ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Лукьянчук Александра Николаевна

ВРЕМЕННАЯ ИНТРАНЗИТИВНАЯ МУЛЬТИ-АГЕНТНАЯ ЛОГИКА; АЛГОРИТМЫ РАЗРЕШИМОСТИ, ПРАВИЛА ВЫВОДА

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Рыбаков Владимир Владимирович

Красноярск – 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы. С начала 2000-х годов перспективным и быстро развивающимся стало направление модальных и много-модальных пропозициональных логик, описывающих рассуждения, доказательства и процессы вычислений. Такие логики позволяют перейти от языка, выражающего простые факты и утверждения, к более богатому и выразительному. Они имеют дело с высказываниями, содержащими в себе такие модальности, как *возможно*, *необходимо*, *до тех пор, пока* ... и т.д., которые нельзя выразить с помощью языка классических пропозициональных логик. Более широкая выразительность достигается посредством добавления к классической пропозициональной системе одного или нескольких модальных операторов (обычно $\Box$ или $\Diamond$).

Обычно модальные операторы читаются как «необходимо, что...», «возможно, что...», однако, существует великое множество различных интерпретаций. В случае временных логик, модальное выражение $\Box p$ может быть истолковано как «всегда в будущем верно p», а $\Diamond p$ - «существует момент в будущем, когда верно p». Такой язык эффективен при описании процессов во времени. Причем любую временную логику можно расширить до много-модальной посредством добавления операторов, представляющих будущее и прошлое [20]. Такие логики нашли широкое применение при изучении искусственного интеллекта (AI) и в компьютерных науках (CS), для проверки корректности вычислительных программ [31, 32, 34, 35, 22, 15].

Еще одним примером много-модальных логик являются логики Знания [18, 17, 25] с модальностями, представляющими знания агентов. Они применимы для формализации утверждений об агентах, обладающих некоторой неполной информацией. Такие эпистемические модели имеют свой предел выразимости: с их помощью трудно описать процесс изменения информации, доступной агенту. Добавление временной модальности в таком случае расширяет описательные возможности языка. Наиболее естественным является внедрение логики знания в рамки временной логики. Таким образом, получим много-модальную систему, сочетающую временные операторы и операторы знания. Хорошо известно, что такие системы образуют богатый, выразительный и интуитивно понятный язык [18], [54], [26].

Модели, порожденные сочетанием операторов, представляющих время и знание агентов эффективно зарекомендовали себя в описании взаимодействия между различными агентами в потоке времени [18], [20], [26], [13], [12], [16]. Они получены добавлением к классической пропозициональной системе двух видов модальностей: для моделирования потока времени и для описания знания агентов. Полученный язык позволяет описывать ситуации, в которых агенты, обладающие определенными знаниями, оперируют ими в процессах рассуждений и вычислений, использующих пошаговые стратегии, имитирующие время. Изучение подобных систем активно развивается с середины 90-х годов. Например, Р. ван дер Мэйден и Н.В. Шилов [55] изучали линейную модальную логику Знания и Времени с модальными операторами *until* и *common knowledge* и показали (Теорема 1 [55]), что эта логика не разрешима. В серии работ В.В. Рыбакова и Э. Калардо [11], [13] изучалась линейная много-модальная логика Знания и Времени LTK с операторами знания агентов K_i, оператором *common knowledge* $\Box_{\sim}$ и оператором времени *true from now on* $\Box_T$. Было доказано, что такая логика разрешима относительно доказуемости формул и допустимости правил вывода. В статье В.В. Рыбакова и С.В. Бабёнышева [46] рассматривается много-модальная логика с оператором *knowledge by interaction with agents* $\Diamond_{\mathfrak{R}}$. В книге Р. Фагина и др. [18] (Глава 4.3, Knowledge and Multi-Agent Systems: Incorporating time) предложено сочетание логики LTL (*Linear Time Logic*) и оператора *knowledge base* K_{KB}. Полная аксиоматизация целого ряда различных логик с условиями на знание и время (с операторами *next*, *until*, и операторами знания агентов) представлена в работе Й. Халперна [25]. В [33] рассмотрено вычислительное дерево логики знания (*computation tree logic of knowledge (CTLK)*), применяемое для проверки эпистемических свойств мульти-агентных систем.

С развитием компьютерных наук возрос интерес к изучению допустимых правил вывода для неклассических логик. Изучение искусственного интеллекта нуждается в языке, приспособленном для описания различных динамических систем, и язык много-модальных логик успешно справляется с этим. Изначально, факты и утверждения описываются с помощью формул в этом языке, которые не способны выразить изменяющиеся условия и предпосылки. На помощь приходит применение правил вывода или секвентов, которые выражают логическое следование от условий (посылок) к заключениям, представляющим собой выводы или факты, которые можно получить из имеющихся предпосылок. Тем самым, правила вывода предоставляют нам более тонкий и выразительный аппарат для моделирования процессов мышления и вычислений.

Правило вывода - это схема, регламентирующая допустимые способы перехода от некоторой совокупности формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, называемых посылками, к некоторой определенной формуле β, называемой заключением. Непосредственным изучением правил вывода впервые занялись Е. Лось (1955), А. Тарский (1956) и Р. Сушко (1958). Правило вывода называется *истинным* в логике λ, если из того, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \lambda$ следует $\beta \in \lambda$. Правило *выводимо (доказуемо)* в λ, если заключение β выводится из посылок $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с помощью аксиом и постулированных правил логики λ. Понятие *допустимого* правила вывода было впервые введено П. Лоренценем [30] в 1955 г. Для произвольной логики допустимыми являются те правила, которые не изменяют множество доказуемых теорем данной логики (т.е. правила, относительно которых логика замкнута). Формально, правило считается допустимым в λ, если при любой подстановке ε, из $\alpha_1^\varepsilon, \ldots, \alpha_n^\varepsilon \in \lambda$ следует, что $\beta^\varepsilon \in \lambda$. Понятно, что любое доказуемое правило является допустимым в заданной логике. Таким образом, множество всех допустимых в логике λ правил образует наибольший класс правил вывода, которыми мы можем расширить аксиоматическую систему λ, не изменяя множества доказуемых теорем.

Начало истории изучения допустимых правил может быть датировано 1975 г. с появления проблемы Х. Фридмана о существовании алгоритмического критерия допустимости правил в интуиционистской логике Int [19]. В классической логике вопрос допустимости решался тривиально - допустимы только доказуемые правила. Однако, в логиках первого порядка, модальных и суперинтуиционистских логиках существуют допустимые, но не доказуемые правила вывода. В 1960 г. П. Харроп в работе [27] показал, что в логике Int

допустимо, но не доказуемо $\neg x \to (y \vee z)/(\neg x \to y) \vee (\neg x \to z)$. Г. Е. Минц в [2] доказал, что если правило r допустимо в Int и не содержит связок $\to$ или $\vee$, то r выводимо в Int, и показал, что правило $((x \to y) \to (x \vee y))/(((x \to y) \to x) \vee ((x \to y) \to z))$ допустимо, но не доказуемо в Int. В модальных логиках $S4$, $S4.1$, Grz допустимо, но не доказуемо правило Леммона-Скотта $\Box(\Box(\Box\Diamond\Box p \to \Box p) \to (\Box p \vee \Box\neg\Box p))/\Box\Diamond\Box p \vee \Box\neg\Box p$, [28, 29, 43]. Таким образом, возникли вопросы алгоритмической разрешимости задачи распознавания допустимых правил вывода.

Положительное решение проблемы Фридмана о существовании алгоритма, распознающего допустимость правил вывода интуиционистской логики Int, было получено В.В. Рыбаковым в 1984 г. [36]. При развитии теории допустимых правил вывода для неклассических логик, В.В. Рыбаков положительно решил проблему допустимости правил вывода в широком классе модальных логик, в частности для $K4$, $S4$, Grz, GL и многих других [8] - [6], [38] - [42].

В работе [36] В.В. Рыбаковым был использован специальный метод для разрешения проблемы допустимости правил вывода, который нашел свое применение во многих последующих исследованиях. Суть его заключается в том, что для всякого правила вывода существует конечное, с точностью до изоморфизма, множество конечных моделей Крипке специального вида, на элементах которых можно проверять истинность правила, для выяснения его допустимости. Несмотря на успехи в решении проблем допустимости правил вывода в различных логиках, данный метод имеет свои ограничения: он применим только для финитно-аппроксимируемых логик, поскольку только в этом случае можно эффективно описать n-характеристическую модель логики. Одним из условий существования алгоритмов разрешимости допустимых правил вывода логики является ее обычная разрешимость относительно доказуемости формул [43]. Напомним, что логика разрешима, если существует процедура, позволяющая по произвольной формуле определить, принадлежит ли она логике. Во многих случаях доказательство разрешимости логики сводится к доказательству того, что она обладает *свойством конечных моделей* (так называемым *свойством финитной аппроксимируемости*), т.е. что она полна относительно некоторого класса конечных фреймов Крипке (Теорема Харропа).

Совместно со своими учениками В.В. Рыбаков исследовал вопрос разрешимости относительно доказуемости формул и допустимости правил вывода многих много-модальных логик, в том числе и логик, использующих операторы знания и времени [48], [23], [47]. В работе Э. Калардо и В.В. Рыбакова [11] было показано, что много-модальная логика LTK с транзитивным и рефлексивным отношением времени является разрешимой относительно доказуемости формул. А в [12] доказано, что данная логика является разрешимой относительно допустимости правил вывода. А.В. Кошелева в своей работе [1] изучила проблемы разрешимости много-модальных $S5_t$-логик. В [46] С.В. Бабёнышев и В.В. Рыбаков доказали, что временная транзитивная логика $S4_T$ с добавлением операторов знания агентов разрешима.

Несмотря на активные исследования в сфере допустимых правил вывода, большая часть результатов получена для транзитивных логик. При этом особый интерес представляют нетранзитивные логики, так как они более востребованы в computer science. Выяснилось, что для нетранзитивных логик не удается напрямую применять основные результаты и техники, используемые при исследовании допустимых правил вывода логик с транзитивными отношениями достижимости. Как было отмечено, при исследовании допустимых правил вывода центральную роль играют n-характеристические модели Крипке. Однако, построение таких моделей является достаточно ясным только для расширений модальной логики $K4$ и интуиционистской логики. В нетранзитивном случае модели описаны только для очень малого списка логик. В работе [14] была представлена n-характеристическая модель для минимальной логики K. В [24] описана схема построения n-характеристической модели временной логики с нетранзитивным оператором времени *завтра*, и найден критерий допустимости правил вывода рассматриваемой логики. Также проблема допустимости правил вывода была решена для нетранзитивной временной логики конечных интервалов [45] и логики LTL_{Past}, которая сочетает в себе операторы знания агентов и нетранзитивный временной оператор *since* [53].

Результаты, представленные в диссертации, продолжают серию работ В.В. Рыбакова по исследованию свойств мульти-агентной логики Знания и Времени LTK. В работах [11] - [13] исследована логика LTK с транзитивным и рефлексивным отношением времени. Было доказано, что данная логика обладает свойством финитной аппроксимируемости и является разрешимой относительно доказуемости формул и допустимости правил вывода. Также в [11] представлена конечная аксиоматизация LTK. Однако, если предположить, что отношение времени не является транзитивным, то полученные результаты и технику исследования нельзя перенести на данный случай. Методы, используемые в [11] - [13] оказываются явным образом не применимы при интранзитивном отношении достижимости по времени.

В диссертационной работе представлена мульти-агентная логика Знания и Времени LTK_r с интранзитивным и рефлексивным отношением времени. Язык LTK_r содержит временной оператор *сегодня и завтра* $\Box_T$, оператор *всеобщего знания (common knowledge)* $\Box_\sim$ и несколько операторов знания агентов $\Box_i$. Такая логика применима при описании моделей, в которых время рассматривается как линейная дискретная последовательность состояний, содержащих в себе набор информационных узлов. Интранзитивность времени в данном контексте понимается следующим образом: на информационном узле актуальна только та информация, которая доступна либо в данный момент, либо будет доступна в следующий. Такие модели применимы в программном обеспечении, в области Интернет и в алгоритмах поиска.

Цель работы.

1. Выяснить, является ли линейная много-модальная логика Знания и Времени LTK_r с интранзитивным и рефлексивным отношением времени финитно-аппроксимируемой и разрешимой.

2. Исследовать разрешимость проблемы допустимости правил вывода логики LTK_r. Предоставить алгоритм, который по заданному правилу r определяет, допустимо ли правило вывода r в LTK_r.

Методика исследования.

Используются языки модальных и много-модальных логик, в том числе язык временных логик. В качестве основного инструмента исследования применяется семантика Крипке, расширенная на много-модальный и временной случаи. Также применяются общие методы теоретико-модельной семантики для пропозициональных нестандартных логик. Например, метод фильтрации, метод редуцирования правил вывода, семантический критерий допустимости правил вывода с помощью n-характеристических моделей.

Научная новизна. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Результаты совместных работ получены в нераздельном соавторстве.

Основные результаты. В диссертационной работе семантически определена линейная интранзитивная много-модальная логика LTK_r, сочетающая модальные операторы знания и времени, получены следующие основные результаты:

1. Доказана финитная аппроксимируемость и, как следствие, разрешимость линейной много-модальной логики Знания и Времени LTK_r с интранзитивным и рефлексивным отношением времени.

2. Получены необходимое и достаточное условия допустимости правил вывода в логике LTK_r.

Первый из основных результатов получен автором самостоятельно, второй результат получен совместно с В.В. Рыбаковым при равном участии обеих сторон.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, представленные в диссертации, носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейших исследованиях свойств много-модальных интранзитивных логик, а также в таких областях, как теория моделей, теория графов и computer science.

Апробация работ. Результаты диссертации докладывались на

- VIII всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 155-летию со дня рождения К.Э. Циолковского (Красноярск, 2012);

- VII всесибирском конгрессе женщин-математиков (Красноярск, 2012);

- международной конференции серии "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2012);

- международной конференции, посвященной памяти В.П. Шункова "Алгебра и Логика: Теория и Приложения"(Красноярск, 2013);

- международной конференции серии "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2013);

- международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения"(Казань, 2014);

- международной конференции серии "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [56] - [64], из них 2 работы [56], [57] в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, и списка литературы из 64 наименований, в том числе 9 работ автора по теме диссертации. Общее число страниц диссертационной работы - 73. Все утверждения (теоремы, леммы, следствия, определения и используемые формулы) пронумерованы двумя числами: первое является номером главы, второе - порядковым номером утверждения в рамках главы.

Краткое содержание работы. Во введении обосновывается актуальность выбранной в диссертационной работе темы. Дается краткий обзор истории много-модальных логик и допустимых правил вывода. Сформулирован предмет, цель и методы проведения исследования, указаны основные его результаты. Приведен список конференций, на которых была проведена апробация работ по изучаемой теме, также дается обзор основных разделов диссертационной работы.

Первая глава посвящена необходимым предварительным сведениям.

В **§1** даются общие сведения из области модальных и много-модальных логик, приводятся основные факты семантики Крипке для модальных и много-модальных логик. Также приведены необходимые определения и утверждения о канонических моделях и методе фильтрации моделей Крипке.

В **§2** включены все необходимые определения и теоремы теории допустимых правил вывода.

Вторая глава посвящена семантическому описанию логики LTK_r, как множества формул, истинных на фреймах специального вида, называемых LTK_r-фреймами.

В **§3** дано определение LTK_r-фреймов и указаны наиболее важные их свойства. На основе этих свойств приводится одна из возможных интерпретаций моделей такого вида.

В **§4** рассмотрены фреймы, содержащие конечные замкнутые циклы сгустков. Изначально, определение LTK_r-фрейма не предусматривает наличие циклов в линейной цепи LTK_r-фрейма, однако, в Леммах 2.1 и 2.2 доказано, что фреймы, содержащие циклы сгустков конечной длины, являются p-морфными образами LTK_r-фреймов и адекватны логике LTK_r.

В **§5** вводится много-модальный язык $\mathcal{L}^{LTK}$ и стандартным образом определяется множество формул соответствующего языка. Логикой LTK_r называем множество всех формул в языке $\mathcal{L}^{LTK}$, истинных на LTK_r-фреймах. Также в §5 отмечено свойство перестановочности модальных операторов $\Box_T$ и $\Box_\sim$, а также $\Diamond_T$ и $\Diamond_\sim$ в логике LTK_r.

В **§6** приводится некоторая система аксиом AS_{LTK_r}. Доказывается, что фрейм n-канонической модели, построенной на основе данной системы, обладает основными свойствами LTK_r-фрейма. Сформулирована гипотеза о том, что AS_{LTK_r} является конечной аксиоматизацией логики LTK_r.

Глава 3 целиком посвящена вопросу разрешимости логики LTK_r относительно доказуемости формул. В Теореме 3.1 доказано, что LTK_r обладает свойством финитной аппроксимируемости. На основе этого строится алгоритм, с помощью которого можно для произвольной формулы в языке $\mathcal{L}^{LTK}$ за конечное количество шагов установить, принадлежит ли формула логике. Таким образом, имеет место первый из основных результатов диссертационной работы:

Теорема 3.2 *Логика LTK_r разрешима.*

В **главе 4** решается задача разрешимости логики LTK_r относительно допустимости правил вывода. Её решение основано на семантическом критерии допустимости правил вывода с помощью n-характеристических моделей, описанном В.В. Рыбаковым в [43].

В **§7** строится специальная модель $Ch_{LTK_r}(n)$ и доказывается, что она яляюеся n-характеристической для логики LTK_r.

Однако, в Лемме 4.2 установлено, что элементы данной модели не является формульными, что не позволяет напрямую применять метод из [43]. Чтобы обойти данную проблему, в **§8** строится специальная конечная LTK_r-модель, особое строение которой позволило сформулировать и доказать необходимое и достаточное условия недопустимости произвольного правила вывода в редуцированной нормальной форме в логике LTK_r. Таким образом, доказан второй основной результат диссертации:

Теорема 4.1 *Логика* LTK_r *разрешима относительно допустимости правил вывода.*

В заключении подводятся итоги проведённых исследований, отмечается их актуальность, научная новизна и практическая ценность, указываются возможные области применения и дальнейшее направление работы.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Владимиру Владимировичу Рыбакову, а также Виталию Валентиновичу Римацкому за постановку задачи, помощь в работе и неизменную поддержку в работе над диссертацией.

Глава 1

Основные определения и теоремы

1. Семантика Крипке

Основным инструментом диссертационного исследования является семантика возможных миров. Первоначально идею возможных миров использовал Лейбниц для толкования "необходимо истинного"как того, что имеет место во всех возможных мирах, а "случайно истинного"как того, что имеет место в некоторых из них. Впоследствии Р. Карнап (1946), исходя из идей Лейбница, строит первую содержательную семантику для модального языка. Начиная с конца 1950-х годов, в модальной логике получила широкое распространение реляционная семантика Крипке, в которой вводится отношение достижимости (relation of accesibility) между мирами.

Основной структурой семантики является фрейм Крипке, который представляет собой пару $\langle W, R\rangle$, где W – множество (непустое) возможных миров, а R – бинарное отношение на W между мирами. Отношение R называют отношением достижимости: запись wRz означает, что мир z достижим из мира w способом, зафиксированным в свойствах отношения R. Модель определяется как упорядоченная тройка $\langle W, R, V\rangle$, где V есть функция означивания, приписывающая значения переменным множества миров $V(p) \subseteq W$, где они истинны.

Модальный язык содержит:

1. счетное множество пропозициональных переменных $p_1, p_2, \ldots;$
2. классические логические связки $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание);
3. модальный оператор $\Box$ – оператор необходимости;
4. скобки.

Понятие формулы в модальном языке вводится индуктивно:

1. пропозициональные переменные являются формулами;
2. если A и B - формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ также являются формулами;
3. если A - формула, то $\Box A$ - формула;
4. других формул, кроме построенных по пп. 1, 2, 3, нет.

В модальной логике также рассматривается унарный оператор $\Diamond$, определяемый как: $\Diamond A = \neg\Box\neg A$. Для любой формулы A модального языка выражение $\Box A$ интерпретируется как «необходимо A», а выражение $\Diamond A$ - как «возможно A».

Отношение истинности $\models$ на модели $\langle W, R, V \rangle$ для модальных формул определяется следующим образом:

(1) $\forall a \in W(a \models_V p \Leftrightarrow a \in V(p));$

(2) $\forall a \in W(a \models_V \neg A \Leftrightarrow a \not\models_V A);$

(3) $\forall a \in W(a \models_V A \wedge B \Leftrightarrow (a \models_V A) \wedge (a \models_V B));$

(4) $\forall a \in W(a \models_V A \vee B \Leftrightarrow (a \models_V A) \vee (a \models_V B));$

(5) $\forall a \in W(a \models_V A \rightarrow B \Leftrightarrow (a \not\models_V A) \vee (a \models_V B));$

(6) $\forall a \in W(a \models_V \Box A \Leftrightarrow (\forall b \in W(aRb \Rightarrow b \models_V A)));$

(7) $\forall a \in W(a \models_V \Diamond A \Leftrightarrow (\exists b \in W(aRb \wedge b \models_V A))).$

В диссертационной работе используется семантика Крипке расширенная на много-модальный случай, где количество модальностей фиксировано, но потенциально не ограничено. Поэтому основные формальные определения и обозначения семантики Крипке будем давать именно для случая с множеством модальностей.

Пропозициональный k-модальный язык $\mathcal{L}$ содержит все элементы одномодального языка, однако, вместо одного модального оператора $\Box$ имеем k операторов $\Box_1, \ldots, \Box_k$. Понятие k-модальной формулы языка $\mathcal{L}$ также определяется индуктивно стандартным образом, и множество всех таких формул обозначим как $For(\mathcal{L})$.

k-модальная логика λ есть подмножество множества For, замкнутое относительно постулированных правил вывода (*modus ponens*, подстановки и т.д.).

