_n$ равен

$$\beta_2 + \dots + \beta_n + n - 1 + (\alpha_1^s + 1)(\beta_2^{i_1} + \dots + \beta_n^{i_1}) + \dots + (\alpha_s^s + 1)(\beta_2^{i_s} + \dots + \beta_n^{i_s}).$$

Поэтому в сумме (4.13) все слагаемые, для которых порядок числителя больше степени знаменателя на n , равны нулю. Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$\alpha_2^s \leq \beta_2 + \dots + \beta_n + 2(n-1) + (\alpha_1^s + 1)(\beta_2^{i_1} + \dots + \beta_n^{i_1}).$$

При фиксированном z_1, z_2 по $z_3, \dots, z_n$: степень мономов, входящих в Δ_{J_s} по $z_3, \dots, z_n$, ограничена снизу выражением

$$\text{ord}_{z_3 \dots z_n} \Delta_{I_s} \geq \beta_3^{i_3} + \dots + \beta_n^{i_3} + \dots + \beta_3^{i_s} + \dots + \beta_n^{i_s} - (n-2).$$

Для степеней мономов, входящих в ψ^{α^s} , получаем оценку:

$$\text{ord}_{z_3 \dots z_n} \psi_1^{\alpha_1^s} \geq 0, \quad \deg \psi_2^{\alpha_2^s} \geq 0$$

$$\text{ord}_{z_3 \dots z_n} \psi_3^{\alpha_3^s} \geq \alpha_3^s (\beta_3^{i_3} + \dots + \beta_n^{i_3} + 1),$$

$$\text{ord}_{z_3 \dots z_n} \psi_j^{\alpha_j^s} \geq \alpha_j^s (\beta_3^{i_j} + \dots + \beta_n^{i_j}),$$

$j = 4, \dots, s$. Порядок знаменателя по $z_3 \dots z_n$ равен

$$\beta_3 + \dots + \beta_n + n - 2 + (\alpha_1^s + 1)(\beta_3^{i_1} + \dots + \beta_n^{i_1}) + \dots + (\alpha_s^s + 1)(\beta_3^{i_s} + \dots + \beta_n^{i_s}).$$

Поэтому в сумме (4.13) все слагаемые, для которых порядок числителя больше порядка знаменателя на n , равны нулю. Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$\alpha_3 \leq \beta_3 + \dots + \beta_n + 2(n-2) + (\alpha_1^s + 1)(\beta_3^{i_1} + \dots + \beta_n^{i_1}) + (\alpha_2^s + 1)(\beta_3^{i_2} + \dots + \beta_n^{i_2}).$$

Аналогично выполняем для все остальных переменных. И при фиксированном $z_1, \dots, z_{n-1}$ для z_n получим: порядок мономов, входящих в Δ_{I_s} по z_n

$$\text{ord}_{z_n} \Delta_{I_s} \geq \beta_n^{i_s} - 1.$$

Для степени мономов, входящих в ψ^{α^s} по z_n , получаем оценку:

$$\text{ord}_{z_n} \psi_i^{\alpha_i^s} \geq 0,$$

$i = 1, \dots, s-1$.

$$\text{ord}_{z_n} \psi_s^{\alpha_s^s} \geq \alpha_s^s (\beta_n^{i_s} + 1).$$

Степень знаменателя по z_n равна

$$\beta_n + 1 + (\alpha_1^s + 1)\beta_n^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta_n^{i_s}.$$

Поэтому в сумме (4.13) все слагаемые, для которых порядок числителя больше степени знаменателя на n , равны нулю. Таким образом, могут быть отличными от нуля лишь слагаемые, для которых

$$\alpha_s^s \leq \beta_n + 2 + \beta_n^{i_1} \alpha_1^s + \dots + \beta_n^{i_{s-1}} \alpha_{s-1}^s.$$

□

Доказательство данной теоремы идет по схеме доказательства теоремы 2.4.

4.2 Интегральные представления для степенных сумм

Наша дальнейшая цель — связать рассмотренные интегралы со степенными суммами корней системы (4.12) (как в предыдущем параграфе). Для этого мы введем дополнительные ограничения.

Для системы (4.12) с функциями f_j вида (4.1) и функциями ψ_j вида (4.2), (4.7), многочленами P_j , Q_j вида (4.4), (4.5) и многочленами φ_{ij} вида (4.7) сформулируем дополнительные предположения:

$$\begin{cases} \deg_{z_k} \psi_i \leq \beta_k^i, & k \neq i, \\ \deg_{z_k} Q_i \leq \beta_k^i, & i \neq k, \\ \deg_{z_k} \varphi_{ij} \leq \beta_k^i, & k \neq i, \\ k = 1, \dots, n; & i = 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4.14)$$

А функции P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} b_\gamma^j z^\gamma. \quad (4.15)$$

Рассмотрим i -ую функцию системы (4.1):

$$\begin{aligned} f_i(z_1, z_2, \dots, z_n) &= (z^{\beta^i} + \psi_i(z_1, z_2, \dots, z_n)) e^{P_i(z_1, z_2, \dots, z_n)} = \\ &= (z_1^{\beta_1^i} \cdot z_2^{\beta_2^i} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n^i} + \varphi_{i1}(z_1, z_2, \dots, z_n) + \varphi_{i2}(z_1, z_2, \dots, z_n) + \dots + \\ &\quad + \varphi_{ii-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) + Q_i(z_1, z_2, \dots, z_n)) e^{P_i(z_1, z_2, \dots, z_n)}, \end{aligned}$$

где $\deg Q_i > \|\beta^i\|$, $\varphi_{ij} = \|\beta^i\|$, $\deg_{z_k} \psi_i \leq \beta_k^i, k \neq i$, т.е.

$$\deg_{z_k} Q_i \leq \beta_k^i, \quad k \neq i, \quad \deg_{z_k} \varphi_{ij} \leq \beta_k^i, \quad k \neq i,$$

$$\deg_{z_j} \varphi_{ij} < \beta_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, i-1.$$

Сделаем замену $z_i = \frac{1}{w_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. При такой замене получим

$$\begin{aligned}
f_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) &= \left[\frac{1}{w^{\beta_i}} + Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)\right] e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)} = \\
&= \frac{1}{w^{\beta_i + s_i e^i}} \left(w_i^{s_i + \beta_i^i} + \tilde{\psi}_i(w_1, \dots, w_n)\right) e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)} = \\
&= \left(\frac{1}{w_1^{\beta_1^i} \cdot w_2^{\beta_2^i} \cdot \dots \cdot w_n^{\beta_n^i}} + \varphi_{i1}\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) + \varphi_{i2}\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{ii-1}\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) + Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)\right) e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)} = \\
&= \frac{1}{w_1^{\beta_1^i} \cdot w_2^{\beta_2^i} \cdot \dots \cdot w_i^{s_i + \beta_i^i} \cdot \dots \cdot w_n^{\beta_n^i}} \times \\
&\quad \times (w_i^{s_i} + w_1 \cdot \tilde{\varphi}_{i1}(w_1, w_2, \dots, w_n) + w_2 \cdot \tilde{\varphi}_{i2}(w_1, w_2, \dots, w_n) + \dots + \\
&\quad + w_{i-1} \cdot \tilde{\varphi}_{ii-1}(w_1, w_2, \dots, w_n) + \tilde{Q}_i(w_1, w_2, \dots, w_n)) e^{P_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right)},
\end{aligned}$$

где s_i степень многочлена ψ_i по w_i , многочлен

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_i(w_1, w_2, \dots, w_n) &= w^{s_i e_i} \cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right) = \\ &= (w_1^{\beta_1^i} \cdot w_2^{\beta_2^i} \cdot \dots \cdot w_i^{s_i + \beta_i^i} \cdot \dots \cdot w_n^{\beta_n^i}) \cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}\right),\end{aligned}$$

имеет степень (по совокупности переменных) строго меньшую, чем s_i (в силу условий, наложенных на многочлены $Q_i(z)$) и многочлены

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{i1}(w_1, w_2, \dots, w_n) &= w^{s_i e^i} \cdot \varphi_{i1} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \\ &= (w_1^{\beta_1^i - 1} \cdot w_2^{\beta_2^i} \cdot \dots \cdot w_i^{s_i + \beta_i^i} \cdot \dots \cdot w_n^{\beta_n^i}) \cdot \varphi_{i1} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right), \\ &\quad \dots\dots\dots \\ \tilde{\varphi}_{ii-1}(w_1, w_2, \dots, w_n) &= w^{s_i e^i} \cdot \varphi_{ii-1} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \\ &= (w_1^{\beta_1^i} \cdot w_2^{\beta_2^i} \cdot \dots \cdot w_{i-1}^{\beta_{i-1}^i - 1} \cdot w_i^{s_i + \beta_i^i} \cdot \dots \cdot w_n^{\beta_n^i}) \cdot \varphi_{ii-1} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right). \end{aligned}$$

имеют степень (по совокупности переменных) строго меньшую, чем s_i (в силу условий, наложенных на многочлены $\varphi_{ij}(z)$)

Так как система нелинейных алгебраических уравнений

$$\tilde{f}_i(w) = w_i^{s_i} + \tilde{\psi}_i(w) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.16)$$

имеет единственный нуль — начало координат, то по теореме Безу (см. гл. 1) система (4.16) имеет конечное число корней, равное (с учетом их кратностей) $s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$, и не имеет корней на бесконечной гиперплоскости $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$. Обозначим корни системы (4.13), не лежащие на координатных плоскостях и с учетом их кратностей, через $w_{(k)} = (w_{1(k)}, w_{2(k)}, \dots, w_{n(k)})$, $k = 1, 2, \dots, M$, $M \leq s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$. Тогда точки $z_{(k)} = \left(\frac{1}{w_{1(k)}}, \frac{1}{w_{2(k)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(k)}} \right)$ и только они являются корнями системы (4.12), не лежащими на координатных плоскостях. Отсюда справедливо утверждение:

Лемма 2.3. Система (4.12) с функциями f_j вида (4.1) и многочленами ψ_j вида (4.8) имеет конечное число корней M (с учетом их кратностей) $z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(M)}$, не лежащих на координатных плоскостях $\{z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \dots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(k)}^{\beta_n+1}},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — некоторый мультииндекс (каждый корень считается столько раз какова его кратность).

Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, системы (4.12), но в отрицательной степени (т.е. степенной суммой от обратных величин корней).

Теорема 2.5. Для системы (4.12) с функциями f_j вида (4.1), многочленами ψ_j вида (4.8) с ограничениями вида (4.14), P_j вида (4.15) и для произвольного мультииндекса β такого, что

$$l^1 + \dots + l^n \leq \beta, \quad (4.17)$$

справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I},$$

где $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$ и l_i^j — степень i -ого многочлена P_i по j -ой переменной z_j ; $i, j = 1, \dots, n$ (напомним, для мультииндексов α и β справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$, если оно выполняется для всех их координат).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем в J_β замену переменных $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. При такой замене цикл $\gamma(r)$ перейдет в цикл

$$(-1)^n \gamma \left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n} \right) = (-1)^n \gamma(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

(с учетом изменения ориентации при данной замене).

Обозначим через γ^j мультииндекс $\beta^j + s_j e^j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\frac{df_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)}{f_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)} = \frac{d\tilde{f}_j(w)}{\tilde{f}_j(w)} - \sum_{k=1}^n \gamma_k^j \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_j)'_{(z_k)} dw_k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_\beta &= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \left(\frac{d\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_1(w)} - \sum_{k=1}^n \gamma_k^1 \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_1)'_{(z_k)} dw_k \right) \wedge \dots \\ &\dots \wedge \left(\frac{d\tilde{f}_n(w)}{\tilde{f}_n(w)} - \sum_{k=1}^n \gamma_k^n \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_n)'_{(z_k)} dw_k \right). \end{aligned}$$

Покажем, что все интегралы вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\tilde{f}_{i_1}(w)}{\tilde{f}_{i_1}(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{f}_{i_l}(w)}{\tilde{f}_{i_l}(w)} \wedge \frac{dw_{j_1}}{w_{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dw_{j_{n-l}}}{w_{j_{n-l}}} \quad (4.18)$$

не содержащие

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_l)'_{(z_k)} dw_k$$

равны нулю, если $0 \leq l < n$ и R_j достаточно велики.

Действительно, можно выбрать R_j , $j = 1, 2, \dots, n$, достаточно большими так, что справедливы неравенства

$$|w_j|^{s_j} > |\tilde{\psi}_j(w)| \quad \text{на} \quad \gamma(R),$$

(см. [5, гл.2]), поэтому

$$\frac{1}{\tilde{f}_j(w)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \tilde{\psi}_j^p(w)}{w_j^{(p+1)s_j}}, \quad (4.19)$$

следовательно, интегралы (4.18) являются абсолютно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{w^\alpha dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n}{w_1^{(p_1+1)s_1} \cdot w_2^{(p_2+1)s_2} \dots w_{i_l}^{(p_l+1)s_l} \cdot w_{j_{i_1}} \dots w_{j_{n-l}}}.$$

Все они равны нулю по формуле кратного вычета (см. гл. 1).

Аналогично доказывается, что если в подынтегральное выражении входят только дифференциалы dP_j и $\frac{dw_k}{w_k}$, то такие интегралы также равны нулю.

Покажем, что интегралы вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_1(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{f}_l(w)}{\tilde{f}_l(w)} \wedge \dots \wedge dP_{l+1} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \wedge \dots \wedge dP_n \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \quad (4.20)$$

при условии (4.17), равны нулю, если $0 \leq l < n$ и R_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших R_j , $j = 1, 2, \dots, n$, справедливы неравенства

$$|w_j|^{s_j} > |\tilde{Q}_j(w)| \quad \text{на} \quad \gamma(R),$$

поэтому справедливо разложение (4.19), а также

$$P_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} \frac{b_\gamma^j}{w^\gamma},$$

$$dP_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} \sum_{k=0}^n \frac{-\gamma_k^j b_\gamma^j dw_j}{w^{\gamma+e^j}},$$

следовательно, интегралы (4.18) являются абсолютно и равномерно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{w^\alpha dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n}{w_1^{(p_1+1)s_1} \cdot w_2^{(p_2+1)s_2} \cdot \dots \cdot w_l^{(p_l+1)s_l} \cdot w^{\gamma^{j_1+e^{j_1}} \dots \gamma^{j_{n-l}+e^{j_{n-l}}}}.$$

Все они равны нулю по теореме о кратном вычете, поскольку $l^1 + \dots + l^n \leq \beta$ и тогда $\gamma^{j_1} + \dots + \gamma^{j_{n-l}} < \beta$.

Аналогично рассматриваются интегралы, в которые входят дифференциалы других функций f_j , лишь бы их было строго меньше n .

Таким образом,

$$J_\beta = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\gamma(R)} w^{\beta+I} \frac{d\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_1(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{f}_n(w)}{\tilde{f}_n(w)}.$$

По теореме Южакова о смещенном остоле (см. [5, гл. 3]) (см. также гл. 1) последний интеграл равен сумме значений голоморфной функции $w^{\beta+I}$ во всех корнях системы (4.16). Но значение функции $w^{\beta+I}$ в корне системы (4.16), лежащем на координатной плоскости, равно нулю.

Поэтому

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

□

Данная теорема доказывается по схеме теоремы 2.2 предыдущего параграфа.

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста не выше ρ , разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$,

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $(z^{\beta_{j,s}} + \psi_{j,s}(z))e^{P_{j,s}(z)}$, а $\psi_{j,s}(z)$, $P_{j,s}(z)$ — функции вида (4.14), (4.15) и степени всех многочленов $P_{j,s}$, входящих в систему, $\deg P_{j,s} \leq \rho$, $j = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots$

Для каждого набора индексов $j_1, \dots, j_n$, где $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \dots, i_n$, где $i_1, \dots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных уравнений

$$f_{1,j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2,j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \quad \dots, \quad f_{n,j_n}^{(i_n)}(z) = 0, \quad (4.22)$$

имеют (согласно лемме 2.3) конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей):

$$z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(l)}, \dots$$

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdot \dots \cdot z_{n(l)}^{\beta_n+1}}. \quad (4.23)$$

Здесь $\beta_1, \dots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (4.22), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{j_s}^{(2)}$; и равен -1 , если в систему вида (4.22), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{j_s}^{(2)}$.

Для системы (4.22), составленной из функций вида (4.21), точки $z_{(l)}$ являются корнями или особыми точками (полюсами). Все функции $f_j^{(i)}$ — голоморфны в окрестности нуля и для них определены интегралы J_β , так как они имеют вид (4.1).

