

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи



Мкртчян Александр Джанибекович

**ПРОДОЛЖИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ПОСРЕДСТВОМ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Цих Август Карлович

Красноярск 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ	15
1.1 Продолжение путем мероморфных интерполяций коэффициентов	15
1.1.1 Условия продолжимости в сектор	16
1.1.2 Условия продолжимости в некоторую окрестность дуги	23
1.1.3 Условия продолжимости на всю комплексную плоскость кроме некоторой дуги	25
1.2 Примеры	26
1.3 О непродолжимости одномерных рядов	30
ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ КРАТНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ	36
2.1 Критерий продолжимости кратного ряда через семейство полидуг	36
2.1.1 Формулировка основного результата	37
2.1.2 Необходимость условия Теоремы 2.1	39
2.1.3 Достаточность условия Теоремы 2.1	46
2.2 Условия продолжимости кратного ряда в секториальную область	51
2.3 Пример	57
2.4 О непродолжимости кратных степенных рядов	61
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	65
ПРИЛОЖЕНИЕ	66
П.1 Индикатор роста целой функции	66
П.2 Многомерные вычеты и аналог леммы Жордана	69
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	72

ВВЕДЕНИЕ

Аналитические функции играют важную роль в математике и различных науках точного естествознания, в частности, при моделировании многих физических процессов, при разработке методов работы с данными и обработке цифровых сигналов. Они составляют пласт математики, лежащий на стыке между точными вычислениями и приближенными. Один из способов идентификации аналитической функции основан на разложении ее в степенной ряд (подход Вейерштрасса). На языке коэффициентов ряда можно описывать свойства аналитической функции, важнейшим из которых является свойство аналитической продолжимости ряда за пределы его области сходимости. Такая проблематика аналитического продолжения, а также описания связей между особенностями степенных рядов и их коэффициентами активно исследовалась в прошлом столетии в работах Адамара [1], Линделефа [2], Поля [3], Сеге [4], Карлсона [5] и многих других известных математиков (см. список литературы в книге Бибера [6]).

Наиболее эффективные и завершенные результаты были получены для простых (одномерных) рядов, у которых коэффициенты ряда интерполируются значениями $\varphi(k)$ целой функции $\varphi(z)$ на множестве натуральных чисел: $k \in \mathbb{N}$ (см., например, [7], [8], [9]). Согласно лемме Абеля область сходимости одномерного ряда – круговая, поэтому речь о продолжимости суммы степенного ряда за пределы области сходимости можно вести на языке граничной дуги, через которую возможно продолжение. Такая дуга называется *дугой регулярности*. Описание открытой дуги регулярности было сделано в статьях Аракеяна [10], [11]. В терминах индикатрисы роста интерполирующей целой функции им дан критерий для того, чтобы выбранная дуга единичной окружности была дугой регулярности для рассматриваемого ряда.

Поля получил условия для продолжимости ряда на всю комплексную

плоскость, кроме некоторой граничной дуги [12].

Также глубоко изучена проблема нахождения множеств сингулярных точек ряда, т.е. точек, через которые сумма ряда не продолжается [13], [14], [6]. В такой постановке указанной проблемы особое место занимает ситуация, когда все граничные точки особые, то есть когда сумма ряда не продолжается через границу своей области сходимости [15], [16]. В основном, примеры рядов, аналитически непродолжимых за пределы своего круга сходимости, относятся к серии “сильно лакунарных” рядов, иными словами, у этих рядов “много” моно-мов с нулевыми коэффициентами. Таковыми рядами являются следующие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^n}.$$

Еще в 1891г. Фредгольм [17] построил примеры “умеренно лакунарных” непродолжимых рядов, причем представляющих бесконечно дифференцируемые функции в замыкании их круга сходимости. Эти ряды зависят от параметра a и они имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Здесь степень n^2 имеет порядок роста 2 относительно индекса суммирования n , поэтому будем говорить, что ряды Фредгольма имеют порядок лакулярности два. Наиболее общий результат о непродолжаемых рядах в терминах лакулярности принадлежит Фабри (см. [18] или [6]). Он состоит в том, что если монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел m_n растет быстрее n (т. е. $n = o(m_n)$), то существует ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{m_n},$$

сходящийся в единичном круге и непродолжаемый за его пределы.

Следует заметить, что обозначенный выше подход к исследованию проблемы аналитического продолжения в основном был реализован для степенных

рядов одного переменного. Между тем, в многомерной теории степенных рядов в этой области исследований много вопросов оставались открытыми до недавнего времени. Актуальность таких исследований мотивируется как внутренними запросами многомерного комплексного анализа, так и приложениями в математической физике, например, в квантовой теории поля [19] и термодинамике [20],[21].

Целью настоящей работы является нахождение многомерных аналогов теорем Аракеяна и Поля об аналитическом продолжении степенного ряда через куски из границы его области сходимости, описание условия продолжимости степенного ряда, коэффициенты которого интерполируются значениями целой или мероморфной функции, построение многомерных феноменов Фредгольма умеренно лакунарных степенных рядов с естественными границами своих областей сходимости.

Методы исследования

В основе исследования лежат методы многомерного комплексного анализа, в частности, используются техника интегральных представлений (Коши, Меллина, Линделефа), аппарат многомерных вычетов и свойства степенных рядов.

Важную роль играют интерполяции коэффициентов степенного ряда значениями аналитических функций таких классов, как целые функции экспоненциального типа или специальные мероморфные функций. В связи с этим использовалась информация о росте интерполирующих функций, т.е. фрагменты комплексной теории потенциала.

В вопросе об естественной границе области сходимости используется идея феномена Ковалевской об аналитической неразрешимости задачи Коши для уравнения теплопроводности, поставленной по температурным начальным данным.

Теоретическая и практическая ценность

Основные результаты являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, в теории потенциалов, а также в таких разделах математической физики как термодинамика и квантовая теория поля.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

- 1) красноярском городском научном семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2012-2015 гг.);
- 2) семинаре Института математики НАН Армении (2015 г.)
- 3) международном аспирантском форуме «Современная наука: тенденции развития, проблемы и перспективы» (Ереван, 2013 г.);
- 4) летней школе-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России (Ярославль, 2013 г.);
- 5) второй международной конференции математики в Армении: достижения и перспективы (Цахкадзор, 2013 г.);
- 6) пятом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, 2014 г.);
- 7) международной конференции «Science of Future» (С.-Петербург, 2014 г.);
- 8) международной школе-конференции по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, 2014 г.);
- 9) международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный» (Красноярск, 2015 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [46-55], из них 3 работы [46-48] в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, другие 7 публикаций [49-55] составляют тезисы конференций.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав основного содержания, Заключение и Приложения, в котором для удобства читателя приводятся необходимые вспомогательные сведения. Список цитированной литературы состоит из 45 наименований, а список работ автора по теме диссертации — из 10 наименований. Вся диссертация состоит из 78 страниц.

Первая глава посвящена аналитическим продолжениям одномерных степенных рядов. Речь идет об условиях аналитического продолжения (или непродолжения) рядов через заданную дугу из граничной окружности. Для определенности можно считать, что радиус круга сходимости ряда равен единице. Мы выделяем 4 типа задач, связанных с дугой граничной окружности :

- 1) о продолжимости в сектор, определенного дугой;
- 2) о продолжимости в некоторую окрестность дуги;
- 3) о продолжимости на всю комплексную плоскость, кроме некоторой граничной дуги;
- 4) о непродолжимости через каждую граничную точку.

Задачи 1)-2) были исследованы Аракелян, а 3) – Полия. Ими были получены критерии для соответствующих продолжений рядов в терминах целых функций, интерполирующих коэффициенты рядов.

В первом параграфе приводятся условия продолжимости степенного ряда, у которого коэффициенты интерполируются значениями мероморфной функции. Вначале сформулируем упомянутые результаты Аракеяна и Полия.

Рассматривается степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad (0.1)$$

переменного $z \in \mathbb{C}$, имеющий своей областью сходимости единичный круг $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Согласно теореме Коши-Адамара, это означает, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = 1.$$

Говорят, что целая функция φ *интерполирует* коэффициенты ряда (0.1), если

$$\varphi(n) = f_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Напомним (см. Приложение П.1 или [22], [23]), что *индикатор* (индикатриса роста) целой функции φ определяется пределом

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\theta})|}{r}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Пусть Δ_σ – сектор $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| \leq \sigma\}$, $\sigma \in [0, \pi)$. Через γ_σ обозначим открытую дугу $\partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$.

Теорема ([24], [25]) *Сумма ряда (0.1) аналитически продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$ тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты f_n целая функция экспоненциального типа $\varphi(\zeta)$ такая, что*

$$h_\varphi(\theta) \leq \sigma |\sin \theta| \text{ для } |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Говорят, что γ_σ является *дугой регулярности* для ряда (0.1), если он аналитически продолжается хотя бы в некоторую окрестность дуги γ_σ .

Теорема ([10], см. также [11]) *Открытая дуга $\gamma_\sigma = \partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ является дугой регулярности для ряда (0.1) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты целая функция экспоненциального типа $\varphi(\zeta)$, у которой индикатриса роста $h_\varphi(\theta)$ удовлетворяет условиям: $h_\varphi(0) = 0$ и*

$$\overline{\lim}_{\theta \rightarrow 0} \frac{h_\varphi(\theta)}{|\theta|} \leq \sigma.$$

Задача 3) касается продолжения на всю комплексную плоскость, кроме дуги $\partial D_1 \cap \Delta_\sigma$. Ответ для этой задачи дает следующая теорема Полия.

Теорема ([12]) *Для того, чтобы ряд (0.1) допускал аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$, кроме быть может дуги $\partial D_1 \cap \Delta_\sigma$, необходимо и достаточно,*

чтобы существовала интерполирующая коэффициенты f_n целая функция экспоненциального типа $\varphi(\zeta)$ такая, что

$$h_\varphi(\theta) \leq \sigma |\sin \theta| \quad \text{для } |\theta| \leq \pi.$$

Как уже говорилось, в первом параграфе получены достаточные условия для аналитической продолжимости степенного ряда (0.1) в рамках задач 1)-3). Эти условия формулируются в терминах мероморфных интерполяций вида

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j \zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(c_k \zeta + d_k)}, \quad (0.2)$$

где $\phi(\zeta)$ целая функция, $a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, и

$$\sum_{j=1}^p a_j = \sum_{k=1}^q c_k. \quad (0.3)$$

Выбор интерполирующих функций (0.2) с условиями (0.3) мотивирован, в частности, тем, что обратные преобразования меллина некоторых таких функций представляют класс неконфлуентных гипергеометрических функций [26].

Пусть

$$l = \sum_{k=1}^q |c_k| - \sum_{j=1}^p a_j.$$

Выражение

$$\varphi(\zeta) := \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p a_j^{a_j \zeta}}{\prod_{k=1}^q |c_k|^{c_k \zeta}}$$

назовем ассоциированной целой функцией для мероморфной функции (0.2).

Мы доказываем следующие утверждения.

Теорема 1.1. Сумма ряда (0.1) аналитически продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$, если существует интерполирующая коэффициенты f_n мероморфная функция $\psi(\zeta)$ вида (0.2) такая, что индикатор ассоциированной с $\psi(\zeta)$ целой функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям:

$$1) h_\varphi(0) = 0, \quad 2) \max\{h_\varphi(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l, h_\varphi(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l\} \leq \sigma.$$

Теорема 1.2. Сумма ряда (0.1) аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus (\partial D_1 \cap \Delta_\sigma)$, если существует интерполирующая коэффициенты f_n мероморфная функция $\psi(\zeta)$ вида (0.2) такая, что индикатор ассоциированной с $\psi(\zeta)$ целой функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$h_\varphi(\theta) + \frac{\pi}{2}l|\sin \theta| \leq \sigma|\sin \theta| \text{ для } |\theta| \leq \pi.$$

Теорема 1.3. Открытая дуга $\gamma_\sigma = \partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ является дугой регулярности для ряда (0.1), если существует интерполирующая коэффициенты f_n мероморфная функция $\psi(\zeta)$ вида (0.2) такая, что индикатор ассоциированной с $\psi(\zeta)$ целой функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям

$$1) h_\varphi(0) = 0, \quad 2) \overline{\lim}_{\theta \rightarrow 0} \frac{h_\varphi(\theta)}{|\theta|} + \frac{\pi}{2}l \leq \sigma.$$

Во втором параграфе приводятся примеры, которые показывают целесообразность интерполяции коэффициентов мероморфными функциями. Один из таких примеров представляет ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-2)(2n-5)\dots(2n-3(n+2))}{2^{\frac{2}{3}n}n!} z^n,$$

коэффициенты которого интерполируются мероморфной функцией

$$\psi(\zeta) = \frac{3^{\zeta-1}}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3}\zeta + \frac{1}{3})}{\Gamma(\zeta + 1)\Gamma(-\frac{1}{3}\zeta + \frac{4}{3})}.$$

Ассоциированная с ней целая функция $\varphi(z)$ равна

$$\varphi(\zeta) := \frac{3^{\zeta-1}}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}\zeta}}{|\frac{1}{3}|^{\frac{1}{3}\zeta}} \equiv \frac{1}{3},$$

а $l = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Согласно Теореме 1.1 рассматриваемый ряд продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_{\frac{\pi}{3}}$.

В третьем параграфе речь идет о задаче 4). Там строится семейство “умеренно лакунарных” непродолжимых рядов, суммы которых представляют бесконечно дифференцируемые функции в замыкании их круга сходимости.

Один из основных результатов этого параграфа составляет Теорема 1.4. Она показывает, что пример Фредгольма можно усилить, уменьшая степенной порядок лакулярности с 2 до $1 + \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Ее точная формулировка следующая:

если возрастающая последовательность натуральных чисел n_k удовлетворяет неравенствам $\text{const} \times k^2 \geq n_k \geq \text{const} \times k^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{n_k}, \quad 0 < a < 1$$

не продолжается за пределы единичного круга и представляет бесконечно дифференцируемую функцию в замыкании круга.

Во второй главе рассматриваются вопросы о продолжимости кратных степенных рядов. Для кратных степенных рядов имеется гораздо меньше результатов об описании сингулярных подмножеств на границе области сходимости или, что то же самое, об описании подмножеств границы, через которые аналитически продолжаются такие ряды. В первом параграфе на случай кратных степенных рядов распространяется результат Аракеяна [10] о дуге регулярности, сформулированный выше.

Рассмотрим n -кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_k z^k, \quad (0.4)$$

со свойством

$$\overline{\lim}_{|k| \rightarrow \infty} |k| \sqrt{|f_k| R^k} = 1, \quad (0.5)$$

где $R^k = R_1^{k_1} \dots R_n^{k_n}$, а $|k| = k_1 + \dots + k_n$. Согласно многомерной теореме Коши-Адамара ([27], раздел 7), указанное в (0.5) свойство выражает тот факт, что R_j

составляют набор *радиусов поликруга сходимости* ряда (0.4).

Подмножество G из границы области сходимости ряда (0.4) назовем *множеством регулярности для ряда* (0.4), если сумма ряда аналитически продолжается через любую точку этого множества.

Пусть $D_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \rho\}$ — открытый круг с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиуса $\rho > 0$. Обозначим $D_\rho := D_\rho(0)$, а для $\sigma \in (0, \pi]$ через $\gamma_{\sigma, \rho}$ обозначим открытую дугу $\partial D_\rho \setminus \Delta_\sigma$.

В многомерной ситуации нет универсального определения индикатрисы роста целой функции. Более того, часто информацию о росте целой функции выражают в геометрических терминах. Следуя Иванову [28] (см. также [22], гл. 3, §3), введем следующее множество, в котором неявно отражается понятие индикатрисы целой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$:

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln |\varphi(re^{i\theta})| \leq \nu_1 r_1 + \dots + \nu_n r_n + C_{\nu, \theta}\},$$

где неравенство выполняется для любого $r \in \mathbb{R}_+^n$ при некоторой константе $C_{\nu, \theta}$. Здесь $re^{i\theta}$ — это вектор $(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})$. Таким образом, $T_\varphi(\theta)$ — это множество *линейных мажорант* (с точностью до сдвига $C_{\nu, \theta}$)

$$\nu = \nu(r) = \nu_1 r_1 + \dots + \nu_n r_n$$

для логарифма модуля функции φ .

Определим множество

$$\mathcal{M}_\varphi(\theta) := \{\nu \in \mathbb{R}^n : \nu + \varepsilon \in T_\varphi(\theta), \nu - \varepsilon \notin T_\varphi(\theta) \text{ для любого } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^n\},$$

которое можно назвать *граничным множеством линейных мажорант*.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область сходимости ряда (0.4). Введем семейство

$$G = \bigcup_R \gamma_{\sigma, R} = \bigcup_R (\gamma_{\sigma_1, R_1} \times \dots \times \gamma_{\sigma_n, R_n}) \subset \partial D \quad (0.6)$$

полидуг $\gamma_{\sigma, R}$, где R пробегает поверхность сопряженных радиусов сходимости ряда (0.4), а $\sigma = \sigma(R) = (\sigma_1(R), \dots, \sigma_n(R))$.

Теорема 2.1. Семейство G полидуг (0.6) является множеством регулярности для ряда (0.4) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(z)$ такая, что:

1) $0 \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(0)$,

2) существует вектор-функция $\nu_R(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^z\varphi}(\theta)$, для которой

$$\overline{\lim}_{(\theta_1, \dots, \theta_n) \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\theta_j \rightarrow 0} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \leq \sigma_j(R), \quad j = 1, \dots, n.$$

Во втором параграфе второй главы приводятся условия продолжимости ряда в секториальную область посредством интерполяций коэффициентов целой или мероморфной функцией.