По определению, *нормальной k-модальной логикой* называется расширение минимальной k-модальной логики K_k, аксиомами которой являются:

1) все пропозициональные тавтологии;

2) $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$, $i := 1, \ldots, k$.

Правилами вывода служат правила:

$$MP : \frac{\varphi, \varphi \to \phi}{\phi}; \quad Nec : \frac{\varphi}{\Box_i \varphi}.$$

Определение 1.1. *k-модальный фрейм Крипке – это кортеж $\mathcal{F} = \langle W_\mathcal{F}, R_1, \ldots, R_k \rangle$, где $W_\mathcal{F}$ – не пустое множество элементов, и каждое R_i – некоторое бинарное отношение на $W_\mathcal{F}$, т.е. $R_i \subseteq W_\mathcal{F}^2$.*

Далее под *фреймом* понимаем именно k-модальный фрейм Крипке.

Определение 1.2. *n-модальный фрейм $\mathcal{F} = \langle W_\mathcal{F}, R_1, \ldots, R_n \rangle$ называется открытым подфреймом m-модального фрейма $\mathcal{S} = \langle W_\mathcal{S}, S_1, \ldots, S_m \rangle$, если $n = m$, $W_\mathcal{F} \subseteq W_\mathcal{S}$, для любого отношения R_i выполняется $S_i \cap W_\mathcal{R}^2 = R_i$, а также $\forall a \in W_\mathcal{F}, \forall b \in W_\mathcal{S}(aR_ib \Rightarrow b \in W_\mathcal{F})$.*

Определение 1.3. *Фрейм $\mathcal{F} = \langle W_\mathcal{F}, R_1, \ldots, R_k \rangle$ называется связным по отношению R_i, если $\forall x, y, z \in W_\mathcal{F}$ $(xR_iy \wedge xR_iz \Longrightarrow yR_iz \vee zR_iy)$.*

Определение 1.4. *Дан k-модальный фрейм Крипке $\mathcal{F} = \langle W_\mathcal{F}, R_1, \ldots, R_k \rangle$; для любого R_i, R_i-сгусток – это подмножество C множества $W_\mathcal{F}$ такое, что $\forall w \forall z \in C(wR_iz \ \& \ zR_iw)$ и $\forall z \in W_\mathcal{F} \forall w \in C(((wR_iz \ \& \ zR_iw) \Rightarrow z \in C$.*

Другими словами, R_i-сгустком называется множество элементов, достижимых друг из друга по отношению R_i.

Говорим, что R_i-сгусток C *порожден элементом* w (обозначаем $C(w)$), если w принадлежит C.

Рассмотрим некоторое множество пропозициональных переменных P и некоторый k-модальный фрейм Крипке $\mathcal{F} = \langle W_{\mathcal{F}}, R_1, \ldots, R_k \rangle$.

Определение 1.5. *Означиванием переменных из множества P на фрейме $\mathcal{F}$ называется функция V, которая каждой переменной $p \in P$ ставит в соответствие множество $V(p) \subseteq W_{\mathcal{F}}$, т.е. $V : P \longmapsto 2^{W_{\mathcal{F}}}$.*

Иначе говоря, функция означивания V определяет, на каких элементах основного множества $W_{\mathcal{F}}$ фрейма $\mathcal{F}$ истинна та или иная пропозициональная переменная. Через $Dom(V) := P$ обозначаем множество переменных, для которых определено V.

Фрейм Крипке $\mathcal{F} = \langle W_{\mathcal{F}}, R_1, \ldots, R_k \rangle$ с введенным на нем означиванием V переменных из P называем *моделью Крипке* и обозначается $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$.

Отношение истинности $\models$ на $\mathcal{M} = \langle W, R_1, \ldots, R_k, V \rangle$ определяется стандартным образом:

(1) $\forall a \in W(a \models_V p \Leftrightarrow a \in V(p))$;

(2) $\forall a \in W(a \models_V \neg A \Leftrightarrow a \not\models_V A)$;

(3) $\forall a \in W(a \models_V A \wedge B \Leftrightarrow (a \models_V A) \wedge (a \models_V B))$;

(4) $\forall a \in W(a \models_V A \vee B \Leftrightarrow (a \models_V A) \vee (a \models_V B))$;

(5) $\forall a \in W(a \models_V A \to B \Leftrightarrow (a \not\models_V A) \vee (a \models_V B))$;

(6) $\forall a \in W(a \models_V \Box_i A \Leftrightarrow (\forall b \in W(aR_i b \Rightarrow b \models_V A)))$;

(7) $\forall a \in W(a \models_V \Diamond_i A \Leftrightarrow (\exists b \in W(aR_i b \wedge b \models_V A)))$.

Истинность формулы A на элементе a модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ обозначаем $(\mathcal{F}, a) \models_V A$. Истинность A на каждом элементе модели $\mathcal{M}$ обозначаем как $\mathcal{F} \models_V A$. Если A истинна на фрейме $\mathcal{F}$ при любом означивании V, обозначаем $\mathcal{F} \models A$. Множество всех элементов модели, на которых истинна A, обозначаем $V(A)$.

Определение 1.6. *Модель $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ называется открытой подмоделью модели $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, V_2 \rangle$, если:*

1) $\mathcal{F}_1$ является открытым подфреймом $\mathcal{F}_2$,

2) $Dom(V_1) = Dom(V_2)$ и $\forall p \in Dom(V_1)(V_1(p) = V_2(p) \cap W_{\mathcal{F}_1})$.

Справедлива следующая лемма о сохранении истинности формул на подмоделях:

Лемма 1.1 (гл. 2.5 [43]). *Если* $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ *открытая подмодель модели* $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, V_2 \rangle$, *тогда* $\forall v \in W_{\mathcal{F}_1}$ *выполнено* $(\mathcal{F}_1, v) \models_{V_1} A \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_2, v) \models_{V_2} A$.

Важными для диссертационного исследования понятиями являются понятия p-морфизма фреймов и p-морфизма моделей.

Определение 1.7. *Отображение* f *фрейма* $\mathcal{F} = \langle W_{\mathcal{F}}, R_1, \ldots, R_k \rangle$ *на фрейм* $\mathcal{S} = \langle W_{\mathcal{S}}, S_1, \ldots, S_k \rangle$ *называется p-морфизмом* $\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{S}$, *если:*

(i) $\forall a, b \in W_{\mathcal{F}}(aR_i b \Longrightarrow f(a) S_i f(b))$;

(ii) $\forall a, b \in W_{\mathcal{F}}(f(a) S_i f(b) \Longrightarrow \exists c \in W_{\mathcal{F}} : aR_i c$ *и* $f(c) = f(b))$.

Определение 1.8. *Отображение* f *называется p-морфизмом модели* $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ *на модель* $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, V_2 \rangle$, *если*

(i)f *является p-морфизмом фрейма* $\mathcal{F}_1$ *на фрейм* $\mathcal{F}_2$;

(ii)$Dom(V_1) = Dom(V_2)$;

(iii) $\forall p \in Dom(V_1), \forall w \in W_{\mathcal{F}_1}[(\mathcal{F}_1, w) \models_{V_1} p \Leftrightarrow (\mathcal{F}_2, f(w)) \models_{V_2} p]$.

При этом модель $\mathcal{M}_2$ *является p-морфным образом модели* $\mathcal{M}_1$

Справедлива лемма о сохранении истинности формул при p-морфизме моделей:

Лемма 1.2 (гл. 2.5 [43]). *Если* f *является p-морфизмом модели* $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$ *на модель* $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, V_2 \rangle$, *тогда для любой формулы* A, *зависящей от переменных из* $Dom(V_1)$, *выполняется*

$$\forall a \in W_{\mathcal{F}_1}((\mathcal{F}_1, a) \models_{V_1} A \Leftrightarrow (\mathcal{F}_2, f(a)) \models_{V_2} A).$$

Определение 1.9. *Модели* $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ *будем называть изоморфными, если существует биективный p-морфизм* $\mathcal{M}_1$ *на* $\mathcal{M}_2$.

Далее приведем необходимые определения, связанные с понятием логики и основными ее свойствами.

Определение 1.10. *Фрейм Крипке* $\mathcal{F}$ *называется адекватным логике* λ *или* λ-*фреймом, если для любой формулы* $A \in \lambda$ *выполняется* $\mathcal{F} \models A$.

Определение 1.11. *Логика λ называется финитно аппроксимируемой, если существует такое множество конечных λ-фреймов $\Im$, что для любой формулы $A \notin \lambda$, существует $\mathcal{F} \in \Im$: $\mathcal{F} \not\models_V A$.*

Другими словами, логика является финитно аппроксимируемой, если любая формула, не принадлежащая этой логике, опровергается на некоторой конечной модели. Стоит также выделить понятие эффективной финитной аппроксимируемости, которое накладывает ограничение на размер фрейма опровергающей модели:

Определение 1.12. *Логика λ называется эффективно финитно аппроксимируемой, если существует вычислимая функция f такая, что для любой формулы $A \notin \lambda$, существует конечная модель $\langle \mathcal{F}, V \rangle$: $\mathcal{F} \not\models_V A$ и $\mathcal{F} \models_V B$ для любой формулы $B \in \lambda$, причем $||W_{\mathcal{F}}|| \leq f(||A||)$.*

Одним из важнейших свойств логики является ее разрешимость. Ранее автором упоминалось значение данного свойства при изучении допустимых правил вывода. Формально:

Определение 1.13. *Если существует алгоритм, позволяющий распознать, принадлежит ли произвольная формула A логике или нет, то такую логику называем разрешимой.*

При исследовании правил вывода в диссертационной работе используется семантический критерий допустимости правил вывода с помощью n-характеристических моделей. В [43] приводится следующее определение n-характеристической модели:

Определение 1.14. *Модель Крипке $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, где $V : P_n \to 2^{W_{\mathcal{F}}}$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называется n-характеристической для логики λ, если для любой формулы $A(p_1, \ldots, p_n)$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$ выполняется $A \in \lambda \iff \mathcal{F} \models_V A$.*

Для элементов n-характеристической модели определим свойство формульности элемента:

Определение 1.15. *Элемент w модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ является формульным, если существует формула $\beta(w)$ такая, что*

$$\forall z \in \mathcal{F}((\mathcal{F}, z) \models_V \beta(w) \Leftrightarrow w = z).$$

Свойство формульности существует и для понятия означивания пропозициональных переменных. Означивание является формульным, если истинность переменной на элементе зависит от истинности на этом элементе некоторой формулы. Формально:

Определение 1.16. *Для модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, где $Dom(V) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, новое означивание V_1 пропозициональных переменных $q_1, \ldots, q_m$ на $\mathcal{F}$ является формульным, если для любой q_i выполняется $V_1(q_i) = V(\phi_i)$, для некоторой формулы $\phi_i = \phi_i(p_1, \ldots, p_n)$.*

Далее приведем необходимые определения и обозначения из теории n-канонических моделей. Метод n-канонических моделей применяется при доказательстве полноты аксиоматической системы рассматриваемой логики.

Определение 1.17. *Выводом формулы D в аксиоматической системе AS логики λ называется конечная последовательность формул $A_1, \ldots, A_n$ такая, что каждая A_i является либо аксиомой AS, либо получена из предыдущих формул A_j, $1 \leq j \leq i$, посредством постулированных в λ правил вывода, причем $A_n = D$.*

Определение 1.18. *Дана система аксиом AS логики λ в языке $\mathcal{L}$. Множество формул Δ в языке $\mathcal{L}$ называется:*

1. *AS-непротиворечивым $\Longleftrightarrow \Delta \nvdash_{AS} \bot$;*
2. *$\mathcal{L}$-полным $\Longleftrightarrow \forall A \in (For(\mathcal{L}) A \in \Delta$ или $\neg A \in \Delta)$;*
3. *AS-максимальным $\Longleftrightarrow \Delta$ является AS-непротиворечивым и $\mathcal{L}$-полным множеством.*

Определение 1.19. *Пусть λ - нормальная k-модальная логика в языке $\mathcal{L}$, содержащая модальные операторы $\Box_1, \ldots, \Box_k$. $n-$каноническая модель логики λ это модель $\mathcal{M}_n^c = \langle W_n^c, R_1^c, \ldots, R_k^c, V_n^c \rangle$, где:*

1. *W_n^c – это множество всех возможных λ-максимальных множеств, содержащих формулы, зависящие только от пропозициональных переменных $\{p_1, \ldots, p_n\}$;*

2. $\forall v, z \in W_n^c,\ vR_i^c z \Longleftrightarrow \{A | \Box_i A \in v\} \subseteq z, 1 \leq i \leq k;$

3. $V_n^c(p_i) = \{v \in W_n^c | p_i \in v\}, 1 \leq i \leq n.$

Фрейм n-канонической модели $\mathcal{M}_n^c$ будем обозначать как $\mathcal{F}_n^c$.

Лемма 1.3. *Дана нормальная k-модальная логика λ и n-каноническая модель этой логики $\mathcal{M}_n^c = \langle W_n^c, R_1^c, \ldots, R_k^c, V_n^c \rangle$. Тогда для любого элемента $v \in W_n^c$ и для любой формулы $A(p_1, \ldots, p_n)$ языка $\mathcal{M}$ выполняется*

$$\Box_i A \in v \Longleftrightarrow \forall z \in W_n^c (vR_i^c z \Longrightarrow A \in z).$$

Лемма 1.4. *Дана нормальная k-модальная логика λ и n-каноническая модель этой логики $\mathcal{M}_n^c = \langle \mathcal{F}_n^c, V_n^c \rangle$. Тогда для любого элемента $v \in W_n^c$ и любой формулы $A(p_1, \ldots, p_n) \in For(\mathcal{L})$ выполняется $(\mathcal{F}_n^c, v) \models_{V_n^c} A \Longleftrightarrow A \in v$.*

Приведем теперь основные определения и утверждения о *методе фильтрации* моделей Крипке. Пусть $\mathcal{M} = \langle W_{\mathcal{F}}, R_1, \ldots, R_k, V \rangle$ - некоторая модель Крипке. Пусть S – конечное множество формул, замкнутое относительно подформул, то есть для любой формулы из S все ее подформулы также принадлежат S.

Определим отношение эквивалентности $\equiv_S$ на $W_{\mathcal{F}}$ следующим образом:

$$a \equiv_S b \Leftrightarrow (\alpha \in S)((\mathcal{F}, a) \models_V \alpha \Leftrightarrow (\mathcal{F}, b) \models_V \alpha).$$

Пусть $W_{\mathcal{F}_{\equiv_S}} := \{[a]_{\equiv_S} | a \in W_{\mathcal{F}}\}$, а $Var(S)$ – множество всех пропозициональных переменных, входящих в формулы из S.

Определение 1.20. *Фильтрация модели $\mathcal{M}$ по конечному множеству S есть такая модель Крипке $\mathcal{M}_{\equiv_S} := \left\langle W_{\mathcal{F}_{\equiv_S}}, R_1', \ldots, R_k', V_S \right\rangle$, в которой*

1. $\forall p \in Var(S)(V_s(p) := \{[a]_{\equiv_S} | (\mathcal{F}, a) \models_V p\});$

2. $\forall a, b \in W_{\mathcal{F}_{\equiv_S}} (aR_i b \Rightarrow [a]_{\equiv_S} R_i' [b]_{\equiv_S}), i = 1, \ldots, k;$

3. $\forall a, b \in W_{\mathcal{F}_{\equiv_S}} ([a]_{\equiv_S} R_i' [b]_{\equiv_S} \Rightarrow (\Box_i \alpha \in S \wedge (\mathcal{F}, a) \models_V \Box_i \alpha \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\mathcal{F}, b) \models_V \alpha))$, *где* $i = 1, \ldots, k$.

Справедлива лемма о сохранении истинности формул при фильтрации:

Лемма 1.5 (Лемма о фильтрации). *Если* $\mathcal{M}_{\equiv_S} := \left\langle W_{\mathcal{F}_{\equiv_S}}, R_1', \dots, R_k', V_S \right\rangle$ – *фильтрация модели* $\mathcal{M}$ *по* S, *то* $\forall a \in W_{\mathcal{F}}$ *и* $\forall \alpha \in S$ *выполняется*

$$(\mathcal{F}, a) \models_V \alpha \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{\equiv_S}, [a]_{\equiv_S}) \models_{V_S} \alpha.$$

2. Допустимые правила вывода

Приведем необходимые определения и утверждения, связанные с допустимыми правилами вывода.

Определение 1.21. *Правилом вывода* r *называется выражение вида*

$$r := \frac{\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)}{\phi(x_1, \dots, x_m)},$$

где $\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$ *и* $\phi(x_1, \dots, x_m)$ *- формулы, построенные с использованием переменных* $x_1, \dots, x_m$. *Через* $Pr(r)$ *будем обозначать множество элементов посылки* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ *правила* r, *а через* $Con(r)$ *заключение* ϕ *правила* r.

Определение 1.22. *Правило* r *истинно на модели* $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ *(будем использовать обозначение* $\mathcal{F} \models_V r$*), если*

$$\forall a \in W_{\mathcal{F}}[(\mathcal{F}, a) \models_V \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \varphi_i \Rightarrow (\mathcal{F}, a) \models_V \phi].$$

Запись $\mathcal{F} \not\models_V r$ означает, что правило r *опровергается на* $\mathcal{F}$ *при означивании* V.

Определение 1.23. *Подстановка* Σ *- это замена каждой пропозициональной переменной* $x_i \in Var(r)$ *формулой* α_i. *Для формулы* A *обозначим* $\Sigma(A)$ *как результат применения подстановки* Σ *к* A.

Определение 1.24. *Правило вывода*

$$r := \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)/\phi(x_1, \dots, x_m)$$

называется допустимым в логике λ *тогда и только тогда, когда для любой подстановки* Σ, *если* $\Sigma(\varphi_i) \in \lambda$ *для каждого* i, *то* $\Sigma(\phi) \in \lambda$.

Лемма 1.6. *[например, [43]]*

Правило вывода r не допустимо в логике λ тогда и только тогда, когда для любой последовательности m-характеристических моделей, найдется номер n и n-характеристическая модель $\mathcal{M}$ из этой последовательности, на фрейме которой при некотором формульном означивании переменных опровергается r.

Будем говорить, что в языке k-модальной логики правило вывода r имеет *редуцированную нормальную форму*, если $r := \epsilon_r/x_1$, где

$$\epsilon_r := \bigvee_{1\leq j\leq s} \theta_j; \theta_j := (\bigwedge_{1\leq i\leq m} [x_i^{d(j,i,1)} \wedge \bigwedge_{1\leq l\leq k} (\Diamond_l x_i)^{d(j,i,l+1)}]),$$

$d(j,i,z) \in \{0,1\}$ и, для любой формулы α, $\alpha^0 := \alpha$, $\alpha^1 := \neg\alpha$. Здесь $Pr(r)$ – это множество дизъюнктов посылки $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ правила r, а $Con(r)$ – заключение x_1.

Определение 1.25. *Правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме является редуцированной нормальной формой правила r тогда и только тогда, когда для любого фрейма $\mathcal{F}$ выполняется $\mathcal{F} \models r \Leftrightarrow \mathcal{F} \models r_{nf}$.*

Глава 2

Логика LTK_r

3. LTK_r-фреймы

Начнем с определения семантических моделей для рассматриваемой логики LTK_r. Семантика логики LTK_r основывается на много-модальных фреймах Крипке $\mathcal{F} := \langle \bigcup_{i \in N} C_i, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_n \rangle$. Они представляют собой множество непустых сгустков элементов C_i, упорядоченных в цепь линейным, рефлексивным, интранзитивным отношением R_T (Рис.1). Отношения $R_\sim, R_1, \ldots, R_n$ определяются локально на каждом сгустке элементов C_i, т.е. истинность информации, доступной агенту на элементе $s \in C_i$, зависит только от истинности утверждений на C_i. Такая модель является адекватной интерпретацией работы компьютерной сети: $i \in N$ является номером временного состояния, C_i - множество веб-сайтов (компьютеров, и т.д.), доступных в момент i, и агент не может прогнозировать будущее.

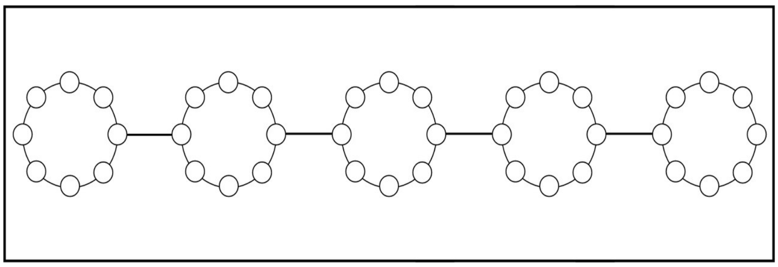

Рис. 1.

Формально модели определяются следующим образом:

Определение 2.1. *LTK_r-фрейм – это много-модальный фрейм Крипке*

$\mathcal{F} = \langle W_{\mathcal{F}}, R_T, R_{\sim}, R_1, \ldots, R_k \rangle$ *где:*

1. $W_{\mathcal{F}} := \bigcup_{n \in J} C_n$, *где* $J = [0, L]$, $L \in N$*; или* $J = N$, *где* N *- множество натуральных чисел;*

2. R_T *– линейное, интранзитивное на сгустках, рефлексивное бинарное отношение на* $W_{\mathcal{F}}$*:*

$$wR_Tz \Leftrightarrow [\exists n \in J((w \in C_n)\&(z \in C_n)) \vee ((w \in C_n)\&(z \in C_{n+1}))];$$

3. $R_{\sim}$ *– это универсальное* $S5$*-отношение на любом* $C_n \in W_{\mathcal{F}}$*:*

$$wR_{\sim}z \Leftrightarrow \exists n \in J((w \in C_n)\&(z \in C_n));$$

4. R_i *– некоторое отношение эквивалентности внутри каждого* R_T*-сгустка* C_n*.*

Класс всех таких фреймов обозначим $\mathsf{LTK_r}$.

