Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Коршун

Коршун Кирилл Викторович

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д-р физ.-мат. наук, профессор
Белов Юрий Яковлевич

Красноярск 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Актуальность темы исследования

Обратными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи нахождения неизвестных коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, граничных или начальных условий, границы области. Неизвестные элементы начально-краевых задач определяются по некоторой дополнительной информации о решении уравнений. Такой информацией являются различного рода условия переопределения [15], [35].

Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики в настоящий момент играют большую роль в естественных науках и их приложениях [2], [52], [23], [27], [36]. Коэффициентные обратные задачи – это задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения неизвестным является и один (или несколько) из его коэффициентов. Многие важные прикладные вопросы, касающиеся диффузионных процессов, электромагнитных колебаний, упругих деформаций, геофизики, сейсмологии, компьютерной томографии и обработки изображений, теории рассеяния, акустики, оптики, теории колебания молекул, радиолокации, гравиметрии, и др. приводят к подобным обратным задачам. [39], [37], [17], [26], [1], [61], [41].

Степень разработанности темы исследования

Теория обратных задач является важным самостоятельным направлением исследований в области дифференциальных уравнений.

В настоящее время теория обратных задач математической физики развивается представителями ряда отечественных математических школ, в том числе Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым).

Вопросы корректности обратных задач для параболических уравнений, а также задач идентификации коэффициентов или функции источника для параболических уравнений изучались в работах Ю.Е. Аниконова, Б.А. Бубнова, Ю.Я. Белова, Е.Г. Саватеева, В.М. Волкова, А.И. Прилепко, В.В. Соловьева, А.И. Кожанова, И.В. Фроленкова и других [48], [7], [60], [43], [44].

Ряд результатов в данном направлении получили в последнее время зарубежные авторы из Италии, Голландии, Швеции, США, Франции, Японии и др.: G. Anger, H.D. Bui, Y. Chen, D. Colton, R. Durridge, E. Francini, J. Gottlieb, M. Grasselli, R. Kress, G. Kunetz, J.Q. Lin, A. Lorenzi, J.M. Mendel, R.D. Murch, S. Rionero, M. Sondhi, S. Strom, L. Yanping, M. Yamamoto [51], [55], [57], [59].

В работе [52] Ю.Я. Беловым изучены задачи определения неизвестных коэффициентов для квазилинейных уравнений типа Бюргерса

$$u_t(t,x) + \nu u u_x = \mu(t) u_{xx} + g(t) f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(t,x_0) = \phi(t), \quad x_0 = const.$$

в случае, когда входные данные допускают преобразование Фурье по пространственной переменной.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости задач определения функции источника в случаях задачи Коши и первой краевой задачи в классах гладких функций, а также обобщение полученных результатов на уравнения большей размерности и системы уравнений.

Методы исследования

В работах [36], [60] приводятся методы решения различных обратных задач математической физики.

Исследование разрешимости рассматриваемых в диссертации задач производится методом, позволяющим переходить от обратной задачи к прямой задаче для нагруженного [23] (содержащего следы неизвестных функций и их производных) уравнения. Данный метод аналогичен методу, впервые предложенному Ю.Е. Аниконовым [4] (в котором обратная задача сводилась к прямой для интегродифференциального уравнения при помощи преобразования Фурье). Отказ от использования преобразования Фурье позволяет расширить класс допустимых входных данных, а также позволяет рассматривать задачи с различными краевыми условиями.

Для доказательства разрешимости прямых задач для нагруженных уравнений применяется метод слабой аппроксимации, являющийся методом расщепления на дифференциальном уровне. Метод был впервые предложен Н.Н. Яненко [47] и А.А. Самарским [46]. В работе [14] приводится подробное описание метода и систематизированы полученные результаты. В работах [19], [47], [22] описывается применение метода слабой аппроксимации к решению различных задач математической физики.

Исследование обратных задач с краевыми условиями производится методом разложения входных данных в тригонометрические ряды по синусам и/или косинусам [6], с последующим их продолжением с исходной области определения на всё пространство и приведением исходной краевой задачи к задаче Коши.

Научная новизна и практическая значимость работы

Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и имеют строгое доказательство. Полученные результаты имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

Положения, выносимые на защиту

1. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса в случаях задачи Коши и первой краевой задачи.

2. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для двумерного уравнения типа Бюргерса в случаях задачи Коши и смешанной краевой задачи в прямоугольной области.

3. Доказана теорема разрешимости для системы нагруженных уравнений, к которой приводятся некоторые обратные задачи для параболических уравнений и систем.

4. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи

идентификации функции источника для параболического уравнения с параметром в случаях задачи Коши и первой краевой задачи.