Обозначим

$$T_\varphi := \bigcap_{\theta_j = \pm \frac{\pi}{2}} T_\varphi(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

$$\mathcal{M}_\varphi := \{\nu \in [0, \pi]^n : \nu + \varepsilon \in T_\varphi, \quad \nu - \varepsilon \notin T_\varphi \text{ для любого } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Пусть G — секториальное множество вида

$$G = \bigcup_{\nu \in \mathcal{M}_\varphi} G_\nu, \tag{0.7}$$

где

$$G_\nu = (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_1}) \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_n}).$$

Теорема 2.2. Сумма ряда (0.4) аналитически продолжается в секториальную область G вида (0.7), если найдется интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(\zeta)$ экспоненциального типа и вектор-функция $\nu(\theta)$, заданная на кубе $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$ и принимающая значения в $\mathcal{M}_\varphi(\theta)$, для которых

$$\nu_j(\theta) \leq a |\sin \theta_j| + b \cos \theta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

с некоторыми константами $a \in [0, \pi)$, $b \in [0, \infty)$.

В качестве примера рассматривается двойной степенной ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}^2} \cos \sqrt{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \quad (0.8)$$

коэффициенты которого интерполируются значениями целой функции

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \cos \sqrt{\zeta_1 \zeta_2}.$$

Согласно Теореме 2.2 ряд (0.8) продолжается в секториальную область (0.7), где ν пробегает часть гиперболы $\nu_1 \nu_2 = \frac{1}{4}$:

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\nu \in [0, \pi]^2 : \nu_1 \nu_2 = \frac{1}{4}\}.$$

В четвертом заключительном параграфе построены двойные степенные ряды, которые не продолжаются за пределы единичного бикруга

$$U^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

и бесконечно дифференцируемы в $\bar{U}^2 \setminus T^2$, где $T^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| = 1, |z_2| = 1\}$.

Эти ряды имеют вид

$$\sum_{(k_1, k_2) \in A} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

где $A = \{(k_1, k_2) \in Z_+^2 : k_2 \geq k_1^{1+\varepsilon}\} \cup \{(k_1, k_2) \in Z_+^2 : k_1 \geq k_2^{1+\varepsilon}\}$, $\varepsilon > 0$.

ГЛАВА 1. Аналитическое продолжение одномерных степенных рядов

1.1 Продолжение путем мероморфных интерполяций коэффициентов

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad (1.1)$$

переменного $z \in \mathbb{C}$, имеющий своей областью сходимости единичный круг $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Согласно теореме Коши-Адамара, это означает, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = 1. \quad (1.2)$$

Скажем, что функция φ *интерполирует* коэффициенты ряда (1.1), если

$$\varphi(n) = f_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Напомним (см., например, [22]), что *индикатор* (индикатриса роста) целой функции φ определяется пределом

$$h_{\varphi}(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\theta})|}{r}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Пусть Δ_{σ} — сектор $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| \leq \sigma\}$, $\sigma \in [0, \pi)$. Через γ_{σ} обозначим открытую дугу $\partial D_1 \setminus \Delta_{\sigma}$.

В качестве интерполирующих мероморфных функций будем брать функции вида

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j \zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(c_k \zeta + d_k)}, \quad (1.4)$$

где $\phi(\zeta)$ — целая функция, $a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, и

$$\sum_{j=1}^p a_j = \sum_{k=1}^q c_k. \quad (1.5)$$

Выбор интерполирующих функций (1.4) с условиями (1.5) мотивирован, в частности, тем, что обратные преобразования Меллина некоторых таких функций представляют класс неконфлюэнтных гипергеометрических функций [26].

1.1.1 Условия продолжимости в сектор

Обозначим

$$l := \sum_{k=1}^q |c_k| - \sum_{j=1}^p a_j.$$

Выражение

$$\varphi(\zeta) := \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p a_j^{a_j \zeta}}{\prod_{k=1}^q |c_k|^{c_k \zeta}} \quad (1.6)$$

назовем *ассоциированной целой функцией* для мероморфной функции (1.4).

Теорема 1.1. *Сумма ряда (1.1) аналитически продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$, если существует интерполирующая коэффициенты f_n мероморфная функция $\psi(\zeta)$ вида (1.4) такая, что индикатор ассоциированной с ней целой функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям:*

$$1) h_\varphi(0) = 0, \quad 2) \max\{h_\varphi(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l, h_\varphi(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l\} \leq \sigma.$$

Доказательство. Вначале докажем Теорему 1.1 в случае, когда все c_k положительные, то есть когда $l = 0$. В этом случае утверждение принимает следующий вид:

сумма ряда (1.1) аналитически продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$, если существует интерполирующая коэффициенты f_n мероморфная функция $\psi(\zeta)$ вида (1.4) такая, что индикатор ассоциированной с ней целой функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям

$$1) h_\varphi(0) = 0, \quad 2) \max\{h_\varphi(-\frac{\pi}{2}), h_\varphi(\frac{\pi}{2})\} \leq \sigma. \quad (1.7)$$

Пусть φ — целая функция вида (1.6), индикатор которой удовлетворяет условиям (1.7). Покажем, что ряд (1.1) продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$. Определение индикатора h_φ равносильно неравенству

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq e^{h_\varphi(\theta)r+o(r)} \quad \text{для } \theta \in \mathbb{R},$$

где $o(r)$ — бесконечно малая величина относительно r при $r \rightarrow \infty$.

Нам потребуется свойство *тригонометрической выпуклости* индикатора целой функции экспоненциального типа (см. Приложение, П.1):

$$h_\varphi(\theta) \sin(\theta_2 - \theta_1) \leq h_\varphi(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta) + h_\varphi(\theta_2) \sin(\theta - \theta_1),$$

где $\theta_1 < \theta < \theta_2$ и $\theta_2 - \theta_1 < \pi$. Полагая в этом неравенстве $\theta_1 = 0, \theta_2 = \alpha$, либо $\theta_1 = -\alpha, \theta_2 = 0$, получим, что при $h_\varphi(0) = 0$ и $\alpha \in (0, \pi)$ выполняется неравенство

$$h_\varphi(\theta) \leq c_\alpha |\sin \theta| \quad \text{для } |\theta| \leq \alpha$$

с коэффициентом

$$c_\alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \max\{h_\varphi(\alpha), h_\varphi(-\alpha)\}.$$

Если в полученной оценке для $h_\varphi(0) = 0$ взять $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то в предположении (1.7) получаем следующую оценку на рост функции φ :

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq e^{\sigma|\sin \theta|r+o(r)} \quad \text{для } |\theta| \leq \frac{\pi}{2}.$$

С учетом вида (1.6) отсюда следует неравенство

$$|\phi(re^{i\theta})| \frac{\prod_{j=1}^p |a_j^{a_j r e^{i\theta}}|}{\prod_{k=1}^q |c_k^{c_k r e^{i\theta}}|} \leq e^{\sigma|\sin \theta|r+o(r)} \quad \text{для } |\theta| \leq \frac{\pi}{2},$$

которое в терминах комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ можно переписать так:

$$|\phi(\zeta)| \leq \left(\frac{\prod_{j=1}^p |a_j^{a_j \zeta}|}{\prod_{k=1}^q |c_k^{c_k \zeta}|} \right)^{-1} e^{\sigma|\eta|+o(|\zeta|)} \quad \text{для } \zeta \in \Delta_{\frac{\pi}{2}}. \quad (1.8)$$

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. Для $\zeta \in \Delta_{\frac{\pi}{2}}$ справедлива асимптотическая оценка

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j \zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(c_k \zeta + d_k)} \right| \leq \frac{\prod_{j=1}^p |a_j^{a_j \zeta}|}{\prod_{k=1}^q |c_k^{c_k \zeta}|} e^{o(|\zeta|)}, \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Доказательство. При больших $|\zeta|$ справедливо двустороннее неравенство

$$|a\zeta|^{a\xi} \left(1 - \frac{|b|}{|a\zeta|}\right)^{|a\zeta|} e^{-a\eta \arg(\zeta)} \leq |a\zeta + b|^{a\xi} \leq |a\zeta|^{a\xi} \left(1 + \frac{|b|}{|a\zeta|}\right)^{|a\zeta|} e^{-a\eta \arg(\zeta)}.$$

Из него на основе формулы Стирлинга (применимой в правой полуплоскости $\Delta_{\frac{\pi}{2}}$, поскольку $a_j, c_k > 0$) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{j=1}^p |\Gamma(a_j \zeta + b_j)|}{\prod_{k=1}^q |\Gamma(c_k \zeta + d_k)|} &\sim \frac{\prod_{j=1}^p |(a_j \zeta + b_j)^{(a_j \zeta + b_j)} e^{-(a_j \zeta + b_j)} (2\pi(a_j \zeta + b_j))^{\frac{1}{2}}|}{\prod_{k=1}^q |(c_k \zeta + d_k)^{(c_k \zeta + d_k)} e^{-(c_k \zeta + d_k)} (2\pi(c_k \zeta + d_k))^{\frac{1}{2}}|} \leq \\ &\leq \frac{\prod_{j=1}^p |a_j \zeta|^{a_j \xi} \left(1 + \frac{|b_j|}{|a_j \zeta|}\right)^{|a_j \zeta|} e^{-a_j \eta \arg(\zeta)} |(a_j \zeta + b_j)^{b_j} e^{-(a_j \zeta + b_j)} (2\pi(a_j \zeta + b_j))^{\frac{1}{2}}|}{\prod_{k=1}^q |c_k \zeta|^{c_k \xi} \left(1 - \frac{|d_k|}{|c_k \zeta|}\right)^{|c_k \zeta|} e^{-c_k \eta \arg(\zeta)} |(c_k \zeta + d_k)^{d_k} e^{-(c_k \zeta + d_k)} (2\pi(c_k \zeta + d_k))^{\frac{1}{2}}|} \leq \\ &\leq \frac{\prod_{j=1}^p |a_j^{a_j \zeta}|}{\prod_{k=1}^q |c_k^{c_k \zeta}|} |\zeta^{\xi(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{k=1}^q c_k)}| |e^{-\zeta(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{k=1}^q c_k)}| \times \\ &\times \frac{\prod_{j=1}^p \left(1 + \frac{|b_j|}{|a_j \zeta|}\right)^{a_j \xi} e^{-a_j \eta \arg(\zeta)}}{\prod_{k=1}^q \left(1 - \frac{|d_k|}{|c_k \zeta|}\right)^{c_k \xi} e^{-c_k \eta \arg(\zeta)}} \times \frac{\prod_{j=1}^p |a_j \zeta + b_j|^{b_j} e^{-b_j} |2\pi(a_j \zeta + b_j)|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^q |c_k \zeta + d_k|^{d_k} e^{-d_k} |2\pi(c_k \zeta + d_k)|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (1.5), приходим к оценке вида

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j \zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^q \Gamma(c_k \zeta + d_k)} \right| \leq \frac{\prod_{j=1}^p |a_j^{a_j \zeta}|}{\prod_{k=1}^q |c_k^{c_k \zeta}|} |A\zeta + B|^C,$$

где A, B и C некоторые константы (независимые от ζ величины). Учитывая тривиальные неравенства $|A\zeta + B|^C = e^{\ln |A\zeta + B|^C}$ и

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \frac{\ln |A\zeta + B|^C}{|\zeta|} = 0,$$

получаем $|A\zeta + B|^C = e^{o(|\zeta|)}$ при $\zeta \rightarrow \infty$, т.е. утверждение леммы.

Из неравенств (1.8), (1.9) для мероморфной функции $\psi(\zeta)$, определенной формулой (1.4), имеем

$$|\psi(\zeta)| \leq e^{\sigma|\eta|+o(|\zeta|)} \quad \text{для } \zeta \in \Delta_{\frac{\pi}{2}}. \quad (1.10)$$

Введем вспомогательную функцию

$$g(\zeta, z) := \frac{z^\zeta}{e^{2\pi i \zeta} - 1},$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$. Эта функция мероморфна по переменной ζ из $\mathbb{C}$ и голоморфна по переменной z из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Обозначим $D^* := \cup_{m \in \mathbb{Z}} D_{1/4}(m)$. Заметим, что существует константа $c > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$|e^{2\pi i \zeta} - 1| > \frac{e^{\pi(|\eta|-\eta)}}{c} \quad \text{при } \zeta \in \mathbb{C} \setminus D^*.$$

Из этого неравенства следует оценка

$$|g(\zeta, z)| < ce^{\xi \log |z| - (\pi - |\pi - \arg z|)|\eta|}$$

при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus D^*$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Используя (1.10) для $\zeta \in \Delta_{\frac{\pi}{2}} \setminus D^*$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, получим

$$|\psi(\zeta)||g(\zeta, z)| < ce^{\xi \log |z| - (\pi - \sigma - |\pi - \arg z|)|\eta| + o(|\zeta|)}. \quad (1.11)$$

Для $\zeta \in \Delta_{\frac{\pi}{2}} \setminus D^*$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_{\sigma+\delta}$ справедлива следующая оценка

$$|\psi(\zeta)||g(\zeta, z)| < ce^{\xi \log |z| - \delta|\eta| + o(|\zeta|)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_m = \int_{\partial G_m} \psi(\zeta) g(\zeta, z) d\zeta$$

по ориентированной границе области G_m , ограниченной отрезками

$$\Gamma_m^1 = [a - i(m + \frac{1}{2}), a + i(m + \frac{1}{2})],$$

$$\Gamma_m^2 = [a + i(m + \frac{1}{2}), a + m + i(m + \frac{1}{2})],$$

$$\Gamma_m^3 = [a + m + i(m + \frac{1}{2}), a + m - i(m + \frac{1}{2})],$$

$$\Gamma_m^4 = [a + m - i(m + \frac{1}{2}), a - i(m + \frac{1}{2})],$$

где $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$ (см. рис.1).

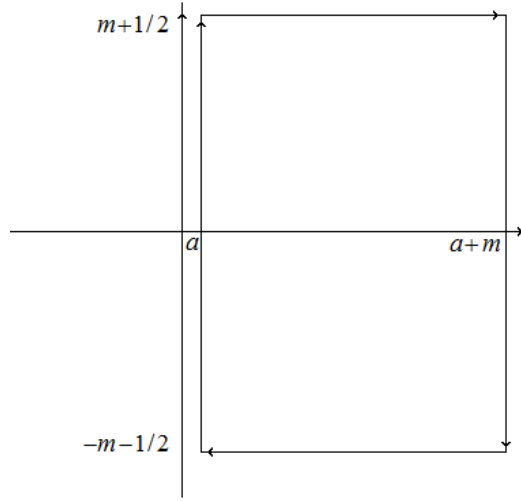


Рисунок 1

Представим интеграл I_m как сумму интегралов $I_m^1, I_m^2, I_m^3, I_m^4$ по $\Gamma_m^1, \Gamma_m^2, \Gamma_m^3, \Gamma_m^4$, соответственно.

Для $\zeta \in \Delta_{\frac{\pi}{2}} \setminus D^*$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_{\sigma+\delta}$ получим следующие оценки

$$I_m^2 = \int_{\Gamma_m^2} |\psi(\zeta)g(\zeta, z)| |d\zeta| \leq ce^{-\delta(m+\frac{1}{2})} \int_a^{a+m} e^{\xi \ln |z| + o(|\zeta|)} d\xi,$$

$$I_m^3 = \int_{\Gamma_m^3} |\psi(\zeta)g(\zeta, z)| |d\zeta| \leq ce^{(a+m) \ln |z| + o(m)} \int_{-i(m+\frac{1}{2})}^{i(m+\frac{1}{2})} d\eta,$$

$$I_m^4 = \int_{\Gamma_m^4} |\psi(\zeta)g(\zeta, z)| |d\zeta| \leq ce^{-\delta(m+\frac{1}{2})} \int_{a+m}^a e^{\xi \ln |z| + o(|\zeta|)} d\xi.$$

Из них видно, что для $z \in D_1 \setminus \Delta_{\sigma+\delta}$ интегралы I_m^2, I_m^3, I_m^4 стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$.

Таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\partial G_m} \psi(\zeta)g(\zeta, z)d\zeta = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m^1} \psi(\zeta)g(\zeta, z)d\zeta = \lim_{m \rightarrow \infty} I_m^1.$$

Подынтегральная функция в области G_m имеет простые полюса в вещественных целых точках и конечное число полюсов в точках $\frac{-\nu-b_j}{a_j} \in G_m$, $\nu = 0, 1, \dots$ (напомним, что a_j, b_j — параметры, участвующие в выражении (1.4) для $\psi(\zeta)$).

Применяя теорему о вычетах, получим

$$\int_{\partial G_m} \varphi(\zeta)g(\zeta, z)d\zeta = \sum_{n=1}^m \varphi(n)z^n + P(z),$$

где $P(z)$ — полином.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(\zeta)g(\zeta, z)d\zeta.$$

Для $\zeta = a + i\eta$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_{\sigma+\delta}$ справедлива следующая оценка:

$$|\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)| < ce^{a \ln |z| - \delta|\eta| + o(|\zeta|)}.$$

Из нее следует, что интеграл I сходится равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{C} \setminus \Delta_{\sigma+\delta}$, тем самым определяя голоморфную функцию на внутренности этого компакта. Для $z \in D_1 \setminus \Delta_{\sigma+\delta}$

$$\int_{\Gamma_m^1} \varphi(\zeta)g(\zeta, z)d\zeta \rightarrow \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(\zeta)g(\zeta, z)d\zeta, \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Поскольку $I_m \rightarrow I$ при $m \rightarrow \infty$, получаем $I(z) = f(z) + P(z)$ при $z \in D_1 \cap K^o$. Это означает, что $f(z)$ аналитически продолжается на K^o . Поскольку K — произвольный компакт из $\mathbb{C} \setminus \Delta_{\sigma+\delta}$ при как угодно малом δ , получаем, что $f(z)$ аналитически продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$. Тем самым утверждение Теоремы 1.1 доказано в случае, когда все c_k положительные.