Кроме того, на LTK_r-фрейме выполняется:
PM.1: $vR_{\sim}z \Longrightarrow (vR_Tz \ \& \ zR_Tv)$;
PM.2: $vR_iz \Longrightarrow vR_{\sim}z$;
PM.3: $(vR_Tz \ \& \ zR_Tv) \Longrightarrow vR_{\sim}z$;
PM.4: $(vR_Tz \ \& \ zR_{\sim}y) \vee (vR_{\sim}z \ \& \ zR_Ty) \Longrightarrow vR_Ty$.

В частности, каждый R_T-сгусток LTK_r-фрейма также является одновременно и $R_{\sim}$-сгустком.

Каждый элемент LTK_r-фрейма можно представить как информационную точку. Временное отношение R_T связывает такие точки в линейный и дискретный временной поток. Для двух точек w и z, выражение wR_Tz означает, что либо w и z доступны в момент n, либо z будет доступна в следующий момент по отношению к w. Таким образом, точки, принадлежащие одному R_T-сгустку, образуют момент временного потока. Хотя обычно время воспринимается как непрерывное, оно также может быть представлено и как дискретное. В данном контексте дискретность временного потока понимается следующим образом: между двумя временными моментами C_n и C_{n+1} такими, что $C_nR_TC_{n+1}$, не существует других временных моментов. Кроме того, временная цепь моментов имеет начало. Также важным для нас является допущение о линейности потока времени, то есть отсутствия ветвления: после каждого временного момента C_n может наступить только один момент C_{n+1} такой, что $C_n R_T C_{n+1}$.

Отношение $R_\sim$ связывает все информационные точки, потенциально доступные в один и тот же момент. Таким образом, в рассматриваемой интерпретации, $R_\sim$ определяет информацию, потенциально известную в каждой информационной точке текущего временного состояния.

Отношение R_i связывает между собой те точки, которые доступны некоторому агенту i в рассматриваемый момент времени. Каждая точка снабжает агента некоторой информацией, актуальной в данный момент.

Определение 2.2. *Для двух R_T-сгустков C_m и C_j запись $C_m R_T C_j$ означает, что $\forall w \in C_m, \forall z \in C_j (w R_T z)$. При чем C_m является R_T-предшественником сгустка C_j, а C_j – R_T-последователем сгустка C_m.*

Определение 2.3. *LTK_r-фрейм $\mathcal{F}$, где $W_\mathcal{F} = C_1(z) R_T C_2 R_T \dots R_T C_n$ будем называть возрастающей цепью сгустков. При этом LTK_r-цепи могут быть как конечные, так и бесконечные. Множество всех элементов $W_\mathcal{F}$ будем обозначать $z^{\leq}$.*

Определение 2.4. *Элемент z LTK_r-фрейма $\mathcal{F}$ имеет глубину m, если m – это максимальный номер сгустка в конечной возрастающей цепи $z^{\leq} = C_1(z) R_T C_2 R_T \dots R_T C_m$, причем $\forall z \in C_m$ если имеет место $z R_T w$, то $w \in C_m$ (т.е. C_m - финальный сгусток фрейма $\mathcal{F}$).*

Определение 2.5. *Говорим, что элемент z достижим из элемента w ровно через m "шагов"по отношению R_T, если найдутся сгустки $C_1, C_2, \dots, C_m$ такие, что $C(w) R_T C_1 R_T C_2 R_T \dots R_T C_m$ и $z \in C_m$.*

4. p-морфные образы LTK_r-фреймов

В данном параграфе мы представим фреймы Крипке, которые являются p-морфными образами LTK_r-фреймов и адекватны логике LTK_r.

Рассмотрим фрейм Крипке $\mathcal{F}_{n+m} = \langle W_{\mathcal{F}_{n+m}}, R_T^{n+m}, R_\sim^{n+m} R_1^{n+m}, \dots, R_k^{n+m} \rangle$, где:

1. $W_{\mathcal{F}_{n+m}} = \bigcup_{j=1}^{n+m} C_j$, где C_j – R_T-сгусток;

2. $wR_T^{n+m}z \Leftrightarrow [\exists l \in \{1,\ldots,n+m\}((w \in C_l)\&(z \in C_l))]\vee$
$\vee[\exists l \in \{1,\ldots,n+m-1\}((w \in C_l)\&(z \in C_{l+1}))]\vee$
$\vee[(w \in C_{n+m})\&(z \in C_{n+1})]$;

3. $wR_{\sim}^{n+m}z \Leftrightarrow ((w \in C_l)\&(z \in C_l))$;

4. R_i^{n+m} - некоторое отношение эквивалентности внутри каждого R_T-сгустка C_l.

Другими словами, фрейм $\mathcal{F}_{n+m}$ представляет собой конечную возрастающую цепь из n R_T-сгустков, которая заканчивается циклом из R_T-сгустков длины m (Рис.2).

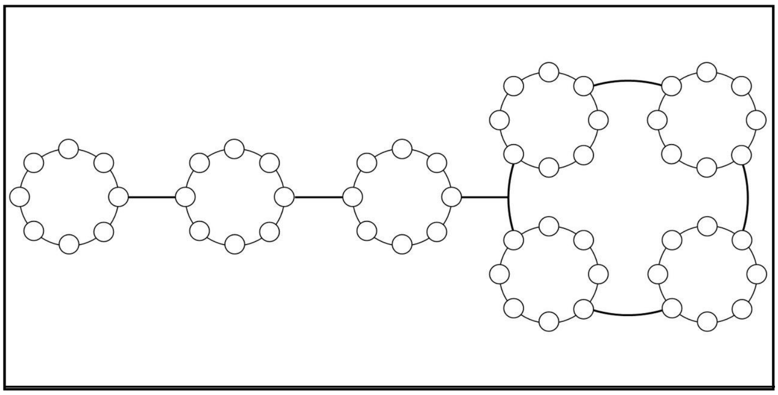

Рис. 2.

Лемма 2.1. *Фрейм $\mathcal{F}_{n+m}$ является p-морфным образом LTK_r-фрейма.*

Доказательство. Рассмотрим LTK_r-фрейм $\mathcal{F}_\infty = \langle W_{\mathcal{F}_\infty}, R_T, R_\sim, R_1,\ldots,R_k\rangle$ такой, что: $W_{\mathcal{F}_\infty} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, при этом $K_j \cong C_j$ и $K_{n+ml+j} \cong C_{n+j}$,
где $j \in \{1,\ldots,n\}$, $l \in \{0,\ldots,\infty\}$ и $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Определим отображение $f : \mathcal{F}_\infty \longrightarrow \mathcal{F}_{n+m}$ следующим образом:

$$f : \begin{cases} K_j \longrightarrow C_j, j \in \{1, \dots, n\} \\ K_{n+ml+j} \longrightarrow C_{n+j}, j \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Легко проверить, что f является p-морфизмом. Покажем выполнение (i), (ii) Определения 1.7 для элементов $a, b \in \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

(i) $\forall a, b \in \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j (aR_\xi b \Longrightarrow f(a) R_\xi^{n+m} f(b))$ по определению отношений R_ξ^{n+m}, где $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$.

(ii) Доказательство этого пункта разобьём на несколько случаев:

1) пусть $f(K_j) R_T^{n+m} f(K_{j+1})$, где ($j \in \{1, \dots, n+m-1\}$), тогда существует сгусток $K_{j+1} : (K_j R_T K_{j+1} \ \& \ f(K_{j+1}) = C_{j+1})$;

2) пусть $f(K_{n+m}) R_T^{n+m} f(K_{n+m+1})$, тогда существует сгусток K_{n+m+1} такой, что $K_{n+m} R_T K_{n+m+1} \ \& \ f(K_{n+m+1}) = C_{n+1}$;

3) пусть теперь $f(K_{n+lm+j}) R_T^{n+m} f(K_{n+lm+j+1})$, где $l \in \{0, \dots, \infty\}$ и $j \in \{1, \dots, m-1\}$. Тогда найдется $K_{n+lm+j+1}$ такой, что $K_{n+lm+j} R_T K_{n+lm+j+1}$ и $f(K_{n+lm+j+1}) = C_{n+j}$;

4) наконец, пусть $f(K_{n+lm+m}) R_T^{n+m} f(K_{n+lm+m+1})$. Тогда $\exists K_{n+lm+m+1}$ такой, что $K_{n+lm+m} R_T K_{n+lm+m+1}$ и $f(K_{n+lm+m+1}) = f(K_{n+m(l+1)+1}) = C_{n+1}$.

Таким образом, отображение f является $p-$морфизмом. И фрейм $\mathcal{F}_{n+m}$ является p-морфным образом LTK_r-фрейма.

□

Рассмотрим теперь фрейм $\mathcal{F}_\Theta = \langle W_{\mathcal{F}_\Theta}, R_T^\Theta, R_\sim^\Theta, R_1^\Theta, \dots, R_k^\Theta \rangle$, где:

1. $W_{\mathcal{F}_\Theta} = C$, при этом R_T-сгусток $C = C_\sim^1 \cup C_\sim^2$;
2. $\forall w \forall z \in W_{\mathcal{F}_\Theta} : wR_T^\Theta z \ \& \ zR_T^\Theta w$;
3. $wR_\sim^\Theta z \Leftrightarrow ((w \in C_\sim^m) \& (z \in C_\sim^m))$, где $m \in \{1, 2\}$;
4. R_i^Θ - некоторое отношение эквивалентности внутри $C_\sim^m$, где $m \in \{1, 2\}$.

Фрейм $\mathcal{F}_\Theta$ представляет собой изолированный R_T-сгусток, состоящий из двух несравнимых $R_\sim$-сгустков. При этом бинарные отношение на $\mathcal{F}_\Theta$ имеют свойства бинарных отношений LTK_r-фрейма (Рис. 3).

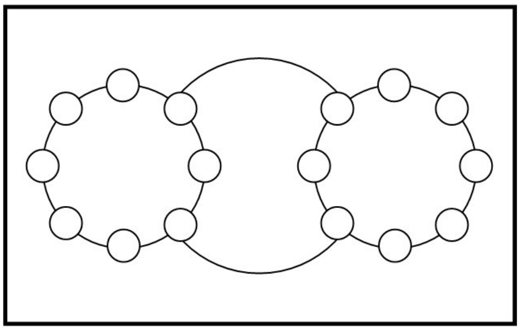

Рис. 3.

Лемма 2.2. *$\mathcal{F}_\Theta$ является p-морфным образом LTK_r-фрейма.*

Доказательство. Рассмотрим LTK_r-фрейм $\mathcal{F}_\infty = \langle W_{\mathcal{F}_\infty}, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k \rangle$ такой, что: $W_{\mathcal{F}_\infty} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K^j$, при этом $K^{2k+1} \cong C_\sim^1$ & $K^{2k+2} \cong C_\sim^2$.

Определим отображение $f : \mathcal{F}_\infty \longrightarrow \mathcal{F}_\Theta$ следующим образом:

$$f : \begin{cases} K^{2k+1} \longrightarrow C_\sim^1 \\ K^{2k+2} \longrightarrow C_\sim^2 \end{cases}$$

Легко проверить, что f является p-морфизмом. Покажем выполнение (i), (ii) определения 1.7 для элементов $a, b \in \bigcup_{j=1}^{\infty} K^j$.

(i) $\forall a, b \in \bigcup_{j=1}^{\infty} K^j (a R_\xi b \Longrightarrow f(a) R_\xi^\Theta f(b))$ по определению отношений R_ξ^Θ, где $\xi \in \{T, \sim, 1, \ldots, k\}$.

(ii) Если $f(K^{2k+1}) R_T^\Theta f(K^{2n+2})$, тогда существует сгусток K^{2k+2} такой, что $K^{2k+1} R_T K^{2k+2}$ и $f(K^{2k+2}) = f(K^{2n+2}) = C_\sim^2$. Если $f(K^{2k+2}) R_T^\Theta f(K^{2n+1})$, тогда существует сгусток $K^{2k+3} : K^{2k+2} R_T K^{2k+3}$ & $f(K^{2k+3}) = f(K^{2n+1}) = C_\sim^1$. Таким образом, отображение f является p-морфизмом фрейма $\mathcal{F}_\infty$ на $\mathcal{F}_\Theta$.

$\square$

5. Синтаксис LTK_r

Язык $\mathcal{L}^{LTK}$ логики LTK_r состоит из:

1. счетного множества пропозициональных переменных $P := \{p_1, p_2, \ldots\}$;

2. булевых операций $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$;

3. множества унарных модальных операторов $\{\Box_T, \Box_\sim, \Box_i \ (1 \leq i \leq k)\}$;

4. вспомогательных символов: скобок.

Формула в языке $\mathcal{L}^{LTK}$ определяется стандартным образом.

Исходя из определений отношений $R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k$, введенные модальные операторы будем, например, интерпретировать следующим образом:

a. $\Box_T A$ означает, что информация A истинна в рассматриваемый момент и будет истинна в следующий;

b. $\Box_\sim A$ означает, что A истинна в рассматриваемый момент времени;

c. $\Box_i A (1 \leq i \leq k)$, означает, что информация истинна во всех информационных точках, доступных агенту "i".

Определение 2.6. *Логика LTK_r – это множество всех LTK_r-истинных формул: $LTK_r := \{A \in For(\mathcal{L}^{LTK_r}) | \forall \mathcal{F} \in \mathsf{LTK_r}(\mathcal{F} \models A)\}$. Если A принадлежит LTK_r, то говорим, что A - теорема LTK_r.*

Определение 2.7. *Пусть A – формула в языке логики LTK_r. Модальная временная степень $td(A)$ формулы A определяется следующим образом: $td(p) = td(\top) = td(\bot) = 0$; $td(\neg\alpha) = td(\alpha)$; $td(\alpha \to \beta) = td(\alpha \vee \beta) = td(\alpha \wedge \beta) = max(td(\alpha), td(\beta))$; $td(\Box_\sim \alpha) = td(\Box_i \alpha) = td(\alpha)$; $td(\Box_T \alpha) = td(\alpha) + 1$.*

Утверждение 2.1. *В логике LTK_r справедливо $\Box_T \Box_\sim \alpha \equiv \Box_\sim \Box_T \alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную LTK_r-модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ и некоторый R_T-сгусток C фрейма $\mathcal{F}$.

1) Пусть для произвольного элемента $e \in C$ верно $(\mathcal{F}, e) \models_V \Box_\sim \Box_T \alpha$. Тогда $\forall x \in C : (\mathcal{F}, x) \models_V \Box_T \alpha)$ и $\forall y \in \{t | x R_T t\} : (\mathcal{F}, y) \models_V \alpha$. То есть на каждом элементе сгустков C и $C_{+1} : C R_T C_{+1}$ истинна формула α. По определению отношения $R_\sim$ имеем $\forall x \in C : (\mathcal{F}, x) \models_V \Box_\sim \alpha$ и $\forall y \in C_{+1} : (\mathcal{F}, y) \models_V \Box_\sim \alpha$. Таким образом, по определению отношения R_T выполняется $(\mathcal{F}, e) \models_V \Box_T \Box_\sim \alpha$ и $(\mathcal{F}, e) \models_V \Box_\sim \Box_T \alpha \to \Box_T \Box_\sim \alpha$.

2) Пусть $(\mathcal{F}, e) \models_V \Box_T \Box_\sim \alpha$. Тогда $\forall x \in C : (\mathcal{F}, x) \models_V \Box_\sim \alpha$, и для всех элементов y сгустка C_{+1}: $C R_T C_{+1}$ выполняется $(\mathcal{F}, y) \models_V \Box_\sim \alpha$. Следовательно, $\forall x \in C : (\mathcal{F}, x) \models_V \alpha$ и $\forall y \in C_{+1} : (\mathcal{F}, y) \models_V \alpha$. То есть на каждом элементе сгустков C и C_{+1} истинна формула α, это означает, что $\forall x \in C$:

$(\mathcal{F}, x) \models_V \Box_T \alpha$. Так как $e \in C$, то $(\mathcal{F}, e) \models_V \Box_\sim \Box_T \alpha$. Таким образом, справедливо $(\mathcal{F}, e) \models_V \Box_T \Box_\sim \alpha \to \Box_\sim \Box_T \alpha$.

В силу п.п. 1) и 2) справедливо $(\mathcal{F}, e) \models_V \Box_T \Box_\sim \alpha \leftrightarrow \Box_\sim \Box_T \alpha$. Так как LTK_r-фрейм $\mathcal{F}$ и означивание V были выбраны произвольно, то имеет место перестановочность модальных операторов $\Box_T$ и $\Box_\sim$ в логике LTK_r.

$\Box$

Утверждение 2.2. *В логике LTK_r справедливо $\Diamond_T \Diamond_\sim \alpha \equiv \Diamond_\sim \Diamond_T \alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную LTK_r-модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$ и некоторый R_T-сгусток C фрейма $\mathcal{F}$.

1) Пусть для произвольного элемента $e \in C$ верно $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_T \Diamond_\sim \alpha$. Тогда по определению истинности отношения R_T существует $z \in \{t | e R_T t\}$: $(\mathcal{F}, z) \models_V \Diamond_\sim \alpha$. Следовательно, $\exists y \in \{t | z R_\sim t\} : (\mathcal{F}, y) \models_V \alpha$. По определению отношений R_T и $R_\sim$, возможны два случая расположения элементов z и y относительно e:

a) $z \in C$ и, следовательно, $y \in C$. В силу рефлексивности отношения R_T имеем $(\mathcal{F}, y) \models_V \Diamond_T \alpha$. Так как $y \in C$, то $y \in \{t | v R_\sim t\}$ и $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_\sim \Diamond_T \alpha$.

b) $z \in C_{+1}$, где $C R_T C_{+1}$. Тогда y также принадлежит сгустку C_{+1} и $y \in \{t | e R_T t\}$. Следовательно, выполняется $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_T \alpha$. В силу рефлексивности отношения $R_\sim$ справедливо $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_\sim \Diamond_T \alpha$.

Таким образом, $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_T \Diamond_\sim \alpha \to \Diamond_\sim \Diamond_T \alpha$.

2) Пусть теперь $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_\sim \Diamond_T \alpha$. Тогда существует $z \in \{t | e R_\sim t\}$ такой, что $(\mathcal{F}, z) \models_V \Diamond_T \alpha$. По определению истинности оператора $\Diamond_T$, существует элемент $y \in \{t | z R_T t\}$: $(\mathcal{F}, y) \models_V \alpha$. Также имеем два случая расположения элемента y относительно e:

a) $y \in C$. В силу рефлексивности отношения $R_\sim$ верно $(\mathcal{F}, y) \models_V \Diamond_\sim \alpha$. Так как $y \in C$, то $y \in \{t | e R_T t\}$ и $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_T \Diamond_\sim \alpha$.

b) $y \in C_{+1}$, где $C R_T C_{+1}$. Аналогично пункту a) верно $(\mathcal{F}, y) \models_V \Diamond_\sim \alpha$ и $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_T \Diamond_\sim \alpha$. Следовательно, $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_\sim \Diamond_T \alpha \to \Diamond_T \Diamond_\sim \alpha$.

В силу п.п. 1) и 2) справедливо $(\mathcal{F}, e) \models_V \Diamond_T \Diamond_\sim \alpha \leftrightarrow \Diamond_\sim \Diamond_T \alpha$. Так как LTK_r-фрейм $\mathcal{F}$ и означивание V были выбраны произвольно, то имеет место перестановочность модальных операторов $\Diamond_T$ и $\Diamond_\sim$.

$\Box$

6. Свойства n-канонической модели LTK_r

Рассмотрим следующую аксиоматическую систему AS_{LTK_r} в языке $\mathcal{L}^{LTK}$:

Аксиомы **CPC** (классического пропозиционального исчисления);

$L_{\Box_T}$: $\Box_T(\Box_T A \to B) \vee \Box_T(\Box_T B \to A)$;

$K_{\Box_\xi}$: $\Box_\xi(A \to B) \to (\Box_\xi A \to \Box_\xi B)$, $\xi \in \{T, \sim, 1, \ldots, k\}$;

$T_{\Box_\xi}$: $\Box_\xi A \to A$, $\xi \in \{T, \sim, 1, \ldots, k\}$;

$4_{\Box_\xi}$: $\Box_\xi A \to \Box_\xi \Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$;

$5_{\Box_\xi}$: $\neg\Box_\xi A \to \Box_\xi \neg\Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$;

$Tr.C.1$: $\Diamond_T \Diamond_\sim A \to \Diamond_T A$;

$Tr.C.2$: $\Diamond_\sim \Diamond_T A \to \Diamond_T A$;

AL: $\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B) \to \Box_T B$;

$M.1$: $\Box_T A \to \Box_\sim A$;

$M.2$: $\Box_\sim A \to \Box_i A$, $1 \leq i \leq k$;

Правила вывода AS_{LTK_r}:

$$MP : \frac{A, A \to B}{B} \quad Nec_T : \frac{A}{\Box_T A}$$

$$Nec_\sim : \frac{A}{\Box_\sim A} \quad Nec_i : \frac{A}{\Box_i A}$$

Определение 2.8. $LTK_{r_{ax}} := \{A \in For(\mathcal{L}^{LTK}) | \vdash_{AS_{LTK_r}} A\}$

Теорема 2.1. $\forall A \in For(\mathcal{L}^{LTK})$ $(A \in LTK_{r_{ax}} \Longrightarrow A \in LTK_r)$

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по длине вывода $D_1, \ldots, D_j = D$ теоремы $D \in LTK_{r_{ax}}$. Покажем, что аксиомы системы AS_{LTK_r} истинны на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$L_{\Box_T}$**:** предположим, что $L_{\Box_T}$ опровергается на некотором LTK_r-фрейме $\mathcal{F}$ при означивании V, то есть существует элемент v, принадлежащий $W_\mathcal{F}$, такой, что $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_T(\Box_T A \to B) \vee \Box_T(\Box_T B \to A)$. Тогда выполняется $(\mathcal{F}, v) \models_V \Diamond_T(\Box_T A \wedge \neg B) \wedge \Diamond_T(\Box_T B \wedge \neg A)$. Следовательно, существуют элементы $x, y \in \{t | vR_T t\}$ такие, что $(\mathcal{F}, x) \models_V \Box_T A \wedge \neg B$ и $(\mathcal{F}, y) \models_V \Box_T B \wedge \neg A$. Возможны 3 варианта расположения элементов x, y.