Определим мультииндекс $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$, где l^j — максимальная из наибольших степеней всех многочлена $P_{j,s}$ по k -ой переменной z_k , $j, k = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots$, входящих в разложение.

Теорема 2.6. *Для системы (4.12) с функциями вида (4.21), для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и выполняется неравенство*

$$l^1 + \dots + l^n \leq \beta,$$

ряд (4.23) сходится и справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

Если бесконечные произведения $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ сходятся абсолютно, то ряды $\sigma_{\beta+I}$ являются абсолютно сходящимися.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказывается точно также, как теорема 2.3. $\square$

Теорема 2.6 показывает, что показатель сходимости (степень мономов) ряда (4.20) связан с порядком роста целых функций (также как для функций одного комплексного переменного (см. например, [46, гл. 8]). Для общих систем целых функций конечного порядка роста это не так (см. предыдущий параграф).

где $k, j = 1, \dots, n$.

Обозначим через Γ_h цикл

$$\Gamma_h = \{z \in \mathbb{C}^n : |h_i| = r_i, \quad r_i > 0, \quad i = \overline{1, n}\}. \quad (5.5)$$

Рассмотрим локальные циклы Γ_{h,a_J} , определяемые системами уравнений

$$\begin{cases} |1 - a_{1j_1} z_1| = r_1, \\ |1 - a_{2j_2} z_2| = r_2, \\ \dots\dots\dots \\ |1 - a_{nj_n} z_n| = r_n, \end{cases} \quad (5.6)$$

если все $a_{k,j_k} \neq 0$.

Если же $a_{i_1 j_{i_1}} = \dots = a_{i_k j_{i_k}} = 0$, то цикл Γ_{h,a_J} определяется системой

$$\begin{cases} |1 - a_{1j_1} z_1| = r_1, \\ \dots\dots\dots \\ \left| \frac{1}{z_{i_1}} \right| = r_{i_1}, \\ \dots\dots\dots \\ \left| \frac{1}{z_{i_k}} \right| = r_{i_k}, \\ \dots\dots\dots \\ |1 - a_{nj_n} z_n| = r_n, \end{cases} \quad (5.7)$$

Лемма 2.4. *Глобальный цикл Γ_h при достаточно малых r_i , имеет связные компоненты (локальные циклы), лежащие в окрестности корней a_J , и гомологичен сумме локальных циклов Γ_{h,a_J} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим глобальный цикл Γ_h равный

$$\begin{cases} |h_1| = r_1, \\ |h_2| = r_2, \\ \dots\dots\dots \\ |h_n| = r_n. \end{cases} \quad (5.8)$$

В окрестности точки a_J , если $a_{kj_k} \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, n$, он гомотопен циклу Γ_{q, a_J} вида (5.6), где гомотопия имеет вид

[illegible]

где $t \in [0, 1]$. При $t = 1$ получаем цикл Γ_h , а при $t = 0$ — цикл $\Gamma_{h,a,J}$.

Рассмотрим глобальный цикл Γ_h , в окрестности точки a_J , в которой $a_{i_1 j_{i_1}} = \dots = a_{i_k j_{i_k}} = 0$. Тогда в этой окрестности точки a_J он гомотопен циклу Γ_{h, a_J} , вида (5.7) где гомотопия строится аналогично гомотопии (5.9) только на месте, где $a_{i_1 j_{i_1}} = 0$ стоит $\frac{1}{z_{i_1}}$. $\square$

Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(z, t) = (q_i(z) + t \cdot Q_i(z))e^{P_i(z)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10)$$

зависящую от действительного параметра $t \geq 0$.

Пусть $r_1, \dots, r_n > 0$ — фиксированные действительные числа, тогда при достаточно малых положительных t на циклах

$$\Gamma_h = \{z \in \mathbb{C}^n : |h_i| = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

В силу их компактности, выполняется неравенство

$$|q_i(z)| > |t \cdot Q_i(z)| \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим через $J_\gamma(t)$ вычетный интеграл

$$J_\gamma(t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{dF}{F} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \dots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \dots \wedge \frac{dF_n}{F_n},$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс.

Обозначим через G_i функции $G_i(z, t) = q_i(z) + t \cdot Q_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть I_s — мультииндекс порядка n , состоящий из s единиц и $n - s$ нулей ($s = 0, \dots, n$). Рассмотрим

определители Δ_{I_s} — якобианы системы функций, таких, что единице, стоящей на j -ом месте из J_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции G_j , а нулю, стоящему на k -ом месте в I_s соответствует строка в Δ_{I_s} из производных функции P_k .

Теорема 2.7. При сделанных предположениях для функций F_i вида (5.10) справедливы формулы для $J_\gamma(t)$ (для достаточно малых t) в виде сходящихся рядов:

$$J_\gamma(t) = \sum_J \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-t)^{||\alpha^s||} (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(\alpha^s, J)!} \cdot \frac{\partial^{||\beta^s||}}{\partial z^{\beta^s}} \left[\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q^{\alpha^s}(I_s)}{q^{\alpha^s+I}(I_s, J)} \right]_{z=a_J},$$

где $(-1)^{s(J)} = 1$, когда J — четная перестановка и $(-1)^{s(J)} = -1$, когда J — нечетная перестановка, α^s — мультииндекс порядка s , i_l — номер l -й единицы в I_s , $q^{\alpha^s+I}(I_s, J) = q_1^{\alpha_1^s+1}[j_1] \cdot \dots \cdot q_n^{\alpha_n^s+1}[j_n]$, а $q_p[j_p]$ — это произведение всех $(1 - a_{p1}z_1)^{m_{p1}} \cdot \dots \cdot (1 - a_{pn}z_n)^{m_{pn}}$ кроме $(1 - a_{pj_p}z_{j_p})^{m_{pj_p}}$, $Q^{\alpha^s}(I_s) = Q_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot \dots \cdot Q_{i_s}^{\alpha_s^s}$,

$$\beta(\alpha^s, J) = (m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1, \dots, m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1),$$

$$\beta(\alpha^s, J)! = \prod_p (m_{pj_p} \cdot (\alpha_{j_p}^s + 1) - 1)!,$$

$$\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial z^{\beta}} = \frac{\partial^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1 + \dots + m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}{\partial z_1^{m_{1j_1} \cdot (\alpha_{j_1}^s + 1) - 1} \cdot \dots \cdot \partial z_n^{m_{sj_n} \cdot (\alpha_{j_n}^s + 1) - 1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} J_\gamma(t) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{dF}{F} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \dots \wedge \frac{dF_n}{F_n} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{d(G_1 e^{P_1})}{G_1 e^{P_1}} \wedge \frac{d(G_2 e^{P_2})}{G_2 e^{P_2}} \wedge \dots \wedge \frac{d(G_n e^{P_n})}{G_n e^{P_n}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \left(\frac{dG_1}{G_1} + dP_1 \right) \wedge \left(\frac{dG_2}{G_2} + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{dG_n}{G_n} + dP_n \right). \end{aligned}$$

Так как

$$(dG_1 + dP_1) \wedge (dG_2 + dP_2) \wedge \dots \wedge (dG_n + dP_n) = \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \Delta_{I_s} dz,$$

то используя формулу геометрической прогрессии, получим $J_\gamma(t) =$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot z_2^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \left(\frac{dG_1}{G_1} + dP_1 \right) \wedge \left(\frac{dG_2}{G_2} + dP_2 \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{dG_n}{G_n} + dP_n \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\|\alpha^s\| \geq 0} (-t)^{\|\alpha^s\|} \int_{\Gamma_h} \frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q_1^{\alpha_1^s} \cdots Q_s^{\alpha_s^s}}{q_1^{\alpha_1^s+1} \cdots q_s^{\alpha_s^s+1}} dz = \\
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_J \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} (-1)^{s(J)} \sum_{\|\alpha^s\| \geq 0} (-t)^{\|\alpha^s\|} \int_{\Gamma_{h,a_J}} \frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q_1^{\alpha_1^s} \cdots Q_s^{\alpha_s^s}}{q_1^{\alpha_1^s+1} \cdots q_s^{\alpha_s^s+1}} dz = \\
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_J \sum_I (-1)^{s(J)} \sum_{\|\alpha^s\| \geq 0} (-t)^{\|\alpha^s\|} \int_{\Gamma_{h,a_J}} \frac{\Delta_I(t)}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{Q^{\alpha^s}(I)}{q^{\alpha^s+I}(I, J)} dz = \\
&= \sum_J \sum_{s=0}^n \sum_{I_s} \sum_{\alpha^s} (-t)^{\|\alpha^s\|} (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(\alpha^s, J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta} \left[\frac{\Delta_{I_s}(t)}{z_1^{\gamma_1+1} \cdots z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q^{\alpha^s}(I_s)}{q^{\alpha^s+I}(I_s, J)} \right]_{z=a_J}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Полученный ряд сходится при достаточно малых t . $\square$

5.2 Вычетные интегралы и степенные суммы

При некоторых ограничениях на Q_i и P_i вычетные интегралы можно связать со степенными суммами корней системы (5.1)

Предположим, что $Q_i(z)$ — многочлены вида

$$Q_i(z) = z_1 \cdots z_n \sum_{|\alpha| \geq 0} C_\alpha^i z^\alpha \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.13}$$

где α — мультииндекс, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $\deg_{z_j} Q_i \leq m_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, для тех a_{ij} , для которых $a_{ij} \neq 0$. Если $a_{ij} = 0$, то ограничение на степень $\deg_{z_j} Q_i$ отсутствует.

Функции P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leq \|\eta\| \leq p_j} b_\eta^j z^\eta, \tag{5.14}$$

где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — мультииндекс.

Сделаем в функциях $F_i(z, t) = (q_i(z) + t \cdot Q_i(z)) e^{P_i(z)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, замену $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, \dots, n$, предполагая, что все $w_j \neq 0$. Получаем

$$\begin{aligned}
F_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}, t \right) &= \left(q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) + t \cdot Q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right) e^{P_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)}, \\
&i = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

тогда

$$F_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}, t \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(1 - a_{i1} \frac{1}{w_1} \right)^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot \left(1 - a_{in} \frac{1}{w_n} \right)^{m_{in}} + t \cdot Q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right) e^{P_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)} = \\
&= \left(\left(\frac{1}{w_1} \right)^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{w_n} \right)^{m_{in}} \cdot (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}} + \right. \\
&\quad \left. + t \cdot Q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right) e^{P_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)} = \\
&= \left(\frac{1}{w_1} \right)^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{w_n} \right)^{m_{in}} \cdot \left(\tilde{q}_i(w) + t \cdot \tilde{Q}_i(w) \right) e^{P_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)}, \tag{5.15}
\end{aligned}$$

где $\tilde{q}_i$ функции $\tilde{q}_i = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$, а $\tilde{Q}_i$ многочлены вида $\tilde{Q}_i = w_1^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot w_n^{m_{in}} \cdot Q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)$. Из вида функций Q_i (5.13) получаем, что $\deg_{w_j} \tilde{Q}_i < m_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

В этих преобразованиях неважно a_{ij} равно нулю или нет. Действительно, пусть в функциях $F_i(z, t) = (q_i(z) + t \cdot Q_i(z))e^{P_i(z)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, какой-нибудь $a_{ij} = 0$, например, a_{11} , то при замене $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, \dots, n$, функция F_1 примет вид

$$\begin{aligned}
F_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}, t \right) &= \left(q_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) + \right. \\
&\quad \left. + t \cdot Q_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right) e^{P_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
F_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n}, t \right) &= \left(\left(1 - a_{12} \frac{1}{w_1} \right)^{m_{12}} \cdot \dots \cdot \left(1 - a_{1n} \frac{1}{w_n} \right)^{m_{1n}} + \right. \\
&\quad \left. + t \cdot Q_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right) e^{P_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)} = \\
&= \left(\left(\frac{1}{w_1} \right)^{\deg_{w_1} Q_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{w_n} \right)^{m_{1n}} \cdot (w_1)^{\deg_{w_1} Q_1} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{1n})^{m_{1n}} + \right. \\
&\quad \left. + t \cdot Q_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right) e^{P_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)} = \\
&= \left(\frac{1}{w_1} \right)^{\deg_{w_1} Q_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{w_n} \right)^{m_{1n}} \cdot \left(\tilde{q}_1(w) + t \cdot \tilde{Q}_1(w) \right) e^{P_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right)},
\end{aligned}$$

где $\tilde{q}_1$ функции $\tilde{q}_1 = (w_1)^{\deg_{w_1} Q_1} \cdot \dots \cdot (w_n - a_{1n})^{m_{1n}}$, а $\tilde{Q}_1$ многочлены вида

$$\tilde{Q}_1 = w_1^{\deg_{w_1} Q_1} \cdot \dots \cdot w_n^{m_{1n}} \cdot Q_1 \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right).$$

Т.е. можно взять $m_{11} = \deg_{w_1} Q_1$. Из вида (5.13) функций Q_i получаем, что $\deg_{w_j} \tilde{Q}_1 < m_{1j}$, $j = 1, \dots, n$.

Обозначим через $\widetilde{G}_i$ функции

$$\widetilde{G}_i(w, t) = \widetilde{q}_i(w) + t \cdot \widetilde{Q}_i(w), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.16)$$

Система (5.16) при $0 \leq t \leq 1$ имеет конечное число нулей в $\mathbb{C}^n$, зависящих от параметра t , и не имеет бесконечных корней в $\overline{\mathbb{C}^n}$ (см. [29]). Как показано в [29], это число (с учетом кратностей нулей) равно перманенту матрицы, составленной из степеней m_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$.

При t достаточно близких к нулю на цикле

$$\tilde{\Gamma}_h = \{w \in \mathbb{C}^n : \left| h_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right| = \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

В силу его компактности, выполняется неравенство

$$\left| q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right| > \left| t \cdot Q_i \left(\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим

$$\tilde{a}_J = (a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n}),$$

где $j = 1, \dots, n$.

Цикл $\tilde{\Gamma}_h$ гомологичен сумме циклов $\tilde{\Gamma}_{h,\tilde{a}_J}$, получающихся заменой $z_j = \frac{1}{w_j}$ из циклов Γ_{h,a_J} . Т.е. цикл $\tilde{\Gamma}_q$ гомологичен сумме циклов $\tilde{\Gamma}_{q,\tilde{a}_J}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| 1 - a_{1i_1} \frac{1}{w_1} \right| = \varepsilon_1, \\ \left| 1 - a_{2i_2} \frac{1}{w_2} \right| = \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots \\ \left| 1 - a_{ni_n} \frac{1}{w_n} \right| = \varepsilon_n. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Множество $\left| 1 - a_{ji} \frac{1}{w_j} \right| = \varepsilon$ является окружностью, так как

$$\left| 1 - a_{ji_j} \frac{1}{w_j} \right| = \varepsilon, \quad \text{тогда} \quad |w_j - a_{ji_j}| = \varepsilon |w_j|.$$

Отсюда

$$|w_j - a_{ji_j}|^2 = \varepsilon^2 |w_j|^2, \quad \text{тогда} \quad \left(1 - \varepsilon^2\right) \left|w_j - \frac{a_{ji_j}}{1 - \varepsilon^2}\right|^2 = \frac{\varepsilon^2 \cdot |a_{ji_j}|^2}{(1 - \varepsilon^2)},$$

$$\left| w_j - \frac{a_{ji}}{1 - \varepsilon^2} \right|^2 = \frac{\varepsilon^2 \cdot |a_{ji}|^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

При достаточно малых ε эта окружность окружает точку a_{ji_j} . Поэтому цикл $\tilde{\Gamma}_{h, \tilde{a}_J}$ гомогичен циклу

$$\left\{ \begin{array}{l} |w_1 - a_{1j_1}| = \varepsilon_1, \\ |w_2 - a_{2j_2}| = \varepsilon_2, \\ \\ |w_n - a_{nj_n}| = \varepsilon_n. \end{array} \right.$$

Здесь некоторые a_{ij} могут равняться нулю.

Лемма 2.5. Пусть P_j имеют вид (5.14) и для мультииндекса γ справедливо неравенство

$$l^1 + \dots + l^n \leq \gamma, \quad (5.18)$$

где $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$ и l_i^j — степень i -ого многочлена P_i по j -ой переменной z_j ; $i, j = 1, \dots, n$.