Теперь докажем утверждение Теоремы 1.1 в случае, когда c_k могут быть отрицательными. Во избежание громоздких обозначений проиллюстрируем идею доказательства в предположении, когда только одно из c_k отрицательно; пусть это будет c_q . Легко видеть, что в этом случае $\frac{l}{2} = -c_q$. Выражение для $\psi(\zeta)$ принимает вид

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j \zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^{q-1} \Gamma(c_k \zeta + d_k) \Gamma(-\frac{l}{2} \zeta + d_q)}.$$

Ассоциированная с $\psi(\zeta)$ целая функция следующая

$$\varphi(\zeta) := \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p a_j^{a_j \zeta}}{\prod_{k=1}^q |c_k|^{c_k \zeta}} = \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p a_j^{a_j \zeta} (\frac{l}{2})^{\frac{l}{2} \zeta}}{\prod_{k=1}^{q-1} c_k^{c_k \zeta}}.$$

Заметим, что функцию $\psi(\zeta)$ можно преобразовать к функции вида (1.4), в котором все c_k положительные:

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j \zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^{q-1} \Gamma(c_k \zeta + d_k)} \Gamma(1 + \frac{l}{2} \zeta + d_q) \sin \pi(-\frac{l}{2} \zeta - d).$$

В этой записи ассоциированная целая функция к $\psi(\zeta)$ будет функция

$$\tilde{\varphi}(\zeta) := \psi(\zeta) \sin \pi(-\frac{l}{2} \zeta - d_q).$$

Для ее индикатора имеет место оценка

$$h_{\tilde{\varphi}}(\theta) \leq h_{\varphi}(\theta) + \pi \frac{l}{2} |\sin(\theta)|, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Согласно условию Теоремы 1.1

$$\max\{h_{\varphi}(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l, h_{\varphi}(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}l\} \leq \sigma.$$

Следовательно

$$h_{\tilde{\varphi}}(0) = 0, \quad h_{\tilde{\varphi}}(\pm \frac{\pi}{2}) \leq \sigma.$$

Поскольку $\tilde{\varphi}(\zeta)$ удовлетворяет условиям (1.7), сумма ряда (1.1) аналитически продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$. Теорема 1.1 доказана.

1.1.2 Условия продолжимости в некоторую окрестность дуги

Теорема 1.2. *Открытая дуга $\gamma_\sigma = \partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ является дугой регулярности для ряда (1.1) если, существует интерполирующая коэффициенты f_n мероморфная функция $\psi(\zeta)$ вида (1.4) такая, что индикатор ассоциированной с $\psi(\zeta)$ целой функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям*

$$1) \ h_\varphi(0) = 0, \quad 2) \ \overline{\lim}_{\theta \rightarrow 0} \frac{h_\varphi(\theta)}{|\theta|} + \frac{\pi}{2}l \leq \sigma.$$

Доказательство Теоремы 1.2 во многом аналогично доказательству теоремы 1.1. А именно, из условия 2) Теоремы 1.2 следует, что для любого $\alpha > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $h_\varphi(\theta) \leq (\sigma + \delta)|\sin \theta|$ для $|\theta| \leq \alpha$. Следовательно, оценки (1.10) и (1.11) на модуль $\psi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)g(\zeta, z)$ будут верны для $\zeta \in \Delta_\alpha$. А области G и G_m примут вид (см. рис. 2)

$$G = D_1 \cup \Delta_\alpha^o \text{ и } G_m = \{\zeta = \xi + i\eta \in G : \xi \leq m + \frac{1}{2}\},$$

то есть $\partial G_m = \Gamma_m^1 \cup \Gamma_m^2$.

Рассматриваемый интеграл I_m будет равен сумме интегралов I_m^1, I_m^2 по контурам Γ_m^1, Γ_m^2 . При этом для $z \in K \cap D_1^o$ интеграл $I_m^2 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

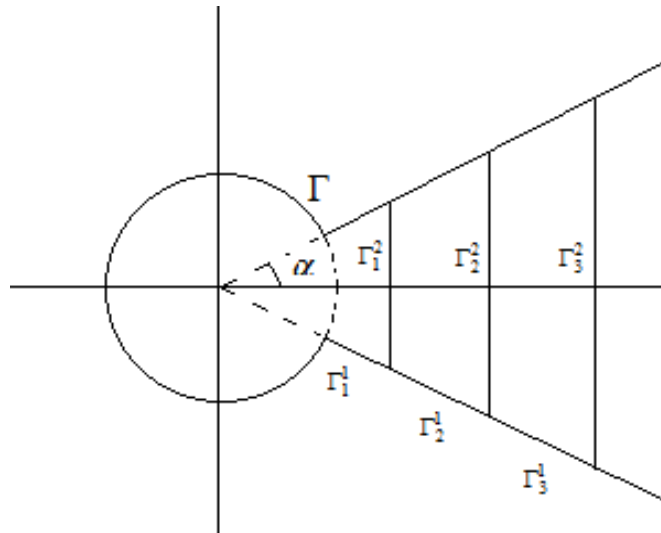


Рисунок 2

Интеграл I по контуру ∂G сходится для $\zeta \in \Delta_\alpha$, $z \in K$ (рис. 3), где

$$K = D_{e^\varepsilon} \setminus (\Delta_{\sigma+2\delta}^o \cup D_{\frac{1}{2}}), \quad \varepsilon = \frac{\delta \sin \alpha}{2}.$$

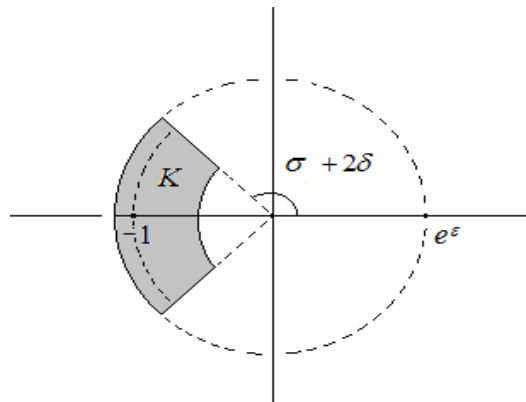


Рисунок 3

В остальном все рассуждения из доказательства Теоремы 1.1 дословно повторяются.

1.1.3 Условия продолжимости на всю комплексную плоскость кроме некоторой дуги

Теорема 1.3. Сумма ряда (1.1) аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus (\partial D_1 \cap \Delta_\sigma)$, если существует интерполирующая коэффициенты f_n мероморфная функция $\psi(\zeta)$ вида (1.4) такая, что индикатор ассоциированной с $\psi(\zeta)$ целой функции $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$h_\varphi(\theta) + \frac{\pi}{2}l|\sin \theta| \leq \sigma|\sin \theta| \quad \text{для } |\theta| \leq \pi.$$

Что касается доказательства Теоремы 1.3, достаточно заметить, что основные оценки (1.10), (1.11) будут верны для $\zeta \in \mathbb{C}$. Поэтому для подходящих контуров интегрирования (рис. 4) получаем аналитическую продолжимость суммы ряда в $\mathbb{C} \setminus (\partial D_1 \cap \Delta_\sigma)$.

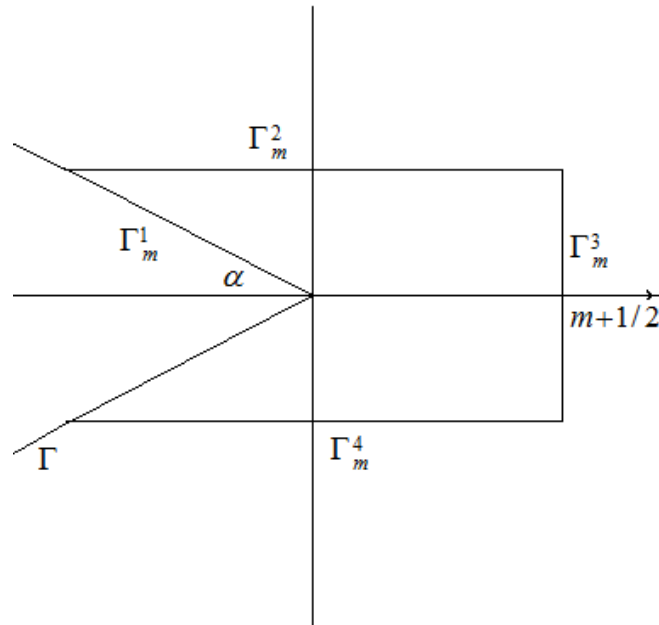


Рисунок 4

В таком случае, интеграл I будет сходиться для $z \in K$, где $K = \mathbb{C} \setminus$

$(D_1 \cap \Delta_{\sigma+2\delta} \cup D_{e^{-\epsilon}})$ (рис. 5), а сумма ряда (1.1) будет равна интегралу I при $z \in K \cap D_1^o$. Таким образом, ряд продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$ кроме некоторой дуги на границе D_1 .

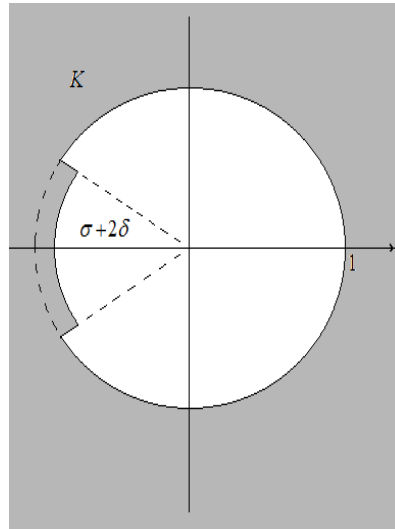


Рисунок 5

1.2 Примеры

Приведем два примера, которые показывают целесообразность интерполяции коэффициентов мероморфными функциями.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-2)(2n-5)\dots(2n-3(n+2))}{2^{\frac{2}{3}n}n!} z^n, \quad (1.12)$$

область сходимости которого — единичный круг.

Покажем, что коэффициенты f_n можно представить значениями мероморфной функции вида (1.4). Для этого перепишем коэффициенты в виде

$$f_n = \frac{3^{n-1}(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} - 1)\dots(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} - (n-1))}{2^{\frac{2}{3}n}n!}$$

и применим известную формулу

$$\Gamma(\tau + l) = (\tau)_l \Gamma(l),$$

где $(\tau)_l = \tau(\tau + 1)\dots(\tau + l - 1)$ – символ Похгамера, $l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f_n = \frac{\Gamma(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3})3^{n-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\frac{1}{3}n + \frac{4}{3})2^{\frac{2}{3}n}}.$$

Таким образом, мероморфная функция

$$\psi(\zeta) = \frac{3^{\zeta-1}}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3}\zeta + \frac{1}{3})}{\Gamma(\zeta + 1)\Gamma(-\frac{1}{3}\zeta + \frac{4}{3})}$$

интерполирует коэффициенты f_n .

В этом случае указанная в Теореме 1.1 целая функция равна

$$\varphi(\zeta) = \frac{3^{\zeta-1}}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{(\frac{2}{3})^{\frac{2\zeta}{3}}}{(\frac{1}{3})^{\frac{-\zeta}{3}}} \equiv \frac{1}{3},$$

и потому $h_\varphi(\theta) = 0$. При этом $l = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$\max\{h_\varphi(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi l}{2}, h_\varphi(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi l}{2}\} = \frac{\pi}{3}.$$

Согласно Теореме 1.1 ряд (1.12) продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_{\frac{\pi}{3}}$.

Заметим, что ряд (1.12) является ветвью решения $y(z)$ алгебраического уравнения $y^3 - \frac{3z}{2^{\frac{2}{3}}}y - 1 = 0$, определяемой условием $y(0) = 1$ (см. [29]). Ряд $f(z)$ имеет сингулярности (ветвления) в точках $e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ и $e^{i\frac{2}{3}\pi}$ и аналитически продолжается в сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_{\frac{\pi}{3}}$, порожденный большей дугой единичной окружности с концами в этих точках [29].

Следует также отметить, что автору не удалось явно построить интерполирующую целую функцию для коэффициентов ряда (1.12). Существование такой функции следует из теоремы Аракеяна [10], приведенной во Введении.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{1}{3})3^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\frac{2n}{3} + \frac{4}{3})2^{\frac{2n}{3}}} z^n, \quad (1.13)$$

область сходимости которого также единичный круг. Его коэффициенты

$$f_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{1}{3})3^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\frac{2n}{3} + \frac{4}{3})2^{\frac{2n}{3}}},$$

представлены значениями мероморфной функции. Однако, их также можно интерполировать целой функцией

$$\varphi(z) = \frac{2\pi}{3^{\frac{1}{2}}} \frac{2^{-\frac{2}{3}z}}{\Gamma(\frac{z}{3} + \frac{2}{3})\Gamma(\frac{z}{3} + 1)\Gamma(\frac{4}{3} - \frac{2z}{3})}.$$

Действительно, положив в формуле Гаусса-Лежандра [30]

$$\Gamma(w)\Gamma(w + \frac{1}{m})\dots\Gamma(w + \frac{m-1}{m}) = m^{\frac{1}{2}-mw}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mw)$$

значения $m = 3$, $w = \frac{n}{3} + \frac{1}{3}$, получим

$$\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{1}{3})\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{2}{3})\Gamma(\frac{n}{3} + 1) = 3^{-\frac{1}{2}-n}2\pi\Gamma(n+1).$$

Выражая в этом тождестве $\Gamma(\frac{n}{3} + \frac{1}{3})$ через оставшиеся ингредиенты и подставляя в выражение для f_n , получим $\varphi(n) = f_n$, $n \in \mathbb{N}$.

По формуле Стирлинга имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(r)| &= \left| \frac{2}{3^{\frac{1}{2}}} \frac{2^{\frac{2}{3}r} \Gamma(\frac{2r}{3} - \frac{1}{3}) \sin(\pi \frac{2r-1}{3})}{\Gamma(\frac{r}{3} + \frac{2}{3})\Gamma(\frac{r}{3} + 1)} \right| \sim \\ &\sim \frac{2}{3^{\frac{1}{2}}} \frac{2^{\frac{2}{3}r} (2\pi \frac{2r-1}{3})^{\frac{1}{2}} (\frac{2r}{3} - \frac{1}{3})^{\frac{2r}{3} - \frac{1}{3}} e^{-(\frac{2r}{3} - \frac{1}{3})}}{(2\pi \frac{r+2}{3})^{\frac{1}{2}} (\frac{r}{3} + \frac{2}{3})^{\frac{r}{3} + \frac{2}{3}} e^{-(\frac{r}{3} + \frac{2}{3})}} \frac{\sin(\pi \frac{2r-1}{3})}{(2\pi (\frac{r}{3} + 1))^{\frac{1}{2}} (\frac{r}{3} + 1)^{\frac{r}{3} + 1} e^{-(\frac{r}{3} + 1)}} \leq \\ &\leq Cr + e^{o(r)}. \end{aligned}$$

Отсюда, с одной стороны, получаем,

$$h_\varphi(0) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(r)|}{r} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(Cr + e^{o(r)})}{r} \leq 0.$$

С другой стороны,

$$h_\varphi(0) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(n)|}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln |f_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Поэтому $h_\varphi(0) = 0$.

Теперь оценим $|\varphi(re^{i\frac{\pi}{2}})|$ и $|\varphi(re^{-i\frac{\pi}{2}})|$. Для этого воспользуемся двусторонней оценкой для гамма-функции (см. [31]):

$$c_1(|y| + 1)^{x-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|y|} \leq \Gamma(x + iy) \leq c_2(|y| + 1)^{x-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|y|},$$

где $x \in K \subset \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ (K —компакт), постоянные c_1 и c_2 зависят от выбора компакта, $y \in \mathbb{R}$. Получим,

$$|\varphi(re^{\pm i\frac{\pi}{2}})| \leq C \frac{e^{\frac{\pi}{6}r} e^{\frac{\pi}{6}r} e^{\frac{2\pi}{6}r}}{c_1(\frac{r}{3} + 1)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} c_1(\frac{r}{3} + 1)^{1-\frac{1}{2}} c_1(\frac{2r}{3} + 1)^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}},$$

или

$$\ln |\varphi(re^{\pm i\frac{\pi}{2}})| \leq \frac{2\pi}{3}r + o(r).$$

Следовательно,

$$h_\varphi(\pm \frac{\pi}{2}) \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Теорема Аракеяна [24] показывает, что ряд (2.2) продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_{\frac{2\pi}{3}}$. С другой стороны, мероморфная функция

$$\psi(\zeta) = \frac{3^\zeta}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{\Gamma(\frac{1}{3}\zeta + \frac{1}{3})}{\Gamma(\zeta + 1)\Gamma(-\frac{2}{3}\zeta + \frac{4}{3})}$$

интерполирует коэффициенты ряда (1.13). А целая функция, указанная в Теореме 1.1, равна

$$\varphi(\zeta) = \frac{3^\zeta}{2^{\frac{2}{3}\zeta}} \frac{3^{-\frac{1}{3\zeta}}}{(-\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}\zeta}} \equiv 1.$$

При этом $l = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $h_\varphi(\theta) = 0$ и

$$\max\{h_\varphi(-\frac{\pi}{2}) - \frac{2\pi}{3}, h_\varphi(\frac{\pi}{2}) + \frac{2\pi}{3}\} \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом, Теорема 1.1 также показывает, что ряд (1.13) продолжается в открытый сектор $\mathbb{C} \setminus \Delta_{\frac{2\pi}{3}}$.