1) $x \in C(v)$ и $y \in C(y)$: $C(v) R_T C(y)$. Так как $y \in \{t | xR_T t\}$, тогда верно $(\mathcal{F}, y) \models_V A \wedge \neg A$, противоречие.

2) $y \in C(v)$ и $x \in C(x)$: $C(v) R_T C(x)$. Так как $x \in \{t | y R_T t\}$, тогда верно $(\mathcal{F}, x) \models_V B \wedge \neg B$, противоречие.

3) x, y принадлежат одному сгустку. Тогда $(\mathcal{F}, y) \models_V \neg A$ противоречит $(\mathcal{F}, x) \models_V \Box_T A$.

Таким образом, аксиома $L_{\Box_T}$ истинна на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$K_{\Box_\xi}$: предположим, что существует LTK_r-фрейм $\mathcal{F}$, означивание V и элемент $v \in W_{\mathcal{F}}$ такие, что $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_\xi (A \to B) \to (\Box_\xi A \to \Box_\xi B)$, где $\xi \in \{T, \sim, 1, \ldots, k\}$. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \Box_\xi (A \to B)$ и $(\mathcal{F}, v) \not\models_V (\Box_\xi A \to \Box_\xi B)$. То есть $\forall z \in \{t | v R_\xi t\}$ выполняется $(\mathcal{F}, z) \models_V (A \to B) \wedge A$, и существует элемент $w \in \{t | v R_\xi t\}$ такой, что $(\mathcal{F}, w) \models_V \neg B$. По правилу MP имеем $(\mathcal{F}, w) \models_V B$, т.е. $(\mathcal{F}, w) \models_V B \wedge \neg B$, что невозможно. Следовательно, $K_{\Box_\xi}$ истинна на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$T_{\Box_\xi}$: пусть $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_\xi A \to A$, $\forall \xi \in \{T, \sim, 1, \ldots, k\}$. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \Box_\xi A$ и $(\mathcal{F}, v) \not\models_V A$. В силу рефлексивности отношения R_ξ имеем $v \in \{t | v R_\xi t\}$, следовательно, $(\mathcal{F}, v) \models_V A \wedge \neg A$, что приводит к противоречию. Таким образом, формула $T_{\Box_\xi}$ истинна на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$4_{\Box_\xi}$: пусть $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_\xi A \to \Box_\xi \Box_\xi A$, где $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \Box_\xi A$ и $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_\xi \Box_\xi A$. То есть $\forall z \in \{t | v R_\xi t\} : (\mathcal{F}, z) \models_V A)$, и $\exists w \in \{t | v R_\xi t\} : (\mathcal{F}, w) \models_V \neg \Box_\xi A$. По определению истинности оператора $\Box_\xi$ существует элемент $m \in \{t | w R_\xi t\} : (\mathcal{F}, m) \not\models_V A$. Так как по определению LTK_r-фрейма отношения R_ξ являются транзитивными, то $v R_\xi m$ и $(\mathcal{F}, m) \models_V A \wedge \neg A$, что приводит к противоречию. Следовательно, формула $4_{\Box_\xi}$ истинна на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$5_{\Box_\xi}$: предположим, что $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \neg \Box_\xi A \to \Box_\xi \neg \Box_\xi A$, $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \neg \Box_\xi A$ и $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_\xi \neg \Box_\xi A$. Это означает, что существуют элементы $z, w \in \{t | v R_\xi t\}$ такие, что $(\mathcal{F}, z) \models_V \neg A$ и $(\mathcal{F}, w) \models_V \Box_\xi A$. По определению истинности оператора $\Box_\xi$ получаем, что для любого элемента $m \in \{t | w R_\xi t\}$ выполняется $(\mathcal{F}, m) \models_V A$. В силу транзитивности отношений R_ξ имеем $(\mathcal{F}, m) \models_V A \wedge \neg A$, получаем противоречие. Следовательно, формула $5_{\Box_\xi}$ истинна на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$Tr.C.1$: пусть теперь выполняется $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Diamond_T \Diamond_\sim A \to \Diamond_T A$. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \Diamond_T \Diamond_\sim A$ и $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Diamond_T A$. Так как $(\mathcal{F}, v) \models_V \Diamond_T \Diamond_\sim A$, то существует элемент $z \in \{t|vR_Tt\}$, на котором истинна формула $\Diamond_\sim A$ и $\exists y \in \{t|zR_\sim t\}$: $(\mathcal{F}, y) \models_V A)$. По определению отношений R_T и $R_\sim$, имеем $y \in C(v)$ или $y \in C_{+1} : C(v)R_TC_{+1}$, следовательно, $y \in \{t|vR_Tt\}$. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \Diamond_T A$. По предположению имеем $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Diamond_T A$, что приводит к противоречию. Таким образом, аксиома $Tr.C.1$ истинна на всех LTK_r-фрейма при любом означивании.

$Tr.C.2$: $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Diamond_\sim\Diamond_T A \to \Diamond_T A$. Тогда справедливо $(\mathcal{F}, v) \models_V \Diamond_\sim\Diamond_T A$ и $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Diamond_T A$. Так как $(\mathcal{F}, v) \models_V \Diamond_\sim\Diamond_T A$, то $\exists z \in \{t|vR_\sim t\} : (\mathcal{F}, z) \models_V \Diamond_T A$, и $\exists y \in \{t|zR_Tt\} : (\mathcal{F}, y) \models_V A$. По определению отношений R_T и $R_\sim$ имеем $y \in C(v)$ или $y \in C_{+1} : C(v)R_TC_{+1}$. Следовательно, $y \in \{t|vR_Tt\}$. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \Diamond_T A$, что противоречит исходному предположению. Таким образом, аксиома $Tr.C.2$ истинна на всех LTK_r-фрейма при любом означивании.

AL: предположим теперь, что аксиома AL не принадлежит LTK_r. Тогда существует LTK_r-фрейм $\mathcal{F}$, означивание V и элеменет $v \in W_\mathcal{F}$ такие, что $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B) \to \Box_T B$, тогда:

$$(\mathcal{F}, v) \models_V \Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B) \tag{2.1}$$

и

$$(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_T B \tag{2.2}$$

Из условия 2.1 имеем:

(2.1.1) $\forall z \in \{t|vR_\sim t\} : (\mathcal{F}, z) \models_V A \wedge B$;

(2.1.2) $\exists w \in \{t|vR_Tt\} : (\mathcal{F}, w) \models_V \neg A \wedge \Box_\sim B$.

Из (2.1.1), (2.1.2) и 2.2 получаем $\exists u \in \{t|vR_Tt\} : (\mathcal{F}, u) \models_V B \wedge \neg B$, что влечет противоречие. Таким образом, формула AL истинна на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

$M.1$: пусть формула $M.1$ опровергается на элементе v некоторого LTK_r-фрейма $\mathcal{F}$ при означивание V. Тогда $(\mathcal{F}, v) \models_V \Box_T A$ и $(\mathcal{F}, v) \not\models_V \Box_\sim A$. Отсюда следует $\forall z \in \{t|vR_Tt\} : (\mathcal{F}, z) \models_V A$. Однако, существует элемент $w \in \{t|wR_\sim t\} : (\mathcal{F}, w) \not\models_V A$. Из определения отношений R_T и $R_\sim$ следует $\{t|vR_Tt\} \supseteq \{t|wR_\sim t\}$. Таким образом, $(\mathcal{F}, w) \models_V A \wedge \neg A$, что приводит к противоречию. Используя аналогичные рассуждения, легко показать, что формула $M.2$ также истинна на всех LTK_r-фреймах при любом означивании.

Покажем теперь, что использование постулированных правил вывода сохраняет истинность формул:

MP : Пусть $\mathcal{F} \models A$ & $\mathcal{F} \models A \longrightarrow B$. По определению импликации имеем $\mathcal{F} \models \neg A \vee B$. Так как формула A истинна на каждом элементе фрейма $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F} \models B$ также справедливо.

$Nec_\xi, \xi \in \{T, \sim .1 \dots, k\}$: Если $\mathcal{F} \models A$, то формула A истинна на всех элементах при любом означивании. По определению отношений R_ξ имеем $\mathcal{F} \models \Box_\xi A$.

Таким образом, постулированные правила вывода сохраняют истинность, и на каждом шаге вывода, при получении новой формулы из истинных формулы, будем получать истинную формулу. В частности, заключительная формула D_j последовательности вывода также истинна.

$\square$

В силу Теоремы 2.1 получаем, что справедлива следующая лемма:

Лемма 2.3. *$LTK_{r_{ax}}$ непротиворечива.*

Далее рассмотрим n-каноническую модель $\mathcal{M}_n^c = \langle \mathcal{F}_n^c, V_n^c \rangle$ для $LTK_{r_{ax}}$, где $\mathcal{F}_n^c = \langle W_n^c, R_T^c, R_\sim^c, R_1^c \dots, R_k^c, V_n^c \rangle$, где

1. W_n^c - множество всевозможных AS_{LTK_r}-максимальных множеств, содержащих формулы, зависящие только от пропозициональных переменных $\{p_1, \dots, p_n\}$;

2. $\forall v, z \in W_n^c$, $vR_\xi^c z \Longleftrightarrow \{A | \Box_\xi A \in v\} \subseteq z$, где $\xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\}$;

3. $V_n^c(p_i) = \{v \in W_n^c | p_i \in v\}, 1 \leq i \leq n$.

Лемма 2.4. (a) *отношения $R_\sim^c, R_i^c$ являются рефлексивными, симметричными, транзитивными;*

(b) *отношение R_T^c рефлексивно, связно;*

(c) $\forall v, z \in W_n^c (vR_\sim^c z \Longrightarrow (vR_T^c z \; \& zR_T^c v))$*;*

(d) $\forall v, z \in W_n^c$ $(vR_i^c z \Longrightarrow vR_\sim^c z$*, где* $i \in \{1, \dots, k\})$*;*

(e) *отношение R^c_T интранзитивно на сгустках, т.е. если C_1, C_2, C_3– различные R^c_T-сгустки и $C_1 R^c_T C_2$ & $C_2 R^c_T C_3$, то $\neg(C_1 R^c_T C_3)$;*

(f) *если существуют $x \in C_1$ и $u \in C_2$ такие, что $xR^c_T u$, тогда $\forall v \in C_1, \forall z \in C_2$ выполняется $vR^c_T z$;*

(g) *модель $\mathcal{M}^c_n$ является дискретной по отношению R^c_T.*

Доказательство. (a) *Рефлексивность:* предположим, что существует теория $v \in W^c_n : \neg(vR^c_\xi v)$, где $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$, тогда $\exists A \in For(\mathcal{L}^{LTK_r}) : \Box_\xi A \in v$ и $A \notin v$. Так как $T_{\Box_\xi} \in v$, по правилу MP, получаем $A \wedge \neg A \in v$, что невозможно в силу непротиворечивости теории v. Таким образом, $\forall v \in W^c_n$: $(vR^c_\xi v)$, т.е. отношения R^c_ξ, где $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$, рефлексивны.

Симметричность: пусть существуют теории $z, v \in W^c_n$ такие, что $zR^c_\xi v$ и $\neg(vR^c_\xi z)$, где $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$. Тогда $\exists A \in For(\mathcal{L}^{LTK_r}) : \Box_\xi A \in v$ и $A \notin z$, т.е. $\neg\Box_\xi A \in z$. Так как $5_{\Box_\xi} \in z$, по правилу MP получаем $\Box_\xi\neg\Box_\xi A \in z$. Так как $zR^c_\xi v$, то $\neg\Box_\xi A \in v \Longrightarrow \neg\Box_\xi A \wedge \Box_\xi A \in v$, что приводит к противоречию. Таким образом, $\forall v, z \in W^c_n : (vR^c_\xi z \Longrightarrow zR^c_\xi v)$. В обратную сторону доказательство аналогичное.

Транзитивность: допустим теперь, что существуют теории $z, v, k \in W^c_n$ такие, что $zR^c_\xi v$, $vR^c_\xi k$ & $\neg(zR^c_\xi k)$, где $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$. Так как $\neg(zR^c_\xi k)$, то существует формула $A : \Box_\xi A \in z$ и $A \notin k$. При этом, используя аксиому $4_{\Box_\xi}$ и правило MP, получаем $\Box_\xi\Box_\xi A \in z$. Поскольку $zR^c_\xi v$, то $\Box_\xi A \in v$. Снова по аксиоме $4_{\Box_\xi}$ и правилу MP имеем $\Box_\xi\Box_\xi A \in v$. А так как $vR^c_\xi k$, то $A \in k$. Таким образом, $A \wedge \neg A \in k$, что приводит к противоречию. Итак, $\forall v, z, k \in W^c_n : (zR^c_\xi v \;\&\; vR^c_\xi k \Rightarrow zR^c_\xi k)$.

Из вышесказанного следует, что отношения R^c_ξ, где $\xi \in \{\sim, 1, \ldots, k\}$, рефлексивны, симметричны, транзитивны, то есть являются отношениями эквивалентности.

(b) Доказательство рефлексивности отношения R^c_T полностью повторяет доказательство рефлексивности из пункта (a).

Связность: пусть R^c_T не связно, то есть существуют теории $z, v, k \in W^c_n$ такие, что $zR^c_T v$, $zR^c_T k$, $\neg(vR^c_T k)$ & $\neg(kR^c_T v)$. Тогда $\exists A, B \in For(\mathcal{L}^{LTK_r})$: $\Box_T A \wedge \neg B \in v$ и $\Box_T B \wedge \neg A \in k$. То есть $\Box_T A \to B \notin v$ и $\Box_T B \to A \notin k$. Это означает, что аксиома $L_{\Box_T}$ не принадлежит теории z, что противоречит определению n-канонической модели. Таким образом показали, что отношение R_T^c связно.

(c) Предположим, что выполняется $\neg(zR_T^c v)$. Тогда существует формула A такая, что $\Box_T A \in z$ & $A \notin v$. Так как $M.1 \in z$, по правилу MP имеем $\Box_\sim A \in z$. Получаем $A \notin v$ и $\Box_\sim A \in z$, тогда по определению n-канонической модели следует $\neg(zR_\sim^c v)$. Аналогично доказывается случай $\neg(vR_T^c z)$. Таким образом, справедливо выполнение пункта (c) Леммы 2.4.

(d) Предположим $\neg(zR_\sim^c v)$. Тогда существует формула A такая, что $\Box_\sim A \in z$ & $A \notin v$. Так как $M.2 \in z$, то по правилу MP имеем $\Box_i A \in z$. В итоге, $A \notin v$ и $\Box_i A \in z$. В силу определения отношений в n-канонической модели получаем $\neg(zR_i^c v)$. Таким образом, выполняется пункт (d) Леммы 2.4.

(e) Рассмотрим цепь из трех различных R_T-сгустков $C(v), C(z), C(k)$, порожденных элементами v, z и k соответственно. Пусть верно $C(v)R_T^c C(z)$ и $C(z)R_T^c C(k)$. Определим, может ли иметь место $C(v)R_T^c C(k)$.

Так как теории v,z и k принадлежат разным $R_\sim^c$-сгусткам, то есть выполняется $\neg(C(v)R_\sim^c C(z))$, $\neg(C(z)R_\sim^c C(k))$ & $\neg(C(v)R_\sim^c C(k))$, то существуют формулы α, β α такие, что $\Box_\sim\alpha \in v$ & $\Box_\sim\alpha \notin z$, $\Box_\sim\beta \in z$ & $\Box_\sim\beta \notin k$ и $\Box_\sim\alpha \in v$ & $\Box_\sim\alpha \notin k$.

Обозначим $A = \alpha$ и $B = \Box_\sim\beta \vee \Box_\sim\alpha$. Из вышесказанного следует, что:

(1) $\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \in v$;

(2) $\neg\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \in z$;

(3) $\neg B \in k$.

Так как $vR_T^c z$, то из (1) и (2) следует $(\Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B)) \in v$, то есть на элементе v истинна посылка аксиомы AL. По построению n-канонической модели известно, что $AL \in v$, по правилу MP выполняется $\Box_T B \in v$. Тогда из (3) следует, что $\neg(vR_T k)$. Таким образом, если $C(v)R_T^c C(z)$ и $C(z)R_T^c C(k)$, то $\neg(C(v)R_T^c C(k))$.

(f) Рассмотрим два $R_\sim^c$-сгустка C_1 и C_2 n-канонической модели $\mathcal{M}_n^c$, причем существуют $x \in C_1$ и $u \in C_2$ такие, что $xR_T^c u$.

1) Предположим, что найдется элемент $y \in C_2$ такой, что $\neg(xR_T^c y)$.

Так как $\neg(xR_T^c y)$, то по определению n-канонической модели, существует формула α такая, что $\Box_T\alpha \in x$ и $\alpha \notin y$. Обозначим $A = \neg\alpha$.

Из того, что теории u и y принадлежат одному $R_\sim^c$-сгустку C_2, следует $uR_\sim^c y$. Следовательно, $\Diamond_\sim A \in u$. Так как $xR_T^c u$, то $\Diamond_T\Diamond_\sim A \in x$, то есть посылка $Tr.C.1$ принадлежит теории x. Однако, $\Box_T\alpha \in x$, тогда по определению истинности оператора $\Box_T$ на n-канонической модели, выполняется $\Diamond_T A \notin x$. Следовательно, заключение $Tr.C.1$ не принадлежит x, что противоречит определению $\mathcal{M}_n^c$. Таким образом, если существуют $x \in C_1$ и $u \in C_2$ такие, что $xR_T^c u$, то $\forall y \in C_2$ выполняется $xR_T^c y$.

2) Пусть теперь найдется элемент $y \in C_1$ и $\neg(yR_T^c u)$. По определению n-канонической модели, существует формула β такая, что $\Box_T\beta \in y$ и $\beta \notin u$. Обозначим $B = \neg\beta$.

Из того, что $xR_T^c u$, имеем $\Diamond_T B \in x$. Так как теории x и y принадлежат одному $R_\sim^c$-сгустку C_1, то $xR_\sim^c y$ и $\Diamond_\sim\Diamond_T B \in y$, то есть посылка $Tr.C.2$ принадлежит теории v. Однако, имеет место $\Box_T\beta \in y$, а также выполняется $\Diamond_T\neg B \in y$ по определению истинности оператора $\Box_T$ на n-канонической модели. Таким образом, заключение аксиомы $Tr.C.2$ не принадлежит теории y, что противоречит определению $\mathcal{M}_n^c$. Следовательно, если существуют $x \in C_1$ и $u \in C_2$ такие, что $xR_T^c u$, то $\forall y \in C_1$ выполняется $yR_T^c u$.

Из вышесказанного следует выполнение пункта (f) Леммы 2.4.

(g) Для доказательства дискретности отношения R_T требуется показать, что $\forall C(a), C(b) \in W_n^c$ таких, что $C(a)R_T^c C(b)$ и $C(a) \neq C(b)$, не существует элемента $c \in W_n^c$, для которого выполняется $C(a)R_T^c C(c)$ и $C(c)R_T^c C(b)$, причем $C(c) \neq C(a) \neq C(b)$. Выполнение данного условия напрямую следует из пункта (e) Леммы 2.4. Таким образом, модель $\mathcal{M}_n^c$ является дискретной по отношению R_T^c.

$\Box$

В данный момент вопрос полноты аксиоматической системы AS_{LTK_r} остается открытым. Однако, можно выдвинуть предлоложение:

Гипотеза 2.1. *Система аксиом AS_{LTK_r} является конечной аксиоматизацией логики LTK_r.*

Глава 3

Разрешимость логики LTK_r

Одним из основных свойств любой логики является её разрешимость, т.е. возможность за конечное количество шагов проверить доказуемость в ней произвольной формулы в заданном языке. В качестве вспомогательного средства для доказательства разрешимости используется свойство финитной аппроксимируемости логики. В нашем случае удалось показать, что LTK_r обладает более сильным свойством эффективной финитной аппроксимируемости.

Теорема 3.1. *Логика LTK_r эффективно финитно-аппроксимируема.*

Доказательство. Возьмем формулу A такую, что $A \notin LTK_r$ и пусть временная модальная степень $td(A)$ равна n. Тогда существует LTK_r-фрейм $\mathcal{F} = \langle W_{\mathcal{F}}, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k \rangle$, где $W_{\mathcal{F}} = \{\bigcup_{l \in J} C_l\}$ $(J = [0, L], L \in N$ или $J = N)$, означивание V и элемент $x \in C_r$ такие, что $(\mathcal{F}, x) \not\models_V A$.

Уменьшим количество элементов, принадлежащих каждому из R_T-сгустков C множества $W_{\mathcal{F}}$ с помощью стандартной техники фильтрации. Обозначим $Sub(A)$ как множество всех подформул формулы A. Отношение эквивалентности $\approx$ на фрейме $\mathcal{F}$ зададим следующим образом:

$$w \approx z \Leftrightarrow wR_\sim z \ \& \ zR_\sim w \ \& \ \forall B \in Sub(A) : ((\mathcal{F}, w) \models_V B \Leftrightarrow (\mathcal{F}, z) \models_V B).$$

Определим классы эквивалентности по отношению $\approx$:

$$\forall w \in W_{\mathcal{F}}([w] := \{z | w \approx z\} \& [C] := \bigcup_{[w] \in C} [w].$$

В результате фильтрации сгустков из $\langle \mathcal{F}, V \rangle$ по множеству $Sub(A)$ получим модель $M_1 := \langle \mathcal{F}_1, V_1 \rangle$, где:

(а) $W_{\mathcal{F}_1} := \{\bigcup_{l \in J} [C_l]\}$;

(б) $[w] R^1_{\sim} [z] \Leftrightarrow w R_{\sim} z$;

(в) $[w] R^1_T [z] \Leftrightarrow w R_T z$;

(г) $[w] R^1_i [z] (1 \leq i \leq k) \Leftrightarrow ([w] \in C \ \& \ [z] \in C \ \&$
$\forall B \in Sub(A) : ((\mathcal{F}, w) \models_V \Box_i B \Leftrightarrow (\mathcal{F}, z) \models_V \Box_i B)$.