Тогда интеграл $J_\gamma(t)$ равен

$$J_\gamma(t) = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\tilde{\Gamma}_h} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\widetilde{G}_1}{\widetilde{G}_1} \wedge \frac{d\widetilde{G}_2}{\widetilde{G}_2} \wedge \dots \wedge \frac{d\widetilde{G}_n}{\widetilde{G}_n}. \quad (5.19)$$

(Неравенство (5.18) означает, что оно выполняется покоординатно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$\frac{dF_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}, t\right)}{F_j\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}, t\right)} = \frac{d\tilde{G}_j(w, t)}{\tilde{G}_j(w, t)} - \sum_{k=1}^n m_{jk} \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_j)'_{(z_k)} dw_k.$$

Тогда, используя формулу (5.15) и учитывая изменение ориентации пространства при замене $z_j = \frac{1}{w_j}$, $j = 1, \dots, n$, интеграл $J_\gamma(t)$ примет вид

$$\begin{aligned} J_\gamma(t) &= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\tilde{\Gamma}_h} w^{\gamma+I} \cdot \frac{dF}{F} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\tilde{\Gamma}_h} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \frac{dF_2}{F_2} \wedge \dots \wedge \frac{dF_n}{F_n} = \\ &= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\tilde{\Gamma}_h} w^{\gamma+I} \left(\frac{d\tilde{G}_1(w)}{\tilde{G}_1(w)} - \sum_{k=1}^n m_{1k} \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_1)'_{(z_k)} dw_k \right) \wedge \dots \wedge \\ &\quad \wedge \left(\frac{d\tilde{G}_n(w)}{\tilde{G}_n(w)} - \sum_{k=1}^n m_{nk} \cdot \frac{dw_k}{w_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_n)'_{(z_k)} dw_k \right). \end{aligned}$$

Все интегралы вида

$$\int_{\tilde{\Gamma}_h} w^{\gamma+I} \frac{d\tilde{G}_{i_1}(w)}{\tilde{G}_{i_1}(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{G}_{i_l}(w)}{\tilde{G}_{i_l}(w)} \wedge \frac{dw_{j_1}}{w_{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dw_{j_{n-l}}}{w_{j_{n-l}}} \quad (5.20)$$

не содержащие

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \cdot (P_l)'_{(z_k)} dw_k$$

равны нулю, если $0 \leq l < n$ и ε_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших ε_j , $j = 1, 2, \dots, n$, справедливы неравенства

$$|\tilde{q}_j| > |t \cdot \tilde{Q}_j(w)| \quad \text{на} \quad \tilde{\Gamma}_h,$$

поэтому

$$\frac{1}{\tilde{G}_j(w)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^p \tilde{Q}_j^p(w)}{\tilde{q}_j^{(p+1)}}, \quad (5.21)$$

следовательно, интегралы (5.20) являются абсолютно сходящимися рядами из интегралов вида

$$\int_{\tilde{\Gamma}_h} w^{\gamma+I} \frac{w^\alpha dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n}{\tilde{q}_1^{(p_1+1)} \cdot \tilde{q}_2^{(p_2+1)} \dots \tilde{q}_{i_l}^{(p_l+1)} \cdot w_{j_{i_1}} \dots w_{j_{n-l}}}.$$

Все они равны нулю по формуле Стокса и так как подынтегральные функции голоморфны. Аналогично доказывается, что если в подынтегральное выражении входят только дифференциалы dP_j и $\frac{dw_k}{w_k}$, то такие интегралы также равны нулю.

Покажем, что интегралы вида

$$\int_{\tilde{\Gamma}_h} w^{\gamma+I} \frac{d\tilde{G}_1(w)}{\tilde{G}_1(w)} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{G}_l(w)}{\tilde{G}_l(w)} \wedge \wedge dP_{l+1} \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \wedge \dots \wedge dP_n \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \quad (5.22)$$

при условии (5.18), равны нулю, если $0 \leq l < n$ и ε_j достаточно велики.

Действительно, при достаточно больших ε_j , $j = 1, 2, \dots, n$, справедливы неравенства

$$|\tilde{q}_j| > |t \cdot \tilde{Q}_j(w)| \quad \text{на} \quad \tilde{\Gamma}_h,$$

поэтому справедливо разложение (5.21), а также

$$P_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \sum_{0 \leq \|\eta\| \leq p_j} \frac{b_\eta^j}{w^\eta},$$

$$dP_j \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) = \sum_{0 \leq \|\eta\| \leq p_j} \sum_{k=0}^n \frac{-\eta_k^j b_\eta^j dw_j}{w^{\eta+e^j}},$$

где e^j — мультииндекс, у которого все координаты равны нулю за исключением j -й, а она равна 1.

Следовательно, интегралы (5.22) являются суммами абсолютно и равномерно сходящихся рядов из интегралов вида

$$\int_{\tilde{\Gamma}_h} w^{\gamma+I} \frac{w^\alpha dw_1 \wedge dw_2 \wedge \dots \wedge dw_n}{\tilde{q}_1^{(p_1+1)} \cdot \tilde{q}_2^{(p_2+1)} \dots \tilde{q}_l^{(p_l+1)} \cdot w^{\eta^{j_1+e^{j_1}}} \dots w^{\eta^{j_{n-l}+e^{j_{n-l}}}}}.$$

Все они равны нулю по формуле Стокса (см. предыдущее рассуждение), поскольку $l^1 + \dots + l^n \leq \gamma$ и тогда $\eta^{j^1} + \dots + \eta^{j^{n-l}} < \gamma$.

Аналогично рассматриваются интегралы, в которые входят дифференциалы других функций F_j , лишь бы их было строго меньше n .

Поэтому получаем

$$J_\gamma(t) = \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\tilde{\Gamma}_h} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\tilde{G}_1}{\tilde{G}_1} \wedge \frac{d\tilde{G}_2}{\tilde{G}_2} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{G}_n}{\tilde{G}_n} \quad (5.23)$$

□

Лемма 2.6. Пусть $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(w, t)$ — якобиан системы функций $\tilde{G}_1(w, t), \dots, \tilde{G}_n(w, t)$ из (5.16). Тогда

$$J_\gamma(t) = \sum_{K \in \mathfrak{R}} (-t)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K, J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K}{\tilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=\tilde{a}_J},$$

где множество индексов $\mathfrak{R} = \{K = (k_1, \dots, k_n) : \exists i, \text{ что } \|K\| < \gamma_i + 2, \ i = 1, \dots, n\}$, $\tilde{Q}^K = \tilde{Q}_1^{k_1} \dots \tilde{Q}_n^{k_n}$, $\tilde{q}^{K+I} = \tilde{q}_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \tilde{q}_n^{k_n+1}$.

Здесь сохранены обозначения теоремы 2.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем (используя формулу (5.21))

$$\begin{aligned} J_\gamma(t) &= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\tilde{\Gamma}_h} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{d\tilde{G}_1}{\tilde{G}_1} \wedge \frac{d\tilde{G}_2}{\tilde{G}_2} \wedge \dots \wedge \frac{d\tilde{G}_n}{\tilde{G}_n} = \\ &= \frac{(-1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\tilde{\Gamma}_h} w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \sum_{\|K\| \geq 0} (-t)^{\|K\|} \tilde{\Delta} \cdot \frac{\tilde{Q}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \tilde{Q}_n^{k_n}}{\tilde{q}_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \tilde{q}_n^{k_n+1}} dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{\|K\| \geq 0} (-t)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \int_{\tilde{\Gamma}_{h,a_J}} \tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}_1^{k_1} \dots \tilde{Q}_n^{k_n}}{\tilde{q}_1^{k_1+1} \dots \tilde{q}_n^{k_n+1}} dz = \\
&= \sum_{\|K\| \geq 0} (-t)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K, J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K}{\tilde{q}^{K+I(J)}} \right]_{w=\tilde{a}_J}
\end{aligned}$$

Докажем теперь, что суммирование в этих формулах идет по конечному множеству мультииндексов. Для этого оценим степени по переменным w_i числителя выражения и сопоставим их с соответствующими степенями знаменателя.

Степень числителя по w_i не превосходит величины

$$p_i = m_{1i} + \dots + m_{ni} - 1 + \gamma_i + 1 + (m_{1i} - 1)k_1 + \dots + (m_{ni} - 1)k_n.$$

Степень знаменателя по этой переменной равна

$$s_i = m_{1i}(k_1 + 1) + \dots + m_{ni}(k_n + 1).$$

Согласно лемме 1.1 нулевыми являются интегралы, для которых для всех $i (i = 1, \dots, n)$ выполняется неравенство $p_i \leq s_i - 2$, что эквивалентно тому, что

$$m_{1i} + \dots + m_{ni} - 1 + \gamma_i + 1 + (m_{1i} - 1)k_1 + \dots + (m_{ni} - 1)k_n \leq$$

$$\leq m_{1i}(k_1 + 1) + \dots + m_{ni}(k_n + 1) - 2,$$

$$\gamma_i + 1 - k_1 - \dots - k_n - 1 \leq -2,$$

$$\gamma_i \leq k_1 + \dots + k_n - 2,$$

$$\gamma_i + 2 \leq \|K\|.$$

Таким образом, ненулевыми могут быть лишь только те интегралы, для которых K пробегает множество $\mathfrak{R}$, состоящее из таких мультииндексов K , что хотя бы для какого-нибудь γ_i выполняется $\gamma_i + 2 > \|K\|$, $i = 1, \dots, n$ □

Лемма 2.7. Пусть $w_1, \dots, w_s$ — все нули системы (5.16) (с учетом их кратностей), где $w_j = (w_{j1}, \dots, w_{jn})$, $j = 1, \dots, n$. Эти нули зависят от t . Тогда

$$J_\gamma = (-1)^n \sum_{j=1}^s w_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot w_{j2}^{\gamma_2+1} \dots w_{jn}^{\gamma_n+1}.$$

Число корней s равно перманенту матрицы, составленному из степеней m_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$.

Утверждение леммы (5.13) следует из формулы многомерного логарифмического вычета и теоремы А.П.Южакова о смещенном остове (см. гл. 3 из [5]) (см. также гл.1).

□

Обозначим через $z^{(j)}(t) = (z_{j1}(t), \dots, z_{jn}(t))$, $j = 1, \dots, p$, — корни системы (5.1) с функциями tQ_i , где Q_i вида (5.13), не лежащими на координатных плоскостях. Этих корней конечное число поскольку, если w_j не лежит на координатных плоскостях, то $z_{jm} = \frac{1}{w_{jm}}$, $m = 1, \dots, n$. Поэтому $p \leq s$.

Теорема 2.8. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \frac{1}{z_{j1}(t)^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}(t)^{\gamma_2+1} \dots z_{jn}(t)^{\gamma_n+1}} = \\ & = \sum_{K \in \mathfrak{R}} (-t)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K, J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\tilde{\Delta}(t) \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K}{\tilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=\tilde{a}_J} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из лемм 2.6, 2.7. □

Таким образом, степенная сумма корней является многочленом по t , поэтому это равенство верно и при $t = 1$.

Обозначим

$$\sigma_{\gamma+I} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \dots z_{jn}^{\gamma_n+1}}$$

, где $z^{(j)} = (z_{j1}, \dots, z_{jn}) = (z_{j1}(1), \dots, z_{jn}(1))$, $j = 1, \dots, n$.

Теорема 2.9. *Для системы (5.1) с функциями f_j вида (5.3) и Q_i вида (5.13) справедлива формулы*

$$\begin{aligned} & \sigma_{\gamma+I} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \dots z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \\ & = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{\|K\| \geq 0} (-1)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \int_{\tilde{\Gamma}_{h, \tilde{a}_J}} \tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \dots w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \tilde{Q}_n^{k_n}}{\tilde{q}_1^{k_1+1} \cdot \dots \cdot \tilde{q}_n^{k_n+1}} dw = \\ & = \sum_{K \in \mathfrak{R}} (-1)^{\|K\|+n} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K, J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K}{\tilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=\tilde{a}_J}, \end{aligned}$$

где $z^{(j)} = z^{(j)}(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следствие теоремы 2.8. $\square$

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть целые в $\mathbb{C}^n$ функции f_j конечного порядка роста не выше ρ имеют вид

$$f_j(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}(z), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.24)$$

где $f_{j,s}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста не выше ρ , разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$, причем каждый из сомножителей имеет форму

$$(q_{j,s} + Q_{j,s}(z))e^{P_{j,s}(z)},$$

а $q_{j,s}(z)$, $Q_{j,s}(z)$ — многочлены вида (5.2), (5.13). А функции $P_{j,s}$ — многочлены вида

$$P_{j,s}(z) = \sum_{0 \leq \|\gamma\| \leq p_j} b_{\gamma}^j z^{\gamma}. \quad (5.25)$$

и степени всех многочленов $P_{j,s}$, входящих в систему, $\deg P_{j,s} \leq \rho$, $j = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots$

Достаточные условия существования такого разложения в виде сходимости расстояний от начала координат до нулевых множеств функций $q_{j,s} + Q_{j,s}(z)$ приведены в параграфе 6.

Корни системы, с учетом их кратностей обозначим $z^{(j)} = (z_{j1}, \dots, z_{jn})$, $j = 1, \dots$

Теорема 2.10. *Для системы (5.1) с функциями вида (5.24), для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и для произвольного мультииндекса γ такого, что*

$$l^1 + \dots + l^n \leq \gamma, \quad (5.26)$$

справедливы формулы

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \sigma_{\gamma+I} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdot \dots \cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \\ &= \sum_{K \in \mathbb{R}} (-1)^{\|K\|+n} \sum_S \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K, J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^{\beta}} \left[\tilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K(S)}{\tilde{q}^{K+I}(J, S)} \right]_{w=\tilde{a}_J}, \end{aligned}$$

где $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$ и l_i^j — наибольшая степень i -ого многочлена P_i по j -ой переменной z_j ; $i, j = 1, \dots, n$ и $\tilde{Q}^K(S) = \tilde{Q}_{1,s}^{k_1} \cdot \dots \cdot \tilde{Q}_{n,s}^{k_n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Т.к.

$$\frac{d f_j(z)}{f_j(z)} = \frac{d \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)}{\prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d f_{js}(z)}{f_{js}(z)}.$$

Причем рассматриваемый ряд сходится равномерно на Γ_q . Действительно, легко проверить, что если задана последовательность непрерывных функций f_m на компакте K , равномерно на нем сходящаяся к функции f , и $f \neq 0$ на K , то начиная с некоторого номера функции $f_m \neq 0$ на K и последовательность $1/f_m$ равномерно сходится к $1/f$ на K . Точно также проверяется, что последовательности функций, равномерно сходящиеся на компакте, можно почленно умножать и равномерная сходимость остается.

По условию все $\prod_{s=1}^{\infty} f_{js}(z)$ сходятся равномерно на Γ_q к некоторой функции. Поэтому ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{d f_{j,s}(z)}{f_{j,s}(z)} = \frac{d \prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}(z)}{\prod_{s=1}^{\infty} f_{j,s}(z)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d \prod_{s=1}^m f_{j,s}}{\prod_{s=1}^m f_{j,s}}$$

сходится равномерно на Γ_q . Таким образом, интеграл $J_{\gamma}(1)$ определен и равен сходящемуся ряду из интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{\Gamma_q} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{d f_{1,s_1}(z)}{f_{1,s_1}(z)} \wedge \frac{d f_{2,s_2}(z)}{f_{2,s_2}(z)} \wedge \dots \wedge \frac{d f_{n,s_n}(z)}{f_{n,s_n}(z)},$$

в котором суммирование ведется по кубам. А для каждого из этих интегралов нужная формула доказана (теорема 2.9).

Если бесконечные произведения $f_{j,s}(z)$ сходятся абсолютно, то их значение не зависит от перестановки сомножителей. Т.е., меняя нумерацию корней, значение бесконечных произведений не изменится. Из предыдущего тогда получаем, что ряд J_{γ} также не зависит от перестановки его членов. Поэтому он сходится безусловно, а значит абсолютно.

□

6. О разложении целых функций в бесконечные произведения

Целью параграфа является доказательство существования разложения целой функции, с нулевыми множествами определенного вида, конечного порядка роста в бесконечное произведение (аналога теоремы Адамара).

Для целых функций в $\mathbb{C}$ хорошо известно разложение на множители (теорема Вейерштрасса). Для целых функций конечного порядка справедлива классическая теорема Адамара о разложении на множители (см. гл. 1).

Пусть Q_j — многочлены в $\mathbb{C}^n$, $[1 - Q_j]$ — нулевое множество (дивизор) функций $1 - Q_j$. Если существует целая функция $f(z)$, у которой нулевое множество равно $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$, то необходимым условием для этой $f(z)$ является то, что в любом шаре из $\mathbb{C}^n$, содержатся точки конечного числа множеств $[1 - Q_j]$.