1.3 О непродолжимости одномерных рядов

Проблема описания связи между особенностями степенных рядов одного переменного и их коэффициентами привлекла внимание математиков еще в конце 19-ого века. В первой половине 20-го века были получены замечательные результаты, позволявшие считать развитие этого направления почти законченным. Многие из полученных результатов касаются вопроса аналитической непродолжимости ряда за пределы его круга сходимости, и они связаны с именами известных венгерских математиков Поля и Сеге (см. например, статьи [4] и [3], а также перечень их статей в книге Л. Бибербаха [6]). Примеры рядов, аналитически непродолжимых за пределы своего круга сходимости, строятся в учебниках по теории функций комплексного переменного. Эти примеры относятся к серии “сильно лакунарных” рядов, иными словами, у этих рядов “много” мономов с нулевыми коэффициентами. К таким рядам относятся следующие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^n}.$$

В 1891г. Фредгольм [17] построил примеры “умеренно лакунарных” непродолжимых рядов, причем представляющих бесконечно дифференцируемые функции в замыкании их круга сходимости. Эти ряды зависят от параметра a , и они имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Здесь степень n^2 имеет порядок роста 2 относительно индекса суммирования n , поэтому будем говорить, что ряды Фредгольма имеют порядок лакулярности два.

Наиболее общий результат о непродолжаемых рядах в терминах лакулярности принадлежит Фабри (см. [18] или [6]). Он состоит в том, что если монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел m_n растет быстрее

n (т. е. $n = o(m_n)$), то существует ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{m_n},$$

сходящийся в единичном круге и непродолжаемый за его пределы.

Один из основных результатов данного параграфа составляет Теорема 1.4. Она показывает, что пример Фредгольма можно усилить, уменьшая степенной порядок лакуарности с 2 до $1 + \varepsilon$. Ее точная формулировка следующая:

Теорема 1.4. *Если возрастающая последовательность натуральных чисел n_k удовлетворяет неравенствам $\text{const} \times k^2 \geq n_k \geq \text{const} \times k^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, то степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{n_k}, \quad 0 < a < 1, \quad (1.14)$$

не продолжается за пределы единичного круга и представляет бесконечно дифференцируемую функцию в замыкании круга.

Доказательство. Рассмотрим следующий ряд

$$\varphi(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{n_k t + k u}, \quad \text{где } t, u \in \mathbb{C}. \quad (1.15)$$

Его члены экспоненциально убывают в произведении $\Pi \times \bar{\Pi}$ полуплоскостей $\Pi = \{u : \text{Re } u < 0\}$ и $\bar{\Pi} = \{t : \text{Re } t \leq 0\}$. На компактных подмножествах произведения $\Pi \times \bar{\Pi}$ сходимость ряда равномерная, поэтому сумма $\varphi(t, u)$ голоморфна в произведении $\Pi \times \Pi$ открытых полуплоскостей. Указанное свойство равномерной сходимости сохраняется и для всех производных ряда по t , поэтому при каждом фиксированном $u \in \Pi$ функция $\varphi(t, u)$ бесконечно дифференцируема в $\bar{\Pi}$.

Введем следующее обозначение

$$F(-t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k u_0} e^{-n_k(-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{n_k t + k u_0} = \varphi(t, u_0), \quad (1.16)$$

для $t \in \bar{\Pi}$ и любого фиксированного $u_0 \in \Pi$. Функция $F(-t)$ представляется рядом Дирихле

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}$$

с экспоненциальными показателями $\lambda_k = n_k$ и коэффициентами $a_k = e^{ku_0}$.

Если ряд Дирихле сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$ и расходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z < c$, тогда прямая $\operatorname{Re} z = c$ называется прямой сходимости ряда Дирихле, а величина c — абсциссой сходимости (см. [32], [33]).

Вычислим величину

$$L = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{n_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k^{1+\varepsilon}} = 0.$$

Поскольку для функции $F(-t)$ величина $L = 0$, то абсциссу сходимости ряда (1.16) можно вычислить следующим образом

$$= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |e^{ku_0}|}{n_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{k \operatorname{Re} u_0}}{n_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \operatorname{Re} u_0}{n_k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \operatorname{Re} u_0}{k^{1+\varepsilon}} = 0.$$

Теперь покажем, что функция $F(-t)$ удовлетворяет условиям теоремы Поля [34]: *Если ряд Дирихле*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-n_k z}$$

имеет конечную абсциссу сходимости c и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0, \quad n_{k+1} - n_k \geq h > 0,$$

то прямая сходимости $\operatorname{Re} z = c$ является естественной границей суммы ряда $F(z)$.

Действительно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^{1+\varepsilon}} \rightarrow 0,$$

Следовательно, функция $F(-t)$ не продолжается через точки прямой $\operatorname{Re} z = 0$. Обозначая $a = e^u$ (фиксировано) и $z = e^t$ из (1.15), получим (1.14). Теорема доказана.

Теорема 1.5. Для произвольной пары натуральных чисел $p > q$ ряд

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{\nu^q} z^{\nu^p}, \quad 0 < a < 1, \quad (1.17)$$

не продолжается за пределы единичного круга $|z| < 1$ и представляет бесконечно дифференцируемую функцию в замыкании круга.

Доказательство. Докажем эту теорему без использования теоремы Поляна. Рассмотрим следующий ряд

$$\varphi(t, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu^p t + \nu^q u}, \quad \text{где } t, u \in \mathbb{C}. \quad (1.18)$$

Его члены экспоненциально убывают в произведении $\Pi \times \bar{\Pi}$ полуплоскостей $\Pi = \{u : \operatorname{Re} u < 0\}$ и $\bar{\Pi} = \{t : \operatorname{Re} t \leq 0\}$. На компактах лежащих в $\Pi \times \bar{\Pi}$ сходимость ряда равномерная, поэтому сумма $\varphi(t, u)$ голоморфна в произведении $\Pi \times \Pi$ открытых полуплоскостей, при этом голоморфность по $u \in \Pi$ также имеет место при любом фиксированном $t_0 \in \bar{\Pi}$.

Рассмотрим разложение Тейлора

$$\varphi(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \varphi}{\partial u^k}(t, u_0) \frac{(u - u_0)^k}{k!}, \quad (1.19)$$

с центром в $u_0 \in \Pi$, предполагая, что t — параметр из $\bar{\Pi}$. С учетом (1.18) имеем

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial u^k}(t, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^q)^k e^{\nu^p t + \nu^q u}.$$

Подставляя это выражение в (1.19), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^q)^k e^{\nu^p t + \nu^q u_0} \right) \frac{(u - u_0)^k}{k!}. \quad (1.20)$$

Покажем, что при любом фиксированном t_0 из границы $\partial \bar{\Pi}$ (т. е. для которого $\operatorname{Re} t_0 = 0$), ряд (1.20) имеет конечный радиус сходимости.

Ряд (1.18) расходится, если $\operatorname{Re} u \geq 0$ и $\operatorname{Re} t_0 = 0$, поскольку его общий член

$$|e^{\nu^p t_0 + \nu^q u}| = |e^{\nu^p t_0}| |e^{\nu^q u}| = (e^{\operatorname{Re} u})^{\nu^q}$$

не стремится к нулю. Также ряд (1.18) можно рассматривать как степенной ряд относительно переменной $w = e^u$. Используя эти факты, получаем, что функция $\varphi(t_0, u)$ имеет особую точку $\hat{u}$ для которой $Re \hat{u} = 0$. Следовательно, ряд (1.20) имеет конечный радиус сходимости.

Используя этот факт, с помощью формулы Коши-Адамара получим существование последовательности k_l со свойством

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^q)^{k_l} e^{\nu^p t_0 + \nu^q u_0} \right| \sim \frac{k_l!}{\rho_l^k} \quad \text{при } k_l \rightarrow \infty, \quad (1.21)$$

где ρ — радиус сходимости ряда (1.18) (зависящий от выбора точек $u_0 \in \Pi$ и $t_0 \in \Pi$).

Предположим, что при некотором фиксированном $u_0 \in \Pi$ функция $\varphi(t, u_0)$ аналитически продолжается по t из $\bar{\Pi}$ через некоторую граничную точку $t_0 \in \partial \bar{\Pi}$. Обозначим через $\tilde{\varphi}(t, u_0)$ аналитическое продолжение функции $\varphi(t, u_0)$, ряд Тейлора которой равен:

$$\tilde{\varphi}(t, u_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \tilde{\varphi}}{\partial t^k}(t_0, u_0) \frac{(t - t_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(t_0, u_0) \frac{(t - t_0)^k}{k!}. \quad (1.22)$$

С учетом (1.18) имеем

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(t, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^p)^k e^{\nu^p t + \nu^q u}.$$

Подставляя это выражение в (1.22), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t, u_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^p)^k e^{\nu^p t_0 + \nu^q u_0} \right) \frac{(t - t_0)^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^q)^{\frac{p}{q}k} e^{\nu^p t_0 + \nu^q u_0} \right) \frac{(t - t_0)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

По формуле Коши-Адамара исследуем радиус сходимости этого ряда. В последовательности

$$^k \sqrt{\frac{1}{k!} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^q)^{\frac{p}{q}k} e^{\nu^p t_0 + \nu^q u_0} \right|}$$

рассмотрим подпоследовательность, полагая $k = qk_l$:

$$^{qk_l} \sqrt{\frac{1}{(qk_l)!} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^q)^{pk_l} e^{\nu^p t_0 + \nu^q u_0} \right|}.$$

Используя оценку (1.21), получим

$$^{qk_l} \sqrt{\frac{1}{(qk_l)!} \frac{(pk_l)!}{\rho^{pk_l}}} = ^{qk_l} \sqrt{\frac{(pk_l)!}{(qk_l)!}} \rho^{\frac{p}{q}}.$$

По формуле Стирлинга

$$^{qk_l} \sqrt{\frac{(pk_l)^{pk_l - \frac{1}{2}} e^{-pk_l}}{(qk_l)^{qk_l - \frac{1}{2}} e^{-qk_l}}} \rho^{\frac{p}{q}} \sim \frac{k_l^{\frac{p}{q}}}{k_l} \xrightarrow[k_l \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{при} \quad p > q.$$

Таким образом, ряд (1.22) имеет пустую область сходимости.

Из этого следует, что ряд (1.18) не продолжается по переменной t через точку $t_0 \in \partial \bar{\Pi}$. Теорема доказана.

ГЛАВА 2. Аналитическое продолжение кратных степенных рядов

Для кратных степенных рядов имеется гораздо меньше результатов об описании сингулярных подмножеств на границе области сходимости или, что то же самое, об описании подмножеств границы, через которые аналитически продолжаются такие ряды. В первом параграфе настоящей главы на случай кратных степенных рядов распространяется теорема Аракеяна [10], сформулированная во Введении. Напомним, что в этой теореме речь идет о размере дуги регулярности (через которую аналитически продолжается ряд) на границе круга сходимости в терминах индикатрисы роста целой функции экспоненциального типа, интерполирующей коэффициенты степенного ряда.

Во втором параграфе исследуется вопрос о продолжении степенных рядов в секториальные области пространства $\mathbb{C}^n$; такие области определяются условиями лишь на аргументы $\theta_j = \arg z_j$ переменных $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. В заключительном четвертом параграфе строятся двойные ряды с естественной границей. Такие ряды не продолжаются за пределы своих областей сходимости.

2.1 Критерий продолжимости кратного ряда через семейство полидуг

Рассмотрим n -кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_k z^k \quad (2.1)$$

со свойством

$$\overline{\lim}_{|k| \rightarrow \infty} |k| \sqrt{|f_k| R^k} = 1, \quad (2.2)$$

где $R^k = R_1^{k_1} \dots R_n^{k_n}$, а $|k| = k_1 + \dots + k_n$. Согласно многомерной теореме Коши-Адамара ([27], раздел 7), указанное в (2.2) свойство выражает тот факт, что R_j

составляют набор *радиусов поликруга сходимости* ряда (2.1).

Множество G назовем *множеством регулярности для ряда* (2.1), если сумма ряда аналитически продолжается через любую точку этого множества.

В настоящем параграфе мы опишем множества регулярности G , которые представляют собой семейство полидуг (прямых произведений дуг окружностей), лежащих на островах поликругов сходимости ряда (2.1). Пусть $D_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \rho\}$ — открытый круг с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиуса $\rho > 0$. Обозначим $D_\rho := D_\rho(0)$, а для $\sigma \in (0, \pi]$ через $\gamma_{\sigma, \rho}$ обозначим открытую дугу $\partial D_\rho \setminus \Delta_\sigma$.

2.1.1 Формулировка основного результата

В многомерной ситуации нет универсального определения индикатрисы роста целой функции. Более того, часто информацию о росте целой функции выражают в геометрических терминах. Следуя Иванову [28] (см. также [22], гл. 3, §3), введем следующее множество, в котором неявно отражается понятие индикатрисы целой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$:

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln |\varphi(re^{i\theta})| \leq \nu_1 r_1 + \dots + \nu_n r_n + C_{\nu, \theta}\},$$

где неравенство выполняется для любого $r \in \mathbb{R}_+^n$ при некоторой константе $C_{\nu, \theta}$. Здесь $re^{i\theta}$ — это вектор $(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})$. Таким образом, $T_\varphi(\theta)$ — это множество линейных мажорант (с точностью до сдвига $C_{\nu, \theta}$)

$$\nu = \nu(r) = \nu_1 r_1 + \dots + \nu_n r_n$$

для логарифма модуля функции φ .

Определим множество

$$\mathcal{M}_\varphi(\theta) := \{\nu \in \mathbb{R}^n : \nu + \varepsilon \in T_\varphi(\theta), \quad \nu - \varepsilon \notin T_\varphi(\theta) \quad \text{для любого } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^n\},$$

которое можно назвать *граничным множеством линейных мажорант*.

Скажем, что целая функция φ интерполирует коэффициенты ряда (2.1), если

$$\varphi(k) = f_k \text{ для всех } k \in \mathbb{N}^n. \quad (2.3)$$

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область сходимости ряда (2.1). Введем семейство

$$G = \bigcup_R \gamma_{\sigma, R} = \bigcup_R (\gamma_{\sigma_1, R_1} \times \dots \times \gamma_{\sigma_n, R_n}) \subset \partial D \quad (2.4)$$

полидуг $\gamma_{\sigma, R}$, где R пробегает поверхность сопряженных радиусов сходимости ряда (2.1), а $\sigma = \sigma(R) = (\sigma_1(R), \dots, \sigma_n(R))$.

Теорема 2.1. Семейство G полидуг (2.4) является множеством регулярности для ряда (2.1) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(z)$ такая, что:

- 1) $0 \in \mathcal{M}_{R^z \varphi}(0)$,
- 2) существует вектор-функция $\nu_R(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^z \varphi}(\theta)$, для которой

$$\overline{\lim}_{(\theta_1, \dots, \theta_n) \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\theta_j \rightarrow 0} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \leq \sigma_j(R), \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы достаточно провести для полидуги $\gamma_{\sigma, R}$ из остова поликруга сходимости

$$\{|z_1| < R_1, \dots, |z_n| < R_n\} = D_{R_1} \times \dots \times D_{R_n}.$$

А именно, мы будем доказывать следующее утверждение при фиксированных $R_1, \dots, R_n$.

Предложение. Полидуга $\gamma_{\sigma_1, R_1} \times \dots \times \gamma_{\sigma_n, R_n}$ является множеством регулярности для ряда (2.1) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(z)$ такая, что:

- 1) $0 \in \mathcal{M}_{R^z \varphi}(0)$,
- 2) существует вектор-функция $\nu(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^z \varphi}(\theta)$, для которой

$$\overline{\lim}_{(\theta_1, \dots, \theta_n) \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\theta_j \rightarrow 0} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \leq \sigma_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Любопытно отметить, что для класса гипергеометрических функций (а такому классу принадлежит и общая алгебраическая функция, т.е. определенная полиномиальным уравнением с независимыми переменными коэффициентами) полидугу регулярности можно расширить до политопа регулярности (см. [35] и [26], гл. 4,7). Речь идет о продолжении ряда через кусок границы области сходимости, который в угловых координатах $\theta_1, \dots, \theta_n$ определяется политопом, т.е. ограниченным многогранником.

2.1.2 Необходимость условия Теоремы 2.1

Пусть сумма ряда (2.1) продолжается через полидугу

$$\gamma_{\sigma, R} = \gamma_{\sigma_1, R_1} \times \dots \times \gamma_{\sigma_n, R_n}.$$

Покажем, что существует целая функция $\varphi(\zeta)$, которая интерполирует коэффициенты f_k и удовлетворяет условиям 1) и 2).

Согласно предположению существует односвязная область Ω , которая содержит $(D_{R_1} \times \dots \times D_{R_n}) \cup \gamma_{\sigma, R}$, и в которой сумма ряда (2.1) голоморфна. По теореме Гартогса ([27], раздел 32) эта сумма голоморфно продолжается в область, содержащую

$$(D_{R_1} \cup \gamma_{\sigma_1, R_1}) \times \dots \times (D_{R_n} \cup \gamma_{\sigma_n, R_n}).$$

Зафиксируем числа $r_o^j \in (0, R_j |1 - e^{i\sigma_j}|)$, $j = 1, \dots, n$, так, что

$$(\bar{D}_{r_o^1}(-R_1)) \times \dots \times (\bar{D}_{r_o^n}(-R_n)) \subset \Omega.$$

Обозначим $e^{\mu_o^j} := R_j + r_o^j$, $j = 1, \dots, n$. Для любых $\delta_j \in (0, \pi - \sigma_j)$ зафиксируем $\mu_j = \mu_{\delta_j}^j \in (\ln R_j, \mu_o^j)$ так, что

$$(\bar{D}_{e^{\mu_1}} \setminus \Delta_{\sigma_1 + \delta_1}^o) \times \dots \times (\bar{D}_{e^{\mu_n}} \setminus \Delta_{\sigma_n + \delta_n}^o) \subset \Omega.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ область

$$\Omega_{\varepsilon, \delta} = \Omega_{\varepsilon_1, \delta_1}^1 \times \dots \times \Omega_{\varepsilon_n, \delta_n}^n,$$

где

$$\Omega_{\varepsilon_j, \delta_j}^j := (D_{r_o^j}(-R_j)) \cup (\bar{D}_{e^{\mu_j}} \setminus \Delta_{\sigma_j + \delta_j}) \cup D_{R_j e^{-\varepsilon_j}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

удовлетворяет условию $\bar{\Omega}_{\varepsilon, \delta} \subset \Omega$.