(д) $\forall p \in Sub(A) (V_1(p) := \{[w] | w \in V(p)\})$

Модель M_1 получена в результате использования стандартного метода фильтрации, поэтому по Лемме 1.5 верна:

Лемма 3.1. $\forall B \in Sub(A)$ *и* $\forall w \in W_{\mathcal{F}}$ *выполняется*

$$(\mathcal{F}, w) \models_V B \Leftrightarrow (\mathcal{F}_1, [w]) \models_{V_1} B.$$

Так как после применения фильтрации, на элементах модели M_1 истинность всех подформул формулы A сохраняется, справедливо

Следствие 3.1. $(\mathcal{F}_1, [x]) \not\models_{V_1} A$.

Теперь ограничим длину цепи опровергающей модели M_1 размером формулы A. Для этого определим модель $\mathcal{M}$ следующим образом:

$$\mathcal{M} = \langle \{[C_r], [C_{r+1}], [C_{r+2}], ..., [C_j]\}, R^1_T, R^1_{\sim}, R^1_1, \ldots, R^1_k, V_1 \rangle,$$

где

$$j = \begin{cases} r + n, \text{ если } \mathcal{F}_1 \text{ бесконечен или } r + n \leq L \\ L, \text{ если } r + n > L \end{cases}$$

$\mathcal{M}$ получена из модели M_1 путем "отбрасывания"из $\bigcup_{l \in J} [C_l]$ фрагментов цепи ниже сгустка $[C_r]$ и выше сгустка $[C_{r+n}]$. Таким образом, фрейм модели $\mathcal{M}$ состоит не более чем из $n + 1$ R_T-сгустков, где n - временная модальная степень формулы A.

Докажем, что если A опровергается на модели M_1, то она также опровергается на модели $\mathcal{M}$. Сначала покажем, что на $\mathcal{M}$ сохраняется истинность формул, не содержащих модальных оператор $\Box_T$.

Лемма 3.2. *Для любой формулы α такой, что $td(\alpha) = 0$ и для любого элемента $[y] \in \{[C_r] \cup [C_{r+1}] \cup [C_{r+2}] \cup ... \cup [C_j]\}$ справедливо:*

$$(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [y]) \models \alpha, \tag{3.1}$$

т.е. на модели $\mathcal{M}$ истинность невременных формул сохраняется.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по модальной невременной степени $m(\alpha)$ формулы α.

Если $m(\alpha) = 0$, то формула α состоит только из пропозициональных переменных и стандартных булевых операций. В этом случае истинность формулы на элементе $[y] \in \{[C_r] \cup [C_{r+1}] \cup [C_{r+2}] \cup ... \cup [C_j]\}$ определяется только означиванием пропозициональных переменных, входящих в формулу α, только на элементе $[y]$. Таким образом, по построению модели $\mathcal{M}$, справедливо $(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [y]) \models \alpha$.

Предположим, что выражение 3.1 верно $\forall l : l \leq m$. Покажем, что для формул α таких, что $m(\alpha) = l + 1$ выражение 3.1 также выполняется.

1) Пусть $\alpha = \Box_{\sim}\alpha_1$, где $m(\alpha_1) = l$.

Если для произвольного элемента $[y] \in \{[C_r] \cup [C_{r+1}] \cup [C_{r+2}] \cup ... \cup [C_j]\}$ верно $(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha$, то $\forall [z] \in [C(y)]$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [z]) \models_{V_1} \alpha_1$. По индуктивному предположению имеем, что $\forall [z] \in [C(y)]$ справедливо $(\mathcal{M}, [z]) \models \alpha_1$, откуда следует $(\mathcal{M}, [y]) \models \alpha$. В обратную сторону доказательство аналогично.

2) Пусть теперь $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \alpha = \Box_i \alpha'$, где $m(\alpha') = l$.

Если для произвольного элемента $[y] \in \{[C_r] \cup [C_{r+1}] \cup [C_{r+2}] \cup ... \cup [C_j]\}$ верно $(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha$, то $\forall [z] \in \{t | [y] R_i^1 t\}$ верно $(\mathcal{F}_1, [z]) \models_{V_1} \alpha'$. По индуктивному предположению получаем, что $\forall [z] \in \{t | [y] R_i^1 t\}$ выполняется $(\mathcal{M}, [z]) \models \alpha'$, т.е. $(\mathcal{M}, [y]) \models \alpha$. В обратную сторону доказательство аналогично.

3) Предположим, что $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2$, где $\circ \in \{\wedge, \vee\}$. При этом известно, что $max(m(\alpha_1), m(\alpha_2)) = l + 1$, $\alpha_1 = \Box_\xi \alpha_1'$ и $\alpha_2 = \Box_\xi \alpha_2'$. Тогда $\forall [y]$ из $\{[C_r] \cup [C_{r+1}] \cup [C_{r+2}] \cup ... \cup [C_j]\}$ верно $(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha_1 \circ \alpha_2 \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha_1$

и/или $(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha_2 \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [y]) \models \alpha_1$ и/или $(\mathcal{M}, [y]) \models \alpha_2 \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [y]) \models \alpha_1 \circ \alpha_2$.

Так же, если $\alpha = \neg\alpha_1$, $m(\alpha_1) = l+1$ и $\alpha_1 = \Box_\xi \alpha_2$, то $\forall [y] \in \{[C_r] \cup [C_{r+1}] \cup [C_{r+2}] \cup ... \cup [C_j]\}$ по ранее доказанному имеет место $(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \neg\alpha_1 \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_1, [y]) \not\models_{V_1} \alpha_1 \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [y]) \not\models \alpha_1 \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [y]) \models \neg\alpha_1$.

Таким образом, если формула α содержит только невременные модальности, то ее истинность на элементе $[y] \in \{[C_r] \cup [C_{r+1}] \cup [C_{r+2}] \cup ... \cup [C_j]\}$ определяется означиванием пропозициональных переменных, входящих в α, только на элементах сгустка $[C(y)]$, проверка истинности формулы α на соседних сгустках не требуется, и выражение 3.1 верно.

$\Box$

Далее покажем, что на R_T-сгустке $[C_r]$ модели $\mathcal{M}$ сохраняется истинность всех подформул формулы A:

Лемма 3.3. $\forall B \in Sub(A)$ *и* $\forall [x] \in [C_r]$ *выполняется*

$$(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models B. \tag{3.2}$$

Доказательство. Если длина открытого подфрейма $C_r^{\leq}$ фрейма $\mathcal{F}_1$, порожденного сгустком C_r, меньше n, то модель $\mathcal{M}$ совпадает с подмоделью $\langle C_r^{\leq}, V_1 \rangle$, на которой опровергается формула B, и уже является конечной (имеет длину $< n$ и мощность сгустков $< 2^{|Sub(A)|}$). Остается рассмотреть случай, когда длина подфрейма $C_r^{\leq} > n+1$ или фрейм $\mathcal{F}_1$ бесконечен. В этом случае длина модели $\mathcal{M}$ равна $n+1$, то есть $j - r = n$.

По определению ППФ, формула B строится из подформул α и β одним из следующих способов:

а) $B = \Box_T \alpha, td(\alpha) = l$, где $(0 \leq l \leq n-1)$

б) $B = \Box_\sim \alpha, td(\alpha) = l$, где $(0 \leq l \leq n)$;

в) $B = \Box_i \alpha, td(\alpha) = l$, где $(1 \leq i \leq k)$ и $(0 \leq l \leq n)$;

г) $B = \alpha \circ \beta$, где $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, а $max(td(\alpha), td(\beta)) = l$ и $(0 \leq l \leq n)$;

д) $B = \neg\alpha, td(\alpha) = l$, где $(0 \leq l \leq n)$;

Покажем, что для формул $B : (td(B) \leq s)$, где $(s \in [0, n])$, и для всех m таких, что $r \leq j - m - s$, на элементах $[x] \in [C_{j-m-s}]$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models B$. Доказательство будем проводить индукцией по временной модальной степени $td(B)$.

База индукции: для случая $s = 0$ по Лемме 3.2 доказываемое утверждение верно.

Индуктивное предположение: предположим, что для формул B таких, что $td(B) \leq s$, где $s \in [0, n-1]$, и всех m таких, что $r \leq j - m - s$, на элементах $[x] \in [C_{j-m-s}]$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models B$.

Индуктивный переход: покажем, что для формул $B : (td(B) = s+1)$ на элементах $[x] \in [C_{j-m-(s+1)}]$ $(r \leq j - m - (s+1))$ также будет выполняться $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models B$.

Пусть $B = \Box_T \alpha$, где $td(\alpha) = s$. Если $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B$, где $[x] \in [C_{j-m-(s+1)}]$, то $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} \alpha$, и $\forall [y] \in \{t | [x] R_T^1 t\}$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [y]) \models_{V_1} \alpha$. По индуктивному предположению имеем $(\mathcal{M}, [x]) \models \alpha \ \& \ \forall [y] : ([x] R_T^1 [y]), (\mathcal{M}, [y]) \models \alpha$. То есть $(\mathcal{M}, [x]) \models B$, и выполняется $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B \Longrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models B$. В обратную сторону доказательство аналогично. Следовательно, справедливо утверждение $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models B$.

Покажем теперь, что при применении булевых операций, операторов $\Box_\sim$ или $\Box_i$ к формулам α вида а) индуктивный переход также верен. Заметим, что в случаях б)- д) модальная временная степень подформул α и β не изменяется и не требуется проверки истинности формулы B на соседних сгустках.

Пусть $B = \Box_\sim \alpha$, где $td(\alpha) = s+1$ и $\alpha = \Box_T \alpha'$. Если $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B$, где $[x] \in [C_{j-m-(s+1)}]$, то $\forall [z] \in [C(x)], (\mathcal{F}_1, [z]) \models_{V_1}$. По ранее доказанному имеем $\forall [z] \in [C(x)]$ имеем $(\mathcal{M}, [z]) \models \alpha$, откуда следует $(\mathcal{M}, [x]) \models B$. В обратную сторону доказательство проводим аналогично.

Пусть $B = \Box_i \alpha$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, $td(\alpha) = s+1$ и $\alpha = \Box_T \alpha'$. Если $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B$, где $[x] \in [C_{j-m-(s+1)}]$, тогда $\forall [z] \in \{t | [x] R_i^1 t\}$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [z]) \models_{V_1} \alpha$. По ранее доказанному получаем $\forall [z] \in \{t | [x] R_i^1 t\}$, $(\mathcal{M}, [z]) \models \alpha$, т.е. $(\mathcal{M}, [x]) \models B$. В обратную сторону доказательство проводим аналогично.

Пусть $B = \alpha \circ \beta$, где $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, $max(td(\alpha), td(\beta)) = s+1$, $\alpha = \Box_T \alpha'$ и $\beta = \Box_T \beta'$. Тогда $\forall [x] \in [C_{j-m-(s+1)}]$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} \alpha \circ \beta \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} \alpha$ и/или $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} \beta \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models \alpha$ и/или $(\mathcal{M}, [x]) \models \beta \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models \alpha \circ \beta$.

Пусть теперь $B = \neg \alpha, td(\alpha) = s+1$ и $\alpha = \Box_T \alpha'$. Тогда $\forall [x] \in [C_{j-m-(s+1)}]$ имеет место $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} \neg \alpha \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_1, [x]) \not\models_{V_1} \alpha \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \not\models \alpha \Longleftrightarrow (\mathcal{M}, [x]) \models \neg \alpha$.

Итак, применение невременных операций не нарушает 3.2. Следовательно, суперпозиция формул α и β вида а) временной степени s ($0 \leq s \leq n$) с помощью конечного числа булевых операции, $\Box_{\sim}$ или $\Box_i$ удовлетворяет 3.2.

Таким образом, на шаге $n+1$ по индукции получаем: $\forall B \in Sub(A)$, где $td(B) \leq n$ и $\forall [x] \in [C_r]$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [x]) \models_{V_1} B \iff (\mathcal{M}, [x]) \models B$ и лемма доказана. $\Box$

Так как при переходе от модели M_1 к $\mathcal{M}$ истинность всех подформул формулы A на каждом элементе сгустка $[C_r]$ сохраняется, и по Следствию 3.1 для некоторого элемента $x \in [C_r]$ выполняется $(\mathcal{F}_1, [x]) \not\models_{V_1} A$, то справедливо:

Следствие 3.2. $(\mathcal{M}, [x]) \not\models A$.

Заметим, что модель $\mathcal{M}$ является линейной цепочкой не более чем $n+1$ сгустков, и мощность каждого сгустка не превышает $2^{|Sub(A)|}$. Отсюда заключаем, что $|\mathcal{M}| \leq (n+1)2^{|Sub(A)|}$, где $n = td(A)$. Таким образом, если формула A не доказуема в логике LTK_r, то она опровергается на конечном фрейме $\mathcal{M}$, мощность которого эффективно ограничена строением формулы A. Значит, логика LTK_r эффективно финитно-аппроксимируема.

$\Box$

Сформулируем и докажем первый основной результат диссертационной работы:

Теорема 3.2. *Логика LTK_r разрешима.*

Доказательство. Достаточно предоставить алгоритм, позволяющий за конечное число шагов распознать, принадлежит ли произвольная формула α логике или нет.

1. Для любой произвольной формулы α в языке $\mathcal{L}^{LTK}$ определяем ее временную степень $td(\alpha) = n$.

2. Строим всевозможные LTK_r-фреймы $\mathcal{M}$ не более чем из $n+1$ сгустков, мощность которых не превосходит $2^{|Sub(\alpha)|}$.

3. На этих фреймах рассматриваем всевозможные означивания переменных формулы α, чтобы полученные модели не были изоморфны. Так как число переменных, входящих в формулу α конечно, то количество неизоморфных моделей будет также конечно. Если α истинна на всех таких моделях, то формула доказуема в логике LTK_r, если существует хотя бы одна модель, на которой формула α не истинна, то α не доказуема в LTK_r.

Данный алгоритм позволяет за конечное число шагов распознать принадлежность любой формулы α к логике LTK_r. Таким образом, логика LTK_r является разрешимой.

$\square$

Глава 4

Правила вывода LTK_r

7. Строение n-характеристической модели LTK_r

В данном разделе представлена схема построения n-характеристической модели для логики LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени.

Шаг 1.

Возьмем класс F конечных LTK_r-фреймов таких, что для любого фрейма $\mathcal{F} \in F, \forall w \forall z \in W_{\mathcal{F}}(wR_Tz \ \& \ zR_Tw)$. Обозначим через $\mathcal{C}(F)_n$ класс всех различных не изоморфных друг другу моделей $C := \langle \mathcal{F}, V \rangle$, где:

1. $\mathcal{F} \in F$;
2. $Dom(V) = \{p_1, \ldots, p_n\}$;

Определим $S_1(Ch_{LTK_r}(n)) := \bigsqcup\limits_{\mathcal{C}(F)} C_n$, то есть первый слой $Ch_{LTK_r}(n)$ состоит из множества конечных R_T-сгустков со всевозможными означиваниями переменных $p_1, \ldots, p_n$, которые не изоморфны друг другу как модели.

Шаг 2.

К каждому R_T-сгустку C из $S_1(Ch_{LTK_r}(n))$ приписываем сгустки C_j из $\mathcal{C}(F)_n$ в качестве непосредственных R_T-предшественников (т.е. C_jR_TC), при условии, что сгусток C_j не изоморфен как модель C. Результатом такого построения станет модель $S_{\leq 2}(Ch_{LTK_r}(n))$.

Шаг 3.

К каждому R_T-сгустку C из $S_2(Ch_{LTK_r}(n))$ приписываем каждый сгусток

C_j из $\mathcal{C}(F)_n$ в качестве непосредственных R_T-предшественников. Получим модель $S_{\leq 3}(Ch_{LTK_r}(n))$.

Шаг i+1.

Предположим, что модель $S_{\leq i}(Ch_{LTK_r}(n))$ для $i \geq 2$ построена так, что любой ее открытый подфрейм, это LTK_r-фрейм. Модель $S_{\leq i+1}(Ch_{LTK_r}(n))$ строим следующим образом. К каждому R_T-сгустку C глубины i добавляем в качестве непосредственных R_T-предшественников все сгустки из $(F)_n$. Тогда $Ch_{LTK_r}(n) := \langle W_{Ch_{LTK_r}}, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k, V\rangle := \bigcup\limits_{i \in N} S_{\leq i}(Ch_{LTK_r}(n))$. Обозначим фрейм модели $Ch_{LTK_r}(n)$ как $Ch(n)$.

Лемма 4.1. *Модель $Ch_{LTK_r}(n)$ является n-характеристической для логики LTK_r.*

Доказательство. Пусть A - произвольная формула логики LTK_r, зависящая от пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$, причем $td(A) = r$, $r \geq 0$. По определению логики имеем, что A истинна на всех элементах фреймов, адекватных логике LTK_r при любом означивании. Каждый открытый подфрейм фрейма $Ch(n)$ по построению является LTK_r-фреймом, тогда $Ch(n) \models_V A$.

Предположим, $A \notin LTK_r$. Построим модель, на которой опровергается A, и которая будет изоморфна некоторой открытой подмодели $Ch_{LTK_r}(n)$.

Так как $A \notin LTK_r$, тогда по Теореме 3.1 существует конечная модель $M^1 := \langle \mathcal{F}_{r+1}, V_1\rangle$ длины $r+1$, такая что $(\mathcal{F}_{r+1}, w) \not\models_{V_1} A$, где $W_{\mathcal{F}_{r+1}} = C_1^1(w) R_T C_2^1 R_T \ldots R_T C_{r+1}^1$.

Если сгусток C_{r+1}^1 и непосредственный его R_T-предшественник C_r^1 модели M^1 не изоморфны как модели, то M^1 является открытой подмоделью $Ch_{LTK_r}(n)$. Следовательно, по Лемме 1.1 выполняется $Ch(n) \not\models_V A$.

Пусть сгустки $C_r^1, C_{r-1}^1, \ldots, C_{r-t}^1$ $(0 \leq t \leq r)$ модели M^1 изоморфны сгустку C_{r+1}^1, а C_{r-t-1}^1 нет.

Рассмотрим модель $M^2 = \langle \mathcal{F}_2, V_2\rangle$, где:

a) $W_{\mathcal{F}_2} = C_1^2 R_T C_2^2 R_T \ldots R_T C_{r-t}^2$, причем $C_j^2 = C_j^1$ $(1 \leq j \leq r-t)$;

b) $Dom(V_1) = Dom(V_2)$, и $\forall p \in Dom(V_2)(V_2(p) = V_1(p) \cap W_{\mathcal{F}_2})$.

Определим p-морфизм f фрейма $\mathcal{F}_{r+1}$ на фрейм $\mathcal{F}_2$:

$$f : \begin{cases} C_j^1 \longrightarrow C_j^2, 1 \leq j \leq r-t \\ C_j^1 \longrightarrow C_{r-t}^2, r-t+1 \leq j \leq r+1. \end{cases}$$

Очевидно, что M^2 является p-морфным образом модели M^1, тогда по Лемме 1.2 выполняется $(\mathcal{F}_2, w) \not\models_{V_2} A$. Сгустки C^2_{r-t-1} и C^2_{r-t} не изоморфны друг другу как модели, следовательно, M_2 является открытой подмоделью n-характеристической модели $Ch_{LTK_r}(n)$, и по Лемме 1.1 верно $Ch(n) \not\models_V A$.

□

Лемма 4.2. *Элементы модели $Ch_{LTK_r}(n)$ не являются формульными.*

Доказательство. Напомним, что элемент w модели $Ch_{LTK_r}(n) = \langle Ch(n), V\rangle$ является формульным тогда и только тогда, когда существует формула $\beta(w)$ такая, что $w \models_V \beta(w)$ и $\forall z \in W_{Ch(n)}((Ch(n), z) \models_V \beta(w) \Leftrightarrow w = z)$.

Возьмем произвольный элемент w глубины k модели $Ch_{LTK_r}(n)$, т.е. $w \in \mathcal{K} = \{K_1(w)R_T K_2 R_T \dots R_T K_k\} \subset Ch_{LTK_r}(n)$. Предположим, что w является формульным, то есть существует формула $\beta(w)$ временной модальной степени k такая, что $(Ch(n), w) \models_V \beta(w)$ и $\forall z \in W_{Ch(n)}$ выполняется $((Ch(n), z) \models_V \beta(w) \Leftrightarrow w = z)$.

Рассмотрим элемент z глубины $l > k$ и открытую подмодель $\mathcal{N} = \{N_1(z)R_T N_2 R_T \dots R_T N_l\} \subset Ch_{LTK_r}(n)$, порожденную этим элементом, такие, что $\mathcal{K} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, и K_i изоморфен N_i для всех $1 \leq i \leq k$. Так как истинность формул временной модальной степени k на элементе z зависит только от означивания переменных на модели $\{N_1(z)R_T N_2 R_T \dots R_T N_k\}$, то индукцией по длине формулы легко показать, что на z также будет истинна формула $\beta(w)$, при этом $z \neq w$. Таким образом, элементы модели $Ch_{LTK_r}(n)$ не являются формульными.

□

8. Разрешимость по допустимости правил вывода LTK_r

Определим специальный много-модальный фрейм Крипке, который будет играть центральную роль в доказательстве основного результата.