Положим

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} E(Q_j(z), p_j - 1) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - Q_j(z)) e^{Q_j(z) + \frac{Q_j^2(z)}{2} + \dots + \frac{Q_j^{p_j-1}(z)}{p_j-1}}, \quad (6.1)$$

где выражение

$$E(Q, p) = (1 - Q(z)) e^{Q(z) + \frac{Q^2(z)}{2} + \dots + \frac{Q^p(z)}{p}}, \quad (6.2)$$

($p = 1, 2, \dots$) назовем *первичным множителем*. Всякий первичный множитель обращается в нуль при $Q(z) = 1$, а его поведение при $Q \rightarrow 0$ зависит от p . При $|Q| < 1$ из тейлоровского разложения логарифма получим

$$\log E(Q, p) = -\frac{Q^{p+1}}{p+1} - \frac{Q^{p+2}}{p+2} - \dots$$

Следовательно, если $k > 1$ и $|Q| \leq \frac{1}{k}$, то

$$|\log E(Q, p)| \leq |Q|^{p+1} + |Q|^{p+2} + \dots \leq |Q|^{p+1} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots\right) = \frac{k}{k-1} |Q|^{p+1}. \quad (6.3)$$

Теорема 2.11. Для всякой последовательности многочленов Q_j , $j = 1, \dots, n, \dots$, в которой степени всех Q_j ограничены числом q , Q_j имеют вид

$$Q_j(z) = \sum_{\|\beta\| \leq q} c_{\beta}^j z^{\beta}, \quad (6.4)$$

и выполнено условие

$$\alpha_j = \max_{\alpha} |c_{\alpha}^j| \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

существует целая функция, имеющая нули на этих и только этих нулевых множествах, т.е. на множестве $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$. Здесь $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} E(Q_j(z), p_j - 1).$$

Зафиксируем $r = |z| > 1$. Тогда наша функция

$$|Q_j|^{p_j} \leq \left(\sum_{\|\alpha\| \leq q} |c_{\alpha}^j| |z^{\alpha}| \right)^{p_j} \leq (c_j \alpha_j |z|^{\deg Q_j})^{p_j} \leq (c_j \alpha_j r^{\deg Q_j})^{p_j} \leq (c_j \alpha_j r^q)^{p_j} \rightarrow 0,$$

при $j \rightarrow \infty$. Здесь c_j — число мономов в Q_j .

Поэтому

$$|\log E(Q_j(z), p_j - 1)| \leq \frac{k}{k-1} |Q_j|^{p_j} \leq \frac{k}{k-1} (c_j \alpha_j r^q)^{p_j} \leq 2 (c_j \alpha_j r^q)^{p_j}. \quad (6.6)$$

Выберем p_j так, чтобы $\sum_j (c_j \alpha_j r^q)^{p_j}$ сходилась для всех $r \leq R$. Такое p_j всегда можно найти, например, можно положить $p_j = j$ и при $\alpha_j \rightarrow 0$, $\frac{1}{2} > c_j \alpha_j r^q$

$$(c_j \alpha_j r^q)^j < \frac{1}{2^j}$$

Следовательно, при $|z| \leq R$ ряд

$$\sum_j \log E(Q_j(z), p_j - 1)$$

равномерно и абсолютно сходится и с ним равномерно и абсолютно сходится произведение

$$\prod_j E(Q_j(z), p_j - 1).$$

Следовательно, функция $f(z)$ голоморфна при $|z| \leq R$, и следовательно в $\mathbb{C}^n$, а ее единственными нулями в $\mathbb{C}^n$ являются нули функции

$$\prod_j E(Q_j(z), p_j - 1),$$

т.е. $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$. □

Теорема 2.11 является аналогом классической теоремы Вейерштрасса для целых функций одного комплексного переменного (см. гл. 1).

Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ , то для всякого положительного ε

$$f(z) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}),$$

но ни для какого отрицательного ε это не так (см. гл. 1).

В дальнейшем будем считать $f(0) = 1$. Пусть для функции $f(z)$ ряд $\sum_j \alpha_j^\beta$ сходится при некотором $\beta > 0$.

Определение 2.1. Нижнюю грань положительных чисел β , для которых ряд $\sum_j \alpha_j^\beta$ сходится, назовем **показателем сходимости ряда** и обозначим через ρ_1 .

Важным следствием является тот факт, что если $\rho_1 > 0$, то функция $f(z)$ имеет конечный порядок. Покажем, что существует такое не зависящее от j целое число p , что произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} E(Q_j, p) \quad (6.7)$$

сходится для всех значений z . Это произведение сходится, если сходится ряд

$$\sum (\alpha_j r^q)^{p+1} = r^{q(p+1)} \sum \alpha_j^{p+1}, \quad (6.8)$$

т.е. сходится ряд

$$\sum (\alpha_j)^{p+1} \quad (6.9)$$

(здесь $p_j = p + 1$; а этот ряд сходится для всех значений r , если $p + 1 \geq \rho_1$.)

Определение 2.2. Произведение (6.7) с наименьшим из целых p , для которых сходится ряд (6.8), назовем **каноническим произведением**, построенным по нулям функции $f(z)$, а это наименьшее p назовем его **родом** (т.е. $p + 1 \geq \rho_1$.)

Теорема 2.12. Если для целой функции $f(z)$, вида (6.1) имеющей нулевые множества $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$, показатель сходимости $\rho_1 > 0$, то f имеет конечный порядок роста $\rho \leq q\rho_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_j = \max_{\alpha} |c_{\alpha}^j| \rightarrow 0$ и k — постоянная, больше единицы.

Напишем:

$$\log |P(z)| = \sum_{\alpha_j^{-1} \leq k r^q} \log |E(Q_j, p)| + \sum_{\alpha_j^{-1} > k r^q} \log |E(Q_j, p)| = \sum_1 + \sum_2.$$

Из неравенства (6.6) следует, что

$$\sum_2 = O \left[\sum_{\alpha_j^{-1} > kr^q} (\alpha_j r^q)^{p+1} \right] = O \left[r^{q(p+1)} \sum_{\alpha_j^{-1} > kr^q} \alpha_j^{p+1} \right],$$

Если $p = \rho_1 - 1$, то это $O(r^{q(p+1)}) = O(r^{q\rho_1})$. В противном случае $p + 1 < \rho_1 + \varepsilon$, если ε достаточно мало, и тогда

$$\begin{aligned} r^{q(p+1)} \sum_{\alpha_j^{-1} > kr^q} \alpha_j^{p+1} &= r^{q(p+1)} \sum_{\alpha_j^{-1} > kr^q} \alpha_j^{-\rho_1 - \varepsilon + p + 1} \alpha_j^{\rho_1 + \varepsilon} < \\ &< r^{q(p+1)} (kr^q)^{\rho_1 + \varepsilon - p - 1} \sum \alpha_j^{\rho_1 + \varepsilon} = O(r^{q(\rho_1 + \varepsilon)}). \end{aligned}$$

В сумму же $\sum_1$ входят члены с множителями $E(Q_j, p)$, у которых $|Q_j| \geq \frac{1}{k}$ и, следовательно,

$$\log |E(Q_j, p)| \leq \log(1 + |Q_j|) + |Q_j| + \dots + \frac{|Q_j|^p}{p} < K|Q_j|^p,$$

где K зависит только от k . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_1 &= O \left(r^{pq} \sum_{\alpha_j^{-1} \leq kr^q} \alpha_j^p \right) = O \left(r^{pq} \sum_{\alpha_j^{-1} \leq kr^q} \alpha_j^{-\rho_1 - \varepsilon + p} \alpha_j^{\rho_1 + \varepsilon} \right) = \\ &= O \left(r^{pq} (kr^q)^{q(\rho_1 + \varepsilon) - pq} \sum r_j^{\rho_1 + \varepsilon} \right) = O(r^{q(\rho_1 + \varepsilon)}). \end{aligned}$$

Таким образом, $\log |P(z)| = O(r^{q(\rho_1 + \varepsilon)})$, и теорема доказана. $\square$

Теорема 2.13 (Аналог теоремы Адамара о разложении на множители). *Если функция $f(z)$ — целая функция с нулевым множеством $\bigcup_{j=1}^{\infty} [1 - Q_j]$, причем $f(0) = 1$ и $\rho_1 > 0$, то*

$$f(z) = e^{M(z)} P(z), \tag{6.10}$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям функции $f(z)$, а $M(z)$ — многочлен, степень которого не выше $q\rho_1$.

Доказательство. следует из теоремы 2.12 и общего вида целых функций конечного порядка роста (см., например, [24]).

Глава 3.

Нахождение сумм кратных рядов с помощью вычетных интегралов

В данном параграфе рассматриваются методы нахождения сумм некоторых кратных рядов, основанные на построенной теории.

7. Нахождение сумм многомерных рядов с помощью вычетных интегралов для простейших систем

В данном разделе будет рассмотрена система (3.5) с функциями вида (3.1), у которых $P_j = 0$.

Примеры вычисления двойных рядов рассмотрены в [14, 21].

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему уравнений от трех комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = 1 + a_1 z_1 = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = 1 + b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = 1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Предположим для простоты, что все константы вещественные.

Здесь функции не удовлетворяют условиям теоремы 2.2, но удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Поэтому

$$J_{(\beta, 0, 0)} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta+1} z_2 z_3} \cdot \frac{df_1 \wedge df_2 \wedge df_3}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta+1} z_2 z_3} \cdot \frac{a_1 b_2 c_3 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1 + b_2 z_2)(1 + c_2 z_2 + c_3 z_3)} = \\
&= \frac{a_1 b_2 c_3}{\beta!} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial z_1^\beta} \left[\frac{1}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1)} \right]_{z_1=0}.
\end{aligned}$$

Для вычисления последней производной преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1)} &= \frac{A}{1 + a_1 z_1} + \frac{B}{1 + b_1 z_1} \\
\begin{cases} A = -\frac{a_1}{b_1 - a_1}, \\ B = \frac{b_1}{b_1 - a_1}. \end{cases} & \quad (7.2)
\end{aligned}$$

Тогда

$$J_{(\beta,0,0)} = \frac{(-1)^\beta a_1 b_2 c_3}{b_1 - a_1} \cdot [b_1^{\beta+1} - a_1^{\beta+1}].$$

Корень системы (7.1) равен $z_1 = -\frac{1}{a_1}$, $z_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_1 b_2}$, $z_3 = \frac{a_1 c_2 - b_1 c_2 - a_1 b_2}{a_1 b_2 c_3}$.

Поэтому степенная сумма

$$\sigma_{(\beta+1,1,1)} = \frac{(-1)^{\beta+1} a_1^{\beta+3} b_2^2 c_3}{(b_1 - a_1)(a_1 c_2 - b_1 c_2 - a_1 b_2)},$$

т.е.

$$\begin{aligned}
J_{(\beta,0,0)} &= -\sigma_{(\beta+1,1,1)} - \frac{(-1)^\beta a_1^2 b_2^2 c_3 b_1^{\beta+1}}{(b_1 - a_1)(a_1 c_2 - b_1 c_2 - a_1 b_2)} + \\
&+ \frac{(-1)^{\beta+2} a_1 b_2 c_2 c_3 (a_1^{\beta+1} - b_1^{\beta+1})}{a_1 c_2 - b_1 c_2 - a_1 b_2}. \quad (7.3)
\end{aligned}$$

Напомним известные разложения синуса в бесконечное произведение и степенной ряд (смотри, например, [27]):

$$\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2 \pi^2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2k+1)!},$$

которые равномерно и абсолютно сходятся на комплексной плоскости.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_1 - a^2}}{\sqrt{z_1 - a^2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1 - a^2}{k^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_2 - z_1 - a^2}}{\sqrt{z_2 - z_1 - a^2}} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_2 - z_1 - a^2}{m^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_3 - z_2 - a^2}}{\sqrt{z_3 - z_2 - a^2}} = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_3 - z_2 - a^2}{s^2 \pi^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (7.1). Корнями системы (7.4) являются точки $(\pi^2 k^2 + a^2, \pi^2(k^2 + m^2) +$

$2a^2, \pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)$, $k, m, s \in \mathbb{N}$. Поэтому степенная сумма $\sigma_{(\beta+1,1,1)}$ равна сумме ряда

$$\sigma_{(\beta+1,1,1)} = \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2)^{(\beta+1)} (\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2) (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)},$$

который сходится при $a \neq \pi k i$.

Для системы (7.4)

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_1 - a^2)^k}{(2k+1)!}, \\ f_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_2 - z_1 - a^2)^k}{(2k+1)!}, \\ f_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_3 - z_2 - a^2)^k}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$f_1(0,0,0) = f_2(0,0,0) = f_3(0,0,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^2 k}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sh} a}{a}.$$

Следовательно, чтобы применить формулу из теоремы 2.1, нужно функции f_1, f_2, f_3 разделить на эти константы (нормировать).

Рассмотрим интеграл $J_{(\beta,0,0)}$ для системы (7.4). Используя равенство (7.3) и вид корней системы (7.4), получим, что

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{\pi^2 k^2 + a^2}, \quad b_1 = \frac{1}{\pi^2 m^2 + a^2}, \quad b_2 = -\frac{1}{\pi^2 m^2 + a^2}, \\ c_2 &= \frac{1}{\pi^2 s^2 + a^2}, \quad c_3 = -\frac{1}{\pi^2 s^2 + a^2}. \\ J_{(\beta,0,0)} &= -\sigma_{(\beta+1,1,1)} + \\ &+ (-1)^{\beta+1} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 \pi^2 + a^2)^{\beta+1} (\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2) (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)} + \\ &+ (-1)^{\beta+1} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 s^2 + a^2) (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{(m^2 \pi^2 + a^2)^{\beta+1}} + \frac{(-1)^{\beta}}{(k^2 \pi^2 + a^2)^{\beta+1}} \right], \\ J_{(\beta,0,0)} &= \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2) (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)} \times \\ &\times \left[\frac{-1}{(k^2 \pi^2 + a^2)^{\beta+1}} + \frac{(-1)^{\beta+1}}{(m^2 \pi^2 + a^2)^{\beta+1}} \right] \end{aligned}$$

$$+(-1)^{\beta+1} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 s^2 + a^2)(\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)} \times \\ \times \left[\frac{1}{(m^2 \pi^2 + a^2)^{\beta+1}} + \frac{(-1)^\beta}{(k^2 \pi^2 + a^2)^{\beta+1}} \right],$$

для нечетных β интеграл $J_{(\beta,0,0)} = 0$, а для четных $\beta = 2n$ получим следующую формулу для нахождения суммы ряда

$$J_{(2n,0,0)} = \sum_{\|\alpha\| \leq 2n} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta \cdot Q^\alpha}{z_1^{2n}} \right] = \\ = -2\sigma_{(2n+1,1,1)} - 2 \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2)^{(2n+1)} \cdot (\pi^2 s^2 + a^2) \cdot (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)}.$$

Вычислим, например, $J_{(0,0,0)}$

$$J_{(0,0,0)} = \mathfrak{M}[\Delta] = \mathfrak{M} \left[\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial z_3} \right] = \\ = \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a} \operatorname{cth} a \right)^3.$$

Применяя тождество

$$\frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2)(\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2)} + \frac{1}{(\pi^2 m^2 + a^2)(\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2)} = \\ = \frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2)(\pi^2 m^2 + a^2)}.$$

Получим, что

$$2\sigma_{(1,1,1)} = \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2) \cdot (\pi^2 s^2 + a^2) \cdot (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)}.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2) \cdot (\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2) \cdot (\pi^2(k^2 + m^2 + s^2) + 3a^2)} = \\ = \frac{(a \operatorname{cth} a - 1)^3}{48a^6}.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему уравнений от трех комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = 1 + a_1 z_1 = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = 1 + b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = 1 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Все константы также вещественные.