Обозначим $\Gamma_{\varepsilon, \delta} := \partial\Omega_{\varepsilon_1, \delta_1}^1 \times \dots \times \partial\Omega_{\varepsilon_n, \delta_n}^n$ — остов $\Omega_{\varepsilon, \delta}$.

Так как $f \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}_{\varepsilon, \delta})$, то, применяя интегральную формулу Коши для коэффициентов степенного ряда (2.1), получим

$$f_k = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_{\varepsilon, \delta}} \zeta^{-k-I} f(\zeta) d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}^n,$$

где $I = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$, а $d\zeta = d\zeta_1 \dots d\zeta_n$. В качестве искомой интерполирующей функции φ возьмем тот же самый интеграл, но с комплексным параметром z вместо целочисленного k :

$$\varphi(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma_{\varepsilon, \delta}} \zeta^{-z-I} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } \zeta_j^{z_j} = e^{z_j \log \zeta_j}. \quad (2.5)$$

Функция $\varphi(z)$ целая так как является интегралом по компакту от функции, непрерывной вплоть до границы по совокупности переменных $(\zeta, z) \in (\Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)^n) \times \mathbb{C}^n$ и голоморфной всюду по параметру z (здесь $\mathbb{R}_-$ — отрицательная вещественная полуось) [36].

Теперь нам нужно получить оценку для функции φ . Для этого произведем деформацию остова $\Gamma_{\varepsilon, \delta}$ следующим образом. Куски дуг из $\partial D_{r_o^j}(-R_j)$, изображенные на рис. 6 пунктиром, заменяем двумя дугами на $\partial D_{e^{\mu_j}}$ и на пару противоположно ориентированных отрезков $[-e^{\mu_o^j}, -e^{\mu_j}]$ и $[-e^{\mu_j}, -e^{\mu_o^j}]$. Полученный для каждого $j = 1, \dots, n$ контур обозначим $L_{\varepsilon_j, \delta_j}^j$. Весь остов $\Gamma_{\varepsilon, \delta}$ деформируется

в n -мерный цикл

$$L_{\varepsilon, \delta} = L_{\varepsilon_1, \delta_1}^1 \times \dots \times L_{\varepsilon_n, \delta_n}^n.$$

Заметим, что при фиксированном $r_0 \in \mathbb{R}_+^n$ и выбранном $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ кривые $L_{\varepsilon_j, \delta_j}^j$ и $L_{\varepsilon_j, \delta_j}^j$ ограничивают цепь, где подынтегральное выражение в (2.5) однозначно и голоморфно по ζ_j , поэтому задание $\varphi(z)$ интегралом (2.5) не зависит от ε и δ .

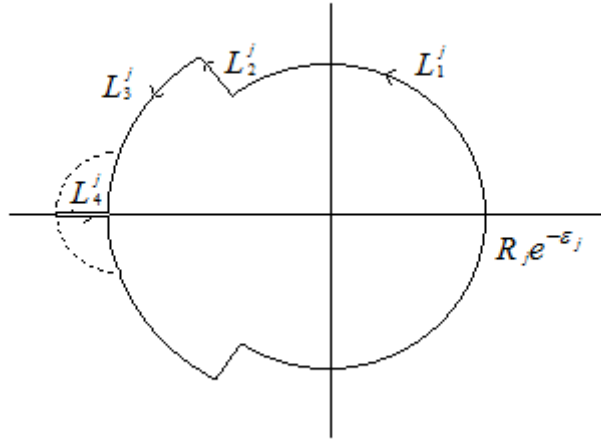


Рисунок 6

Обозначая $z_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, \dots, n$, и

$$M_{\varepsilon, \delta} := \sup_{\zeta \in L_{\varepsilon, \delta}} |f(\zeta)|,$$

из (2.5) получаем оценку

$$|\varphi(z)| \leq M_{\varepsilon, \delta} \mathcal{I}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (2.6)$$

где

$$\mathcal{I} = \pi^n \int_{L_1^+ \times \dots \times L_n^+} |\zeta_1|^{-\xi_1-1} e^{|\eta_1| \arg \zeta_1} \dots |\zeta_n|^{-\xi_n-1} e^{|\eta_n| \arg \zeta_n} |d\zeta_1| \dots |d\zeta_n|.$$

Здесь L_j^+ – это часть $L_{\varepsilon_j, \delta_j}^j$, лежащая в верхней полуплоскости, т.е.

$$L_+^j = L_1^j \cup L_2^j \cup L_3^j \cup L_4^j,$$

где

$$L_1^j = \{R_j e^{-\varepsilon_j + i\omega_j} : \omega_j \in [0, \sigma_j + \delta_j)\},$$

$$L_2^j = \{t_j e^{i(\sigma_j + \delta_j)} : t_j \in [R_j e^{-\varepsilon_j}, e^{\mu_j})\},$$

$$L_3^j = \{e^{\mu_j + i\omega_j} : \omega_j \in [\sigma_j + \delta_j, \pi)\},$$

$$L_4^j = \{t_j e^{i\pi} : t_j \in [e^{\mu_j}, e^{\mu_j^*}]\}.$$

Следовательно, $\mathcal{I}$ можно представить как сумму интегралов $\mathcal{I}_{p_1, \dots, p_n}$ по цепям $L_{p_1}^1 \times \dots \times L_{p_n}^n$, $p_1, \dots, p_n = 1, 2, 3, 4$. Каждая такая цепь есть прямое произведение дуг (с центрами в нуле) и *отрезков* прямых (проходящих через нуль). Это позволяет сделать эффективные оценки интегралов $\mathcal{I}_{p_1, \dots, p_n}$. Например,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1\dots 1} &= \frac{1}{\pi^n} \int_{L_1^1 \times \dots \times L_1^n} |\zeta_1|^{-\xi_1} e^{|\eta_1| \arg \zeta_1} \dots |\zeta_n|^{-\xi_n} e^{|\eta_n| \arg \zeta_n} \left| \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \right| \dots \left| \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_0^{\sigma_1 + \delta_1} \dots \int_0^{\sigma_n + \delta_n} \prod_{j=1}^n (R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j + |\eta_j| \omega_j}) d\omega_1 \dots d\omega_n = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \left(R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} \frac{e^{(\sigma_j + \delta_j)|\eta_j|} - 1}{|\eta_j|} \right). \end{aligned}$$

С учетом того, что $\sigma_j + \delta_j \leq \pi$, мы из очевидного неравенства $e^{ax} - 1 \leq ae^{ax}$, где $a \geq 0$, $x \geq 0$, получаем оценку

$$\mathcal{I}_{1\dots 1} \leq \prod_{j=1}^n \left(R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} e^{(\sigma_j + \delta_j)|\eta_j|} \right).$$

Аналогичное вычисление дает:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{2\dots 2} &= \frac{1}{\pi^n} \int_{L_2^1 \times \dots \times L_2^n} |\zeta_1|^{-\xi_1} e^{|\eta_1| \arg \zeta_1} \dots |\zeta_n|^{-\xi_n} e^{|\eta_n| \arg \zeta_n} \left| \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \right| \dots \left| \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{R_1 e^{-\varepsilon_1}}^{e^{\mu_1}} \dots \int_{R_n e^{-\varepsilon_n}}^{e^{\mu_n}} \prod_{j=1}^n \left(t_j^{-\xi_j - 1} e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} \right) dt_1 \dots dt_n = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \left(e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} \left(\frac{e^{-\mu_j \xi_j} - R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j}}{-\xi_j} \right) \right).$$

Следовательно, при $\xi_j \geq 1$ получаем оценку

$$\mathcal{I}_{2...2} \leq \prod_{j=1}^n \left(e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{3...3} &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\sigma_1 + \delta_1}^{\pi} \dots \int_{\sigma_n + \delta_n}^{\pi} \prod_{j=1}^n \left(e^{-\mu_j \xi_j} e^{\omega_j |\eta_j|} \right) d\omega_1 \dots d\omega_n = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \left(e^{-\mu_j \xi_j} \left(\frac{e^{|\eta_j| \pi} - e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)}}{|\eta_j|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \left(e^{-\mu_j \xi_j} e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} \left(\frac{e^{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j)} - 1}{|\eta_j|} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \left((\pi - \sigma_j - \delta_j) e^{-\mu_j \xi_j} e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} \left(\frac{e^{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j)} - 1}{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j)} \right) \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \left(\pi e^{-\mu_j \xi_j} e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} e^{|\eta_j|(\pi - \sigma_j - \delta_j)} \right) \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^n e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{4...4} &= \frac{1}{\pi^n} \int_{e^{\mu_1}}^{e^{\mu_o^1}} \dots \int_{e^{\mu_n}}^{e^{\mu_o^n}} t_1^{-\xi_1 - 1} e^{\pi |\eta_1|} \dots t_n^{-\xi_n - 1} e^{\pi |\eta_n|} dt_1 \dots dt_n = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n \left(e^{\pi |\eta_j|} \left(\frac{e^{-\mu_j \xi_j} + e^{-\mu_o^j \xi_j}}{\xi_j} \right) \right), \end{aligned}$$

откуда при $\xi_j \geq 1$ приходим к оценке

$$\mathcal{I}_{4\dots 4} \leq \prod_{j=1}^n e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|}.$$

Полученные результаты показывают, что при повторном вычислении интеграла $\mathcal{I}_{p_1\dots p_n}$ в зависимости от значения p_j (показывающего, что интегрирование по переменной ζ_j ведется по куску $L_{p_j}^j$), вклад в оценку этого интеграла дают выражения:

$$\begin{aligned} & R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} e^{(\sigma_j + \delta_j) |\eta_j|}, \text{ если } p_j = 1, \\ & e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j}, \text{ если } p_j = 2 \text{ и } \xi_j \geq 1, \\ & e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|}, \text{ если } p_j = 3, \\ & e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|}, \text{ если } p_j = 4 \text{ и } \xi_j \geq 1. \end{aligned}$$

Каждый набор $p_1, \dots, p_n$ разобьем на 4 группы: A_1, A_2, A_3, A_4 , где A_j – это номера $k \in \{1, \dots, n\}$, для которых $p_k = j$. Тогда при $\xi_l \geq 1$, $j = 1, \dots, n$, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p_1, \dots, p_n} & \leq \prod_{j \in A_1} R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} e^{(\sigma_j + \delta_j) |\eta_j|} \prod_{j \in A_2} e^{|\eta_j|(\sigma_j + \delta_j)} R_j^{-\xi_j} e^{\varepsilon_j \xi_j} \times \\ & \times \prod_{j \in A_3} e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|} \prod_{j \in A_4} e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|}. \end{aligned}$$

При $\pi |\eta_j| \leq \mu_j \xi_j$ выполняется неравенство $e^{-\mu_j \xi_j + \pi |\eta_j|} \leq 1$, поэтому из предыдущей оценки получаем следующую оценку для суммарного интеграла:

$$\mathcal{I} < C_{\varepsilon, \delta} R_1^{-\xi_1} \dots R_n^{-\xi_n} e^{|\eta_1|(\sigma_1 + \delta_1) + \varepsilon \xi_1} \dots e^{|\eta_n|(\sigma_n + \delta_n) + \varepsilon \xi_n}.$$

Таким образом, в обозначениях $\zeta_j = r_j e^{i\theta_j}$ и $\alpha_j = \arctan(\mu_j/\pi)$ неравенство (2.6) дает нам оценку для функции φ :

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq c R^{-r \cos \theta} e^{((\sigma_1 + \delta_1) |\sin \theta_1| + \varepsilon_1 \cos \theta_1) r_1 + \dots + ((\sigma_n + \delta_n) |\sin \theta_n| + \varepsilon_n \cos \theta_n) r_n}, \quad (2.7)$$

если $|\theta_j| \leq \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$.

Неравенство (2.7) можно переписать в следующем виде

$$R^{r \cos \theta} |\varphi(re^{i\theta})| \leq ce^{((\sigma_1 + \delta_1)|\sin \theta_1| + \varepsilon_1 \cos \theta_1)r_1 + \dots + ((\sigma_n + \delta_n)|\sin \theta_n| + \varepsilon_n \cos \theta_n)r_n}.$$

Логарифмируя последнее неравенство, получим при $|\theta_j| \leq \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$

$$\ln(R^{r \cos \theta} |\varphi(re^{i\theta})|) \leq c + \sum_{j=1}^n ((\sigma_j + \delta_j)|\sin \theta_j| + \varepsilon_j \cos \theta_j)r_j. \quad (2.8)$$

Взяв $\theta = 0$ в неравенстве (2.8), получим

$$\ln(R^r |\varphi(r)|) \leq c + \langle \varepsilon, r \rangle \quad (2.9)$$

для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$. Это означает, что $0 \in T_{R^z \varphi}(0)$.

С помощью равенств (2.2) и (2.3) заключаем, что

$$\ln(R^k |\varphi(k)|)^{\frac{1}{|k|}} = 0, \quad \text{при } |k| \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

то есть для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ вектор $-\varepsilon \notin T_{R^z \varphi}(0)$. Следовательно, из (2.9) и (2.10) получаем $0 \in \mathcal{M}_{R^z \varphi}(0)$.

Также из неравенства (2.8) следует, что для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$

$$((\sigma_1 + \delta_1)|\sin \theta_1| + \varepsilon_1 \cos \theta_1, \dots, (\sigma_n + \delta_n)|\sin \theta_n| + \varepsilon_n \cos \theta_n) \in T_{R^z \varphi}(\theta),$$

если $|\theta_j| \leq \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$.

Следовательно существует $\nu(\theta) = (\nu_1(\theta), \dots, \nu_n(\theta)) \in \mathcal{M}_{R^z \varphi}(\theta)$ со свойством

$$\nu_j(\theta) \leq (\sigma_j + \delta_j)|\sin \theta_j| \quad \text{при } |\theta_j| \leq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для компонент $\nu(\theta)$ получаем

$$\overline{\lim}_{(\theta_1, \dots, \hat{j}, \dots, \theta_n) \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\theta_j \rightarrow 0} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \leq \sigma_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тем самым необходимость условия Предложения, следовательно и Теоремы, доказана.

2.1.3 Достаточность условия Теоремы 2.1

Пусть φ целая функция, которая удовлетворяет условиям 1) и 2) заключения Предложения. Покажем, что ряд (2.1) продолжается через полидугу $\gamma_{\sigma_1, R_1} \times \dots \times \gamma_{\sigma_n, R_n}$. Из условия 2) следует, что для любого $\delta_j \in (0, \frac{\pi - \sigma_j}{2})$ существует α_j такое, что

$$\nu_j(\theta) \leq (\sigma_j + \delta_j) |\sin \theta_j|, \quad \text{если } |\theta_j| \leq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку $\nu(\theta) \in \mathcal{M}_{R^z \varphi}(\theta)$, выполняется неравенство

$$\ln(R^{\cos \theta} |\varphi(re^{i\theta})|) \leq ((\sigma_1 + \delta_1) |\sin \theta_1|) r_1 + \dots + ((\sigma_n + \delta_n) |\sin \theta_n|) r_n + c,$$

из которого вытекает следующая оценка

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq e^c R_1^{-r_1 \cos \theta_1} \dots R_n^{-r_n \cos \theta_n} e^{((\sigma_1 + \delta_1) |\sin \theta_1|) r_1 + \dots + ((\sigma_n + \delta_n) |\sin \theta_n|) r_n}. \quad (2.11)$$

Введем вспомогательную функцию

$$g(\zeta, z) = \prod_{j=1}^n \frac{z_j^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)},$$

где $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$. Эта функция является мероморфной функцией по переменным ζ из $\mathbb{C}^n$ и голоморфной по переменным z из $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)^n$.

Обозначим $D^* := \cup_{m \in \mathbb{Z}} D_{1/4}(m)$. Заметим, что существует константа $C > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$|e^{2\pi i w} - 1| > \frac{e^{\pi(|\operatorname{Im} w| - \operatorname{Im} w)}}{C} \quad \text{при } w \in D^*.$$

Из него легко получается оценка

$$g(\zeta, z) < C e^{\langle \xi, \log |z| \rangle - \langle (\pi - |\pi - \arg z|), |\eta| \rangle} \quad (2.12)$$

при $\zeta \in (\mathbb{C} \setminus D^*)^n$ и $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)^n$.