Определим LTK_r-фреймы $\mathcal{F}_P$, $\mathcal{F}_S$, $\mathcal{F}_i$ со следующими свойствами:

(a) $\mathcal{F}_P = \left\langle W_{\mathcal{F}_P}, R^P_T, R^P_\sim, R^P_1, \dots, R^P_k \right\rangle$, где $W_{\mathcal{F}_P}$ состоит только из одной точки @, т.е. $W_{\mathcal{F}_P} := \{@\}$, и все бинарные отношения являются отношениями эквивалентности.

(b) $\mathcal{F}_S = \left\langle W_{\mathcal{F}_S}, R^S_T, R^S_\sim, R^S_1, \dots, R^S_k \right\rangle$ – конечный LTK_r-фрейм. Пусть $C_0, \dots, C_d$ - это перечисление всех $R^S_\sim$-сгустков элементов из $W_{\mathcal{F}_S}$, тогда $W_{\mathcal{F}_S} = \{\bigcup_{i=0}^d C_i\}$ и $C_0 R_T C_1 R_T \dots R_T C_d$. Все бинарные отношения являются стандартными отношениями LTK_r-фрейма.

(c) $\mathcal{F}_i = \left\langle W_{\mathcal{F}_i}, R^i_T, R^i_\sim, R^i_1, \dots, R^i_k \right\rangle$ – конечный LTK_r-фрейм, где $W_{\mathcal{F}_i} = \{w^i_1, \dots, w^i_{J_i}\}$, $w^i_1 R^i_T w^i_2 R^i_T \dots R^i_T w^i_{J_i}$ и $\forall w^i_j, w^i_m (m \neq j) : \neg(w^i_j R^i_\sim w^i_m)$. Другими словами, все $R^i_\sim$-сгустки фрейма $\mathcal{F}_i$ являются вырожденными (т.е. состоят из одного элемента). Бинарные отношения также являются стандартными для LTK_r-фрейма.

Определение 4.1. *SP-фрейм - это кортеж* $\mathcal{F}_{SP} = \left\langle W_{SP}, R^{SP}_T, R^{SP}_\sim, R^{SP}_1, \dots, R^{SP}_k \right\rangle$, *где*

1) $W_{SP} = W_{\mathcal{F}_P} \cup W_{\mathcal{F}_S} \cup \bigcup_{i=0}^d W_{\mathcal{F}_i}$;

2) $R^{SP}_T = R^P_T \cup R^S_T \cup \bigcup_{i=0}^d R^i_T \cup \{\langle z, @\rangle \,|z \in C_d\} \cup \bigcup_{i=0}^d \{\left\langle w^i_{J_i}, z\right\rangle |w^i_{J_i} - R_T\text{-}\textit{максимальный элемент}\mathcal{F}_i, z \in C_i \subseteq \mathcal{F}_S\}$;

3) $R^{SP}_\sim = R^P_\sim \cup R^S_\sim \cup \bigcup_{i=0}^d R^i_\sim$;

4) $R^{SP}_j = R^P_j \cup R^S_j \cup \bigcup_{i=0}^d R^i_j \ (1 \leq j \leq k)$.

Таким образом, SP-фрейм состоит из цепей собственных и вырожденных $R_\sim$-сгустков и адекватен логике LTK_r.

Лемма 4.3. *[Необходимое условие допустимости правил вывода в логике LTK_r] Если правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме не допустимо в логике LTK_r, то существует конечная SP-модель $\mathcal{M}_{SP} = \langle \mathcal{F}_{SP}, V\rangle$, размер которой ограничен размером r_{nf}, такая, что*

1) $\mathcal{F}_{SP} \not\models_V Con(r_{nf})$;

2) $\mathcal{F}_{SP} \models_V Pr(r_{nf})$;

3) для некоторого дизъюнкта $\theta_a \in Pr(r_{nf})$ *и* $\forall i \in \{0, \dots, d\}$ *выполняется*

$$(\mathcal{F}_{SP}, w^i_1) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, w^i_2) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a;$$

4)$\forall z, w \in C_d$: $(\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \theta_k, (\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_m$ *выполняется* $\theta_k \neq \theta_m$;

5)сгусток C_d *не изоморфен как модель элементу* @.

Доказательство. Рассмотрим правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме, т.е.

$$r_{nf} := \epsilon_{r_{nf}}/x_1, \epsilon_{r_{nf}} := \bigvee_{1\leq j\leq s} \theta_j,$$

где $Var(r_{nf}) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Пусть r_{nf} не допустимо в логике LTK_r. Тогда существует подстановка $\Sigma, \Sigma : x_i \to \alpha_i$, при которой каждая переменная $x_i \in Var(r_{nf})$ заменяется формулой α_i, зависящей от некоторого набора пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$. Причем посылка правила $\bigvee_{1\leq j\leq s} \Sigma(\theta_j)$ является теоремой LTK_r, а заключение $\Sigma(x_1) = \alpha_1$ не является теоремой LTK_r. Положим $max\{td(\bigvee_{1\leq j\leq s} \Sigma(\theta_j))\} = f$ и $td(\alpha_1) = p$.

Так как α_1 не является теоремой, то существует LTK_r-фрейм $\mathcal{F}$, для которого $W_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i=0}^{p} C_i$, и означивание S_1 такие, что $(\mathcal{F}, x) \not\models_{S_1} \alpha_1$.

Рассмотрим модель $\langle \mathcal{F}_{SP}, S\rangle$, где:

1. $W_{SP} = \bigcup_{i=0}^{p} C_i \cup \bigcup_{i=0}^{p} \bigcup_{j=1}^{f+2} w_j^i \cup @$;

2. $R_T^{SP} = R_T^P \cup R_T^S \cup \bigcup_{i=0}^{p} R_T^i \cup \{\langle z, @\rangle \,| z \in C_p\} \cup \bigcup_{i=0}^{p}\{\left\langle w_{f+2}^i, z\right\rangle |w_{f+2}^i -$ R_T-максимальный элемент$\mathcal{F}_i, z \in C_i\}$;

3. $R_\sim^{SP} = R_\sim^P \cup R_\sim^S \cup \bigcup_{i=0}^{p} R_\sim^i$;

4. $R_j^{SP} = R_j^P \cup R_j^S \cup \bigcup_{i=0}^{p} R_j^i$ $(1 \leq j \leq k)$.

5. S пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$, входящих в α_i, положим следующим: $S(p_i) = S_1(p_i)$ на сгустках $C_0, \ldots, C_p$, и $p_1 = \cdots = p_n = T$ на элементах w_j^i и @.

Так как временная степень любой подформулы $\bigvee_{1\leq j\leq s} \Sigma(\theta_j)$ не превосходит f, и отношение R_T рефлексивно, легко проверить, что при таком означивании выполняется:

$$\forall \alpha_j \forall i \in \{0, \ldots, p\}[(\mathcal{F}_{SP}, w_1^i) \models_S \alpha_j \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w_2^i) \models_S \alpha_j \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_S \alpha_j]. \tag{4.1}$$

Определим означивание переменных $x_i \in Var(r_{nf})$ на фрейме $\mathcal{F}_{SP}$ следующим образом: $V(x_i) := S(\alpha_i)$. Так как $\bigvee_{1\leq j\leq s} \Sigma(\theta_j) \in LTK_r$, то формула $\bigvee_{1\leq j\leq s} \Sigma(\theta_j)$ истинна на модели $\langle \mathcal{F}_{SP}, S\rangle$. Тогда

$$\forall x \in W_{\mathcal{F}_{SP}}[(\mathcal{F}_{SP}, x) \models_V \bigvee_{1 \leq j \leq s} \theta_j], \tag{4.2}$$

То есть на $\langle \mathcal{F}_{SP}, V \rangle$ выполняется пункт 2) Леммы 4.3. В силу 4.1 и 4.2, для некоторого дизъюнкта $\theta_a \in Pr(r_{nf})$ имеет место

$$\forall i \in \{0, \ldots, p\}[(\mathcal{F}_{SP}, w_1^i) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, w_2^i) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a. \tag{4.3}$$

Следовательно, на $\langle \mathcal{F}_{SP}, V \rangle$ выполняется пункт 3) Леммы 4.3. Отметим также, что в силу выбора означивания S выполняется

$$\exists x \in C_0[(\mathcal{F}_{SP}, x) \not\models_S \alpha_1]$$

и

$$(\mathcal{F}_{SP}, x) \not\models_V x_1.$$

Таким образом, пункт 1) Леммы 4.3 выполнен на модели $\langle \mathcal{F}_{SP}, V \rangle$.

Далее ограничим размер $\mathcal{F}_{SP}$ размером правила r_{nf}. Для этого на каждом R_T^{SP}-сгустке $C_0, \ldots, C_p$ применим стандартную технику $S5$-фильтрации. Также на каждой цепи $\mathcal{F}_{SP}$ применим технику прореживания (drop-point), которая ограничит длины цепей в соответствии правилу r_{nf}.

Этап 1

Рассмотрим цепь сгустков $[C_0, \ldots, C_p, @]$. Ограничим мощность каждого $R_\sim^{SP}$-сгустка размером правила r_{nf}. Для этого воспользуемся стандартной техникой $S5$-фильтрации. Имеем

$$(\forall a \in \mathcal{F}_{SP} \exists^1 \theta_{j_a})[(\mathcal{F}_{SP}, a) \models_V \theta_{j_a}] \& (\exists x \in \mathcal{F}_{SP})[(\mathcal{F}_{SP}, x) \models_V \neg x_1],$$

то есть для любого элемента $a \in \mathcal{F}_{SP}$ существует единственный дизъюнкт посылки правила θ_{j_a} такой, что $a \models_V \theta_{j_a}$.

Для любого сгустка $C_i \in [C_0, \ldots, C_p]$ и любых элементов $a, b \in C_i$ определим отношение

$$a \equiv b \Leftrightarrow \theta_{j_a} = \theta_{j_b}.$$

Такое отношение является отношением эквивалентности, заданным на каждом C_i. Для любого $a \in C_i \subseteq [C_0, \dots, C_p]$, $[a]_\equiv$ это класс всех элементов из C_i, эквивалентных a.

Рассмотрим фильтрованную модель $\mathcal{M}_{SP_\equiv} := \langle \mathcal{F}_{SP_\equiv}, V \rangle$, где $W_{\mathcal{F}_{SP_\equiv}} = \{\bigcup_{i=0}^{p} \bigcup_{j=1}^{f+2} w_j^i \cup [C_0]_\equiv \cup, \dots, \cup [C_p]_\equiv \cup @\}$ и

$$[a]_\equiv R_j^{SP} [b]_\equiv \Leftrightarrow \exists i(a, b \in C_i) \wedge \forall x_i [(\mathcal{F}_{SP}, a) \models_V \Box_j x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, b) \models_V \Box_j x_i];$$

$$[a]_\equiv R_\sim^{SP} [b]_\equiv \Leftrightarrow a R_\sim^{SP} b; [a]_\equiv R_T^{SP} [b]_\equiv \Leftrightarrow a R_T^{SP} b,$$

$$\forall x_i \in Var(r_{nf})[V(x_i) := \{[a]_\equiv | (\mathcal{F}_{SP}, a) \models_V x_i\}.$$

Модель $M_{SP_\equiv}$ получена в результате использования стандартного метода $S5$-фильтрации, поэтому по Лемме 1.5 верно

$$\forall a \in [C_0, \dots, C_p](\mathcal{F}_{SP_\equiv}, [a]_\equiv) \models_V \theta_{j_a}.$$

Из вышесказанного следует, что на модели $\mathcal{M}_{SP_\equiv}$ выполняются условия 1), 2), 3) и 4) Леммы 4.3, при этом размер $R_\sim^{SP}$-сгустков $[C_i]_\equiv$ ограничен размером правила r_{nf}: мощность каждого сгустка не превышает s, где s - количество дизъюнктов посылки r_{nf}.

Теперь ограничим длину цепи $[[C_0]_\equiv, \dots, [C_p]_\equiv, @]$ в соответствии размеру r_{nf}. Для этого применим стандартную технику прореживания сгустков (drop-point). Для удобства переобозначим элемент @ через $[C_{p+1}]_\equiv$. Для каждого $[C_i]_\equiv$ рассмотрим структуру (пару) $\mathcal{M}(i) := \left\langle [C_i]_\equiv, \bigcup_{[a]_\equiv \in [C_i]_\equiv} \theta([a]_\equiv) \right\rangle$, где $0 \leq i \leq p+1$. Если $\mathcal{M}(i_1) = \mathcal{M}(i_2)$, это значит, что C_{i_1} и C_{i_2} изоморфны как модели, то есть существует взаимооднозначное отображение g такое, что $\forall [a]_\equiv \in [C_{i_1}]_\equiv \exists^1 [b]_\equiv \in [C_{i_2}]_\equiv : (\theta([a]_\equiv) = \theta([a]_\equiv))$ & $[b]_\equiv = g([a]_\equiv)$.

Возьмем R_T^{SP}-минимальный сгусток $[C_0]_\equiv$. Он образует структуру (пару) $\mathcal{M}(0) := \left\langle [C_0]_\equiv, \bigcup_{[a]_\equiv \in [C_0]_\equiv} \theta([a]_\equiv) \right\rangle$. Выберем наибольший номер индекса $j_0 \in \{1, \dots, p+1\}$ такой, что $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}(j_0)$, если таковой имеется. Удалим все $R^{SP}_{\sim}$-сгустки из интервала $[[C_1]_\equiv, \ldots, [C_{j_0}]_\equiv]$, получим цепь $[[C_0]_\equiv, [C_{j_0+1}]_\equiv, \ldots, [C_p]_\equiv, [C_{p+1}]_\equiv]$ с прежним означиванием V переменных x_i. Очевидно, что при таком прореживании истинность формул на элементах сгустка $[C_0]_\equiv$ не изменилась. Предположим, что на элементе $[a]_\equiv \in [C_0]_\equiv$ истинна формула $\Diamond_T x_j$. Тогда либо

1.$\exists [c]_\equiv \in [C_0]_\equiv : (\mathcal{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j$,

либо

2.$\exists [c]_\equiv \in [C_{j_0+1}]_\equiv : (\mathcal{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j$.

Так как $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}(j_0)$, то на некотором элементе $[b]_\equiv \in [C_{j_0}]_\equiv$ так же была истинна формула $\Diamond_T x_j$, и выполнялось либо

3.$\exists [c]_\equiv \in [C_{j_0}]_\equiv : (\mathcal{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j$,

либо

4.$\exists [c]_\equiv \in [C_{j_0+1}]_\equiv : (\mathcal{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j$.

Если выполнялось 1., то процедура прореживания не изменила истинности формулы $\Diamond_T x_j$ на элементе $[a]_\equiv \in [C_0]_\equiv$ и $(\mathcal{F}_{SP_\equiv}, [a]_\equiv) \models_V \Diamond_T x_j$. Если же 1. и 3. не выполнялись, то $(\mathcal{F}_{SP_\equiv}, [a]_\equiv) \models_V \Diamond_T x_j$ в силу 4.

Далее продолжаем описанную процедуру для всех последующих сгустков из рассматриваемой цепи, переобозначив при этом сгустки $[C_{j_0+i}]_\equiv$ через $[C_i]_\equiv$, где $i \in \{1, \ldots, p-j_0+2\}$. В конечном итоге получим цепь $R^{SP}_{\sim}$-сгустков, длина которой равна некоторому числу $d+2$ и ограничена размером правила r_{nf}. Для простоты, обозначим $R^{SP}_{\sim}$-сгустки $[C_i]_\equiv$ $(0 \le i \le d)$, обратно, через C_i, а элемент $[C_{d+1}]_\equiv$ через @.

Так как на каждом сгустке $C_i \in [C_0, \ldots, C_d, @]$ истинен единственный набор дизъюнктов $\bigcup_{[a]_\equiv \in C_i} \theta([a]_\equiv)$ посылки r_{nf}, то сгусток C_i не изоморфен как модель сгустку C_{i+1} $(0 \le i \le d-1)$. В том числе, сгусток C_d не изоморфен как модель элементу @, и на модели $\langle \mathcal{F}_{SP_\equiv}, V \rangle$ верно условие 5) Леммы 4.3.

Этап 2

Напомним, что $R^{SP}_{\sim}$-сгустки $C(w^i_j) = w^i_j$ являются одноэлементными. Обозначим через θ^i_j формулу, которая истинна на элементе w^i_j. При этом имеем $\theta^i_1 = \theta^i_2$ для всех $i \in \{0, \ldots, d\}$ по 4.3.

Для начала прореживаем цепь $\left\langle \bigcup_{j=1}^{f+2} w^0_j, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k \right\rangle$, которая „примыкает“ к сгустку C_0, т.е. $\forall z \in C_0\ (w^0_{f+2} R^{SP}_T z)$. Возьмем элемент w^0_2 и выберем наибольший номер $j_1 \in \{3, \ldots, f+2\}$ такой, что $\theta^0_2 = \theta^0_{j_1}$. Рассмотрим интервал $[w^0_1, w^0_{j_1}, w^0_{j_1+1}, \ldots, w^0_{f+2}]$ с означиванием V переменных x_i.

Очевидно, что для любого дизъюнкта $\theta_j \in Pr(r_{nf})$ выполняется

$$([w_1^0, \ldots, w_{f+2}^0] \cup [C_0, \ldots, C_d, @], w_1^0) \models_V \theta_i^0 \Leftrightarrow$$

$$([w_1^0, w_{j_1}^0, \ldots, w_{f+2}^0] \cup [C_0, \ldots, C_d, @], w_1^0) \models_V \theta_i^0;$$

$$([w_1^0, \ldots, w_{f+2}^0] \cup [C_0, \ldots, C_d, @], w_2^0) \models_V \theta_i^0 \Leftrightarrow$$

$$([w_1^0, w_{j_1}^0, \ldots, w_{f+2}^0] \cup [C_0, \ldots, C_d, @], w_{j_1}^0) \models_V \theta_i^0;$$

$$\forall n(1 \le n \le f+2-j_1)[([w_1^0, \ldots, w_{f+2}^0] \cup [C_0, \ldots, C_d, @], w_{1+n}^0) \models_V \theta_i^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ([w_1^0, w_{j_1}^0, \ldots, w_{f+2}^0] \cup [C_0, \ldots, C_d, @], w_{j_1+n}^0) \models_V \theta_i^0].$$

Поэтому мы можем удалить все элементы из интервала $[w_2^0, w_{j_1}^0]$, и на полученной модели также будут выполнятся условия Леммы 4.3.

Далее продолжим описанную процедуру, переобозначив элемент $w_{j_1}^0$ через w_2^0, элемент $w_{j_1+1}^0$ как w_3^0 и т.д. Обозначим через J^0 длину цепи $\left\langle \bigcup_{j=1}^{f+2} w_j^0, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k \right\rangle$ после процедуры прореживания. Размер данной цепи будет ограничен размером правила r_{nf}, так как на каждом шаге дизъюнкт θ_j^0 должен отличаться от предыдущих.

Повторим Этап 2 для остальных цепей $\left\langle \bigcup_{j=1}^{f+2} w_j^i, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k \right\rangle$, где $1 \le i \le d$. Длина каждой i-ой цепи станет равна J^i, где $0 \le i \le d$, при этом J^i ограничено размером правила r_{nf}.

В конечном счете мы получим модель $\mathcal{M}_{SP} = \langle \mathcal{F}_{SP}, V \rangle$, на которой также выполняются условия 1)-5) Леммы 4.3, при этом мощность ее ограничена размером r_{nf}.

$\square$

Из Леммы 1.6 следует, что правило вывода не допустимо в логике, если оно опровергается на некоторой n-характеристической модели данной логики при некотором формульном означивании. В Лемме 4.2 установлено, что элементы n-характеристической модели логики LTK_r не являются формульными. Поэтому для установления недопустимости правила вывода, следует ввести набор формул, определяющий формульное означивание переменных правила r_{nf} на элементах модели $Ch_{LTK_r}(n)$, при котором данное правило опровергается.

Для начала рассмотрим правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме такое, что $Var(r_{nf}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть r_{nf} опровергается на модели $\mathcal{M}_{SP} = \langle \mathcal{F}_{SP}, V \rangle$, ограниченной размером r_{nf}, где

1. $W_{SP} = @ \cup \bigcup_{i=0}^{d} C_i \cup \bigcup_{i=0}^{d} \bigcup_{j=1}^{J^i} w_j^i$;
2. $R_T^{SP} = R_T^P \cup R_T^S \cup \bigcup_{i=0}^{d} R_T^i \cup \{\langle z, @\rangle \,|z \in C_d\} \cup \bigcup_{i=0}^{d} \{\left\langle w_{J_i}^i, z\right\rangle |z \in C_i\}$;
3. $R_\sim^{SP} = R_\sim^P \cup R_\sim^S \cup \bigcup_{i=0}^{d} R_\sim^i$;
4. $R_j^{SP} = R_j^P \cup R_j^S \cup \bigcup_{i=0}^{d} R_j^i$ $(1 \leq j \leq k)$,

и выполняются условия 1)-5) Леммы 4.3. То есть

1)$\mathcal{F}_{SP} \not\models_V Con(r_{nf})$;

2) $\mathcal{F}_{SP} \models_V Pr(r_{nf})$;

3) для некоторого дизъюнкта $\theta_a \in Pr(r_{nf})$ и $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$ выполняется

$$(\mathcal{F}_{SP}, w_1^i) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, w_2^i) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a;$$

4) $\forall z, w \in C_d : (\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \theta_k, (\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_m$ выполняется $\theta_k \neq \theta_m$;

5) сгусток C_d не изоморфен как модель элементу @.

Далее построим формулы, которые будут давать аналог формульности элементов модели $\mathcal{M}_{SP}$. То есть каждому элементу $\mathcal{M}_{SP}$ сопоставим формулу, истинную на этом элементе. С помощью этого набора формул и будем определять формульное означивание переменных правила r_{nf} на элементах n-характеристической модели $Ch_{LTK_r}(n)$, при котором r_{nf} будет опровергаться на $Ch_{LTK_r}(n)$.