Апробация результатов

По теме диссертации опубликовано 13 работ, из них работы [64, 68, 73, 74] опубликованы в изданиях, входящих в Перечень периодических научных изданий, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации. Четыре работы написаны и опубликованы в соавторстве. Во всех случаях вклад каждого из соавторов равноценен.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета под руководством д. ф.-м. н. Белова Ю.Я. (г. Красноярск, 2011 – 2015 гг.);

XLIX международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (г. Новосибирск, 16–20 апреля 2011 г.);

50-й юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (г. Новосибирск, 13–19 апреля 2012 г.);

51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика (г. Новосибирск, 12–18 апреля 2013 г.);

IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Молодежь и наука», посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска, секция «Математика, информатика: Дифференциальные уравнения» (г. Красноярск, 15–25 апреля 2013 г.);

Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений.», посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (г. Новосибирск, 18–24 августа 2013 г.);

52-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика (г. Новосибирск, 11–18 апреля 2014 г.);

Тринадцатой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения-2014» (г. Казань, 24–29 октября 2014 г.);

53-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2015: Математика (г. Новосибирск, 11–17 апреля 2015 г.);

Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (г. Улан-Удэ, 22–27 июня 2015 г.);

Представлялись на Лаврентьевский конкурс студенческих и аспирантских работ по математике и механике (г. Новосибирск, 2014 г.);

Докладывалась и обсуждалась на семинаре Отдела условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством член-корр. РАН, д. ф.-м. н. В.Г. Романова, д. ф.-м. н. Д. С. Аниконова (г. Новосибирск, 8 сентября 2015 г.)

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего 61 наименование и списка работ автора по теме диссертации, включающего 13 наименований. Объем диссертации составляет 87 страниц.

В **первой главе** вводятся необходимые обозначения, приводятся необходимые определения и теоремы.

Вторая глава посвящена обратной задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса. Поставленная задача относится к классу коэффициентных обратных задач для параболических уравнений. Данная задача исследована в случае задачи Коши и первой краевой задачи. Получены условия на входные данные, гарантирующие однозначную разрешимость поставленной задачи в классах гладких ограниченных функций. Основные результаты второй главы опубликованы в работе [64].

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, -\infty < x < \infty\}$ рассматривается **задача Коши** для уравнения типа Бюргерса

$$u_t(t,x) = \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t) + g(t)f(t,x), \tag{2.3}$$

где $A(t), B(t), C(t), f(t,x)$ - заданные функции, с данными Коши

$$u(0,x) = u_0(x), -\infty < x < \infty. \tag{2.4}$$

Функции $u(t,x), g(t)$ неизвестны. Считаем, что выполнены условие переопределения

$$u(t,x_0) = \phi(t), x_0 = const, \tag{2.5}$$

и условие согласования

$$\phi(0) = u_0(x_0). \tag{2.6}$$

Исходная задача приводится к вспомогательной прямой задаче для нагруженного уравнения. Существование решения вспомогательной задачи доказывается методом слабой аппроксимации. Вспомогательная задача разрешима в малом временном интервале, т.е. для всех $t \in [0,t^*]$, где $0 < t^* \le T$ – некоторая постоянная, зависящая от входных данных. Показывается, что решение вспомогательной задачи является решением исходной обратной задачи. Доказывается единственность решения обратной задачи.

В области $Q_T = \{(t,x)|0 < t < T, 0 < x < l\}, T, l - const > 0$ рассматривается **краевая задача**

$$u_t(t,x) = \mu u_{xx} + A(t)uu_x + Bu + g(t)f(t,x), \tag{2.48}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{2.49}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.50}$$

$$u(t,x_0) = \phi(t), \quad 0 < x_0 < l, \tag{2.51}$$

$$u_0(x_0) = \phi(0). \tag{2.52}$$

Предполагается, что функции $u_0(x)$, $f(t,x)$ имеют непрерывные производные по x до шестого порядка включительно, и удовлетворяют условиям

$$u_0(0) = u_0''(0) = u_0^{(4)}(0) = u_0^{(6)}(0) = 0, \tag{2.53}$$

$$u_0(l) = u_0''(l) = u_0^{(4)}(l) = u_0^{(6)}(l) = 0. \tag{2.54}$$

$$f(t,0) = f_{xx}(t,0) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(t,0) = \frac{\partial^6}{\partial x^6} f(t,0) = 0, \tag{2.55}$$

$$f(t,l) = f_{xx}(t,l) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(t,l) = \frac{\partial^6}{\partial x^6} f(t,l) = 0. \tag{2.56}$$

Функция $u_0(x)$ продолжается на отрезок $[-l,l]$: $u_0(x) = -u_0(-x)$ при $-l \leq x < 0$. Затем функция $u_0(x)$ продолжается с $[-l,l]$ на $\Re$ до периодической по x функции. Функция $f(t,x)$ продолжается с $[0,T] \times [0,l]$ на $[0,T] \times \Re$ до периодической и нечётной по x функции. Продолженные данным способом функции $u_0(x), f(t,x)$ берутся в качестве входных данных для задачи Коши

$$u_t(t,x) = \mu u_{xx} + A(t) u u_x + Bu + g(t) f(t,x), \tag{2.58}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{2.59}$$

Доказывается, что решение задачи (2.58), (2.59) удовлетворяет краевым условиям (2.50). Доказывается единственность решения задачи (2.48)–(2.52).