Здесь функции не удовлетворяют условиям теоремы 2.2, но удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Найдем интеграл $J_{(\beta,0,0)}$.

$$\begin{aligned}
J_{(\beta,0,0)} &= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta+1} z_2 z_3} \cdot \frac{df_1 \wedge df_2 \wedge df_3}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3} = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta+1} z_2 z_3} \cdot \frac{a_1 b_2 c_3 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1 + b_2 z_2)(1 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3)} = \\
&= \frac{a_1 b_2 c_3}{\beta!} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial z_1^\beta} \cdot \left[\frac{1}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1)(1 + c_1 z_1)} \right]_{z_1=0}.
\end{aligned}$$

Для вычисления последней производной преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1 + a_1 z_1)(1 + b_1 z_1)(1 + c_1 z_1)} &= \frac{A}{1 + a_1 z_1} + \frac{B}{1 + b_1 z_1} + \frac{C}{1 + c_1 z_1} \\
\begin{cases} A = \frac{a_1^2}{(a_1 - b_1)(a_1 - c_1)}, \\ B = -\frac{b_1^2}{(a_1 - b_1)(b_1 - c_1)}, \\ C = \frac{c_1^2}{(a_1 - c_1)(b_1 - c_1)}, \end{cases} & \quad (7.6)
\end{aligned}$$

предполагая, что $a_1 \neq b_1$, $a_1 \neq c_1$, $b_1 \neq c_1$.

Тогда

$$J_{(\beta,0,0)} = (-1)^\beta a_1 b_2 c_3 \cdot \left[\frac{a_1^{\beta+2}}{(a_1 - b_1)(a_1 - c_1)} - \frac{b_1^{\beta+2}}{(a_1 - b_1)(b_1 - c_1)} + \frac{c_1^{\beta+2}}{(a_1 - c_1)(b_1 - c_1)} \right].$$

Корень системы (7.5) равен

$$z_1 = -\frac{1}{a_1}, \quad z_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_1 b_2}, \quad z_3 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2 + a_1 c_2 - a_1 b_2}{a_1 b_2 c_3},$$

если числитель в формуле для z_3 равен 0, то данный корень лежит на координатной плоскости и мы его не должны принимать в рассмотрение.

Поэтому степенная сумма

$$\sigma_{(\beta+1,1,1)} = \frac{(-1)^{\beta+1} a_1^{\beta+3} b_2^2 c_3}{(b_1 - a_1)(b_2 c_1 - b_1 c_2 + a_1 c_2 - a_1 b_2)},$$

т.е.

$$J_{(\beta,0,0)} = -\sigma_{(\beta+1,1,1)} - \frac{(-1)^\beta a_1^2 b_2^2 c_3 b_1^{\beta+1}}{(b_1 - a_1)(b_2 c_1 - b_1 c_2 + a_1 c_2 - a_1 b_2)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-1)^{\beta+1} a_1 b_2 c_2 c_3}{(b_2 c_1 - b_1 c_2 + a_1 c_2 - a_1 b_2)} \times \\
& \times \left[-a_1 c_2 \cdot \frac{a_1^{\beta+1} - c_1^{\beta+1}}{a_1 - c_1} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \cdot \frac{b_1^{\beta+1} - c_1^{\beta+1}}{b_1 - c_1} \right].
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_1 - a^2}}{\sqrt{z_1 - a^2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1 - a^2}{k^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_2 - z_1 - a^2}}{\sqrt{z_2 - z_1 - a^2}} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_2 - z_1 - a^2}{m^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{\sin \sqrt{z_3 - z_2 - z_1 - a^2}}{\sqrt{z_3 - z_2 - z_1 - a^2}} = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_3 - z_2 - z_1 - a^2}{s^2 \pi^2} \right) = 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (7.5). Корнями системы (7.8) являются точки $(\pi^2 k^2 + a^2, \pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2, \pi^2(2k^2 + m^2 + s^2) + 4a^2)$, $k, m, s \in \mathbb{N}$. Поэтому степенная сумма $\sigma_{(\beta+1,1,1)}$ равна сумме ряда

$$\sigma_{(\beta+1,1,1)} = \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 k^2 + a^2)^{(\beta+1)} (\pi^2(k^2 + m^2) + 2a^2) (\pi^2(2k^2 + m^2 + s^2) + 4a^2)},$$

который сходится при $a \neq \pi k i$, $\frac{a}{\sqrt{2}} \neq i\pi \sqrt{k^2 + m^2}$, $2a \neq i\pi \sqrt{2k^2 + m^2 + s^2}$.

Для системы (7.8)

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_1 - a^2)^k}{(2k+1)!}, \\ f_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_2 - z_1 - a^2)^k}{(2k+1)!}, \\ f_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z_3 - z_2 - z_1 - a^2)^k}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$f_1(0, 0, 0) = f_2(0, 0, 0) = f_3(0, 0, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sh} a}{a}.$$

Следовательно, чтобы применить формулу из теоремы 2.1, нужно функции f_1, f_2, f_3 разделить на эти константы (отнормировать).

Рассмотрим интеграл $J_{(\beta,0,0)}$ для системы (7.8). Используя равенство (7.7) и вид корней системы (7.8), получим, что для нечетных β при $s \neq m$ интеграл

$$J_{(\beta,0,0)} = (-1)^{\beta+1} \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(s^2 - m^2)(\pi^2(2k^2 + m^2 + s^2) + 4a^2)(\pi^2 m^2 + a^2)^{2(\beta+1)}},$$

а для четных $\beta = 2n$ при $m \neq k$ получим следующую формулу для нахождения суммы ряда

$$J_{(2n,0,0)} = \sum_{\|\alpha\| \leq 2n} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta \cdot Q^\alpha}{z_1^{2n}} \right] =$$

$$= -4\sigma_{(2n+1,1,1)} - 4 \sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(\pi^2 k^2 + a^2)^{(2n+1)}(m^2 - k^2)(\pi^2(2k^2 + m^2 + s^2) + 4a^2)}.$$

Вычислим, например, $J_{(0,0,0)}$

$$J_{(0,0,0)} = \mathfrak{M}[\Delta] = \mathfrak{M} \left[\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial z_3} \right] = \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a} \operatorname{cth} a \right)^3.$$

Таким образом, при $k \neq m$ получаем

$$\sum_{k,m,s=1}^{\infty} \frac{1}{(k^4 - m^4)(\pi^2(2k^2 + m^2 + s^2) + 4a^2)} =$$

$$= \frac{(a \operatorname{cth} a - 1)^3}{64a^6}.$$

Рассмотренные в этих примерах ряды отсутствуют в известных справочниках.

ПРИМЕР3. Рассмотрим систему уравнений от двух комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = (z_2 - az_1^2)e^{(c_1 z_1 + c_2 z_2)} = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = (z_1 - bz_2^2)e^{(d_1 z_1 + d_2 z_2)} = 0, \end{cases} \quad (7.9)$$

где $a, b > 0$.

Корни системы (7.9) равны

$$z_{1(1)} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b}}, z_{2(1)} = \sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}},$$

$$z_{1(2)} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b}} e^{-\frac{2\pi i}{3}}, z_{2(2)} = \sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}} e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

$$z_{1(3)} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b}} e^{\frac{2\pi i}{3}}, z_{2(3)} = \sqrt[3]{\frac{1}{ab^2}} e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Они не лежат на координатных плоскостях, поэтому получаем, что степенная сумма имеет вид

$$\sigma_{\beta_1+1, \beta_2+1} = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{z_{1(n)}^{\beta_1+1} z_{2(n)}^{\beta_2+1}}$$

$$\sigma_{\beta_1+1, \beta_2+1} = \sqrt[3]{a^{2\beta_1+\beta_2+3} \cdot b^{\beta_1+2\beta_2+3}} \left(1 + e^{\frac{2\pi(\beta_1-\beta_2)i}{3}} + e^{-\frac{2\pi(\beta_1-\beta_2)i}{3}} \right). \quad (7.10)$$

при

$$\beta_1 - \beta_2 = 3k, k = 0, 1, \dots$$

получаем

$$\sigma_{\beta_1+1, \beta_2+1} = 3 \cdot a^{\frac{2\beta_1+\beta_2}{3}+1} \cdot b^{\frac{\beta_1+2\beta_2}{3}+1} \quad (7.11)$$

во всех остальных случаях $\sigma_{\beta_1+1, \beta_2+1} = 0$.

Вычислим интегралы по теореме 2.1

$$J_\beta = \sum_J \sum_{\|\alpha^s\| \leq \|\beta\| + \min(n, k_{i_1} + \dots + k_{i_s})} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_J \cdot Q^{\alpha^s}(J)}{z^{\beta + (\alpha_1^s+1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s+1)\beta^{i_s}}} \right],$$

где

$$\Delta_1 = -2ad_2z_1 - d_1;$$

$$\Delta_2 = c_2 + 2bc_1z_2;$$

$$\Delta_3 = c_1d_2 - c_2d_1;$$

$$\Delta_4 = 4abz_1z_2 - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_\beta &= \sum_{\|\alpha^1\| \leq \|\beta\|+1} (-1)^{\|\alpha^1\|} \mathfrak{M} \left[\frac{(-2ad_2z_1 - d_1) \cdot (-az_1^2)^{\alpha_1^1}}{z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2+1}} \right] + \\ &+ \sum_{\|\alpha^2\| \leq \|\beta\|+1} (-1)^{\|\alpha^2\|} \mathfrak{M} \left[\frac{(c_2 + 2bc_1z_2) \cdot (-bz_2^2)^{\alpha_2^2}}{z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2+1}} \right] + \\ &+ \sum_{\|\alpha^0\| \leq \|\beta\|} (-1)^{\|\alpha^0\|} \mathfrak{M} \left[\frac{(c_1d_2 - c_2d_1)}{z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2+1}} \right] + \\ &+ \sum_{\|\alpha\| \leq \|\beta\|+2} (-1)^{\|\alpha\|} \mathfrak{M} \left[\frac{(4abz_1z_2 - 1) \cdot (-az_1^2)^{\alpha_1} \cdot (-bz_2^2)^{\alpha_2}}{z_1^{\beta_1+\alpha_2+1} z_2^{\beta_2+\alpha_1+1}} \right]. \end{aligned}$$

$\beta_1, \beta_2 \geq 0$, поэтому первый функционал равен нулю, так как степень знаменателя по z_2 выше степени числителя по этой переменной, второй функционал равен нулю, так как степень знаменателя по z_1 выше степени числителя по этой переменной, а третий функционал имеет степень знаменателя выше степени числителя по переменным z_1, z_2 , следовательно

$$J_\beta = \sum_{\|\alpha\| \leq \|\beta\|+2} \mathfrak{M} \left[\frac{(4abz_1z_2 - 1) \cdot (az_1^2)^{\alpha_1} \cdot (bz_2^2)^{\alpha_2}}{z_1^{\beta_1+\alpha_2+1} z_2^{\beta_2+\alpha_1+1}} \right] = \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\|\alpha\| \leq \|\beta\|+2} \mathfrak{M} \left[\frac{4a^{\alpha_1+1} b^{\alpha_2+1} z_1^{2\alpha_1+1} z_2^{2\alpha_2+1} - a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} z_1^{2\alpha_1} z_2^{2\alpha_2}}{z_1^{\beta_1+\alpha_2+1} z_2^{\beta_2+\alpha_1+1}} \right] = \\
&= \sum_{\|\alpha\| \leq \|\beta\|+2} \mathfrak{M} \left[4a^{\alpha_1+1} b^{\alpha_2+1} z_1^{2\alpha_1-\alpha_2-\beta_1} z_2^{2\alpha_2-\alpha_1-\beta_2} - a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} z_1^{2\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-1} z_2^{2\alpha_2-\alpha_1-\beta_2-1} \right]
\end{aligned}$$

Данная сумма отлична от нуля только

при

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1, 2\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 + 1, 2\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 + 1$$

или

$$\beta_1 - \beta_2 = 3(\alpha_1 - \alpha_2),$$

поэтому

$$J_\beta = 4a^{\frac{2\beta_1+\beta_2}{3}+1} \cdot b^{\frac{\beta_1+2\beta_2}{3}+1} - a^{\frac{2\beta_1+\beta_2}{3}+1} \cdot b^{\frac{\beta_1+2\beta_2}{3}+1} = 3 \cdot a^{\frac{2\beta_1+\beta_2}{3}+1} \cdot b^{\frac{\beta_1+2\beta_2}{3}+1} \quad (7.13)$$

Из (7.11) и (7.13) следует

$$J_\beta = \sigma_{\beta_1+1, \beta_2+1}.$$

8. Нахождение сумм многомерных рядов с помощью вычетных интегралов для систем треугольного вида

1. Рассмотрим систему уравнений от двух комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = 1 + a_1 z_1 - a_2 z_2 = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = 1 - b_1 z_1 + b_2 z_2 = 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

причем ее якобиан отличен от нуля. Вычислим интегралы по теореме 2.4

$$\begin{aligned} J_\beta &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2+1}} \cdot \frac{df_1 \wedge df_2}{f_1 \cdot f_2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} z_2^{\beta_2+1}} \cdot \frac{\Delta dz_1 \wedge dz_2}{(1 + a_1 z_1 - a_2 z_2)(1 - b_1 z_1 + b_2 z_2)} = \\ &= \frac{\Delta}{\beta_1! \cdot \beta_2!} \cdot \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2}} \left[\frac{1}{(1 + a_1 z_1 - a_2 z_2)(1 - b_1 z_1 + b_2 z_2)} \right]_{z_1=z_2=0} = \\ &= \frac{\Delta}{\beta_1! \cdot \beta_2!} \cdot \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2}} \left[\frac{a_2}{(a_2 + b_2)(1 + \frac{\Delta}{a_2+b_2} z_1)(1 + a_1 z_1 - a_2 z_2)} \right]_{z_1=z_2=0} + \\ &+ \frac{\Delta}{\beta_1! \cdot \beta_2!} \cdot \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2}} \left[\frac{b_2}{(a_2 + b_2)(1 + \frac{\Delta}{a_2+b_2} z_1)(1 - b_1 z_1 + b_2 z_2)} \right]_{z_1=z_2=0} = \\ &= \frac{\Delta}{\beta_1!} \cdot \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial z_1^{\beta_1}} \left(\frac{1}{(a_2 + b_2)(1 + \frac{\Delta}{a_2+b_2} z_1)} \cdot \frac{a_2^{\beta_2+1}}{(1 + a_1 z_1 - a_2 z_2)^{\beta_2+1}} \right)_{z_1=z_2=0} + \\ &+ \frac{\Delta}{\beta_1!} \cdot \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial z_1^{\beta_1}} \left(\frac{1}{(a_2 + b_2)(1 + \frac{\Delta}{a_2+b_2} z_1)} \cdot \frac{(-1)^{\beta_2} b_2^{\beta_2+1}}{(1 - b_1 z_1 + b_2 z_2)^{\beta_2+1}} \right)_{z_1=z_2=0}, \end{aligned}$$

где Δ — это якобиан $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ системы (8.1).

Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения двух функций, получим $J_\beta =$

$$\begin{aligned} &= \frac{a_2^{\beta_2+1} \Delta}{(a_2 + b_2) \beta_1!} \sum_{s=0}^{\beta_1} \frac{\beta_1!}{s! (\beta_1 - s)!} \times \left[\frac{\partial^s}{\partial z_1^s} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta}{a_2+b_2} z_1} \right) \cdot \frac{\partial^{\beta_1-s}}{\partial z_1^{\beta_1-s}} \left(\frac{1}{(1 + a_1 z_1 - a_2 z_2)^{\beta_2+1}} \right) \right]_{z_1=0} + \\ &+ \frac{(-1)^{\beta_2} b_2^{\beta_2+1} \Delta}{(a_2 + b_2) \beta_1!} \sum_{s=0}^{\beta_1} \frac{\beta_1!}{s! (\beta_1 - s)!} \times \left[\frac{\partial^s}{\partial z_1^s} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta}{a_2+b_2} z_1} \right) \cdot \frac{\partial^{\beta_1-s}}{\partial z_1^{\beta_1-s}} \left(\frac{1}{(1 - b_1 z_1 + b_2 z_2)^{\beta_2+1}} \right) \right]_{z_1=0} = \\ &= \frac{(-1)^{\beta_1} \Delta}{(a_2 + b_2) \beta_2!} \cdot a_2^{\beta_2+1} \sum_{s=0}^{\beta_1} \frac{(\beta_1 + \beta_2 - s)!}{(\beta_1 - s)!} \cdot \left(\frac{\Delta}{a_2 + b_2} \right)^s \cdot a_1^{\beta_1-s} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(-1)^{\beta_1+\beta_2} \Delta}{(a_2 + b_2) \beta_2!} \cdot b_2^{\beta_2+1} \sum_{s=0}^{\beta_1} \frac{(\beta_1 + \beta_2 - s)!}{(\beta_1 - s)!} \cdot \left(\frac{\Delta}{a_2 + b_2} \right)^s \cdot (-b_1)^{\beta_1-s}$$

Корень системы (8.1) равен $z_1 = -\frac{a_2 + b_2}{\Delta}$, $z_2 = -\frac{a_1 + b_1}{\Delta}$. Если он не лежит на координатных плоскостях, то $a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, а степенная сумма имеет вид

$$\sigma_{\beta+I} = \frac{(-1)^{\beta_1+\beta_2} \cdot \Delta^{\beta_1+\beta_2+2}}{(a_1 + b_1)^{\beta_2+1} (a_2 + b_2)^{\beta_1+1}}.$$

В частности,

$$\sigma_{(\beta_1+1,1)} = \frac{(-1)^\beta \cdot \Delta^{\beta+2}}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)^{\beta+1}}.$$

Теперь при условии $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем

$$J_{(0,0)} = \Delta, \tag{8.2}$$

$$\sigma_{(1,1)} = \frac{\Delta^2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)},$$

$$J_{(0,0)} = \sigma_{(1,1)} + \Delta \cdot \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_2 + b_2} \right). \tag{8.3}$$

2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = \frac{\sin \sqrt{a_1 z_1 - a_2 z_2}}{\sqrt{a_1 z_1 - a_2 z_2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_1 z_1 - a_2 z_2}{k^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = \frac{\sin \sqrt{-b_1 z_1 + b_2 z_2}}{\sqrt{-b_1 z_1 + b_2 z_2}} = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{-b_1 z_1 + b_2 z_2}{s^2 \pi^2} \right) = 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (8.1). Корнями системы (8.4) являются точки

$$\left(\frac{\pi^2(a_2 s^2 + b_2 k^2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{\pi^2(a_1 s^2 + b_1 k^2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right),$$

при условии, что $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, и $k, s \in \mathbb{N}$. Поэтому степенная сумма $\sigma_{(1,1)}$ равна сумме ряда

$$\sigma_{(1,1)} = \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{\pi^4 (a_1 s^2 + b_1 k^2) (a_2 s^2 + b_2 k^2)},$$

члены которого определены при $-\frac{k^2}{s^2} \neq \frac{a_1}{b_1}$ и $-\frac{k^2}{s^2} \neq \frac{a_2}{b_2}$, для $\forall k, s$.

Рассмотрим интеграл $J_{(0,0)}$ для системы (8.4). Используя равенство (8.2), находим, что

$$J_{(0,0)} = \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\pi^4 k^2 s^2}.$$

Применяя равенство (8.3), получаем, что

$$\begin{aligned}
\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\pi^4 k^2 s^2} &= \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{\pi^4 (a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} + \\
&+ \sum_{k,s=1}^{\infty} \left[\frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) b_1}{\pi^4 s^2 (a_1 s^2 + b_1 k^2)} + \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) a_2}{\pi^4 k^2 (a_2 s^2 + b_2 k^2)} \right]. \\
\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{\pi^4 (a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} &= \\
= \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\pi^4 k^2 s^2} - \sum_{k,s=1}^{\infty} \left[\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\pi^4 s^2 (k^2 + \frac{a_1}{b_1} s^2)} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\pi^4 k^2 (s^2 + \frac{b_2}{a_2} k^2)} \right].
\end{aligned}$$

Упростим наше тождество, используя равенство при условии $t > 0$

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 (k^2 + t^2 s^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2t^2 s^4} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi \operatorname{cth}(\pi t s)}{2t s^3}, \quad (8.5)$$

смотри [23, гл. 5, пп. 5.2, № 13].

Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{\pi^4 (a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} &= \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\pi^4 k^2 s^2} - \\
-(a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_1}{2\pi^4 a_1 s^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_2}{2\pi^4 b_2 k^4} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sqrt{b_1} \operatorname{cth}(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \pi s)}{2\pi^3 \sqrt{a_1} s^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_2} \operatorname{cth}(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} \pi k)}{2\pi^3 \sqrt{b_2} k^3} \right] & \\
\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{\pi^4 (a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{36} - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{180} \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{a_2}{b_2} \right) - \\
- \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{2\pi^3 s^3} \left[\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \operatorname{cth}(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \pi s) + \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} \operatorname{cth}(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} \pi s) \right]. &
\end{aligned}$$

Лемма 3.1. *При условии*

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{b_2}{a_2} > 0,$$

выполняется равенство

$$\begin{aligned}
\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} &= \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{180} \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{a_2}{b_2} \right) - \\
- \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi}{2s^3} \left[\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \operatorname{cth}(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \pi s) + \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} \operatorname{cth}(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} \pi s) \right]. &
\end{aligned}$$

Доказательство следует из вышесказанного.

Преобразуем выражение

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi s\right)}{s^3},$$

аналогичным образом упрощается и второе слагаемое.

Сделаем замену переменных

$$t = \sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi, \quad (8.6)$$

Получаем

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(ts)}{s^3} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3(e^{2ts} - 1)},$$

при условии $t > 0$.

Обозначим

$$F(x, e^{2t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3} \cdot \frac{x^s}{e^{2ts} - 1},$$

ряд сходится при $x \in (-e^{2t}, e^{2t})$.

Продифференцируем по x это выражение

$$F'(x, e^{2t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{x^{s-1}}{e^{2ts} - 1} = \frac{1}{x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{x^s}{e^{2ts} - 1} = \frac{1}{x} \cdot H(x, e^{2t}),$$

где

$$H(x, e^{2t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{x^s}{e^{2ts} - 1}.$$

Тогда

$$H'(x, e^{2t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \cdot \frac{x^{s-1}}{e^{2ts} - 1} = \frac{1}{x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \cdot \frac{x^s}{e^{2ts} - 1} = \frac{1}{x} \cdot G(x, e^{2t}),$$

где

$$G(x, e^{2t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \cdot \frac{x^s}{e^{2ts} - 1}.$$

Тогда

$$G'(x, e^{2t}) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^{2ts} - 1} = \frac{1}{x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^s}{e^{2ts} - 1}.$$

Воспользуемся значением известных сумм из [23, гл. 5], получаем

$$G'(x, e^{2t}) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{e^{4t} - 1} \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x) = \frac{1}{e^{4t} - 1} {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x),$$

где ${}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x)$ — базисный гипергеометрический ряд.

Проинтегрируем данные выражения

$$G(v, e^{2t}) = \frac{1}{e^{4t} - 1} \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du + C,$$

так как $G(0, e^{2t}) = 0$, то $C = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} G(v, e^{2t}) &= \frac{1}{e^{4t} - 1} \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du \\ H(y, e^{2t}) &= \frac{1}{e^{4t} - 1} \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du \\ F(x, e^{2t}) &= \frac{1}{e^{4t} - 1} \int_0^x \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\text{cth}(ts)}{s^3} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3(e^{2ts} - 1)} = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3} + 2 \frac{1}{e^{4t} - 1} \int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du. \end{aligned}$$

Лемма 3.2.

$$\begin{aligned} \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} &= \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{180 a_1 b_2} - \frac{\pi(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2})\zeta(3)}{2\sqrt{a_1 b_2}} \\ &- \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \cdot \frac{\pi}{e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi} - 1} \int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, u) du - \\ &- \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} \cdot \frac{\pi}{e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi} - 1} \int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, u) du. \end{aligned}$$

Доказательство вытекает из леммы 3.1 и преобразований, использующих значение известных сумм.

Преобразуем выражение

$$\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \cdot \frac{\pi}{e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi} - 1} \int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, u) du,$$

таким же образом поступим и со следующим слагаемым в последнем равенстве.

Используя замену переменных (8.6), получаем

$$\int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du.$$

Рассмотрим сначала интеграл

$$\int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du,$$

интегрируя по частям внешний интеграл. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^y \frac{1}{v} \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du dv = \\ & = \ln y \cdot \int_0^y {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du - \int_0^y \ln v \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, v) dv. \end{aligned}$$

Подставим данное выражение в исходный интеграл. Каждое слагаемое последнего выражения интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^1 \frac{1}{y} \ln y \cdot \int_0^y {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, y) dy,$$

и

$$\int_0^1 \frac{1}{y} \int_0^y \ln v \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, v) dv dy = -\int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, y) dy.$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, y) dy.$$

Теорема 3.1. *Справедлива формула (интегральное представление для суммы ряда)*

$$\begin{aligned} & \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 s^2 + b_1 k^2)(a_2 s^2 + b_2 k^2)} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{180 a_1 b_2} - \frac{\pi(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2})\zeta(3)}{2\sqrt{a_1 b_2}} \\ & - \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \cdot \frac{\pi}{2 \left(e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi} - 1 \right)} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\pi}, u) dy - \\ & - \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} \cdot \frac{\pi}{2 \left(e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi} - 1 \right)} \int_0^1 \ln^2 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, e^{2\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}; e^{4\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\pi}, u) dy. \end{aligned}$$

Для доказательства используем последнее преобразование и леммы 3.1, 3.2.

9. Нахождение сумм многомерных рядов с помощью вычетных интегралов для систем специального вида

Пример 1.1. Рассмотрим систему уравнений от двух комплексных переменных

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = (1 + a_1 z_1 - a_2 z_2) e^{(c_1 z_1 + c_2 z_2)} = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = (1 - b_1 z_1 + b_2 z_2) e^{(d_1 z_1 + d_2 z_2)} = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

причем ее якобиан Δ — это якобиан $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ отличен от нуля.

Корень системы (9.1) равен $z_1 = -\frac{a_2 + b_2}{\Delta}$, $z_2 = -\frac{a_1 + b_1}{\Delta}$. Если он не лежит на координатных плоскостях, то $a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, а по лемме 2.7

$$J_\gamma = \frac{(-1)^{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \Delta^{\gamma_1 + \gamma_2 + 2}}{(a_1 + b_1)^{\gamma_2 + 1} (a_2 + b_2)^{\gamma_1 + 1}}.$$

В частности $J_{(1,1)}$

$$J_{(1,1)} = \frac{\Delta^4}{(a_1 + b_1)^2 (a_2 + b_2)^2}$$

Перейдем к замене переменных $z_1 = \frac{1}{w_1}$ и $z_2 = \frac{1}{w_2}$. Наша система примет вид

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = w_1 w_2 + a_1 w_2 - a_2 w_1 = (w_1 + a_1)(w_2 - a_2) + a_1 a_2 = 0, \\ \tilde{f}_2 = w_1 w_2 - b_1 w_2 + b_2 w_1 = (w_1 - b_1)(w_2 + b_2) + b_1 b_2 = 0, \end{cases} \quad (9.2)$$

где $\tilde{\Delta}$ — это якобиан $\tilde{\Delta} = (w_2 - a_2)(w_1 - b_1) - (w_1 + a_1)(w_2 + b_2)$ системы (9.2).

В частности $J_{(1,1)}$

$$\begin{aligned} J_{(1,1)} &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - \frac{2a_1 a_2^2 b_1^2}{a_1 + b_1} - \frac{2a_1^2 a_2 b_2^2}{a_2 + b_2} - \frac{2a_1^2 b_1 b_2^2}{a_1 + b_1} - \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2}{a_2 + b_2} + \\ &+ \frac{2a_1^2 b_1^2 b_2^2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2} + \frac{2a_1^2 a_2^2 b_1^2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2a_1^2 a_2^2 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2} + \frac{2a_1^2 a_2 b_1^2 b_2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2a_1 a_2^2 b_1 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2}. \end{aligned}$$

Теперь по теореме 2.9 получаем

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{\gamma_1 + 1} \cdot \Delta^{\gamma_1 + \gamma_2 + 2}}{(a_1 - b_1)^{\gamma_2 + 1} (a_2 - b_2)^{\gamma_1 + 1}} = \\ &= \sum_{K \in \mathfrak{R}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}_{q,a_J}} \frac{w_1^{\gamma_1 + 1} \cdot w_2^{\gamma_2 + 1} \cdot (a_1 a_2)^{k_1} (b_1 b_2)^{k_2} \cdot \tilde{\Delta}}{(w_1 + a_1)^{k_1 + 1} \cdot (w_2 - a_2)^{k_1 + 1} \cdot (w_1 - b_1)^{k_2 + 1} \cdot (w_2 + b_2)^{k_2 + 1}} dw_1 \wedge dw_2, \quad (9.3) \end{aligned}$$

где $\mathfrak{R} = \{ \gamma \mid \exists i : \gamma_i + 2 > k_1 + k_2, \quad i = 1, 2 \}$, а $\tilde{\Gamma}_{q,a_J}$ это циклы вида $\{|w_1 + a_1| = r_{11}, |w_2 + b_2| = r_{22}\}$, взятый с положительной ориентацией и $\{|w_2 - a_2| = r_{12}, |w_1 - b_1| = r_{21}\}$, взятый с отрицательной.

Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^4}{(a_1 + b_1)^2(a_2 + b_2)^2} &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - \frac{2a_1 a_2^2 b_1^2}{a_1 + b_1} - \frac{2a_1^2 a_2 b_2^2}{a_2 + b_2} - \frac{2a_1^2 b_1 b_2^2}{a_1 + b_1} - \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2}{a_2 + b_2} + \\ &+ \frac{2a_1^2 b_1^2 b_2^2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2} + \frac{2a_1^2 a_2^2 b_1^2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2a_1^2 a_2^2 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2} + \frac{2a_1^2 a_2 b_1^2 b_2}{(a_1 + b_1)^2} + \frac{2a_1 a_2^2 b_1 b_2^2}{(a_2 + b_2)^2}. \end{aligned}$$

Напомним известное разложение Γ -функции Эйлера в бесконечное произведение:

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}},$$

где γ — постоянная Эйлера.

Пример 1.2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = \frac{e^{\gamma(-a_1 z_1 + a_2 z_2)}}{\Gamma(1 - (-a_1 z_1 + a_2 z_2))} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{-a_1 z_1 + a_2 z_2}{k}\right) e^{\frac{-a_1 z_1 + a_2 z_2}{k}} = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = \frac{e^{\gamma(b_1 z_1 - b_2 z_2)}}{\Gamma(1 - (b_1 z_1 - b_2 z_2))} = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{b_1 z_1 - b_2 z_2}{s}\right) e^{\frac{b_1 z_1 - b_2 z_2}{s}} = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (9.2). Корнями системы (9.4) являются точки

$$\left(\frac{a_2 s + b_2 k}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{a_1 s + b_1 k}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right),$$

при условии, что $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, и $k, s \in \mathbb{N}$.

Поэтому интеграл $J_{(1,1)}$ равна сумме ряда

$$J_{(1,1)} = \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^4}{(a_1 s + b_1 k)^2 (a_2 s + b_2 k)^2},$$

члены которого определены при $\frac{k^2}{s^2} \neq \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{k^2}{s^2} \neq \frac{a_2}{b_2}$.