Определим формулу

$$\beta_{d+1}(\theta_a) := \bigwedge_{i=0}^{J} \Box_T^i \Box_\sim \theta_a,$$

где $J = d + max\{J^0, \ldots, J^d\}$. Из строения $\mathcal{M}_{SP}$ имеет место

Утверждение 4.1. $(\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \beta_{d+1}(\theta_a)$.

Утверждение 4.2. *Для любого элемента $w \in W_{\mathcal{F}_{SP}}$, не равного @, выполняется*

$$(\mathcal{F}_{SP}, w) \not\models_V \beta_{d+1}(\theta_a).$$

Доказательство. Пусть существует элемент $w \in W_{\mathcal{F}_{SP}}$ глубины $k > 1$ такой, что $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \bigwedge_{i=0}^{J} \Box_T^i \Box_\sim \theta_a$. По определению истинности оператора $\Box_T$ имеем $\forall z \in \{t | w R_T^{SP} t\} : (\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \bigwedge_{i=0}^{J-1} \Box_T^i \Box_\sim \theta_a$. Так как отношение R_T^{SP} является рефлексивным и интранзитивным, то либо $z \in C(w)$, либо $z \in C_{+1} : C(w) R_T^{SP} C_{+1}$. Аналогично, $\forall x \in \{t | z R_T^{SP} t\} : (\mathcal{F}_{SP}, x) \models_V \bigwedge_{i=0}^{J-2} \Box_T^i \Box_\sim \theta_a$, при этом либо $x \in C(w)$, либо $x \in C_{+1}$, либо $x \in C_{+2} : C_{+1} R_T^{SP} C_{+2}$. Продолжая данные рассуждения и принимая во внимание, что $k \leq J$, получим $\forall z \in w^{\leq} : (\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \Box_\sim \theta_a$. В том числе, $\forall z \in C_d$ выполнено $(\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \Box_\sim \theta_a$ и $(\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \Box_\sim \theta_a$. По определению истинности оператора $\Box_\sim$ имеем $\forall z \in C_d$ справедливо $(\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \theta_a$. Тогда в силу пункта 4) Леммы 4.3, сгусток C_d является вырожденным. Тогда C_d изоморфен как модель элементу @, что противоречит пункту 5) Леммы 4.3. Следовательно, $\forall w \in W_{\mathcal{F}_{SP}} : (w \neq @)$ верно $(\mathcal{F}_{SP}, w) \not\models_V \beta_{d+1}(\theta_a)$.

$\Box$

С каждым сгустком C_i модели $\mathcal{M}_{SP}$ свяжем множество дизъюнктов $\mathcal{M}(i) := \{\theta_k | (\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k \;\&\; w \in C_i\}$.

Определим набор формул $\beta_i(\theta_k) := \theta_k \wedge \rho_\sim^i \wedge \rho_{d-i+1} \wedge \rho_T^i$, где $\theta_k \in \mathcal{M}(i)$, $0 \leq i \leq d$ и

$$\rho_\sim^i = \bigwedge_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \Diamond_\sim \theta_m \wedge \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \theta_k;$$

$$\rho_{d-i+1} = \bigwedge_{l=0}^{d-i} (\neg \Diamond_T^l \beta_{d+1}(\theta_a)) \wedge \Diamond_T^{d-i+1} \beta_{d+1}(\theta_a);$$

$$\rho_T^i = \Diamond_T (\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i+1)} \beta_{i+1}(\theta_m)).$$

a) Формула $\rho_\sim^i$ говорит о том, какие $\theta_m \in Pr(r_{nf})$ истинны на элементах сгустка C_i;

b) Если на w истинна формула ρ_{d-i+1}, то ровно через $d-i+1$ „шагов“ по отношению R_T из w достижим элемент, на котором истинна формула $\beta_{d+1}(\theta_a)$;

c) Если на элементе w истинна формула ρ_T^i, то из w достижимы элементы, на которых истинна формула $\bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i+1)} \beta_{i+1}(\theta_m)$.

Утверждение 4.3. $\forall w \in C_i, (0 \leq i \leq d)$ *для некоторого* $\theta_k \in \mathcal{M}(i)$ *верно*

$$(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \beta_i(\theta_k).$$

Доказательство. По определению модели $\mathcal{M}_{SP}$ очевидно, что если $w \in C_i$, то $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \rho^i_\sim$.

Также по определению модели $\mathcal{M}_{SP}$ имеем, что если $w \in C_i$, то @ достижим из w ровно через $d-i+1$ шагов по отношению R_T^{SP}, следовательно, по Утверждению 4.1 выполняется $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T^{d-i+1}\beta_{d+1}(\theta_a)$. Однако, в силу Утверждения 4.2 имеем $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \bigwedge_{l=0}^{d-i}(\neg\Diamond_T^l\beta_{d+1}(\theta_a))$. Таким образом, $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \rho_{d-i+1}$.

Заметим, что в строении $\beta_i(\theta_k)$ в качестве подформулы присутствует формула вида $\beta_{i+1}(\theta_m)$, поэтому для начала рассмотрим элементы сгустка C_d, на который истинна формула $\beta_d(\theta_k)$.

Для любого элемента $w \in C_d$ выполняется $(wR_T^{SP}@)$, следовательно, $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T(\Box_\sim\beta_{d+1}(\theta_a))$ и $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \rho_T^d$. При этом $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k$ для некоторого $\theta_k \in \mathcal{M}(d)$. Тогда $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k \wedge \rho^d_\sim \wedge \rho_1 \wedge \rho_T^d$, т.е. $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \beta_d(\theta_k)$.

Пусть теперь $w \in C_{d-1}$. Так как C_{d-1} является непосредственным R_T^{SP}-предшественником сгустка C_d, и $\forall z \in C_d$ верно $(\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \beta_d(\theta_m)$ для некоторого $\theta_m \in \mathcal{M}(d)$, то по определению истинности оператора $\Diamond_T$ имеем

$$\forall w \in C_{d-1}((\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(d)} \beta_d(\theta_m))).$$

Таким образом, $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k \wedge \rho^{d-1}_\sim \wedge \rho_2 \wedge \rho_T^{d-1}$ и $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \beta_{d-1}(\theta_k)$ для некоторого $\theta_k \in \mathcal{M}(d-1)$. Продолжая аналогичные рассуждения, очевидно, что для произвольного элемента $w \in C_i, (0 \leq i \leq d)$ модели $\mathcal{M}_{SP}$ выполняется $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \beta_i(\theta_k)$ для некоторого $\theta_k \in \mathcal{M}(i)$.

$\square$

С каждым w_j^i свяжем множество $\mathcal{M}(i,j) := \{\theta_k | (\mathcal{F}_{SP}, w_j^i) \models_V \theta_k\}$, которое будет состоять из одного элемента.

Для каждого дизъюнкта $\theta_k \in \mathcal{M}(i,j)$ определим следующий набор формул $\beta_j^i(\theta_k) := \rho_\sim(\theta_k) \wedge \rho_T^{(i,j)}$:

$$\rho_\sim(\theta_k) = \theta_k \wedge \Box_\sim \theta_k;$$

$$\rho_T^{(i,j)} = \bigwedge_{l=0}^{J^i-j} (\neg \Diamond_T^l (\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m))) \wedge \Diamond_T^{J^i-j+1} (\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)).$$

a) Если на элементе w истинна формула $\rho_\sim(\theta_k)$, то на каждом элементе сгустка $C(w)$ истинна θ_k;

b) Если на элементе w истинна формула $\rho_T^{(i,j)}$, то из w ровно через $J^i - j + 1$ „шаг“ по отношению R_T достижимы элементы, на которых истинна формула $\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$.

Утверждение 4.4. $\forall w = w_j^i$ $(1 \le j \le J^i, 0 \le i \le d)$ *выполняется*

$$(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \beta_j^i(\theta_k).$$

Доказательство. По определению $\mathcal{M}_{SP}$ элементы $w = w_j^i$ являются вырожденными $R_\sim^{SP}$-сгустками, и выполняется $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k$ для некоторого $\theta_k \in \mathcal{M}(i,j)$. Следовательно, по определению истинности оператора $\Box_\sim$ имеем $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k \wedge \Box_\sim \theta_k$.

По построению модели $\mathcal{M}_{SP}$ ровно через $J^i - j + 1$ по отношению R_T^{SP} из $w = w_j^i$ достижимы элементы сгустка C_i. При этом, по Утверждению 4.3 и определению истинности оператора $\Box_\sim$, для любого $\in C_i$ выполняется $(\mathcal{F}_{SP}, x) \models_V \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$. По определению истинности оператора $\Diamond_T$ получаем

$$(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T^{J^i-j+1} (\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)).$$

Однако, формула $\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$ не может быть истинна на элементах $w = w_{j+k}^i$ $(1 \le k \le J^i - j)$ в силу строения $\beta_i(\theta_m)$ и Утверждения 4.2.

Следовательно,

$$(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \bigwedge_{l=0}^{J^i-j} (\neg \Diamond_T^l (\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m))).$$

Таким образом, $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \rho_\sim(\theta_k) \wedge \rho_T^{i,j}$, т.е. $(\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \beta_j^i(\theta_k)$.

□

Отметим, что на элементах w_1^i и w_2^i $(0 \leq i \leq d)$ будут истинны формулы вида $\beta_1^i(\theta_a)$ и $\beta_2^i(\theta_a)$ соответственно, в силу пункта 3) Леммы 4.3.

Так как размер модели $\mathcal{M}_{SP}$ ограничен размером правила r_{nf}, то количество формул $\beta_i(\theta_k)$ и $\beta_j^i(\theta_k)$ также будет ограничено размером r_{nf}.

Лемма 4.4. *[Достаточное условие допустимости правил вывода в логике LTK_r] Если правило вывода r_{nf} в редуцированной форме удовлетворяет заключению Леммы 4.3, тогда r_{nf} не допустимо в логике LTK_r.*

Доказательство. Рассмотрим правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме такое, что $Var(r_{nf}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть r_{nf} опровергается на модели $\mathcal{M}_{SP} = \langle \mathcal{F}_{SP}, V \rangle$, ограниченной размером r_{nf}, где $W_{SP} = @ \cup \bigcup_{i=0}^d C_i \cup \bigcup_{i=0}^d \bigcup_{j=1}^{J^i} w_j^i$. И пусть выполняются условия 1)-5) Леммы 4.3.

Рассмотрим n-характеристическую модель $Ch_{LTK_r}(n) = \langle Ch_n, V_0 \rangle$, где $Dom(V_0) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, и n равно числу переменных правила r_{nf}.

Заменим в формулах $\beta_j^i(\theta_k)$ и $\beta_i(\theta_k)$ переменные $x_1, \ldots, x_n$ на переменные $p_1, \ldots, p_n$. Теперь мы можем проверять истинность формул $\beta_j^i(\theta_k)$ и $\beta_i(\theta_k)$ на элементах $\langle Ch_n, V_0 \rangle$.

Определим формулу

$$\beta_j^i(\theta_k)^+ := (\beta_j^i(\theta_k) \vee (\neg \rho_\sim(\theta_k) \wedge \rho_T^{(i,j)})) \wedge \neg \Diamond_T^{J^i-j} (\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)).$$

Обозначим через $w^{\leq i}$ фрейм длины $i+1$, порожденный элементом w, т.е. $w^{\leq i} = \{C(w) R_T C_{+1} R_T \ldots R_T C_{+i}\}$.

Утверждение 4.5. $\forall w \in W_{Ch_n}$ *если* $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$, *тогда*

1) ровно через $J^i - j + 1$ „шаг“ по отношению R_T из w достижим элемент x такой, что $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$;

2) $\forall y \in w^{\leq J^i - j}$ *выполняется*

$$(Ch_n, y) \not\models_{V_0} \bigvee_{l=0}^{d+1} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(l)} \beta_l(\theta_m).$$

Доказательство. 1) Пусть $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$, тогда по определению $\beta_j^i(\theta_k)^+$ имеем $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k) \vee (\neg\rho_\sim \wedge \rho_T^{(i,j)})$. По определению формулы $\beta_j^i(\theta_k)$ и $\rho_T^{(i,j)}$ на элементе w истинна формула $\Diamond_T^{J^i-j+1}(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m))$. Следовательно, через $J^i - j + 1$ „шаг“ по отношению R_T из w достижим элемент $x \in C(x)$, на котором истинна формула $\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$.

2) Пусть $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$, и существует элемент $y \in w^{\leq J^i - j}$ такой, что $(Ch_n, y) \models_{V_0} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(l)} \beta_l(\theta_m)$ для произвольного l.

1. Если $l < i$, тогла по построению формулы $\beta_l(\theta_m)$ выполняется $(Ch_n, y) \models_{V_0} \Diamond_T(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(l+1)} \beta_{l+1}(\theta_m))$. Тогда, по определению истинности оператора $\Diamond_T$ и строению формулы $\beta_l(\theta_m)$, существует элемент $x \in C_{+1}$: $C(y) R_T C_{+1}$ такой, что $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(l+1)} \beta_{l+1}(\theta_m)$.

Формула $\beta_{l+1}(\theta_m)$ содержит в качестве подформулы формулу $\Diamond_T(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(l+2)} \beta_{l+2}(\theta_m))$. Тогда, по определению истинности оператора $\Diamond_T$ и строению формулы $\beta_{l+1}(\theta_m)$, существует элемент $x \in C_{+2} : C_{+1} R_T C_{+2}$ такой, что $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(l+2)} \beta_{l+2}(\theta_m)$.

Продолжая аналогичные рассуждения, легко показать, что существует элемент $z \in C_{+(i-l-1)}$ такой, что $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)$. Также нейдется $x \in C_{+(i-l)} : C_{+(i-l-1)} R_T C_{+(i-l)}$, на котором при означивании V_0 истинна формула $\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$. Из п. 1) Утверждения 4.5 следует, что x достижим из w за $J^i - j + 1$ „шаг“ по отношению R_T. Таким образом, элемент z достижим из w за $J^i - j$ „шагов“. Тогда, по определению истинности оператора $\Diamond_T$ выполняется $(Ch_n, w) \models_{V_0} \Diamond_T^{J^i-j}(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m))$. Однако, по определению $\beta_j^i(\theta_k)^+$ имеем $(Ch_n, w) \models_{V_0} \neg\Diamond_T^{J^i-j}(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m))$, и получаем противоречие. Тогда, для любого элемента $y \in w^{\leq J^i - j}$ выполняется $(Ch_n, y) \not\models_{V_0} \bigvee_{l=0}^{d+1} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(l)} \beta_l(\theta_m)$.

2. Если $l \geq i$, тогда из строения формулы $\beta_l(\theta_m)$ имеем, что через $d - l + 1$ „шаг“ по отношению R_T из y достижим элемент z : $(Ch_n, z) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$. Строение формулы $\beta_{d+1}(\theta_a)$ и определение истинности оператора $\Box_T$ требуют выполнение формулы $\Box_\sim \theta_a$ на последовательности из J $R_\sim$-сгустков, где

$J = d + max\{J^0, \ldots, J^d\}$. Так как $(J^i - j + 1) + (d - i + 1) < J$ и $d - l + 1 \leq d - i + 1$, то ровно через $(J^i - j + 1) + (d - i)$ „шагов“ по отношению R_T из w достижим сгусток C такой, что $\forall x \in C$ выполняется $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_{\sim}\theta_a$. Тогда $\mathcal{M}(d) = \{\theta_a\}$, что противоречит выполнению п.п. 4) и 5) Леммы 4.3.

$\Box$

Из Утверждения 4.5 вытекает

Следствие 4.1. $\forall w \in W_{Ch_n}$ *если* $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$, *тогда*

$$(Ch_n, w) \not\models_{V_0} \bigvee_{m \neq i \& l \neq j} \beta_l^m(\theta_k)^+.$$

Зададим формульные множества $S(\theta_k)$, где $\theta_k \in Pr(r_{nf})$:

$$S(\theta_k) = \{w \in W_{Ch_n} | (Ch_n, w) \models_{V_0} \psi_k\},$$

где

$$\psi_k := \bigvee_{i=1}^{d+1} \beta_i(\theta_k) \vee \bigvee_{l=0}^{d} \bigvee_{j=1}^{J^l} \beta_j^l(\theta_k)^+,$$

для всех $k \neq a$;

$$S(\theta_a) = \neg(\bigvee_{k \neq a} \psi_k).$$

Другими словами, если выполняется $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_i(\theta_k)$, или ровно через $J^i - j + 1$ $(1 \leq j \leq \max\{J^0, \ldots, J^d\})$ „шаг“ по отношению R_T из w достижим элемент x такой, что $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_{\sim} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$, то w принадлежит некоторому множеству $S(\theta_k)$, $\theta_k \in Pr(r_{nf})$. Если же ни одна из формул $\beta_i(\theta_k)$, $\beta_j^l(\theta_k)^+$ не истинна на элементе w, то $w \in S(\theta_a)$.

Из строения формул $\beta_i(\theta_k)$, Утверждения 4.5 и Следствия 4.1 выполняется

Следствие 4.2. $\forall w \in W_{Ch_n}$ *существует единственное множество* $S(\theta_k)$ *такое, что* $w \in S(\theta_k)$.

Теперь зададим означивание S_0 переменных $x_1, \ldots, x_n$ правила r_{nf} на Ch_n с помощью формульных множеств $S(\theta_k)$.

$$S_0(x_i) = V_0(\bigvee_{x_i^0 \in \theta_k} \psi_k). \tag{4.4}$$

Запись $x_i^0 \in \theta_k$ означает, что если $w \models \theta_k$, то $w \models x_i$. То есть переменная x_i входит в формулу θ_k без отрицания.

Покажем теперь, что правило вывода r_{nf} опровергается на новой модели $\langle Ch_n, S_0 \rangle$. Достаточно проверить следующие условия:

1) $\forall w \in W_{Ch_n} : (Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_k$,

2) $\exists w \in W_{Ch_n} : (Ch_n, w) \not\models_{S_0} x_1$.

Утверждение 4.6. $\forall w \in W_{Ch_n}$ *выполняется*

$$w \in S(\theta_k) \Rightarrow (Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_k.$$

Доказательство. 1. Пусть $w \in S(\theta_k)$ и $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_i(\theta_k)$. Тогда:

а) из строения формулы $\beta_i(\theta_k)$ и подформулы $\rho^i_\sim$ следует $\forall z \in C(w)$: $(Ch_n, z) \models_{V_0} \beta_i(\theta_m)$ для некоторого $\theta_m \in \mathcal{M}(i)$. Из определения множеств $S(\theta_m)$ имеем, что каждый элемент z сгустка $C(w)$ принадлежит одному из множеств $S(\theta_m)$, где $\theta_m \in \mathcal{M}(i)$. Из 4.4 получаем, что для каждого элемента $z \in C(w)$ выполняется $(Ch_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_m} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_m} x_i^1$, для некоторого $\theta_m \in \mathcal{M}(i)$.

По Утверждению 4.3 для каждого элемента $z' \in C_i \subset W_{\mathcal{F}_{SP}}$ выполняется $(\mathcal{F}_{SP}, z') \models_V \beta_i(\theta_m)$, для некоторого $\theta_m \in \mathcal{M}(i)$. В том числе существует w' такой, что $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \beta_i(\theta_k)$. Тогда $(\mathcal{F}_{SP}, z') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_m} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_m} x_i^1$ и $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_k} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_k} x_i^1$. Следовательно, для любого элемента $z \in C(w) \subset W_{Ch_n}$ найдется$z' \in C_i \subset W_{\mathcal{F}_{SP}}$ такой, что $(Ch_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, z') \models_V x_i$.

б) из строения $\beta_i(\theta_k)$ и подформулы ρ^i_T следует $\forall z \in C_{+1} C(w) R_T C_{+1}$: $(Ch_n, z) \models_{V_0} \beta_{i+1}(\theta_l)$ для некоторого $\theta_l \in \mathcal{M}(i+1)$. Следовательно, по определению множеств $S(\theta_l)$, каждый элемент z сгустка C_{+1} принадлежит некоторому множеству $S(\theta_l)$. Тогда по 4.4 имеем, что для каждого элемента $z \in C_{+1}$ выполняется $(Ch_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_l} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_l} x_i^1$, для некоторого $\theta_m \in \mathcal{M}(i+1)$.

Также для каждого $z' \in C_{i+1} \subset W_{\mathcal{F}_{SP}}$ выполняется $(\mathcal{F}_{SP}, z') \models_V \beta_{i+1}(\theta_l)$, для некоторого $\theta_l \in \mathcal{M}(i+1)$. Тогда по определению формулы θ_l имеем $(\mathcal{F}_{SP}, z') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_l} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_l} x_i^1$. И для любого элемента $z \in C_{+1} \subset W_{Ch_n}$

найдется $z' \in C_{i+1} \subset W_{\mathcal{F}_{SP}}$ такой, что $((Ch_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, z') \models_V x_i$.

Так как $C(w) R_T C_{+1}$, $C_i R_T^{SP} C_{i+1}$, и временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1, то истинность формулы θ_k на элементе w зависит только от означивания переменных на сгустках $C(w)$ и C_{+1}, а на элементе w' на сгустках C_i и C_{i+1}. Таким образом, $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_k \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \theta_k$ и $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_k$.

2. Пусть теперь $w \in S(\theta_k)$ и $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta^i_j(\theta_k)^+$. Из определения формулы $\beta^i_j(\theta_k)^+$ следует, что $\forall z \in C(w)$ также выполняется $(Ch_n, z) \models_{V_0} \beta^i_j(\theta_k)^+$. Тогда по определению множеств $S(\theta_k)$ имеем $\forall z \in C(w) : z \in S(\theta_k)$. Из 4.4 следует, что $(Ch_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_k} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_k} x_i^1$.

По Утверждению 4.4 для $w' = w^i_j \subset W_{\mathcal{F}_{SP}}$ верно $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \beta^i_j(\theta_k)$ и $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \theta_k$, следовательно, $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_k} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_k} x_i^1$. Тогда для любого $z \in C(w) \subset W_{Ch_n}$ верно $(Ch_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V x_i$.