В данной главе доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия*

$$\sum_{k=0}^{6} \left| \frac{\partial^k u_0(x)}{\partial x^k} \right| + \sum_{k=0}^{6} \left| \frac{\partial^k f(t,x)}{\partial x^k} \right| + |A(t)| + |B(t)| + |C(t)| +$$
$$+ |\psi(t)| \leq K, \quad |f(t,x_0)| \geq \frac{1}{K}, \quad K = const > 0, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда существует постоянная t^*, $0 < t^* \leq T$, такая, что в полосе $\Pi_{[0,t^*]}$ существует единственное решение (u,g) задачи (2.3)-(2.6) класса

$$Z = \{u(t,x), g(t) | u(t,x) \in C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}), \left| \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) \right| + \sum_{s=0}^{4} \left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} u(t,x) \right| \leq K,$$

$$(t,x)\in\Pi_{[0,t^*]}, g(t)\in C([0,t^*])\},$$

$$C^{1,4}_{t,x}(\Pi^M_{[0,t^*]})=\{u(t,x)|\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x)\in C(\Pi^M_{[0,t^*]}), k=0,1...4\},$$

Для любого $M>0$

$$\left\|\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}-\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{C(\Pi^M_{[0,t^*]})}\to 0,\quad k=0,1...4,$$

при $\tau\to 0$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия (2.53)-(2.56), а условия Теоремы 2.1 выполнены при* $(t,x)\in Q_T$*. Тогда существует постоянная* t^*, $0<t^*\le T$, *такая, что в области* Q_{t^*} *существует единственное решение (u, g) задачи (2.48)-(2.52) класса*

$$W=\{u(t,x),g(t)|u(t,x)\in C^{1,4}_{t,x}(Q_{t^*}),g(t)\in C([0,t^*])\}.$$

При этом

$$\left\|\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k}-\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{C([0,t^*]\times[0,l])}\to 0,\quad k=0,1...4,\quad \tau\to 0.$$

В **третьей главе** исследована задача идентификации функции источника для двумерного уравнения типа Бюргерса. Данная задача является обобщением задачи (2.3)-(2.6) на двумерный случай. Рассмотрены случаи условий Коши и смешанных краевых условий в прямоугольной области. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи. Результаты исследования опубликованы в работе [68].

В полосе $\Pi_{[0,T]}=\{(t,x,y)|0\le t\le T,-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty\}$ рассматривается **задачу Коши**

$$u_t(t,x,y)=\mu_1(t)u_{xx}+\mu_2(t)u_{yy}+a_1(t)u_x+a_2(t)u_y+b_1(t)uu_x+b_2(t)uu_y+g(t)f(t,x,y), \tag{3.1}$$

где $\mu_i(t)>0, a_i(t), b_i(t), f(t,x,y), i=1,2$ - заданные функции, с начальными условиями

$$u(0,x,y)=u_0(x,y),\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{3.2}$$

Считаем, что выполнены условие переопределения

$$u(t, x_0, y_0) = \phi(t), \qquad x_0 = const, \quad y_0 = const, \tag{3.3}$$

и условие согласования

$$\phi(0) = u_0(x_0, y_0). \tag{3.4}$$

Под решением задачи (3.1)-(3.4) понимается пара функций $u(t, x, y), g(t)$, принадлежащая классу

$$Z_p(T) = \{u(t, x, y), g(t) | u(t, x, y) \in C^{1,p}(\Pi_{[0,T]}), \left| \frac{\partial}{\partial t} u(t, x, y) \right| +$$
$$+ \sum_{|\alpha| \le p} |D^\alpha u(t, x, y)| \le K, (t, x, y) \in \Pi_{[0,T]}, g(t) \in C([0, T])\}, \quad p \ge 2 \in \mathbb{Z},$$

где $C^{1,p}(\Pi_{[0,T]}) = \{u(t, x, y) | \frac{\partial u}{\partial t}, D^\alpha u(t, x, y) \in C(\Pi_{[0,T]}), |\alpha| \le p\}$.

В области $Q_T = \{(t, x, y) | 0 < t < T, 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$, $T, l_1, l_2 - const > 0$ рассматривается **краевая задача**

$$u_t(t, x, y) = \mu_1(t) u_{xx} + \mu_2(t) u_{yy} + b_1(t) u u_x + g(t) f(t, x, y), \tag{3.6}$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \qquad (x, y) \in [0, l_1] \times [0, l_2], \tag{3.7}$$

$$u(t, 0, y) = u(t, l_1, y) = 0, \tag{3.8}$$

$$u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, l_2) = 0, \tag{3.9}$$

$$u(t, x_0, y_0) = \phi(t), \qquad (x_0, y_0) \in \Omega = (0, l_1) \times (0, l_2). \tag{3.10}$$

Уравнение (3.6) получено из уравнения (3.1) при $a_1(t) = a_2(t) = b_2(t) = 0$.