Используя (2.11) и (2.12) для $\zeta \in (\Delta_{\sigma_1} \setminus D^*) \times \dots \times (\Delta_{\sigma_n} \setminus D^*)$ и $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)^n$, получим

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)| &< cR^{-\xi} e^{\langle \sigma + \delta, \eta \rangle} e^{\langle \xi, \log |z| \rangle - \langle (\pi - |\pi - \arg z|), |\eta| \rangle} = \\ &= cR^{-\xi} e^{\langle \xi, \log |z| \rangle - \langle (\pi - |\pi - \arg z| - \sigma - \delta), |\eta| \rangle}. \end{aligned}$$

Обозначая

$$d(z) = (d_1(z_1), \dots, d_n(z_n)), \quad d_j(z_j) = \pi - |\pi - \arg z_j| - \sigma_j - \delta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

получим

$$|\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)| < cR^{-\xi} e^{\langle \xi, \log |z| \rangle - \langle d(z), |\eta| \rangle}. \quad (2.13)$$

Введем множества

$$K_j = \bar{D}_{R_j e^{\varepsilon_j}} \setminus (\Delta_{\sigma_j + 2\delta_j}^o \cup D_{R_j/2}), \quad \varepsilon_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

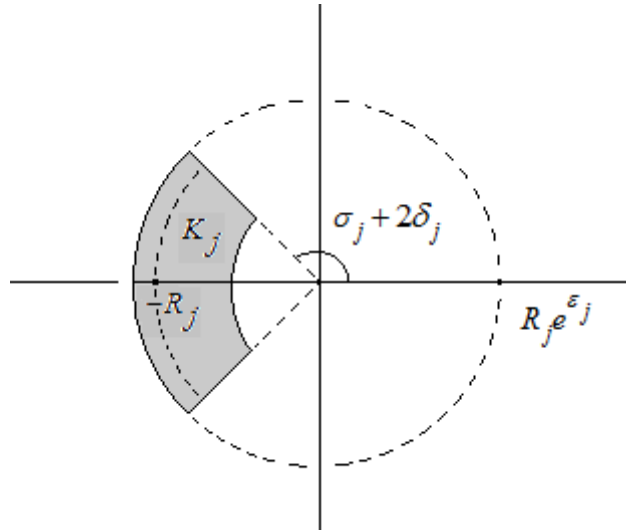


Рисунок 7

Покажем, что

$$d_j(z_j) \geq \delta_j \quad \text{при} \quad z_j \in K_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Действительно,

$$d_j(z_j) = \pi - \sigma_j - \delta_j - |\pi - \arg z_j|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку $z_j \in K_j$, то

$$1) \sigma_j + 2\delta_j < \arg z_j < \pi, \Rightarrow d_j(z_j) = \pi - \sigma_j - \delta_j - \pi + \sigma_j + 2\delta_j \geq \delta_j,$$

$$2) \pi < \arg z_j < 2\pi - \sigma_j - 2\delta_j, \Rightarrow d_j(z_j) = 2\pi - \sigma_j - \delta_j - 2\pi + \sigma_j + 2\delta_j \geq \delta_j.$$

Таким образом, для $(z_1, \dots, z_n) \in (K_1 \times \dots \times K_n)$ и $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in (\partial\Delta_{\alpha_1} \setminus D^*) \times \dots \times (\partial\Delta_{\alpha_n} \setminus D^*)$ получим

$$\begin{aligned} |g(\zeta, z)| |\varphi(\zeta)| &< cR^{-\xi} e^{\langle \xi, \log |z| \rangle - \langle \delta, |\eta| \rangle} \leq \\ &\leq cR^{-\xi} e^{\langle \xi, \log(Re^\varepsilon) \rangle - \langle \delta, |\eta| \rangle} = ce^{\langle \xi, \varepsilon \rangle - \langle \delta, |\eta| \rangle}. \end{aligned}$$

Взяв $2\varepsilon_j = \delta_j \sin \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$, получим

$$|g(\zeta, z)| |\varphi(\zeta)| < ce^{\langle -\varepsilon, |\zeta| \rangle}. \quad (2.14)$$

Для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим область

$$G_j := D_{R_j} \cup \Delta_{\alpha_j}^o,$$

и пусть $\Gamma_j = \partial G_j$ – граница этой области, положительно ориентированная относительно нуля. Для каждого натурального m_j рассмотрим следующий кусок Γ_j :

$$\Gamma_{m_j}^j := \{\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in \Gamma_j : \xi_j \leq m_j + \frac{1}{2}\}.$$

Обозначим через L_m^j – вертикальный отрезок с вершинами (см. рис. 8)

$$(m_j + \frac{1}{2})(1 \pm i \tan \alpha_j) \quad \text{для } m_j \in \mathbb{N},$$

ориентированный движением снизу вверх. Ограниченную объединением $\Gamma_{m_j}^j \cup L_{m_j}^j$ область обозначим $G_{m_j}^j$ так, что

$$\partial G_{m_j}^j = \Gamma_{m_j}^j \cup L_{m_j}^j.$$

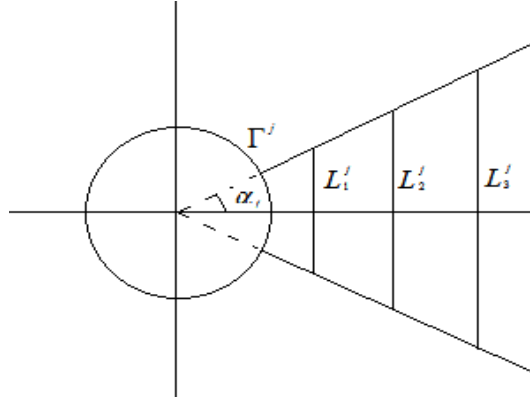


Рисунок 8

Рассмотрим следующий интеграл

$$\begin{aligned}
 I_m &= \int_{\partial G_1^{m_1} \times \dots \times \partial G_n^{m_n}} g(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\zeta = \\
 &= \int_{\partial G_1^{m_1} \times \dots \times \partial G_n^{m_n}} \prod_{j=1}^n \frac{z^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)} \varphi(\zeta) d\zeta.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Вычислим этот интеграл с помощью многомерных вычетов. Его подынтегральное выражение есть дифференциальная форма

$$\omega = \prod_{j=1}^n \frac{z^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)} \varphi(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

с полюсами на дивизорах

$$Q_1 = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) : f_1 = e^{2\pi i \zeta_1} - 1 = 0\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{n-1},$$

.....

$$Q_n = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) : f_n = e^{2\pi i \zeta_n} - 1 = 0\} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{Z}.$$

Так как пересечение $Z = Q_1 \cap \dots \cap Q_n = \mathbb{Z}^n$ дискретно, и якобиан $\partial(f)/\partial(\zeta) = (2\pi i)^n \neq 0$ в точках $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, то для каждой точки $k \in \mathbb{Z}^n$ определяется локальный вычет (см. [37], [31]) :

$$res_k \omega = \frac{z^k \varphi(k)}{\frac{\partial(f)}{\partial(\zeta)}(k)} = \varphi(k) z^k. \quad (2.16)$$

Остов интегрирования в (2.15) связан с полярными дивизорами $Q_1, \dots, Q_n$ следующими соотношениями:

$$Q_1 \cap (\partial G_1^{m_1} \times \dots \times G_n^{m_n}) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{n-1}) \cap (\partial G_1^{m_1} \times \dots \times G_n^{m_n}) = \emptyset,$$

.....

$$Q_n \cap (G_1^{m_1} \times \dots \times \partial G_n^{m_n}) = (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{Z}) \cap (G_1^{m_1} \times \dots \times \partial G_n^{m_n}) = \emptyset.$$

Согласно терминологии [37], это означает, что полиэдр $G_1^{m_1} \times \dots \times G_n^{m_n}$ согласован с дивизорами $Q_1, \dots, Q_n$. Поэтому, согласно принципу разделяющих циклов, интеграл (2.15) после умножения на $(2\pi i)^{-n}$ равен сумме вычетов по всем точкам

$$k \in (G_1^{m_1} \times \dots \times G_n^{m_n}) \cap (\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}).$$

С учетом формулы (2.16) получаем

$$I_m = \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} \varphi(k_1, \dots, k_n) z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}.$$

Представим интеграл (2.15) как сумму 2^n интегралов по цепям

$$\Gamma_{m_1}^1 \times \dots \times \Gamma_{m_n}^n, \dots, L_{m_1}^1 \times \dots \times L_{m_n}^n.$$

Для каждой такой цепи переменные интегрирования $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ разобьем на 2 группы: B_1, B_2 , где B_1 – это номера $j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $\zeta_j \in L_{m_j}^j$, а B_2 – это номера $j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $\zeta_j \in \Gamma_{m_j}^j$. Тогда, используя (2.13), получим следующую оценку:

$$|g(\zeta, z)| |\varphi(\zeta)| < C \prod_{j \in B_1} e^{m_j \log \frac{|z_j|}{R_j}} \prod_{j \in B_2} e^{-\varepsilon_j |\zeta_j|}, \quad (2.17)$$

где $z \in (D_{R_1} \cap K_1^o) \times \dots \times (D_{R_n} \cap K_n^o)$.

Из (2.17) видно, что, если $B_1 \neq \emptyset$, то интеграл по соответствующей цепи стремится к нулю, когда $m_j \rightarrow \infty$, $j \in B_1$.

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{I} = \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} g(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Из оценки (2.14) следует, что интеграл I сходится равномерно для z из компакта $(K_1 \times \dots \times K_n)$, определяя голоморфную функцию на внутренности этого компакта.

Поскольку $I_m \rightarrow \mathcal{I}$ при $m_j \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, n$, получаем $\mathcal{I}(z) = f(z)$ при $z \in (D_{R_1} \cap K_1^o) \times \dots \times (D_{R_n} \cap K_n^o)$. Это означает, что полидуга $\gamma_{\sigma+2\delta, R}$ является полидугой регулярности для f , если δ достаточно близок к нулю. Таким образом, $\gamma_{\sigma, R}$ – полидуга регулярности для f , что и требовалось доказать.

2.2 Условия продолжимости кратного ряда в секториальную область

Здесь мы приведем достаточное условие аналитической продолжимости кратного степенного ряда в секториальную область. Область $G \subset \mathbb{C}^n$ называется секториальной, если оно определяется лишь условиями на аргументы $\theta = (\arg z_1, \dots, \arg z_n)$ элементов $z \in \mathbb{C}^n$. Как и в теореме 2.1, условие продолжимости выражается в терминах вектор-функции $\nu(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_\varphi(\theta)$, но в более конструктивной форме. Напомним, что φ – интерполирующая коэффициенты ряда целая функция.

Обозначим

$$T_\varphi := \bigcap_{\theta_j = \pm \frac{\pi}{2}} T_\varphi(\theta_1, \dots, \theta_n).$$

$$\mathcal{M}_\varphi := \{\nu \in [0, \pi)^n : \nu + \varepsilon \in T_\varphi, \nu - \varepsilon \notin T_\varphi \text{ для любого } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Пусть G — секториальное множество

$$G = \bigcup_{\nu \in \mathcal{M}_\varphi} G_\nu \quad (2.18)$$

являющееся объединением открытых полисекторов

$$G_\nu = (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_1}) \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_n}).$$

Множество G является областью: оно открыто как объединение открытых множеств, а связность вытекает из того, что каждый полисектор G_ν связный и все они содержат точку $(-1, \dots, -1)$.

Теорема 2.2. *Сумма ряда (2.1) аналитически продолжается в секториальную область G вида (2.18), если найдется интерполирующая коэффициенты f_k целая функция $\varphi(\zeta)$ экспоненциального типа и вектор-функция $\nu(\theta)$, заданная на кубе $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$ и принимающая значения в $\mathcal{M}_\varphi(\theta)$, для которых*

$$\nu_j(\theta) \leq a|\sin \theta_j| + b \cos \theta_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

с некоторыми константами $a \in [0, \pi)$, $b \in [0, \infty)$.

Доказательство. Пусть φ — целая функция, которая удовлетворяет условиям теоремы. Для всех $\nu \in T_\varphi(\theta)$ она удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq A_{\nu, \theta} e^{\langle \nu, r \rangle} \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^n,$$

а потому для $\nu \in \mathcal{M}_\varphi(\theta)$ она удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq A_{\nu, \theta} e^{\langle \nu, r \rangle + o(r)} \quad \forall r \in \mathbb{R}_+^n.$$

Из условия (2.19) тогда получаем, что для $\theta_j \leq \frac{\pi}{2}, j = 1, \dots, n$.

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq A_{\nu, \theta} e^{a \sum_{j=1}^n r_j |\sin \theta_j| + b \sum_{j=1}^n r_j \cos \theta_j + o(r)}.$$

При обозначения $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j = r_j e^{i\theta_j}$ получим

$$|\varphi(\zeta)| \leq A_{\nu, \theta} e^{a \sum |\eta_j| + b \sum \xi_j + o(|\zeta|)} \quad (2.20)$$

для $\zeta_j \in \Delta_{\pi/2}$, $j = 1, \dots, n$.

Введем вспомогательную функцию

$$g(\zeta, z) = \prod_{j=1}^n \frac{z_j^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)},$$

где $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$. Эта функция является мероморфной функцией по ζ в $\mathbb{C}^n$ и голоморфной по z в $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)^n$.

Используя (2.20) и (2.12) для $\zeta \in (\Delta_{\pi/2} \setminus D^*)^n$ и $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)^n$, получим

$$\begin{aligned} |\varphi(\zeta)| |g(\zeta, z)| &\leq c e^{b \sum \xi_j + a \sum |\eta_j|} e^{\sum \xi_j \ln |z_j| - \sum (\pi - |\pi - \arg z_j|) |\eta_j| + o(|\zeta|)} = \\ &= c e^{\sum \xi_j (\ln |z_j| + b) - \sum (\pi - a - |\pi - \arg z_j|) |\eta_j| + o(|\zeta|)}. \end{aligned}$$

Обозначая $d(z_j) = \pi - a - |\pi - \arg z_j|$, получим

$$|\varphi(\zeta)| |g(\zeta, z)| \leq c e^{\sum \xi_j (\ln |z_j| + b) - \sum d(z_j) |\eta_j| + o(|\zeta|)}.$$

Пусть

$$K = \bar{D}_{e^{-b-\delta}} \setminus (\Delta_{a+\delta}^o \cup D_{e^{-2b}}).$$

Заметим, что

$$d(z_j) \geq \delta \quad \text{при } z_j \in K \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, для $z \in K^n$ и $\zeta \in (\Delta_{\frac{\pi}{2}} \setminus D^*)^n$ получим

$$|g(\zeta, z)| |\varphi(\zeta)| < c e^{\sum \xi_j (\ln |z_j| + b) - \delta \sum |\eta_j| + o(|\zeta|)}. \quad (2.21)$$

Для каждого $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ рассмотрим интеграл

$$I_m = \int_{\partial G_m} \varphi(\zeta) g(\zeta, z) d\zeta, \quad (2.22)$$

где $\partial G_m = \partial G_{m_1} \times \dots \times \partial G_{m_n}$. Здесь каждая из плоских областей G_{m_j} ограничена набором отрезков: $\partial G_{m_j}^j = \Gamma_{m_j}^1 \cup \Gamma_{m_j}^2 \cup \Gamma_{m_j}^3 \cup \Gamma_{m_j}^4$,

$$\Gamma_{m_j}^1 = [-im_j, im_j],$$

$$\Gamma_{m_j}^2 = [im_j, a_j + m_j + im_j],$$

$$\Gamma_{m_j}^3 = [a_j + m_j + im_j, a_j + m_j - im_j],$$

$$\Gamma_{m_j}^4 = [a_j + m_j - im_j, -im_j]$$

где $\frac{1}{4} < a_j < \frac{3}{4}$.

Представим интеграл I_m как сумму 4^n интегралов по цепям

$$\Gamma_{m_1}^1 \times \dots \times \Gamma_{m_n}^1, \dots, \Gamma_{m_1}^{i_1} \times \dots \times \Gamma_{m_n}^{i_n}, \dots, \Gamma_{m_1}^4 \times \dots \times \Gamma_{m_n}^4.$$

где $i_1, \dots, i_n$ — произвольные наборы из чисел 1,2,3,4.

Для каждой такой цепи переменные интегрирования $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ разобьем на 2 группы B_1, B_2 , где B_1 — это номера $j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $\zeta_j \in \Gamma_{m_j}^1$, а B_2 — это номера $j \in \{1, \dots, n\}$, для которых $\zeta_j \in \Gamma_{m_j}^2 \cup \Gamma_{m_j}^3 \cup \Gamma_{m_j}^4$.

Используя неравенство (2.21) в K^n , получим

$$|g(\zeta, z)| |\varphi(\zeta)| < c \prod_{j \in B_1} e^{-\delta |\eta_j|} \prod_{j \in B_2} e^{-\delta m_j} e^{o(|\zeta|)}.$$

Таким образом, когда $B_2 \neq \emptyset$, интеграл по соответствующему контуру стремится к нулю при $m_j \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, n$.

Следовательно, для K_n получаем

$$I_m = \int_{\partial G_m} \varphi(\zeta) g(\zeta, z) d\zeta = \int_{\Gamma_m^1} \varphi(\zeta) g(\zeta, z) d\zeta = I_m^1$$

для $m_j \rightarrow \infty$.

С другой стороны интеграл I_m можно вычислить с помощью многомерных вычетов, как это было сделано в разделе 2.1.3.