Используя лемму 2.6, находим, что

$$\begin{aligned} J_{(1,1)} &= \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}{k^2 s^2} - \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2 b_2^2}{k^2 s (a_2 s + b_2 k)} - \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1 a_2^2 b_1^2}{k^2 s (a_1 s + b_1 k)} - \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2}{k s^2 (a_2 s + b_2 k)} - \\ &- \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 b_1 b_2^2}{k s^2 (a_1 s + b_1 k)} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2^2}{s^2 (a_2 s + b_2 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 b_1^2 b_2^2}{s^2 (a_1 s + b_1 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2^2 b_2^2}{k^2 (a_2 s + b_2 k)^2} + \\ &+ \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2^2 b_1^2}{k^2 (a_1 s + b_1 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1 a_2^2 b_1 b_2^2}{k s (a_2 s + b_2 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2 b_1^2 b_2}{k s (a_1 s + b_1 k)^2}. \end{aligned}$$

По теореме 2.10 имеем

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^4}{\pi^4 (a_1 s + b_1 k)^2 (a_2 s + b_2 k)^2} = \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}{k^2 s^2} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2 b_2^2}{k^2 s (a_2 s + b_2 k)} - \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1 a_2^2 b_1^2}{k^2 s (a_1 s + b_1 k)} - \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2}{k s^2 (a_2 s + b_2 k)} - \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 b_1 b_2^2}{k s^2 (a_1 s + b_1 k)} + \\
& + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_2^2 b_1^2 b_2^2}{s^2 (a_2 s + b_2 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 b_1^2 b_2^2}{s^2 (a_1 s + b_1 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2^2 b_2^2}{k^2 (a_2 s + b_2 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2^2 b_1^2}{k^2 (a_1 s + b_1 k)^2} + \\
& + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1 a_2^2 b_1 b_2^2}{k s (a_2 s + b_2 k)^2} + \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{2a_1^2 a_2 b_1^2 b_2}{k s (a_1 s + b_1 k)^2}
\end{aligned}$$

Используя равенства [23, гл. 5, п. 5.1. № 2.12]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \psi^{(n-1)}(a),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(kn+m)} = \frac{1}{m} \left[\psi\left(\frac{m}{n} + 1\right) + C \right].$$

имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (s+ak)^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 k^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \psi'(ak) \\
& \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 k (ak+bs)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{bs^3} \left[\psi\left(\frac{bs}{a} + 1\right) + C \right] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{C}{bs^3} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{bs^3} \left[\psi\left(\frac{bs}{a} + 1\right) + \frac{a}{bs} \right] \\
& \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{1}{ks(k+as)^2} = \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{1}{as^2 k (k+as)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{as^2 (k+as)^2} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 s^3} [\psi(as+1) + C] + \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{a^3 s^4} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{as^2} \psi'(as)
\end{aligned}$$

Упростим данное тождество

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^4}{\pi^4 (a_1 s + b_1 k)^2 (a_2 s + b_2 k)^2} = (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 s^2} + \\
& + \left(\frac{4a_2 b_1^3 b_2}{a_1} + \frac{4a_1 b_1 b_2^3}{a_2} - 8a_1^2 a_2^2 - 8b_1^2 b_2^2 \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} - (2a_1^2 a_2 b_2 + 2a_1 a_2^2 b_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k^3} - \\
& - 2a_1^2 a_2 b_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{b_2 k}{a_2}\right)}{k^3} - 2a_1 a_2^2 b_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{b_1 k}{a_1}\right)}{k^3} + \\
& + (2a_1 b_1 b_2^2 - 2a_2 b_1^2 b_2) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{a_2 s}{b_2}\right)}{s^3} + (2a_2 b_1^2 b_2 - 2a_1 b_1 b_2^2) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{a_1 s}{b_1}\right)}{s^3} + \\
& + 2a_1^2 b_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi'\left(\frac{b_2 k}{a_2}\right)}{k^2} + 2a_2^2 b_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi'\left(\frac{b_1 k}{a_1}\right)}{k^2} +
\end{aligned}$$

$$+(2a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\psi' \left(\frac{a_2s}{b_2} \right)}{s^2} + (2a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\psi' \left(\frac{a_1s}{b_1} \right)}{s^2}.$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(tk)}{k^3}$$

продифференцируем его по t , получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(tk)}{k^3} \right)'_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi'(tk)}{k^2}.$$

Таким образом, наш ряд выражается через сумму однотипных одномерных рядов.

Пример 2.1. Рассмотрим систему уравнений от трех комплексных переменных

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(z_1, z_2, z_3) = 1 - a_1z_1 - a_2z_2 - a_3z_3 + a_1a_2z_1z_2 + a_1a_3z_1z_3 + a_2a_3z_2z_3 = \\ = (1 - a_1z_1)(1 - a_2z_2)(1 - a_3z_3) + a_1a_2a_3z_1z_2z_3 = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) = 1 - b_1z_1 - b_2z_2 - b_3z_3 + b_1b_2z_1z_2 + b_1b_3z_1z_3 + b_2b_3z_2z_3 = \\ = (1 - b_1z_1)(1 - b_2z_2)(1 - b_3z_3) + b_1b_2b_3z_1z_2z_3 = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) = 1 - c_1z_1 - c_2z_2 - c_3z_3 + c_1c_2z_1z_2 + c_1c_3z_1z_3 + c_2c_3z_2z_3 = \\ = (1 - c_1z_1)(1 - c_2z_2)(1 - c_3z_3) + c_1c_2c_3z_1z_2z_3 = 0. \end{array} \right. \quad (9.5)$$

Корни системы (9.5) равны $(z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}), j = 1, 2, 3$.

Сделаем замену переменных $z_1 = \frac{1}{w_1}$, $z_2 = \frac{1}{w_2}$ и $z_3 = \frac{1}{w_3}$. Наша система примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1 = w_1w_2w_3 - a_1w_2w_3 - a_2w_1w_3 - a_3w_1w_2 + a_1a_2w_3 + a_1a_3w_2 + a_2a_3w_1 = \\ = (w_1 - a_1)(w_2 - a_2)(w_3 - a_3) + a_1a_2a_3 = 0, \\ \tilde{f}_2 = w_1w_2w_3 - b_1w_2w_3 - b_2w_1w_3 - b_3w_1w_2 + b_1b_2w_3 + b_1b_3w_2 + b_2b_3w_1 = \\ = (w_1 - b_1)(w_2 - b_2)(w_3 - b_3) + b_1b_2b_3 = 0, \\ \tilde{f}_3 = w_1w_2w_3 - c_1w_2w_3 - c_2w_1w_3 - c_3w_1w_2 + c_1c_2w_3 + c_1c_3w_2 + c_2c_3w_1 = \\ = (w_1 - c_1)(w_2 - c_2)(w_3 - c_3) + c_1c_2c_3 = 0, \end{array} \right. \quad (9.6)$$

где $\tilde{\Delta}$ — это якобиан системы (9.6) равный

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} = & (w_2 - a_2)(w_3 - a_3)[(w_1 - b_1)(w_3 - b_3)(w_1 - c_1)(w_2 - c_2) - (w_1 - b_1)(w_2 - b_2)(w_1 - c_1)(w_3 - c_3)] - \\ & - (w_1 - a_1)(w_3 - a_3)[(w_2 - b_2)(w_3 - b_3)(w_1 - c_1)(w_2 - c_2) - (w_1 - b_1)(w_2 - b_2)(w_2 - c_2)(w_3 - c_3)] + \end{aligned}$$

$$+(w_1 - a_1)(w_2 - a_2)[(w_2 - b_2)(w_3 - b_3)(w_1 - c_1)(w_3 - c_3) - (w_1 - b_1)(w_3 - b_3)(w_2 - c_2)(w_3 - c_3)].$$

Теперь по теореме 2.7 получаем

$$J_{(0,0,0)} = \sum_{k_1+k_2+k_3 < 2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}_{q,a,J}} \frac{w_1 w_2 w_3 \cdot (a_1 a_2 a_3)^{k_1} (b_1 b_2 b_3)^{k_2} (c_1 c_2 c_3)^{k_3} \cdot \tilde{\Delta}}{(w_1 - a_1)^{k_1+1} (w_2 - a_2)^{k_1+1} (w_3 - a_3)^{k_1+1}} \times \\ \times \frac{dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3}{(w_1 - b_1)^{k_2+1} (w_2 - b_2)^{k_2+1} (w_3 - b_3)^{k_2+1} \cdot (w_1 - c_1)^{k_3+1} (w_2 - c_2)^{k_3+1} (w_3 - c_3)^{k_3+1}}, \quad (9.7)$$

где $\tilde{\Gamma}_{q,a,J}$ это циклы вида $\{|w_1 - a_1| = r_{11}, |w_2 - b_2| = r_{22}, |w_3 - c_3| = r_{33}\}; \{|w_3 - a_3| = r_{13}, |w_1 - b_1| = r_{21}, |w_2 - c_2| = r_{32}\}; \{|w_2 - a_2| = r_{12}, |w_3 - b_3| = r_{23}, |w_1 - c_1| = r_{31}\}$ — взятые с положительной ориентацией и $\{|w_1 - a_1| = r_{11}, |w_3 - b_3| = r_{23}, |w_2 - c_2| = r_{32}\}; \{|w_2 - a_2| = r_{12}, |w_1 - b_1| = r_{21}, |w_3 - c_3| = r_{33}\}; \{|w_3 - a_3| = r_{13}, |w_2 - b_2| = r_{22}, |w_1 - c_1| = r_{31}\}$ — взятые с отрицательной ориентацией.

Тогда

$$J_{(0,0,0)} = a_1 b_2 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1 + \\ + \frac{a_3 c_1 c_2 c_3}{a_3 - c_3} \cdot \left[\frac{b_1}{b_1 - c_1} + \frac{b_2}{b_2 - c_2} \right] + \frac{a_1 b_1 b_2 b_3}{a_1 - b_1} \cdot \left[\frac{c_3}{c_3 - b_3} + \frac{c_2}{c_2 - b_2} \right] + \\ + \frac{a_2 b_1 b_2 b_3}{a_2 - b_2} \cdot \left[\frac{c_3}{c_3 - b_3} + \frac{c_1}{c_1 - b_1} \right] + \frac{a_3 b_1 b_2 b_3}{a_3 - b_3} \cdot \left[\frac{c_2}{c_2 - b_2} + \frac{c_1}{c_1 - b_1} \right] + \\ + \frac{a_1 c_1}{a_1 - c_1} \cdot \left[\frac{b_2 c_2 c_3}{b_2 - c_2} + \frac{b_3 c_2 c_3}{b_3 - c_3} + \frac{a_2 a_3 b_2}{a_2 - b_2} + \frac{a_2 a_3 b_3}{a_3 - b_3} \right] + \\ + \frac{a_2 c_2}{a_2 - c_2} \cdot \left[\frac{b_1 c_1 c_3}{b_1 - c_1} + \frac{b_3 c_1 c_3}{b_3 - c_3} + \frac{a_1 a_3 b_3}{a_3 - b_3} + \frac{a_1 a_3 b_1}{a_1 - b_1} \right].$$

Теперь по теореме 2.9 получаем

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{z_{j1} \cdot z_{j2} \cdot z_{j3}} = \sum_{k_1+k_2+k_3 < 2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}_{q,a,J}} \frac{w_1 w_2 w_3 \cdot (a_1 a_2 a_3)^{k_1} (b_1 b_2 b_3)^{k_2} (c_1 c_2 c_3)^{k_3} \cdot \tilde{\Delta}}{(w_1 - a_1)^{k_1+1} (w_2 - a_2)^{k_1+1} (w_3 - a_3)^{k_1+1}} \times \\ \times \frac{dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3}{(w_1 - b_1)^{k_2+1} (w_2 - b_2)^{k_2+1} (w_3 - b_3)^{k_2+1} \cdot (w_1 - c_1)^{k_3+1} (w_2 - c_2)^{k_3+1} (w_3 - c_3)^{k_3+1}}$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{z_{j1} \cdot z_{j2} \cdot z_{j3}} = a_1 b_2 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1 + \\ + \frac{a_3 c_1 c_2 c_3}{a_3 - c_3} \cdot \left[\frac{b_1}{b_1 - c_1} + \frac{b_2}{b_2 - c_2} \right] + \frac{a_1 b_1 b_2 b_3}{a_1 - b_1} \cdot \left[\frac{c_3}{c_3 - b_3} + \frac{c_2}{c_2 - b_2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_2 b_1 b_2 b_3}{a_2 - b_2} \cdot \left[\frac{c_3}{c_3 - b_3} + \frac{c_1}{c_1 - b_1} \right] + \frac{a_3 b_1 b_2 b_3}{a_3 - b_3} \cdot \left[\frac{c_2}{c_2 - b_2} + \frac{c_1}{c_1 - b_1} \right] + \\
& + \frac{a_1 c_1}{a_1 - c_1} \cdot \left[\frac{b_2 c_2 c_3}{b_2 - c_2} + \frac{b_3 c_2 c_3}{b_3 - c_3} + \frac{a_2 a_3 b_2}{a_2 - b_2} + \frac{a_2 a_3 b_3}{a_3 - b_3} \right] + \\
& + \frac{a_2 c_2}{a_2 - c_2} \cdot \left[\frac{b_1 c_1 c_3}{b_1 - c_1} + \frac{b_3 c_1 c_3}{b_3 - c_3} + \frac{a_1 a_3 b_3}{a_3 - b_3} + \frac{a_1 a_3 b_1}{a_1 - b_1} \right].
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Пример 2.2. Рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3) &= \frac{\sin \sqrt{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 - a_1 a_2 z_1 z_2 - a_1 a_3 z_1 z_3 - a_3 a_3 z_2 z_3}}{\sqrt{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 - a_1 a_2 z_1 z_2 - a_1 a_3 z_1 z_3 - a_3 a_3 z_2 z_3}} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 - a_1 a_2 z_1 z_2 - a_1 a_3 z_1 z_3 - a_3 a_3 z_2 z_3}{k^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_2(z_1, z_2, z_3) &= \frac{\sin \sqrt{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 - b_1 b_2 z_1 z_2 - b_1 b_3 z_1 z_3 - b_3 b_3 z_2 z_3}}{\sqrt{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 - b_1 b_2 z_1 z_2 - b_1 b_3 z_1 z_3 - b_3 b_3 z_2 z_3}} = \\ &= \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 - b_1 b_2 z_1 z_2 - b_1 b_3 z_1 z_3 - b_3 b_3 z_2 z_3}{s^2 \pi^2} \right) = 0, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) &= \frac{\sin \sqrt{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 - c_1 c_2 z_1 z_2 - c_1 c_3 z_1 z_3 - c_3 c_3 z_2 z_3}}{\sqrt{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 - c_1 c_2 z_1 z_2 - c_1 c_3 z_1 z_3 - c_3 c_3 z_2 z_3}} = \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 - c_1 c_2 z_1 z_2 - c_1 c_3 z_1 z_3 - c_3 c_3 z_2 z_3}{m^2 \pi^2} \right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{9.9}$$

Каждая из функций этой системы разлагается в бесконечное произведение функций из системы (9.6). По формуле (9.7) имеем

$$\begin{aligned}
J_{(0,0,0)} &= \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_1 b_2 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1}{\pi^6 k^2 s^2 m^2} + \\
&+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_3 c_1 c_2 c_3}{\pi^6 m^2 (a_3 m^2 - c_3 k^2)} \cdot \left[\frac{b_1}{b_1 m^2 - c_1 s^2} + \frac{b_2}{b_2 m^2 - c_2 s^2} \right] + \\
&+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_1 b_1 b_2 b_3}{\pi^6 s^2 (a_1 s^2 - b_1 k^2)} \cdot \left[\frac{c_3}{c_3 s^2 - b_3 m^2} + \frac{c_2}{c_2 s^2 - b_2 m^2} \right] + \\
&+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_2 b_1 b_2 b_3}{\pi^6 s^2 (a_2 s^2 - b_2 k^2)} \cdot \left[\frac{c_3}{c_3 s^2 - b_3 m^2} + \frac{c_1}{c_1 s^2 - b_1 m^2} \right] + \\
&+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_3 b_1 b_2 b_3}{\pi^6 s^2 (a_3 s^2 - b_3 k^2)} \cdot \left[\frac{c_2}{c_2 s^2 - b_2 m^2} + \frac{c_1}{c_1 s^2 - b_1 m^2} \right] + \\
&+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_1 c_1}{\pi^6 (a_1 m^2 - c_1 k^2)} \cdot \left[\frac{b_2 c_2 c_3}{m^2 (b_2 m^2 - c_2 s^2)} + \frac{b_3 c_2 c_3}{m^2 (b_3 m^2 - c_3 s^2)} \right] + \\
&+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_1 c_1}{\pi^6 (a_1 m^2 - c_1 k^2)} \cdot \left[\frac{a_2 a_3 b_2}{k^2 (a_2 s^2 - b_2 k^2)} + \frac{a_2 a_3 b_3}{k^2 (a_3 s^2 - b_3 k^2)} \right] + \\
&+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_2 c_2}{\pi^6 (a_2 m^2 - c_2 k^2)} \cdot \left[\frac{b_1 c_1 c_3}{m^2 (b_1 m^2 - c_1 s^2)} + \frac{b_3 c_1 c_3}{m^2 (b_3 m^2 - c_3 s^2)} \right] +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{a_2 c_2}{\pi^6 (a_2 m^2 - c_2 k^2)} \cdot \left[\frac{a_1 a_3 b_3}{k^2 (a_3 s^2 - b_3 k^2)} + \frac{a_1 a_3 b_1}{k^2 (a_1 s^2 - b_1 k^2)} \right].$$

Правая часть тождества состоит из сумм вида

$$\sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^6 s^2 (a s^2 - b k^2) (c s^2 - d m^2)}.$$

Используя равенство [23, гл. 5, п. 5.1.25, № 4] (при условии $a > 0$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \operatorname{cth}(\pi a)}{2a},$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^6 s^2 (a s^2 - b k^2) (c s^2 - d m^2)} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^6 b d s^2} \cdot \left[\frac{-1}{2(-a/b)s^2} + \frac{\pi \operatorname{cth}(\pi \sqrt{-a/b}s)}{2\sqrt{-a/b}s} \right] \\ &\cdot \left[\frac{-1}{2(-c/d)s^2} + \frac{\pi \operatorname{cth}(\pi \sqrt{-c/d}s)}{2\sqrt{-c/d}s} \right] = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^6 a c s^6} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(\pi \sqrt{-c/d}s)}{4\pi^5 \sqrt{-c d} a s^5} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(\pi \sqrt{-a/b}s)}{4\pi^5 \sqrt{-a b} c s^5} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(\pi \sqrt{-a/b}s) \cdot \operatorname{cth}(\pi \sqrt{-c/d}s)}{4\pi^4 a \sqrt{a b c d} s^4}. \end{aligned}$$

Пусть ${}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x)$ — базисный гипергеометрический ряд (см., например, [23, с. 793]).