В данной главе доказаны теоремы:

Теорема 3.1. *При выполнении условий*

$$u_0(x, y) \in C^{p+2}(\mathbb{R}^2), \qquad f(t, x, y) \in C^{0,p+2}(\Pi_{[0,T]}), \qquad \mu_i \in C([0, T]),$$

$$a_i \in C([0, T]), \qquad b_i \in C([0, T]), \qquad \phi(t) \in C^1([0, T])$$

$$\sum_{|\alpha| \le p+2} |D^\alpha u_0(x, y)| + \sum_{|\alpha| \le p+2} |D^\alpha f(t, x, y)| + |\mu_i(t)| + |a_i(t)| + |b_i(t)| + \tag{3.5}$$

$$+ |\phi(t)| + |\phi'(t)| \le K, \quad |f(t, x_0, y_0)| \ge \frac{1}{K}, \quad i = 1, 2, \quad K = const > 0, \quad p \ge 4,$$

существует единственное решение задачи (3.11)-(3.14) в классе $Z_p(t^*)$, *где* $t^* > 0$ *- некоторая постоянная, зависящая от входных даных.*

Теорема 3.2. *Пусть функции* $u_0(x,y), f(t,x,y), \mu_1(t), \mu_2(t), b_1(t)$ *удовлетворяют условиям Теоремы 3.1 при* $(x,y) \in \bar{\Omega}$ *и* $p = 6$. *При выполнении условий*

$$\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}(0,y) = \frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}(l_1,y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,0,y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,l_1,y) = 0, \qquad k = 0,2,4,6,8,$$
$$\frac{\partial^m u_0}{\partial y^m}(x,0) = \frac{\partial^m u_0}{\partial y^m}(x,l_2) = \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(t,x,0) = \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(t,x,l_2) = 0, \qquad m = 1,3,5,7$$

существует единственное решение задачи (3.6)-(3.10) в классе

$$W = \{u(t,x,y), g(t) | u(t,x,y) \in C^{1,6}(Q_{t^*}), \left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right| +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\le 6} |D^\alpha u(t,x,y)| \le K, (t,x,y) \in Q_{t^*}, g(t) \in C([0,t^*])\}.$$

В **четвёртой главе** рассмотрена задача Коши для системы нагруженных [23] (содержащих следы неизвестных функций и их производных) уравнений.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \mu(t, \bar{\omega}(t))\Delta\bar{u} + \nu(\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u} + \bar{f}(t,x,\bar{u},\bar{\omega}(t)), \tag{4.1}$$

$$\bar{u}(0,x) = \bar{\varphi}(x), \tag{4.2}$$

где $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u} = \big(u_1(t,x),\dots,u_n(t,x)\big)$ - неизвестные функции, $\mu(t,\bar{\omega}(t))$, $\bar{f} = \big(f_1,\dots,f_n\big)$, $\bar{\varphi} = \big(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\big)$ - заданные функции, $\nu \in \mathbb{R}$ - заданный коэффициент. Через $\bar{\omega}(t) = \big(u_i(t,x^j), D^\alpha u_i(t,x^j)\big);\quad i = 1,\dots,n;\quad j = 1,\dots,r;\quad |\alpha| = 0,\dots,p_0$ обозначена вектор-функция, компонентами которой являются следы неизвестных функций и их производных по пространственным переменным до порядка p_0 включительно, взятые в точках $x^1,\dots,x^r \in \mathbb{R}^n$.

К системе такого типа сводятся некоторые коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений и систем. Для рассмотренной задачи доказана теорема разрешимости. Приведён пример коэффициентной обратной задачи, приводящейся к рассматриваемой системе уравнений, и указан способ проверки условий теоремы разрешимости.

Основное содержание четвёртой главы опубликовано в работе [73].

В **пятой главе** рассмотрена краевая обратная задача для n-мерного параболического уравнения с параметром

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \lambda \Delta_x u(t,x,y) + \mu(t,y) f(t,x,y), \tag{5.1}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \tag{5.2}$$

$$u(t,x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{5.3}$$

$$u(t,x,y)|_{x=y} = \phi(t,y),\ (t,x,y)\in Q_T, \tag{5.4}$$

где

$$Q_T = \{(t,x,y) | t\in[0,T],\ x\in\Omega,\ y\in D\},$$

$T > 0$, Ω – прямоугольный параллелепипед $[0,l_1]\times[0,l_2]\times\cdots\times[0,l_n]$ в $\mathbb{R}^n$, D – компактное подмножество Ω с достаточно гладкой границей ∂D, $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $u(t,x,y)$ и $\mu(t,y)$ – неизвестные функции; функции $f(t,x,y)$, $u_0(x,y)$ заданы.