Рассмотрим сгусток $C_{+1} : C(w) R_T C_{+1}$. Элемент x, который удовлетворяет условию $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_{\sim} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$ достижим из любого $z \in C_{+1}$ ровно через $J^i - j$ „шагов“ по отношению R_T. Тогда по определению истинности оператора $\Diamond_T$ выполняется $(Ch_n, z) \models_{V_0} \Diamond_T^{J^i - j}(\Box_{\sim} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m))$.

Так как $(Ch_n, w) \models_{V_0} \neg \Diamond_T^{J^i - j}(\Box_{\sim} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m))$, то $\forall z \in C_{+1}$: имеет место $(Ch_n, z) \models_{V_0} \neg \Diamond_T^{J^i - j - 1}(\Box_{\sim} \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m))$. И $\forall z \in C_{+1}$ верно $(Ch_n, z) \models_{V_0} \beta^i_{j+1}(\theta_m)^+$. Тогда по определению множеств $S(\theta_m)$ имеем $z \in S(\theta_m)$, для $\theta_m \in \mathcal{M}(i, j+1)$. Следовательно, по 4.4 получаем $(Ch_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_m} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_m} x_i^1$.

По Утверждению 4.4 для $w' = w^i_{j+1} \subset W_{\mathcal{F}_{SP}}$ верно $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \beta^i_{j+1}(\theta_m)$ и $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \theta_m$. Тогда по определению формулы θ_k имеет место $(\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_m} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_m} x_i^1$. И для любого элемента $z \in C_{+1} \subset W_{Ch_n}$ справедливо $(Ch_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V x_i$.

Учитывая, что временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1, получаем $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_k \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w') \models_V \theta_k$ и $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_k$.

3. Пусть $w \in S(\theta_a)$ и $(Ch_n, w) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$, тогда по 4.4 справедливо $(Ch_n, w) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$. Строение формулы $\beta_{d+1}(\theta_a)$ и определение истинности оператора $\Box_T$ требуют выполнение формулы $\Box_{\sim}\theta_a$ на последовательности из J $R_{\sim}$-сгустков, где $J = d + max\{J^0, \dots, J^d\}$, тогда

a) либо $\forall z : (w R_T z)$ выполняется $(Ch_n, z) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$;

b) либо $\forall z \in C(w) : (Ch_n, z) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$ и $\forall y \in C_{+1}$:

$(Ch_n, y) \models_{V_0} \bigwedge_{i=1}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+$.

По определению множества $S(\theta_a)$, в обоих случаях $\forall z : (wR_Tz)$ имеет место $z \in S(\theta_a)$. Тогда по 4.4 выполняется $(Ch_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$.

Из Утверждению 4.1 и строения формулы $\beta_{d+1}(\theta_a)$ следует, что $(\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$. Тогда для любого элемента $z : (wR_Tz)$ выполняется $(Ch_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V x_i$.

Так как временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1, и $@R_T^{SP}@$, то $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_a \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a$. Тогда $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_a$.

4. Рассмотрим ситуацию, когда элемент w принадлежит множеству $S(\theta_a)$ и $(Ch_n, w) \models_{V_0} \bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+$.

а) Пусть $\forall y \in C_{+1} : C(w)R_TC_{+1}$ выполняется $(Ch_n, y) \models_{V_0} \beta_1^i(\theta_a)$. То есть элемент x такой, что $(Ch_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$ достижима из w ровно через $J^i + 1$ „шаг“ по отношению R_T. Тогда по определению множества $S(\theta_a)$ имеем $y \in S(\theta_a)$, и по 4.4 выполняется $(Ch_n, y) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$.

По определению формулы $\bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+$, $\forall z \in C(w)$ верно $(Ch_n, z) \models_{V_0} \bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+$. Тогда $z \in S(\theta_a)$ и по 4.4 имеем $(Ch_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$.

По Утверждению 4.4 и строению формул $\beta_1^i(\theta_a)$, $\beta_2^i(\theta_a)$, имеет место $(\mathcal{F}_{SP}, w_1^i) \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$ и $(\mathcal{F}_{SP}, w_2^i) \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$.

Тогда $\forall z \in C(w) \subset W_{Ch_n}$ выполняется $(Ch_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w_1^i) \models_V x_i$ и $\forall y \in C_{+1} : C(w)R_TC_{+1}$ выполняется $(Ch_n, y) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w_2^i) \models_V x_i$.

Учитывая, что временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1, то $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_a \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w_1^i) \models_V \theta_a$. Следовательно, $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_a$.

б) Пусть $\forall y \in C_{+1} : (C(w)R_TC_{+1})$ выполняется $(Ch_n, y) \models_{V_0} \bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathcal{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+$. Проводя аналогичные рассуждения, имеем, что $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_a \Leftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a$ и $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_a$. □

Утверждение 4.7. $\exists w \in W_{Ch_n} : (Ch_n, w) \models_S \neg x_1$.

Доказательство. Из п. 1) Леммы 4.3 следует, что $\neg x_1 \in \theta_k$, для некоторого $\theta_k \in Pr(r_{nf})$. По построению n-характеристической модели $\langle Ch_n, V_0 \rangle$ найдется элемент $w \in Ch_n$ такой, что $(Ch_n, w) \models_{V_0} \bigvee_{i=0}^{d+1} \beta_i(\theta_k)$. Тогда по определению множеств $S(\theta_k)$ получаем, что $w \in S(\theta_k)$. По Утверждению 4.6 следует, что $(Ch_n, w) \models_{S_0} \theta_k$. Следовательно, $(Ch_n, w) \models_{S_0} \neg x_1$.

□

Из вышесказанного следует, что при означивании S_0 на каждом элементе Ch_n истинна посылка r_{nf}, и существуют элементы, на которых опровергается заключение. Таким образом, r_{nf} не допустимо в логике LTK_r.

□

Из Леммы 4.3 и Леммы 4.4 следует, что для произвольного правила r_{nf} в редуцированной нормальной форме можно за конечное число шагов определить, допустимо r_{nf} в логике LTK_r или нет. Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Логика LTK_r разрешима относительно допустимости правил вывода.*

Данная глава полностью посвящена поиску алгоритма распознавания допустимых правил вывода логики LTK_r. Проделанная работа стала основанием сформулировать Теорему 4.1, выполнив тем самым, вторую основную цель диссертации - исследовать вопрос разрешимости по допустимости правил вывода логики LTK_r.

Заключение

Интерес к изучению правил вывода много-модальных логик возрос с развитием компьютерных наук. Исследование искусственного интеллекта требует языка, приспособленного для описания различных динамических систем. Язык много-модальных логик, сочетающих модальности знания и времени, отлично справляется с этой задачей. При этом, применение правил вывода и секвентов предоставляют очень тонкий и выразительный аппарат для моделирования мышления и вычислений. Однако, большинство известных результатов в теории много-модальных логик получено для логик с транзитивными отношениями достижимости, в то время, как нетранзитивные логики остаются мало изученными. Связано это с тем, что стандартные техники исследования, напрямую применимые в транзитивном случае, в нетранзитивном случае напрямую не применимы и требуют существенной переработки алгоритмов исследования. Поэтому полученные результаты могут быть полезны при дальнейшем изучении нетранзитивных много-модальных логик и допустимых правил вывода. Кроме того, они могут иметь приложение при разработке искусственного интеллекта и computer science.

Главный теоретический результат диссертации состоит в доказательстве разрешимости относительно допустимости правил вывода много-модальной логики знания и времени LTK_r с интранзитивным отношением времени. Алгоритм доказательства, используемый в работе, может быть применен для исследования допустимых правил вывода других нетранзитивных логик.

Дальнейшие исследования также связаны с изучением свойств много-модальных нетранзитивных логик. В частности, планируется доказать Гипотезу 2.1, выдвинутую в §6, о конечной аксиоматизации логики LTK_r. Также интересным представляется вопрос унификации в случае много-модальных нетранзитивных логик.

Список литературы

[1] Кошелева А.В. Разрешимость проблемы допустимости правил вывода в некоторых $S5_t$-логиках / А.В. Кошелева // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44. — № 4. — С. 438–458.

[2] Минц Г.Е. Производность допустимых правил / Г.Е. Минц // Записки научного семинара ЛОМИ АН СССР. — 1972. — № 32. — С. 85–99.

[3] Рыбаков В.В. Алгебраические методы в пропозициональной логике / В.В. Рыбаков // Семиотика и информатика. — 1986. — № 28. — С. 102–121.

[4] Рыбаков В.В. Базисы допустимых правил модальных систем Grz и интуиционистской логики / В.В. Рыбаков // Математический сборник. — 1987. — Т. 56. — № 2. — С. 311–331.

[5] Рыбаков В.В. Допустимость правил вывода и логические уравнения в модальных логиках, аксиоматизирующих доказуемость / В.В. Рыбаков // Известия АН СССР. — 1990. — № 3. — С. 357–377.

[6] Рыбаков В.В. Критерий допустимости правил вывода с параметрами в интуиционистской пропозициональной логике / В.В. Рыбаков // Известия АН СССР: Сер. математическая. — 1990. — Т. 54. — № 6. — С. 693–703.

[7] Рыбаков В.В. Разрешимость по допустимости модальной системы Grz и интуиционистской логики / В.В. Рыбаков // Известия АН СССР: Сер. математическая. — 1986. — Т. 50. — № 3. — С. 598–616.

[8] Рыбаков В.В. Универсальные теории свободных λ алгебр при $\lambda \supseteq S4.3$

/ В.В. Рыбаков //Сложностные проблемы математической логики. — 1985. — С. 72–75.

[9] Рыбаков В.В. Уравнения в свободной топобулевой алгебре / В.В. Рыбаков // Алгебра и логика. — 1986. — Т. 25. — № 2. — С. 172–204.

[10] Рыбаков В.В. Уравнения в свободной топобулевой алгебре и проблема подстановки / В.В. Рыбаков // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 287. — № 3. — С. 554–557.

[11] Calardo E. An axiomatisation for the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK / E. Calardo, V.V. Rybakov // Logic Journal of the IGPL. — 2007. — V. 15. — № 3. — P. 239-254

[12] Calardo E. Admissible inference rules in the linear logic of knowledge and time LTK / E. Calardo // Logic Journal of the IGPL. — 2006. — V. 14. — № 1. — P. 15-–34.

[13] Calardo E. Combining time and knowledge, semantic approach / E. Calardo, V.V. Rybakov // Bulletin of the Section of Logic. — 2005. — V. 34. — № 1. — P. 13–21.

[14] Chagrov A.V. Modal Logic / A.V. Chagrov, M.V. Zakharyaschev // London, Cambridge Press. — 1997. — 589 p.

[15] Clarke E. Another look at LTL model checking / E. Clarke, O. Grumberg, K.P. Hamaguchi // Proceedings of a Conference on Computer Aided Verification (CAV). Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag. — 1992. — V. 818.

[16] Dixon C. Resolution for temporal logics of knowledge / C. Dixon, M. Fisher, M. Wooldridge // Journal of Logic and Computation. — 1998. — V. 8. — № 3. — P. 345—372.

[17] Fagin J. The hierarchical approach to modeling knowledge and commond knowledge / J. Fagin, E. Geanakoplos, J.Y. Halpern, M.Y. Vardi // International Journal of Game Theory. — 1999. — V. 28. — P. 331-365.

[18] Fagin R. Reasoning About Knowledge / J. Fagin, J.Y. Halpern, Y. Moses, M.Y. Vardi // Massachussets, Cambridge, MIT Press. — 1995. — 491 p.

[19] Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic / H. Fridman // Journal of Symbolic Logic. — 1975. — V. 40. — № 3. — P. 113–130.

[20] Gabbay D. Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications / D. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter, M. Zakharyaschev // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. — V. 148. — Elsevier, North-Holland, New York - Amsterdam. — 2003. — 768 p.

[21] Ghilardi S. Unification in intuitionistic logic / S. Ghilardi // Journal of Symbolic Logic. —1999. — V. 64 . — P. 859–880.

[22] Goldblatt R. Logics of Time and Computation / R. Goldblatt // Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University. — 1987. — № ?7. — 126 p.

[23] Golovanov M. Logic of Visibility, Perception, and Knowledge and Admissible Inference Rules / M. Golovanov, A. Kosheleva, V. Rybakov // Logic Journal of the IGPL. — 2005. — V. 13. — № 2. — P. 201 –209.

[24] Golovanov M.I.. A necessary condition for rules to be admissible in temporal tomorrow-logic / M.I. Golovanov, V.V. Rybakov, E.M. Yurasova // Bulletin of the section of Logic. — 2003. — V. 32. — № 4. — P. 213–220.

[25] Halpern J.Y. Reasoning About Common Knowledge and with Infinitely Many Agents / J.Y. Halpern, R. Shore, M.Y. Vardi // Information and Computation. — 2004. — V. 191. — № 1. — P. 1–40.

[26] Halpern J.Y. Complete Axiomatization for Reasoning About Knowledge and Time / J.Y. Halpern, R. Van Der Meyden, M.Y Vardi // SIAM Journal on Computing. — 2004. — V. 33. — № 3. — P. 674–703.

[27] Harrop R. Concerning Formulas of the Types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$ / R. Harrop // Journal of Symbolic Logic. — 1960. — V. 25. — № 1. — P. 27–32.

[28] Lemmon E.J. Algebraic semantics of modal logics. Part I / E.J. Lemmon // Journal of Symbolic Logic. — 1966. — V. 31. — P. 46–64.

[29] Lemmon E.J. Algebraic semantics of modal logics. Part II / E.J. Lemmon // Journal of Symbolic Logic. — 1966. — V. 31. — P. 191–219.

[30] Lorenzen P. Einfung in Operative Logik und Mathematik / P. Lorenzen // Berlin, Gottingen-Heidelberg . — 1955. — 412 p.

[31] Manna Z. Temporal Ligic of Reactive and Concurrent Systems: Specification / Z. Manna, A. Pnueli // Springer-Verlag. — 1992.

[32] Manna Z. Temporal Verification of Reactive Sistems: Safety / Z. Manna, A. Pnueli // Springer-Verlag. — 1995.

[33] Penczek W.. Verifying epistemic properties of multi-agent systems via bounded model checking / W. Penczek, Lomusiko // Fundamenta Informaticae. — 2003. — V. 55. — P. 167–185.

[34] Pnueli A. The temporal logic of programs / A. Pnueli // Proceedings of the Eighteenth Symposium on Foundations of Computer Science. — 1977. — P. 46–57.

[35] Pnueli A.. A deductive proof system for CTL^* / A. Pnueli, Y. Kesten // Proceedings of the 13th Conference on Concurrency Theary, Brno, Czech Republic, Lecture Notes in Computer Science, Springer. — 2002. — V. 2421. — P. 24–40.

[36] Rybakov V.V. A criterion for admissibility of rules in the modal system $S4$ and the intuitionistic logic / V.V. Rybakov // Algebra and Logic. — 1984. — V. 23. — № 5. — P. 369—384.

[37] Rybakov V.V. Bases of admissible rules of the logics $S4$ and Int / V.V. Rybakov // Algebra and Logic. — 1985. — V. 24. — № 1. — P. 55—68.

[38] Rybakov V.V. Problems of admissibility and substitution, logical equations and restricted theories of free algebras / V.V. Rybakov // In book: Logic Methodology and Philosophy of Science VIII, Studies in Logic and

Foundations of Mathematics/ Eds. Fienstad J.E., Frolov I.T., and Hilpinen R. — Amsterdam. — 1989. — V. 126. — P. 121–139.

[39] Rybakov V.V. Logical Equations and Admissible Rules of Inference with Parameters in Modal Provability Logics / V.V. Rybakov // Studia Logica. — 1990. — V. 49. — № 2. — P. 215–239.

[40] Rybakov V.V. Problems of substitution and admissibility in the modal system Grz and intuitionistic calculus / V.V. Rybakov // Annals of Pure and Applied Logic. — 1990. — V. 50. — P. 71–106.

[41] Rybakov V.V. Rules of Inference with parameters for intuitionistic logic / V.V. Rybakov // Journal of Symbolic Logic. — 1992. — V. 57. — № 3. —- P. 912–923.

[42] Rybakov V.V. Criteria for admissibility of inference rules. Modal and intermediate logics with the branching property / V.V. Rybakov // Studia Logica. — 1994. — V. 53. — № 2. — P. 203–225.

[43] Rybakov V.V. Admissible Logical Inference Rules / V.V. Rybakov // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Sci.Publ., North-Holland. — New York. — Amsterdam. — 1997. — V. 136. — 617 p.

[44] Rybakov V.V. Refined common knowledge logics or logics of common information / V.V. Rybakov // Archive for mathematical Logic. — 2003. — V. 42. — P. 179-–200.

[45] Rybakov V.V. Logical Consecutions in Intransitive Temporal Linear Logic of Finite Intervals / V.V. Rybakov // Journal of Logic Computation. — 2005. — V. 15. — № 5. — P. 663–678.

[46] Rybakov V.V. A Hybrid of Tencse Logic $S4_T$ and Multi-Agent Logic with Interacting Agents / V.V. Rybakov, S.V. Babenyshev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2008. — V. 1. — № 4. — P. 399–409.

[47] Rybakov V.V. Inference Rules in Multi-Agents' Temporal Logics / V.V. Rybakov // Springer-Varlag Berlin Heidelberg. — 2011. — P. 160–176.

[48] Rybakov V.V. Multi-Agent Logic based on Temporary Logic $TS4K_n$ serving Web Search / V.V. Rybakov // KES, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. — 2012. V. 243. — P. 108–117.

[49] Rybakov V.V. Unifiers in transitive modal logics for formulas with coefficients (meta-variables) / V.V. Rybakov // Logic Journal of IGPL. — 2013. — V. 21. — № 2. — P. 205–215.

[50] Rybakov V.V. Unification and admissible rules for paraconsistent minimal Johanssons' logic J and positive intuitionistic logic $IPC+$ / V.V. Rybakov, S.P. Odintsov // Annals of Pure and Applied Logic. — 2013. — V. 164. — № 7. — P. 771–784.

[51] Rybakov V.V. Writing out unifiers for formulas with coefficients in intuitionistic logic / V.V. Rybakov // Logic Journal of IGPL. — 2013. — V. 21. — № 2. — P. 187–198.

[52] Rybakov V.V. Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU / V.V. Rybakov // Logic Journal of IGPL. — 2014. — V. 22. — № 4. — P. 665–672.

[53] Rybakov V.V. Linear Non-Transitive Temporal Logic, Knowledge Operations, Algorithms for Admissibility / V.V. Rybakov // Cornell University Library, AzXiv.org, arXiv:1406.2783 [cs.LO].

[54] Thomason R.H. Combination of tense and modality / R.H. Thomason // In book: Handbook of Philosophical Logic/ Eds. Gabbay D. and Guenthner F. — The Netherlands. — 1984. — V. 2. — P, 135–165.

[55] Van der Meyden R. Model checking knowledge and time in systems with perfect recall / R. Van der Meyden, N.V. Shilov // Lecture Notes in Computer Science. — Springer. — 1999. — V. 1738. — P. 432-–445.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК

[56] Lukyanchuk A.N. Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge / A.N. Lukyanchuk // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics — 2013. — V. 6. — № 2. — P. 220-226.

[57] Лукьянчук А.Н. Допустимые правила вывода линейной логики знания и времени LTK_r с интранзитивным отношением времени / А.Н. Лукьянчук, В.В. Рыбаков // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56. — № 3. — С. 573–593.

Прочие публикации

[58] Лукьянчук А.Н. Некоторые свойства линейной логики знания и времени LTK / А.Н. Лукьянчук // Материалы VIII всерос. научно-технической конф. студ., аспир. и мол. ученых, посвящ. 155-летию со дня рождения К.Э.Циолковского. — Красноярск, 19–27 апреля 2012. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сиб. федер. ун-т.,2012, № заказа 7880/отв. ред. О.А.Краев.

[59] Лукьянчук А.Н. Разрешимость линейной логики знания и времени / А.Н. Лукьянчук // Сборник тезисов VII всесибирского конгресса женщин-математиков. — Красноярск : СФУ — 2012. — С.128–129.

[60] Лукьянчук А.Н. О конечной аксиоматизации линейной логики знания и времени LTK_r с интранзитивным отношением времени / А.Н. Лукьянчук, В.В. Римацкий // Тезисы докладов междунар. конфе. «Мальцевские чтения». — Новосибирск, 11-15 ноября 2013. [Электронный ресурс] — Новосибирск: НГУ — 2013. — С.53.

[61] Лукьянчук А.Н. Аксиоматизация линейной логики Знания и Времени LTK_r / А.Н. Лукьянчук, В.В. Римацкий // Тезисы докладов междунар. конф. «Алгебра и Логика: Теория и Приложения», посвящ. памяти В.П. Шункова. — Красноярск, 21-27 июля 2013. — Красноярск: СФУ — 2013. — С.87.

[62] Лукьянчук А.Н. О допустимости правил вывода линейной логики знания и времени LTK_r с интранзитивным отношением времени / А.Н. Лукьянчук // Материалы междунар. конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» и сопут. мол. летн. шк. «Вычислимость и вычислимые структуры». — Казань, 2-6 июня 2014. — Казань: КФУ. — 2014. — С.97.

[63] Лукьянчук А.Н. Допустимые правила вывода линейной логики Знания и Времени LTK_r с интранзитивным отношением времени. Гипотеза о конечной аксиоматизируемости LTK_r / А.Н. Лукьянчук // Тезисы докладов междун. конф. «Мальцевские чтения», посвя. 75-летию Ю. Л. Ершова. — Новосибирск, 3-7 мая 2015. [Электронный ресурс] — Новосибирск: НГУ — 2015. — С. 214.

[64] Lukyanchuk A.N. Linear Intransitive Temporal Logic of Knowledge LTK_r, Decision Algorithms, Inference Rules / A.N. Lukyanchuk, V.V. Rybakov // Cornell University Library, AzXiv.org, arXiv:1407.7136 [cs.LO].