Его подынтегральное выражение есть дифференциальная форма

$$\omega = \prod_{j=1}^n \frac{z^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)} \varphi(\zeta) d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

с полюсами на дивизорах

$$Q_1 = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) : f_1 = e^{2\pi i \zeta_1} - 1 = 0\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{n-1},$$

.....

$$Q_n = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) : f_n = e^{2\pi i \zeta_n} - 1 = 0\} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{Z}.$$

Так как пересечение $Z = Q_1 \cap \dots \cap Q_n = \mathbb{Z}^n$ дискретно и якобиан $\partial(f)/\partial(\zeta) = (2\pi i)^n \neq 0$ в точках $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, то для каждой точки $k \in \mathbb{Z}^n$ определяется локальный вычет (см. Приложение П.2) :

$$res_k \omega = \frac{z^k \varphi(k)}{\frac{\partial(f)}{\partial(\zeta)}(k)} = \varphi(k) z^k. \quad (2.23)$$

Остов интегрирования в (2.22) связан с полярными дивизорами $Q_1, \dots, Q_n$ следующими соотношениями:

$$Q_1 \cap (\partial G_{m_1}^1 \times \dots \times G_{m_n}^n) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{n-1}) \cap (\partial G_{m_1}^1 \times \dots \times G_{m_n}^n) = \emptyset,$$

.....

$$Q_n \cap (G_{m_1}^1 \times \dots \times \partial G_{m_n}^n) = (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{Z}) \cap (G_{m_1}^1 \times \dots \times \partial G_{m_n}^n) = \emptyset.$$

Это означает, что полиэдр $G_1^{m_1} \times \dots \times G_n^{m_n}$ согласован с дивизорами $Q_1, \dots, Q_n$. Поэтому по теореме из П.2 интеграл (2.22), после умножения на $(2\pi i)^{-n}$, равен сумме вычетов по всем точкам

$$k \in (G_{m_1}^1 \times \dots \times G_{m_n}^n) \cap (\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}).$$

С учетом формулы (2.23) получаем

$$I_m = \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} \varphi(k_1, \dots, k_n) z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\mathbb{I} = \int_{\Gamma^1} g(\zeta, z) \varphi(\zeta) d\zeta.$$

где $\Gamma^1 = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \xi_j = 0, j = 1, \dots, n\}$ — мнимое подпространство $i\mathbb{R}^n$.

Покажем, что при $\zeta \in \Gamma^1$ ($\zeta_j = i\eta_j$) и $z \in G$ для модуля подинтегрального выражения $|\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)|$ справедлива оценка

$$|g(\zeta, z)||\varphi(\zeta)| < e^{-\delta \sum |\eta_j|}.$$

Действительно, из определения множество T_φ (T_φ характеризует рост функции φ по мнимому подпространству) следует неравенство

$$|\varphi(\zeta)| \leq e^{C_{\nu, \theta} \sum \nu_j |\eta_j|} \quad \text{для } \zeta \in \Gamma^1,$$

где ν_j является j -ой компонентой вектора ν , пробегающего множество T_φ .

Из последнего неравенства и (2.12) для $\zeta \in \Gamma^1$ и $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)^n$ получим

$$|\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)| \leq e^{-\sum d(z_j) |\eta_j|},$$

где $d(z_j) = \pi - \nu_j - |\pi - \arg z_j|$.

Заметим, что

$$d(z_j) \geq \delta$$

при $z \in (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_1 + \delta}^o) \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_n + \delta}^o)$, для любых $\nu_j < \pi$.

Из предыдущих двух неравенств следует оценка

$$|\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)| \leq e^{-\delta \sum |\eta_j|}$$

для $\zeta \in \Gamma^1$ и

$$z \in \bigcup_{\{\nu \in T_\varphi, \nu_j < \pi\}} G_{\nu + \delta}. \quad (2.24)$$

Из определения множества $\mathcal{M}_\varphi$ следует, что (2.24) равносильно

$$z \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{M}_\varphi} G_\nu.$$

Таким образом, интеграл $\mathbb{I}$ сходится при $z \in G$.

Поскольку, $I_m \rightarrow \mathbb{I}$ при $m_j \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, n$, получаем $\mathbb{I}(z) = f(z)$ при $z \in (K^o)^n$. Сумма ряда (2.1) аналитически продолжается в секториальную область G , что и требовалось доказать.

В заключение настоящего параграфа заметим, что наряду с Теоремой 2.2 о продолжимости в секториальную область путем целой интерполяции можно рассмотреть аналогичный вопрос с помощью мероморфной интерполяции. Обозначим через Ψ класс мероморфных функций $\psi(\zeta)$, которые не имеют полюсов на множестве

$$\{\zeta : \operatorname{Re} \zeta_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что для функции $\psi(\zeta) \in \Psi$ можно корректно определить множества $T_\psi(\theta)$, $\mathcal{M}_\psi(\theta)$ при $|\theta_j| \leq \frac{\pi}{2}$ $j = 1, \dots, n$. Аналогично доказательству Теоремы 2.2 получается следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Сумма ряда (2.1) аналитически продолжается в секториальную область G , если найдется интерполирующая коэффициенты f_k мероморфная функция $\psi(\zeta)$ из класса Ψ и вектор-функция $\nu(\theta)$, заданная на кубе $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^n$ и принимающая значения в $\mathcal{M}_\varphi(\theta)$, для которых*

$$\nu_j(\theta) \leq a |\sin \theta_j| + b \cos \theta_j, \quad j = 1, \dots, n$$

с некоторыми константами $a \in (0, \pi)$, $b \in (0, \infty)$.

2.3 Пример

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}^2} \cos \sqrt{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \quad (2.25)$$

Очевидно, функция $\varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \cos(\zeta_1 \zeta_2)^{\frac{1}{2}}$ целая и интерполирует коэффициенты ряда (2.25). В обозначениях $\zeta_j = r_j e^{i\theta_j}$ ее модуль допускает асимптоти-

ческое представление

$$|\varphi(\zeta_1, \zeta_2)| = |\cos\left((r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}\right)| = \frac{1}{2} e^{(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}} |\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})| + o(1)$$

при $r_1 r_2 \rightarrow \infty$. Поэтому множество $T_\varphi(\theta)$ задается в виде

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : (r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} |\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})| \leq \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + C_{\nu, \theta}\},$$

и, следовательно, состоит из решений $\nu = \nu(\theta)$ неравенства

$$(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}} |\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})| \leq \nu_1 r_1 + \nu_2 r_2, \quad r_1, r_2 \geq 0.$$

Условие выполнения этого неравенства при $r_j = 0$ дает на решение ν ограничение $\nu_j \geq 0$, $j = 1, 2$.

Для исследования неравенства при $r_1 r_2 \neq 0$ воспользуемся его однородностью относительно (r_1, r_2) . А именно, делением на r_2 :

$$|\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})| \leq \nu_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \nu_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

и обозначением:

$$t = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

оно сводится к (неоднородному относительно t) неравенству

$$\nu_1 t^2 - |\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})| t + \nu_2 \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.26)$$

При этом, как указано выше, нас интересуют только решения ν с неотрицательными координатами. Из формул Виета следует, что для $\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0$ квадратичный трехчлен в (2.26) относительно переменного t не имеет отрицательных корней, поэтому неравенство (2.26) можно считать для $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, решения ν неравенства (2.26) определяются условием неположительности дискриминанта:

$$|\sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})|^2 - 4\nu_1 \nu_2 \leq 0,$$

то есть, условием

$$\nu_1 \nu_2 \geq \frac{1}{4} \left| \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right|^2.$$

В итоге получаем

$$T_\varphi(\theta_1, \theta_2) = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : \nu_1 \nu_2 \geq \frac{1}{4} \left| \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right|^2, \quad \nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0\}.$$

Множество $\mathcal{M}_\varphi(\theta_1, \theta_2)$ совпадает с топологической границей $T_\varphi(\theta_1, \theta_2)$, т.е. состоит из ветви гиперболы:

$$\mathcal{M}_\varphi(\theta_1, \theta_2) = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : \nu_1 \nu_2 = \frac{1}{4} \left| \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right|^2, \quad \nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0\}. \quad (2.27)$$

Очевидно, $T_\varphi(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2})$ состоит из квадранта $\nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0$, если знаки перед $\frac{\pi}{2}$ выбираются одинаковыми, и из $\{\nu \in \mathbb{R}_+^2 : \nu_1 \nu_2 \geq \frac{1}{4}\}$, если знаки берутся противоположными.

В результате, пересечение $T_\varphi = \bigcap T_\varphi(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2})$ равно

$$T_\varphi = \{\nu \in \mathbb{R}^2 : \nu_1 \nu_2 \geq \frac{1}{4}, \quad \nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0\}.$$

Таким образом, множества $\mathcal{M}_\varphi$ будет иметь вид (рис. 9)

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\nu \in [0, \pi)^2 : \nu_1 \nu_2 = \frac{1}{4}\}.$$

Теперь убедимся, что выполняется условие (2.19) Теоремы 2.2. С учетом (2.27) для этого достаточно найти константы $a \in [0, \pi)$, $b \in [0, \infty)$, для которых выполняется неравенство

$$(a|\sin \theta_1| + b \cos \theta_1)(a|\sin \theta_2| + b \cos \theta_2) \geq \frac{1}{4} \left| \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right|^2.$$

При $a = 1$, $b = 1$ левая часть

$$(|\sin \theta_1| + \cos \theta_1)(|\sin \theta_2| + \cos \theta_2) \geq 1,$$

а правая — не больше $\frac{1}{4}$, т.е. неравенство выполняется.

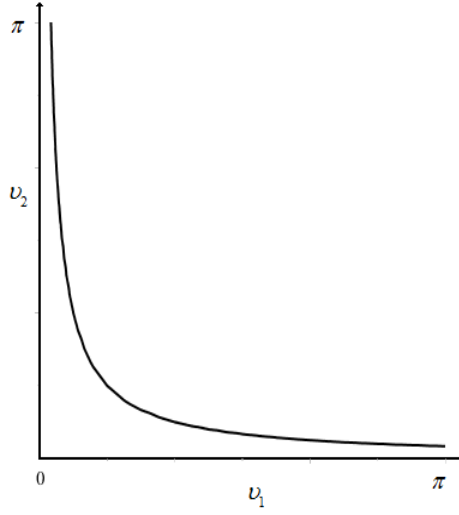


Рисунок 9

Таким образом, согласно Теореме 2.2 сумма ряда будет продолжаться в объединение G полисекторов $G_\nu = (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_1}) \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus \Delta_{\nu_n})$ по всем $\nu \in \mathcal{M}_\varphi$. На рис. 10 изображено множество аргументов $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, определяющих секториальное множество G . Оно равно объединению прямоугольников $(\nu_1, 2\pi - \nu_1) \times (\nu_2, 2\pi - \nu_2)$ по всем $(\nu - 1, \nu_2) \in \mathcal{M}_\varphi$.

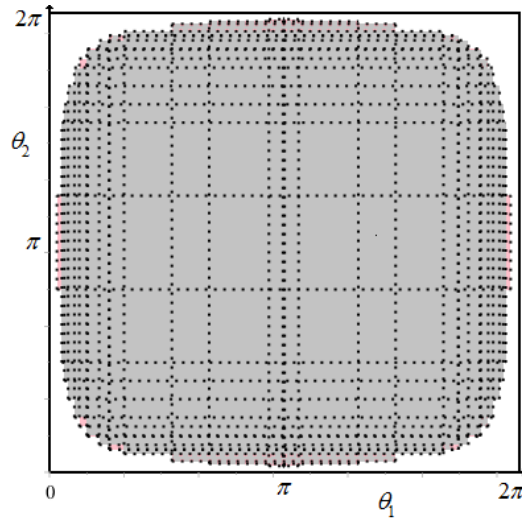


Рисунок 10

2.4 О непродолжимости кратных степенных рядов

Здесь мы рассмотрим два примера двойных рядов. Первый из них можно рассматривать как двумерный аналог феномена Фредгольма. Коэффициенты этого ряда принимают лишь два значения — нуль и единицу. К рядам такого типа относится и второй ряд — сужение ряда геометрической прогрессии на конус. В случае рационального конуса этот ряд представляет специальную рациональную функцию. В качестве гипотезы мы полагаем, что сужение на иррациональный конус представляет ряд с естественной границей.

Теорема 2.4. *Если носитель A двойного степенного ряда*

$$\sum_{(k_1, k_2) \in A} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \quad (2.28)$$

имеет вид

$$A = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : k_2 \geq k_1^{1+\varepsilon}\} \cup \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : k_1 \geq k_2^{1+\varepsilon}\} \quad \varepsilon > 0,$$

то ряд не продолжается за пределы единичного бикруга

$$U^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

и представляет бесконечно дифференцируемую функцию в $\bar{U}^2 \setminus T^2$, где

$$T^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| = 1, |z_2| = 1\}.$$

Доказательство. Двойной ряд (2.28) представим в виде суммы двух рядов:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2 + [k_1^{1+\varepsilon}]} + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} z_1^{k_1 + [k_2^{1+\varepsilon}]} z_2^{k_2} = \\ & \sum_{k_2=0}^{\infty} z_2^{k_2} \sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{[k_1^{1+\varepsilon}]} + \sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} z_2^{k_2} z_1^{[k_2^{1+\varepsilon}]} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-z_2} \sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{n_{k_1}} + \frac{1}{1-z_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} z_2^{k_2} z_1^{n_{k_2}}.$$

Здесь $[k_j^{1+\varepsilon}]$ означает целую часть числа $k_j^{1+\varepsilon}$.

По Теореме 1.4 единичный круг $|z_2| < 1$ является естественной областью для ряда

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{n_{k_1}} \quad (2.29)$$

Делая замену переменных $e^u = z_1$ и $e^t = z_2$, из (2.29) получим двойной экспоненциальный ряд

$$\sum_{(k_1, k_2) \in A_1} e^{k_1 u} e^{k_2 t},$$

где $A_1 = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : k_2 \geq k_1^{1+\varepsilon}\}$. Этот ряд представляет бесконечно дифференцируемую функцию в

$$\{(u, t) : \operatorname{Re} u \leq 0, \operatorname{Re} t \leq 0\} \setminus \{(u, t) : \operatorname{Re} u = 0, \operatorname{Re} t = 0\}.$$

Соответственно, ряд (2.29) представляет бесконечно дифференцируемую функцию в $\bar{U}^2 \setminus T^2$.

Аналогично, ряд

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} z_2^{k_2} z_1^{n_{k_2}}$$

сходится в единичном круге, не продолжается по переменной z_1 при $0 < z_2 < 1$ и представляет бесконечно дифференцируемую функцию в $\bar{U}^2 \setminus T^2$.

Из сказанного получаем требуемое утверждение относительно ряда (2.28).

Предложение 2. Если K - конус с целочисленными образующими векторами $m_1 = (m_{11}, m_{12})$ и $m_2 = (m_{21}, m_{22})$, то ряд

$$f(z) = \sum_{k \in N^2 \cap K} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

является рациональной функцией вида

$$f(z) = \frac{P(z)}{(1 - z_1^{m_{11}} z_2^{m_{12}})(1 - z_1^{m_{21}} z_2^{m_{22}})},$$

где

$$P(z) = 1 + \sum_{\alpha \in (\mathbb{N}^2 \cap \text{int} D)} z^\alpha,$$

$\text{int} D$ — это внутренность параллелограмма D с вершинами $(0, 0)$, m_1 , m_2 и $m_1 + m_2$.

Доказательство. Все целые точки сектора K можно покрыть, взяв полу-группу

$$L = \{(l_1 m_{11} + l_2 m_{21}, l_1 m_{12} + l_2 m_{22}), \quad l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad i = 1, 2\}$$

и ее сдвиги $L_j = a_j + L$, где a_j пробегает множество целых точек из $\text{int} D$. Таким образом, получим

$$\sum_{k \in N^2 \cap K} z_1^{k_1} z_2^{k_2} = \sum_{k \in L} z_1^{k_1} z_2^{k_2} + \sum_{k \in L_1} z_1^{k_1} z_2^{k_2} + \dots + \sum_{k \in L_p} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

где p — это мощность множества $N^2 \cap \text{int} D$. При этом, по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} \sum_{k \in L} z_1^{k_1} z_2^{k_2} &= \sum_{l_1, l_2 \geq 0} z_1^{l_1 m_{11} + l_2 m_{21}} z_2^{l_1 m_{12} + l_2 m_{22}} = \sum_{l_1, l_2 \geq 0} (z_1^{m_{11}})^{l_1} (z_1^{m_{21}})^{l_2} (z_2^{m_{12}})^{l_1} (z_2^{m_{22}})^{l_2} = \\ &= \frac{1}{(1 - z_1^{m_{11}})(1 - z_1^{m_{21}})} = \frac{1}{(1 - z_1^{m_{11}} z_2^{m_{12}})(1 - z_1^{m_{21}} z_2^{m_{22}})}. \end{aligned}$$

И поскольку

$$\sum_{k \in L_j} z_1^{k_1} z_2^{k_2} = z_1^{a_{j1}} z_2^{a_{j2}} \sum_{k \in L} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

получаем

$$\sum_{k \in N^2 \cap K} z_1^{k_1} z_2^{k_2} = \frac{1 + z_1^{a_{11}} z_2^{a_{12}} + \dots + z_1^{a_{p1}} z_2^{a_{p2}}}{(1 - z_1^{m_{11}} z_2^{m_{12}})(1 - z_1^{m_{21}} z_2^{m_{22}})}.$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим следующее. Если ряд (2.4) рассматривать для произвольного сектора K (т.е. необязательно с рациональными m_1 и m_2), то в качестве гипотезы мы полагаем, что этот ряд (2.4) или не продолжается через границу своей области сходимости, или является рациональной функцией вида

$$f(z) = \frac{P(z)}{(1 - z_1^{m_{11}} z_2^{m_{12}})(1 - z_1^{m_{21}} z_2^{m_{22}})},$$

где $P(z)$ – многочлен.