Для данной задачи получены следующие результаты:

Теорема 5.1. *Пусть входные данные задачи (5.1)–(5.4) удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered} |f(t,y,y)| \geq K_1 > 0, \quad y\in D, \\ \left|D_x^\alpha D_y^\beta u_0(x,y)\right| \leq K_2, \quad \left|D_x^\alpha D_y^\beta \frac{f(t,x,y)}{f(t,y,y)}\right| \leq K_3, \quad \left|D_y^\beta \phi_t(t,y)\right| \leq K_4, \\ |\alpha| \leq p, \quad |\beta| \leq 1, (t,x,y)\in Q_T, \quad p\geq 6; \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u_0(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,y)|_{x_i=0,x_i=l_i} = 0, \\ \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f(t,x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,y)|_{x_i=0,x_i=l_i} = 0, \quad i=1,\ldots,n,\ k=0,2,4,6. \end{gathered}$$

Тогда задача (5.1)–(5.4) имеет решение класса.

$$Z_p(\Omega) = \{(u(t,x,y),\mu(t,y))\, | D_x^\alpha u(t,x,y) \in C([0,T]\times\Omega\times D),$$

$$|D_x^\alpha u(t,x,y)| \leq K,\ \mu(t,y)\in C([0,T]\times D),\ |\alpha|\leq p-2\} -$$

Теорема 5.2. *Решение задачи (5.1)–(5.4) класса* $Z_p(\Omega)$ *единственно.*

Теорема 5.3. *Рассмотрим задачу Коши (5.1), (5.2), (5.4) в полосе*

$$E = \{(t, x, y) | t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n, y \in D\}.$$

а) Задача (5.1), (5.2), (5.4) имеет решение класса $Z_p(\mathbb{R}^n)$*, если условия (5.5) выполняются в* E*.*

б) Решение задачи (5.1), (5.2), (5.4) единственно.

Полученные результаты опубликованы в работе [74].

Глава 1. Вспомогательные предложения

1.1 Основные обозначения, определения и теоремы

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно.

$\mathbb{R}^n$ — действительное n-мерное евклидово пространство, $n \in \mathbb{N}$. Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ называются точками. Точка в $\mathbb{R}^n$ обозначается через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Замыкание множества Ω обозначим как $\overline{\Omega}$, границу области Ω - как $\partial\Omega$.

Пусть α — мультииндекс, то есть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_i — целые неотрицательные числа и $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Под обозначением $D_x^\alpha h(x)$ будем понимать частную производную функции $h(x)$ порядка $|\alpha|$:

$$D_x^\alpha h(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} h(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Символом $C^k(\Omega)$ будем обозначать множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на Ω.

Оператор Лапласа Δ — дифференциальный оператор, ставящий в соответствие функции $h(x)$ функцию

$$\Delta h(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) h(x).$$

Рассмотрим ограниченное в $\mathbb{R}^n$ множество Ω и пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $f(x)$ с нормой $||f||_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$.

Пусть M — некоторое бесконечное множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций $\big(M \subset C(\overline{\Omega})\big)$.

Определение 1. *Говорят, что функции множества M равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$, если существует постоянная k такая, что неравенство*

$$||f||_{C(\overline{\Omega})} \leq k$$

выполняется для всех функций из M.

Определение 2. *Говорят, что функции множества M равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такая, что для любых x' и x'' из $\overline{\Omega}$, удовлетворяющих неравенству*

$$|x' - x''| < \delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

для всех функций f из M.

Определение 3. *Множество M банахова пространства $\mathbb{X}$ называется компактным, если из любой бесконечной последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по норме к элементу $x \in M$.*

Теорема 1.1 (Арцела)**.** *Для того, чтобы множество $M \subset C(\overline{\Omega})$ было компактно в $C(\overline{\Omega})$, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены в $C(\overline{\Omega})$ и равностепенно непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство теоремы 1.1 можно найти, например, в [24].

1.2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n\}$ задачу Коши

$$\varphi_t = \Delta\varphi + h, \tag{1.1}$$

$$\varphi(0,x) = \omega_0(x). \tag{1.2}$$

Здесь $h(t,x)$ и $\omega_0(x)$ — заданные функции. Определению подлежит функция $\varphi(t,x)$.

Определение 4. *Функция $\varphi(t,x)$, принадлежащая пространству*

$$C^{1,2}_{t,x} = \{\varphi(t,x)|\varphi_t(t,x), D^\alpha_x\varphi(t,x) \in C(\Pi_{[0,T]}),\ |\alpha| \le 2\},$$

называется решением (классическим решением) задачи Коши, если она удовлетворяет уравнению (1.1), *а при* $t = 0$ — *начальному условию* (1.2).