Воспользуемся известной формулой [23, гл. 5, п. 5.2.18, № 13]

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^{2ts} - 1} &= \frac{1}{x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^s}{e^{2ts} - 1} = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{e^{4t} - 1} \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x) = \frac{1}{e^{4t} - 1} {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, x). \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(ts)}{s^5} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^5} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^5 (e^{2ts} - 1)} = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^5} + 2 \frac{1}{e^{4t} - 1} \int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{x} dx \int_0^x \frac{1}{w} dw \int_0^w \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, легко показать, что

$$\int_0^1 \frac{1}{y} dy \int_0^y \frac{1}{x} dx \int_0^x \frac{1}{w} dw \int_0^w \frac{1}{v} dv \int_0^v {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, u) du = \frac{1}{4} \int_0^1 \ln^4 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, y) dy.$$

Поэтому

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\text{cth}(ts)}{s^5} = \zeta(5) + \frac{1}{2(e^{4t} - 1)} \int_0^1 \ln^4 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2t}, e^{2t}; e^{4t}, y) dy.$$

Упростим выражение

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\text{cth}(as) \cdot \text{cth}(bs)}{s^4} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^4} \cdot \frac{1 + e^{-2as}}{1 - e^{-2as}} \cdot \frac{1 + e^{-2bs}}{1 - e^{-2bs}} = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^4} \cdot \left[1 + \frac{2}{e^{2as} - 1} + \frac{2}{e^{2bs} - 1} + \frac{4}{(e^{2as} - 1)(e^{2bs} - 1)} \right] \end{aligned} \quad (9.10)$$

Теперь рассмотрим выражение

$$\frac{4}{(e^{2as} - 1)(e^{2bs} - 1)}$$

при условии $\frac{a}{b} = 2$ получаем

$$\frac{4}{(e^{2as} - 1)(e^{2bs} - 1)} = \frac{4}{(e^{2bs} - 1)^2(e^{2bs} + 1)} = \frac{1}{2(e^{2bs} - 1)^2} - \frac{1}{4(e^{2bs} - 1)} + \frac{1}{4(e^{2bs} + 1)}.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{1}{e^{2bs} - 1} \right] = -\frac{2se^{2bs}}{(e^{2bs} - 1)^2} = -\frac{2s}{(e^{2bs} - 1)} - \frac{2s}{(e^{2bs} - 1)^2}$$

Выразим

$$\frac{1}{(e^{2bs} - 1)^2} = -\frac{1}{e^{2bs} - 1} - \frac{1}{2s} \cdot \frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{1}{e^{2bs} - 1} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s^5} \cdot \frac{1}{e^{2bs} - 1} \right] = \frac{1}{s^4(e^{2bs} - 1)^2} + \frac{1}{s^4(e^{2bs} - 1)}.$$

из выше изложенного сумма (9.10) равна

$$\frac{1}{8} \int_0^1 \ln^4 y \cdot \frac{\partial}{\partial b} [{}_2\Phi_1(e^{2b}, e^{2b}; e^{4b}, y)] dy$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\sum_{k,s,m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^6 s^2 (as^2 - bk^2)(cs^2 - dm^2)} = \frac{1}{3780ac} + \\ &+ \frac{1}{4\pi^5 \sqrt{-cda}} \cdot \left(\zeta(5) + \frac{1}{2(e^{4\pi\sqrt{-c/d}} - 1)} \int_0^1 \ln^4 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}}, e^{2\pi\sqrt{-c/d}}; e^{4\pi\sqrt{-c/d}}, y) dy \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi^5 \sqrt{-abc}} \cdot \left(\zeta(5) + \frac{1}{2(e^{4\pi\sqrt{-a/b}} - 1)} \int_0^1 \ln^4 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-a/b}}, e^{2\pi\sqrt{-a/b}}; e^{4\pi\sqrt{-a/b}}, y) dy \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{360\sqrt{abcd}} - \\
& - \frac{1}{4\pi^4\sqrt{abcd}} \cdot \frac{1}{(e^{4\pi\sqrt{-a/b}} - 1)} \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-a/b}}, e^{2\pi\sqrt{-a/b}}; e^{4\pi\sqrt{-a/b}}, y) dy \\
& - \frac{1}{4\pi^4\sqrt{abcd}} \cdot \frac{1}{(e^{4\pi\sqrt{-c/d}} - 1)} \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}}, e^{2\pi\sqrt{-c/d}}; e^{4\pi\sqrt{-c/d}}, y) dy + \\
& \text{при условии } \sqrt{\frac{ad}{bc}} = 2 \\
& + \frac{3}{32\pi^4\sqrt{abcd}} \cdot \frac{1}{(e^{4\pi\sqrt{-c/d}} - 1)} \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}}, e^{2\pi\sqrt{-c/d}}; e^{4\pi\sqrt{-c/d}}, y) dy - \\
& - \frac{1}{8\pi^4\sqrt{abcd}} \cdot \int_0^1 \ln^4 y \cdot \frac{\partial}{\partial \pi\sqrt{-c/d}} \left[\frac{1}{e^{4\pi\sqrt{-c/d}} - 1} {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}}, e^{2\pi\sqrt{-c/d}}; e^{4\pi\sqrt{-c/d}}, y) \right] dy - \\
& - \frac{1}{32\pi^4\sqrt{abcd}} - \\
& - \frac{1}{64\pi^4\sqrt{abcd}} \cdot \int_0^1 \ln^3 y \cdot {}_2\Phi_1(e^{2\pi\sqrt{-c/d}}, -1; -e^{2\pi\sqrt{-c/d}}, y) dy
\end{aligned}$$

Таким образом получаем, что $\sigma_{(1,1,1)}$ выражается через значения известных сумм.

Заключение

Основными результатами диссертационной работы являются следующие утверждения:

Найдены формулы для вычисления вычетных интегралов для систем неалгебраических уравнений простейшего вида, треугольного вида и систем специального вида.

Установлена связь между вычетными интегралами и степенными суммами корней (в отрицательной степени) для рассмотренных систем уравнений.

На основе разработанной теории проведены вычисления сумм некоторых типов кратных числовых рядов.

Цели диссертационной работы достигнуты.

Список литературы

- [1] Айзенберг Л.А. О формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений /Л.А. Айзенберг // Докл. АН СССР. 1977. — т. 234. — № 3. — С. 505–508.
- [2] Айзенберг Л.А. Определение всех стационарных решений уравнений химической кинетики с помощью модифицированного метода исключения. / Л.А. Айзенберг, В.И. Быков, А.М. Кытманов // 1. Алгоритм, Физика горения и взрыва. 1983. — № 1. — С. 60–66.
- [3] Айзенберг Л.А. Определение всех стационарных решений уравнений химической кинетики с помощью модифицированного метода исключения / Л.А. Айзенберг, В.И. Быков, А.М. Кытманов, Г.С. Яблонский // 2. Применения, Физика горения и взрыва. 1983. — № 2. — С. 66–73.
- [4] Айзенберг Л.А. Определение всех стационарных состояний уравнений химической кинетики на основе многомерного логарифмического вычета /Л.А. Айзенберг, В.И. Быков, А.М. Кытманов, Г.С. Яблонский // Докл. АН СССР. 1981. — т. 257.— № 4. — С. 903–907.
- [5] Айзенберг Л.А. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе / Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков. — Новосибирск: Наука, 1979.
- [6] Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений /И.В. Аржанцев. — М.: МЦНМО, 2003.
- [7] Быков В.И. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов / В.И. Быков, А.М. Кытманов, М.З. Лазман. — Н.: Наука, 1991.

- [8] Быков В.И. Результат системы уравнений квазистационарности для одномаршрутного n -стадийного механизма / В.И. Быков, А.М. Кытманов, М.З. Лазман, Г.С. Яблонский // Хим. физика. 1987. — № 11. — С. 1549–1553.
- [9] Быков В.И. Степенные суммы нелинейных систем уравнений / В.И. Быков, А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец // Докл. РАН. 2007.— т. 416. — № 1.— С. 1–4.
- [10] Быков В.И. Компьютерная алгебра многочленов. Модифицированный метод исключения / В.И. Быков, А.М. Кытманов, Т.А. Осетрова // Докл. РАН. 1996. — т. 350. — № 4.— С. 443–446.
- [11] Быков В.И. Нелинейные модели химической кинетики / В.И. Быков, С.Б. Цыбенова. — М.: КРАСАНД, 2011. — 540 с.
- [12] Ван дер Варден Б.Л. Современная алгебра: тт.1–2 / Б.Л. Ван дер Варден. — М-Л: ОНТИ НКТП, 1937.
- [13] Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. —М.: Физматгиз, 1963.
- [14] Качаева Т. И. О нахождении сумм некоторых кратных рядов / Т.И. Качаева // Вестник Красноярского госуниверситета. 2004. — № 1. — С. 105–109.
- [15] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1981.
- [16] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев.— М.: Наука, 1989.— 736 с.
- [17] Курош А.Г. Курс высшей алгебры /А.Г. Курош. —М.: Наука, 1968. — 431 с.
- [18] Кытманов А.А. Алгоритм вычисления степенных сумм корней для класса систем нелинейных уравнений / А.А. Кытманов // Программирование. 2010. — № 2. — С. 55–63.
- [19] Кытманов А.М. Нахождение коэффициентов кинетического полинома с помощью многомерных вычетов / А.М. Кытманов // Мат. Весник. 1989. — т. 41. — № 3. — С. 161–167.

- [20] Кытманов А.М. О числе вещественных корней систем уравнений / А.М. Кытманов // Известия вузов. Математика. 1991. — № 6. — С. 20–24.
- [21] Кытманов А.М. Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций / А.М. Кытманов, З. Е. Потапова // Известия вузов. Математика. 2005. — № 8. — С. 39–48.
- [22] Лелон П. Целые функции многих комплексных переменных / П. Лелон, Л. Груман. — М.: Мир, 1989.
- [23] Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука, 1981.
- [24] Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных / Л.И. Ронкин. — М.: Наука, 1971.
- [25] Садыков Т.М. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных / Т.М. Садыков, А.К. Цих — М.: Наука, 2014.
- [26] Тарханов Н.Н. Метод параметрикса в теории эллиптических комплексов / Н.Н Тарханов. — Новосибирск: Наука, 1989.
- [27] Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — М.: Наука, 1980.
- [28] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. — М.: Наука, 1970.
- [29] Цих А.К. Теорема Безу в пространстве теорий функций. О решении систем алгебраических уравнений / А.К. Цих // Сб. трудов «Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа». — Институт физики СО АН СССР, Красноярск. — 1985. — С. 185-196.
- [30] Цих А.К. Многомерные вычеты и их приложения / А.К. Цих. — Н.: Наука, 1992.
- [31] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного. Ч. 1 / Б.В. Шабат. — СПб.: Лань, 2004.
- [32] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. Ч. 2. / Б.В. Шабат. — СПб.: Лань, 2004.

- [33] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии: в 2 т. / И.Р. Шафаревич — М.: Наука, 1988.
- [34] Cornalba M. A counterexample to the «Transcendental Bezout Problem» / M. Cornalba, B. Shiffman // Ann. of Math. — 1972. — V. 96. — P. 402–406.
- [35] Elkadi M. Residue calculus and applications/ M. Elkadi, A. Yger, // Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 2007. — V. 43.— № 1. — P. 55–73.
- [36] Griffiths P. Principles of algebraic geometry. Pure and Applied Mathematics / P. Griffiths, J. Harris // John Wiley Sons, New York. — 1978.
- [37] Kytmanov A.M. On a system of algebraic equations encountered in chemical kinetics / A.M. Kytmanov // Selecta Math. Sovietica. — 1989. — V. 8. — № 1. — P.1–11.
- [38] Kytmanov A.M. Elimination Methods of Unknowns from Nonlinear Systems / A.M. Kytmanov // Contemporary Math. — 2008. — V. 465. — P. 257–267.
- [39] Lazman M.Z. Integral form of representation of chemical-kinetics equations / M.Z. Lazman, A.M. Kytmanov , V.I. Bykov, G.S. Yablonsky // Ukrainskii khimicheskii zhurnal. — 1992. — V. 58. — № 12. — P. 1060–1065.
- [40] Martinelli E. Contributi alla teoria dei residui per le funzione di due variabiki complesse / E. Martinelli // Ann. mat. pura ed. appl. — 1955. — V. 39. — № 4. — P. 335–343.
- [41] Passare M. Residue integrals and their Melin transforms / M. Passare, A. Tsikh // Can. J. Math. — 1995. — V. 47. — № 5. — P. 1037–1050.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК

- [42] Мышкина Е.К. Нахождение степенных сумм корней некоторых систем неалгебраических уравнений в $\mathbb{C}^n$ / А.М. Кытманов, Е.К. Мышкина // Известия вузов. Серия: Математика. — 2013. — № 12. — С. 36–50.
- [43] Мышкина Е.К. О степенных суммах корней систем целых функций конечного порядка роста / А.М. Кытманов, Е.К. Мышкина // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2014. — Т. 14. — № 3. — С. 62–82.

- [44] Myshkina E.K. On One Condition for the Decomposition of an Entire Function into an Infinite Product /E.K. Myshkina // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2014. — Т. 7. — № 1. — P. 91-94.
- [45] Myshkina E.K. Some Examples of Finding the Sums of Multiple Series /E.K. Myshkina // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2014. — Т. 7. — № 4. — P. 515-529.
- [46] Myshkina E.K. Finding residue integrals for systems of non-algebraic equations in $\mathbb{C}^n$ /A.A. Kytmanov, A.M. Kytmanov, E.K. Myshkina // Journal of Symbolic Computations. — 2015. — V. 66. — P. 98-110.

Материалы конференций

- [47] Мышкина Е.К. Нахождение некоторых многомерных вычетных интегралов / Е.К. Мышкина // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. — Новосибирск: НГУ. — 2013. — С. 28.
- [48] Мышкина Е.К. Нахождение степенных сумм корней систем / Е.К. Мышкина // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. — Новосибирск: НГУ. — 2014. — С. 30.
- [49] Мышкина Е.К. О вычислении вычетных интегралов, связанных с системой целых функций / Е.К. Мышкина // Сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. Красноярск, 15–25 апреля 2013. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2013, № заказа 2394/отв. ред. О.А.Краев.
- [50] Мышкина Е.К. О вычислении вычетных интегралов, связанных с системой неалгебраических уравнений / Е.К. Мышкина // Сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15–25 апреля 2014. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2014, № заказа 1644/отв. ред. О. А. Краев.

- [51] Мышкина Е.К. О степенных суммах корней некоторых видов систем нелинейных уравнений / Е.К. Мышкина // Материалы тринадцатой молодежной школы-конференции «Лобачевские чтения-2014». — Казань: КФУ. — 2014. — С. 129-130.

Тезисы конференций

- [52] Мышкина Е.К. Вычисления степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений определенного вида / Е.К. Мышкина // Тезисы докладов Четвертого российско – армянского совещания по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. — Красноярск: СФУ. — 2012. — С. 45–47.
- [53] Мышкина Е.К. О нахождении степенных сумм нулей некоторых систем функций конечного порядка роста / Е.К. Мышкина // Тезисы докладов летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России — Ярославль: ЯГПУ. — 2013. — С. 60–61.
- [54] Мышкина Е.К. О некоторых достаточных условиях разложения целых функций конечного порядка роста в $\mathbb{C}^n$ в бесконечные произведения / Е.К. Мышкина // Сборник тезисов Республиканской конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа», посвященной 100-летию со дня рождения известного ученого профессора Льва Израилевича Волковыского. — Узбекистан. — 2013. — С. 90–92.
- [55] Мышкина Е.К. Нахождение степенных сумм корней систем неалгебраических уравнений с помощью вычетных интегралов / Е.К. Мышкина // Тезисы докладов Пятого российско – армянского совещания по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. — Армения: Ереван. — 2014. — С. 42–44.