Такое утверждение можно было бы интерпретировать как пример двумерной версии теоремы Сеге ([4], [6]) о рядах с конечным числом различных коэффициентов Тейлора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Получен критерий продолжимости кратного степенного ряда через граничное множество полидуг на языке асимптотического поведения целой функции, интерполирующей коэффициенты ряда.
2. Для одномерных рядов найдены условия локальной продолжимости ряда через граничную дугу, и условия продолжимости ряда в секториальную область, используя мероморфные интерполяции коэффициентов ряда.
3. Построена лакунарная шкала степенных рядов одного переменного, непродолжимых за пределы круга сходимости и бесконечно дифференцируемых в замыкании круга, включающая в себя ряды Фредгольма. На основе этой шкалы построены примеры кратных степенных рядов с аналогичными свойствами в единичном поликруге.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П.1 Индикатор роста целой функции

Говорят, что целая функция $\varphi(z)$ комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$ имеет экспоненциальный тип, если

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} < +\infty.$$

Индикатором (или индикатрисой роста) целой функции $\varphi(z)$ экспоненциального типа называется предел [6]

$$h_{\varphi}(\theta) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\theta})|}{r}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Индикатор характеризует рост функции φ на лучах $z = re^{i\theta}$ (здесь $r \in \mathbb{R}_+$, а θ фиксировано). Из определения следует, что $h_{\varphi}(\theta)$ является действительно значной 2π -периодической функцией. Одно из основных свойств индикатора $h_{\varphi}(\theta)$ состоит в его *тригонометрической выпуклости* [38],[6]:

Если $\theta_1 < \theta < \theta_2$ и $\theta_2 - \theta_1 < \pi$, то справедливо неравенство

$$h_{\varphi}(\theta) \sin(\theta_2 - \theta_1) \leq h_{\varphi}(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta) + h_{\varphi}(\theta_2) \sin(\theta - \theta_1).$$

Если целая функция $\varphi(z)$ представляется степенным рядом

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

то ряд Лорана

$$\hat{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! z^{-k-1} \tag{3.1}$$

называется *преобразованием Бореля* функции φ .

Связь между множеством особенностей функции $\hat{\varphi}$ и индикатором функции φ

описывается теоремой Поля [34], [22]. Для ее формулировки напомним, что *опорной функцией* выпуклого множества K называется функция

$$k(\theta) = \sup_{z \in K} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}).$$

Заметим, что если $z = x + iy$, то

$$\operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Теорема (Поля [34]) *Индикатор $h_\varphi(\theta)$ целой функции φ экспоненциального типа связан с опорной функцией $k(\theta)$ наименьшего выпуклого компакта K , вне которого аналитически продолжается h_φ , по формуле*

$$h_\varphi(\theta) = k(-\theta).$$

Заметим, что ввиду выпуклости компакт K представляется пересечением полуплоскостей :

$$K = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} \{z : \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) < \nu\}.$$

Этот факт берется за основу формулировки многомерного аналога теоремы Поля.

В n -мерном случае под целой функции экспоненциального типа понимается функция $\varphi(z) = \varphi(z_1, \dots, z_n)$, для которой существуют положительные числа $A, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ такие, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$ имеет место неравенство

$$|\varphi(z)| \leq Ae^{\sigma_1|z_1| + \dots + \sigma_n|z_n|}.$$

Аналогично одномерному случаю целой функции

$$\varphi(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k, \tag{3.2}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, сопоставляется преобразование Бореля

$$\hat{\varphi}(z) = \sum_{|k| \geq 0}^{\infty} a_k k! z^{-k-1},$$

где $k! = k_1! \dots k_n!$.

Для целой функции φ экспоненциального типа определим множество

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln |\varphi(re^{i\theta})| \leq \nu_1 r_1 + \dots + \nu_n r_n + C_{\nu, \theta}\},$$

где неравенство выполняется для любого $r \in \mathbb{R}_+^n$ при некоторой константе $C_{\nu, \theta}$.

Пусть $C_\varphi(\theta)$ — множество векторов $\nu \in \mathbb{R}^n$ таких, что функция $\hat{\varphi}(z)$ из окрестности $(\infty, \dots, \infty)$ продолжается в область

$$G_{\nu, \theta} = \{z : \operatorname{Re}(z_j e^{-i\theta_j}) > \nu_j, \quad j = 1, \dots, n\},$$

которая представляет собой прямое произведение полуплоскостей.

Теорема (Иванов-Ставский [28], [22]) Пусть $\varphi(z)$ целая функция экспоненциального типа, тогда

$$T_\varphi(\theta) = C_f(-\theta).$$

П.2 Многомерные вычеты и аналог леммы Жордана

Пусть ω мероморфная в $\mathbb{C}^n$ дифференциальная форма вида

$$\omega = \frac{h(z)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1(z)\dots f_n(z)} \quad (3.3)$$

с полюсами на дивизорах $D_j = \{z : f_j(z) = 0\}$, $j = 1, \dots, n$. В предположении, что пересечение $Z = D_1 \cap \dots \cap D_n$ дискретно, для каждой точки $a \in Z$ определяется локальный вычет (вычет Гротендика) относительно системы дивизоров $\{D_j\}$ как интеграл (см. [39], гл. 5 или [37], §5)

$$res_a \omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_a} \omega, \quad (3.4)$$

где $\Gamma_a = \{z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon, j = 1, \dots, n\}$ – цикл в некоторой малой окрестности U_a точки a , ориентация которого задается неравенством

$$d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n) \geq 0.$$

Когда $f_1, \dots, f_n$ таковы, что якобиан $\partial(f)/\partial(z)$ в точке a отличен от нуля, локальный вычет равен (формула Коши)

$$res_a \omega = \frac{h(a)}{\frac{\partial(f)}{\partial(z)}(a)}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим вопрос о том, когда интеграл

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_a} \omega \quad (3.6)$$

мероморфной формы (3.3) по остову σ некоторого полиэдра Π равен сумме вычетов (3.4) в точках $a \in \Pi$. Под полиэдром подразумевается прообраз $g^{-1}(\partial G)$ собственного отображения $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ области $G = G_1 \times \dots \times G_n$, где каждая G_j является областью комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей ∂G_j . Остов полиэдра – это множество $g^{-1}(\partial G_1 \times \dots \times \partial G_n)$, ориентация которого определяется порядком параметров $\tau_1, \dots, \tau_n$, параметризующих границы $\partial G_1, \dots, \partial G_n$ соответственно.

С каждым мультииндексом $K = \{k_1, \dots, k_s\} \subset \{1, \dots, n\}$ ассоциируется грань

$$\sigma_K = \{z : g_k(z) \in \partial G_k, k \in K, g_j(z) \in G_j, j \notin K\}.$$

Семейство дивизоров $\{D_j\}$ называется *согласованным* с полиэдром Π , если

$$D_j \cap \sigma_j = \emptyset, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Если Π – ограниченный полиэдр и $\{D_j\}$ – согласованное с Π семейство дивизоров, то интеграл 3.6 равен сумме вычетов 3.4 по всем точкам $a \in \Pi$ [36]. Для неограниченных полиэдров необходимо дополнительное условие убывания подынтегрального выражения на бесконечности, как это требуется в классической одномерной лемме Жордана [36]. С помощью функций f_j определяющих дивизоры D_j , введем в рассмотрение функции

$$\rho_j = \frac{|f_j|^2}{\|f\|^2}, \quad \text{где } \|f\|^2 = |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2.$$

С каждым мультииндексом $J = \{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, n\}$ при $1 \leq s \leq n$ свяжем $(n, s-1)$ -дифференциальную форму

$$\xi_J = \sum_{j \in J} (-1)^{(j, J)-1} \rho_j \bar{\partial} \rho_J[j] \wedge \omega,$$

где (j, J) означает позицию j в наборе J , а $\bar{\partial} \rho_J[j] = \bar{\partial} \rho_1 \wedge \dots \wedge [j] \wedge \dots \wedge \bar{\partial} \rho_s$.

Говорят, что дифференциальная форма ξ_j удовлетворяет условию Жордана на грани σ_{J^o} где $J^o = \{1, \dots, n\} \setminus J$, если существует последовательность вещественных чисел R_k , сходящаяся к $+\infty$ при $k \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_{R_k} \cap \sigma_{J^o}} \xi_j = 0, \quad (3.8)$$

где S_R – сфера радиуса R с центром в некоторой точке остова $\sigma = \sigma_{1\dots n}$ полиэдра Π .

Теорема (многомерная абстрактная лемма Жордана [31], [45]). *Если семейство дивизоров $\{D_j\}$ согласовано с полиэдром Π и для каждого мультииндекса J форма ξ_J удовлетворяет условию Жордана на грани σ_{J^0} , то*

$$\int_{\sigma} \omega = (2\pi i)^n \sum_{a \in \Pi} \text{res}_a \omega.$$

Последовательность сфер S_{R_k} в теореме можно заменить любой другой последовательностью кусочно-гладких поверхностей такой, что области, ограниченные гранями полиэдра и поверхностями этой последовательности, исчерпывают весь полиэдр при $R \rightarrow \infty$.

Список литературы

1. Hadamard J. La série de Taylor et son prolongement analytique. / Hadamard J. – C. Hérissey, 1901. – №12. – С. 102.
2. Lindelöf E. L. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. / E. L. Lindelöf. – Gauthier-Villars. – 1905. – С. 143.
3. Pólya G. Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten / G. Pólya // Math. Ann. – 1916. – 77. – pp. 497-513.
4. Szegő G. Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten / G. Szegő // Sitzgsber. prueß. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl. – 1922. – pp. 88-91.
5. Carlson F. Sur une classe de series de Taylor. / F. Carlson. – Diss. – Upsala. – 1914.
6. Бибербах, Л. Аналитическое продолжение / Л. Бибербах – М.: Наука. – 1967.
7. Carlson F. Über ganzwertige Funktionen./ F. Carlson // Math. Z. – 1921. – №11. – С. 1-23.
8. Faber G. Über reihentwicklungen analytischer funktionen. / G. Faber. – Diss. – Vunchen Univ. – 1903.
9. Faber G. Über die Fortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen / G. Faber // Mathematische Annalen. – 1903. – T. 57. – №3. – С. 369-388.
10. Arakelian N. U. Approximation by entire functions and analytic continuation / N. U. Arakelian // 1992. – Progress in approximation theory (FL: Tampa, 1990); Computational Mathematical Series, Vol. 19 (New York: Springer), pp. 295–313.

11. Arakelian N. On the localization of singularities of lacunar power series / N. Arakelian, W. Luh, J. Muller // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 52(2007). – №7. – pp 561-573.
12. Pólya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. / G. Pólya // *Mathematische Zeitschrift*. – 1929. – 29. – pp. 549-640.
13. Fabry E. Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. / E. Fabry // *Acta Mathematica*. – 1899. – T. 22. – №. 1. – C. 65-87.
14. N. U. Arakelyan and V. A. Martirosyan, Localization of singularities on the boundary of the circle of convergence, *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR, Mat.* 22 (1987), 3–21 (Russian). English translation: *J. Contemp. Math. Anal.* 22 (1987), no. 1.
15. Hadamard, J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. / J. Hadamard // *Journ. Math. Pur. Appl.* – 1892. – 8, 4th series. – C. 101–186.
16. Fabry E. Sur les series de Taylor. / E. Fabry // *CR Acad. Sci. Paris*. – 1897. – T. 124. – C. 142-143.
17. Mittag-Leffler G. Sur une transcendente remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d'une letter de M. Mittag-Leffler à M. Poincaré / G. Mittag-Leffler // *Acta mathematica*. – 1891. – 15 Imprime le 21.
18. Fabry E. Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son developpement de Taylor / E. Fabry // *Paris: Ann. ec. norm. sup.* – 1896. – 13. – pp. 367-399.
19. Friot S. On convergent series representations of Mellin-Barnes integrals. / S. Friot, D. Greynat // *Journal of Mathematical Physics*. – 2012. – 53.2. – 023508.
20. Zorich V. *Mathematical Analysis of Problems in the Natural Science* / V. Zorich – Berlin ; Heidelberg: Springer. – 2011.

21. Passare M. Amoebas of complex hypersurfaces in statistical thermodynamics / M. Passare, D. Pochekutov, A. Tsikh // Math. Phys., Analysis and Geometry. – 2013. – V. 16. – №3. – pp. 89-108.
22. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных / Л. И. Ронкин – М.: Наука. – 1971. – с. 253-255.
23. Lelong P. Entire functions of several complex variables // P. Lelong, L. Gruman / – Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH Co. K. – 1986. Русский перевод : П. Лелон, Л. Груман. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир – 1989.
24. Н. У. Аракелян, Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов, Матем. сб., 1984, том 124(166), номер 1(5), 24–44.
25. Аракелян Н.У. Степенные ряды: аналитическое продолжение и локализация особенностей / Н.У. Аракелян, И.А. Мартиросян – Ереван. – 1991.
26. Садыков Т. М. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных / Т. М. Садыков, А. К. Цих – М.: Наука. – 2014.
27. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат – М.: Наука. – 1987. – 2т.
28. Иванов В. К. Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов / В. К. Иванов // Мат. сборник. – 1959. – №1. – т.47(89).
29. Антипова И. А. Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пюизо / И. А. Антипова, Е. Н Михалкин //Труды Математического института им. В. А. Стеклова. – 2012. – Т. 279. – С. 9-19.
30. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука. – Том 1. – 1965.

31. Жданов О. Н. Исследование кратных интегралов Меллина–Барнса с помощью многомерных вычетов / О. Н. Жданов, А. К. Цих // Сиб. мат. журн. – 1998. – 39:2. – С. 281–298.
32. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. / А. Ф. Леонтьев. – М.: Наука. – 1976.
33. Hardy The general theory of Dirichlet's series. / G. H. Hardy, M. Riesz. – 1915.
34. Леонтьев А. Ф. Целые функции, ряды экспонент / Леонтьев А. Ф. – М.: Наука. – 1983.
35. Антипова И. А. Обращение многомерных преобразований Меллина и решение алгебраических уравнений / И. А. Антипова // Матем. сб. – 2007. – т. 198. – №4. – С. 3-20.
36. Сидоров Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин – М.: Наука– 1989. – с. 79.
37. Цих А. К. Многомерные вычеты и их применение. / А. К. Цих. – Наука. – 1988. Английский перевод : Tsikh A. K. Multidimensional residues and their applications / AMS. 103 – 1992.
38. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. / Б. Я. Левин. – М.: Наука. –1956.
39. Гриффитс Ф. Принципы алгебраической геометрии. / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. – М.: Наука. – 1982.
40. N. U. Arakelian and V. A. Martirosian , The location of singularities of power series on the circle of convergence.II. Izvest. Akad. Nauk Army. SSR. Matem. – 1988. – №3.– С. 123-137. (in Russian)Translation in Soviet. J. Contemp. Math. Anal. 23 (1988), №3.

41. Сафонов К. В. Об особенностях параметрического вычета Гротендика и диагонали двойного степенного ряда / К. В. Сафонов, А. К. Цих // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1984. – №4. – С. 51-58.
42. Сафонов К. В. О множестве точек сходимости двойного степенного ряда/ К. В. Сафонов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1982. – №6. – С. 48-52.
43. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. / Е. М. Чирка. – М.: Наука. – 1985.
44. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. / В. С. Владимиров. – М.: Наука. – 1964.
45. Passare M. A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin-Barnes integrals. / M. Passare, A. Tsikh, O. Zhdanov //Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry. – Vieweg-Ferl., 1994. – С. 233-241.

Список работ автора по теме диссертации

46. Mkrtchyan A. Power Series Nonextendable Across the Boundary of their Convergence Domain / A. Mkrtchyan // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2013. – Т. 6 – №3. – С. 329–335.
47. Mkrtchyan A. J. On analytic continuation of multiple power series beyond the domain of convergence /A. J. Mkrtchyan // Journal of Contemporary Mathematical Analysis. – 2015. – Т. 50. – №1. – С. 22-31.
48. Mkrtchyan A. Analytic Continuation of Power Series by Means of Interpolating the Coefficients by Meromorphic Functions / A. Mkrtchyan // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2015. – Т. 8 – №2. – С. 173–183.

49. Мкртчян А. Д. Примеры непродолжимых простых и двойных степенных рядов / А. Д. Мкртчян // Тезисы докладов летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России – Ярославль: ЯГПУ. – 2013. – С. 58-59.
50. Mkrtchyan A. J. Analytically nonextendable multidimensional power series / A. J. Mkrtchyan // Abstracts of second international conference Mathematics in Armenia advances and perspectives: dedicated to the 70th anniversary of foundation of armenian national academy of sciences. 24-31 August 2013, Tsaghkadzor, Armenia – Yerevan. – 2013. – С. 49-51.
51. 4. Мкртчян А. Д. О многомерных степенных рядах, непродолжимых через границу области сходимости. / А. Д. Мкртчян // Международный аспирантский форум Современная наука: тенденции развития, проблемы и перспективы . – Армения: Ереван . – 2013. – С. .
52. Мкртчян А. Д. О степенных рядах, непродолжимых через границу своей области сходимости / Мкртчян А. Д. // Молодежь и наука: сборник материалов 9 всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярск. Красноярск, 15-25 апреля 2013г. [электронный ресурс] – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., № заказа 2394 / отв. ред. О. А. Краев.
53. Мкртчян А. Д. Об аналитическом продолжении кратных степенных рядов через куски границ областей сходимости. / А. Д. Мкртчян // Молодежь и наука: сборник материалов 10 всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15-25 апреля 2014г. [электронный ресурс] – Красноярск: Сиб. федер. ун-т., № заказа 1644 / отв. ред. О. А. Краев.

54. Мкртчян А. Д. Продолжение кратных степенных рядов через полидуги из остова поликруга сходимости. / А. Д. Мкртчян // Тезисы докладов пятого Российско-Армянского совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. – Армения: Ереван. – 2014. – С. 41-42.
55. Мкртчян А. Д. Аналитическое продолжение степенных рядов через граничные дуги, путем интерполяции коэффициентов мероморфными функциями / А. Д. Мкртчян // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: перспектив Свободный». Красноярск, 15-25 апреля 2015. [Электронный ресурс] – Красноярск : Сибирский федеральный университет. – 2015