Теорема 1.2. *Задача Коши* (1.1), (1.2) *не может иметь более одного ограниченного в* $\Pi_{[0,T]}$ *классического решения.*

Обозначим через $B(\mathbb{R}^n)$ $(B(\Pi_{[0,T]}))$ банахово пространство непрерывных и ограниченных в $\mathbb{R}^n$ $(\Pi_{[0,T]})$ функций с нормой

$$||\omega_0||_{B(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u_0(x)| \qquad \left(||h||_{B(\Pi_{[0,T]})} = \sup_{(t,x)\in(\Pi_{[0,T]})} |h(t,x)|\right).$$

Теорема 1.3. *Если* $\omega_0(x)$ *принадлежит* $B(\mathbb{R}^n)$, *а функции* $h(t,x)$, $h_{x_i}(t,x)$ $(i = 1,\ldots,n)$ *принадлежат* $B(\Pi_{[0,T]})$, *то существует принадлежащее* $B(\Pi_{[0,T]})$ *классическое решение* $\varphi(t,x)$ *задачи* (1.1), (1.2); *при этом* $||\varphi||_{B(\Pi_{[0,T]})} \le ||\omega_0||_{B(\mathbb{R}^n)} + T||h||_{B(\Pi_{[0,T]})}$.

Доказательство теорем 1.2 и 1.3 см. в [30, с. 347–350].

1.3 Принцип максимума для параболического уравнения 2-го порядка

Теорема 1.4 (Принцип максимума)**.** *Пусть* T — *положительная постоянная,*

$$\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n\},$$

$u(t,x)$ — *ограниченное классическое решение задачи Коши*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f,$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

где

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall\,(t,x) \in \overline{Q_T}\backslash\Gamma_T,\ \forall\,\xi \ne 0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

и выполняются соотношения

$$|\varphi(x)| \le q,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad |f(t,x)| \le f_0, \quad c(t,x) \le m, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}.$$

Тогда всюду в $\Pi_{[0,T]}$

$$|u(t,x)| \le e^{mt}(f_0 t + q).$$

Доказательство см. в [20].

1.4 Формулировка метода слабой аппроксимации

Рассмотрим в $\Pi_{[t_0,t_1]} = \{(t,x)|t_0 \le t \le t_1, x \in E_n\}$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t,x,\bar{u}). \tag{1.4}$$

Здесь $u = u(t,x) = (u_1(t,x),\dots,u_l(t,x))$, $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_l)$ — вектор-функции размерности l ($l \in \mathbb{N}$). Через $\bar{u} = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ обозначена вектор-функция, компоненты которой определяются следующим образом:

$$v_0 = u = (u_1,\dots,u_l);$$

v_1 — вектор, составленный из всех производных от u первого порядка по x; v_2 — вектор, составленный из всех производных от u второго порядка по x и так далее; v_r — вектор, составленный из производных порядка r по x от u. Таким образом,

$$\bar{u} = \left(u_1,\dots,u_l,\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial u_l}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r},\dots,\frac{\partial^r u_l}{\partial x_n^r}\right),$$

и система уравнений (1.4) содержит производные по пространственным переменным до порядка r включительно ($r \ge 0$).

Мы предполагаем, что

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi^i, \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^{m} \varphi_j^i, \quad j = 1,\dots,l,$$

где φ^i — вектор-функции размерности l; φ_j, φ^i_j — j-е компоненты векторов φ и φ^i соответственно. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t)\varphi_i(t,x,\bar{u}^\tau), \tag{1.5}$$

где функции $\alpha_{i,\tau}$ определены соотношением

$$\alpha_{i,\tau}(t) = \begin{cases} m, & t_0 + \left(n + \frac{i-1}{m}\right)\tau < t \le t_0 + \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$.

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,\tau}(t)\varphi_{i,\tau}(t,x,\bar{u}^\tau), \tag{1.6}$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t,x,\bar{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t,x,\bar{u}^\tau)$, зависящие от τ.

При исследовании разрешимости задач вида (1.4) методом слабой аппроксимации решение $u(t,x)$ ищется как предел последовательности решений $u^\tau(t,x)$ задач (1.6) при $\tau \to 0$. Следующая теорема даёт достаточные условия существования данного предела [14, 47].

1.5 Одна теорема сходимости метода слабой аппроксимации

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.4), (1.5), (1.6). Под классическими решениями уравнений (1.5), (1.6) мы понимаем функцию u^τ, непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.5), в полосе $\Pi_{[t_0,t_1]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u^τ_t в $\Pi_{[t_0,t_1]}$ (u_t может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях $t = \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau$, при $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = t_1 - t_0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$) и удовлетворяющую уравнению (1.5), (1.6).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ на классических решениях $\bar{u}^\tau$ системы уравнений (1.6) непрерывны по переменным (t, x) из $\Pi_{[t_0,t_1]}$.

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < \tau_k \leq \tau_0)$ — некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = t_1 - t_0$.

Через $u_{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (1.6) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u^{τ_k} системы (1.6) существует и при $\tau_k \to 0$ равномерно в

$$\Pi_{[t_0,t_1]}^N = \{(t, x) | t_0 \leq t \leq t_1, |x| \leq N\},$$

последовательность u^{τ_k} сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x, входящими в уравнение (1.4), причём

$$\max_{\Pi_{[t_0,t_1]}^N} |\varphi_i(t, x, \bar{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t, x, \bar{u}^{\tau_k})| \to 0,$$
$$\tau_k \to 0, \ i = 1, \ldots, m. \tag{1.7}$$

Теорема 1.5. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда вектор-функция* $u(t, x)$ *есть решение системы* (1.4) *в* $\Pi_{[t_0,t_1]}^N$.

Доказательство теоремы 1.5 можно найти в [14].

Глава 2. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса

Задача Коши

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2(t,x)}{2} = \mu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \mu > 0 - const \tag{2.2}$$

исследовалась И.Бюргерсом [54], Э. Хопфом [58], И. Коулом [56]. Эта задача широко известна в теории турбулентности. Само уравнение (2.1) часто называют уравнением Бюргерса [45].

В работе [52] изучены задачи определения неизвестных коэффициентов для уравнений типа Хопфа в случае данных Коши, когда входные данные допускают преобразование Фурье по пространственной переменной. В настоящей главе исследуется задача определения функции источника в случаях задачи Коши и первой краевой задачи в классах гладких функций.

2.1 Задача Коши

2.1.1 Постановка задачи

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty\}$ рассмотрим уравнение типа Бюргерса

$$u_t(t,x) \;=\; \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t) + g(t)f(t,x), \tag{2.3}$$

где $A(t), B(t), C(t), f(t,x)$ - заданные функции, с данными Коши

$$u(0,x) \;=\; u_0(x), -\infty < x < \infty. \tag{2.4}$$

Функции $u(t,x), g(t)$ неизвестны. Считаем, что выполнены условие переопределения

$$u(t,x_0) = \phi(t), x_0 = const, \tag{2.5}$$

и условие согласования

$$\phi(0) = u_0(x_0). \tag{2.6}$$

2.1.2 Переход от обратной задачи к прямой

Приведем задачу (2.3)-(2.6) к прямой задаче. Подставим $x = x_0$ в уравнение (2.3). Учитывая условие (2.5), получим соотношение

$$g(t) = \frac{\psi(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)}, \tag{2.7}$$

где $\psi(t) = \phi'(t) - B(t)\phi(t) - C(t)$.

Подставляя (2.7) в (2.3), получим задачу

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= \mu(t)u_{xx} + A(t)uu_x + B(t)u + C(t) + \\ &+ \frac{\psi(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x), \qquad (2.8) \\ u(0,x) &= u_0(x). \qquad (2.9) \end{aligned}$$

2.1.3 Доказательство разрешимости прямой задачи

Предположим, что входные данные задачи (2.3)-(2.5) удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{k=0}^{6} \left| \frac{\partial^k u_0(x)}{\partial x^k} \right| + \sum_{k=0}^{6} \left| \frac{\partial^k f(t,x)}{\partial x^k} \right| + |A(t)| + |B(t)| + |C(t)| +$$
$$+ |\psi(t)| \le K, \qquad |f(t,x_0)| \ge \frac{1}{K}, \qquad K = const > 0. \tag{2.10}$$

Существование достаточно гладкого решения задачи (2.8), (2.9) докажем методом слабой аппроксимации (главы 1.4–1.5). Аппроксимируем задачу (2.8), (2.9) задачей

$$u_t^\tau = 3\mu(t)u_{xx}^\tau + 3B(t)u^\tau, \qquad t \in \big(n\tau, (n+\frac{1}{3})\tau\big], \tag{2.11}$$

$$u_t^\tau = 3\frac{\psi(t) - \mu(t)u_{xx}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x_0) - A(t)\phi(t)u_x^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x) + \tag{2.12}$$

$$+ \; 3C(t), \qquad t \in \big((n+\frac{1}{3})\tau, (n+\frac{2}{3})\tau\big], \tag{2.13}$$

$$u_t^\tau = 3A(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x)u_x^\tau(t,x), \qquad t \in \big((n+\frac{2}{3})\tau, (n+1)\tau\big], \tag{2.14}$$

$$u^\tau(0,x) = u_0(x). \tag{2.15}$$

Введем неотрицательные, монотонно возрастающие функции:

$$U_0^\tau(t) = 1 + \sup_{\xi\in[0,t]} \sup_{x\in E_1} \left|u^\tau(\xi,x)\right|, U_{0,0} = 1 + \sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_0(x)\right| \tag{2.16}$$

$$U_k^\tau(t) = \sup_{\xi\in[0,t]} \sup_{x\in E_1} \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(\xi,x)\right|, \quad U^\tau(t) = \sum_{i=0}^{2} U_i^\tau(t), \tag{2.17}$$

$$U_{0,k} = \sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_0(x)\right|, \quad U_0 = \sum_{i=0}^{2} U_{0,i}, \quad k = 1..6. \tag{2.18}$$

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге решается задача Коши (2.11), (2.15). В силу принципа максимума (Теорема 1.4) имеем $U_0^\tau(t) \le U_{0,0}e^{3Kt}, 0 < t \le \frac{\tau}{3}$. Дифференцируя задачу (2.11), (2.15) дважды по x получаем, что

$$U_k^\tau(t) \le U_{0,k}e^{3Kt}, 0 < t \le \frac{\tau}{3}, k = 0, 1, 2, \tag{2.19}$$

откуда следует, что

$$U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) \le U_0 e^{K\tau}. \tag{2.20}$$

На втором дробном шаге решается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (2.12) с начальными данными $u^\tau(\frac{\tau}{3}, x)$. Заметим, что, по построению, правая часть уравнения (2.12) - известная функция. Решение $u^\tau(t,x)$ этой задачи и его производные записываются в явном виде:

$$\begin{aligned} u^\tau(t,x) &= u^\tau(\frac{\tau}{3},x) + 3\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} \left(\frac{f(\xi,x)}{f(\xi,x_0)}\,(\psi(\xi) - \mu(\xi)u^\tau_{xx}(\xi-\frac{\tau}{3},x_0) - \right. \\ &\left. - A(\xi)\phi(\xi)u^\tau_x(\xi-\frac{\tau}{3},x_0)) + C(\xi)\ \right) d\xi, \\ \frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x) &= \frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(\frac{\tau}{3},x) + 3\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} \left(\frac{\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(\xi,x)}{f(\xi,x_0)}\,(\psi(\xi) - \right. \\ &\left. - \mu(\xi)u^\tau_{xx}(\xi-\frac{\tau}{3},x_0) - A(\xi)\phi(\xi)u^\tau_x(\xi-\frac{\tau}{3},x_0)) + C(\xi)\ \right) d\xi, \\ t &\in \left(\frac{\tau}{3},\frac{2\tau}{3}\right]. \end{aligned}$$

В это выражение входят производные u^τ_x, u^τ_{xx}, взятые при $0 < t \leq \frac{\tau}{3}$, которые оценены на первом дробном шаге. Отсюда

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right| \leq U^\tau_k\left(\frac{\tau}{3}\right) + 3K\frac{\tau}{3}\left(1 + U^\tau_1\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_2\left(\frac{\tau}{3}\right)\right). \tag{2.21}$$

В неравенствах (2.21) возьмем sup по $x \in E_1$ и $t \in [0,\frac{2\tau}{3}]$ от левой части. Складывая полученные из (2.21) неравенства при $k = 0,1,2$, получим неравенство

$$U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) \leq U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + 3K\tau\left(1 + U^\tau_1\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_2\left(\frac{\tau}{3}\right)\right). \tag{2.22}$$

Учитывая, что $U^\tau_0\left(\frac{\tau}{3}\right) \geq U_{0,0} \geq 1$ (см. (2.16)), можно записать

$$\begin{aligned} U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) &\leq U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right) + 3K\tau\left(U^\tau_0\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_1\left(\frac{\tau}{3}\right) + U^\tau_2\left(\frac{\tau}{3}\right)\right) = \\ &= U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)(1+3K\tau) \leq U^\tau\left(\frac{\tau}{3}\right)e^{3K\tau}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

На третьем дробном шаге ($t \in (\frac{2\tau}{3},\tau]$) решается задача Коши для уравнения переноса

$$u^\tau_t = 3A(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)u^\tau_x(t,x) \tag{2.24}$$

с начальными данными $u^\tau(\frac{2\tau}{3},x)$. Решение уравнения (2.24) имеет вид $u^\tau(t,x) = u^\tau(\frac{2\tau}{3},\widetilde{\phi}(t,x))$ [21, теорема 2.6], где $\widetilde{\phi}$ - характеристическая функция этого уравнения. Отсюда следует оценка

$$|u^\tau(t,x)| \leq U^\tau_0\left(\frac{2\tau}{3}\right), \quad \frac{2\tau}{3} < t \leq \tau. \tag{2.25}$$

Продифференцируем уравнение (2.24) по x, получим:

$$z_t^\tau \;=\; 3A(t)u_x^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)z^\tau + 3A(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)z_x^\tau, \tag{2.26}$$

где $z^\tau(t,x) = u_x^\tau(t,x)$. Решение этого уравнения имеет вид [21] (здесь $\bar{\psi}$ - характеристики уравнения (2.26)):

$$z^\tau(t,x) \;=\; \exp\left(-\int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} 3A(\xi)u_x^\tau(\xi-\frac{\tau}{3},\bar{\psi}(\xi,x))d\xi\right) u_x^\tau\left(\frac{2\tau}{3},x\right),$$

откуда следует

$$|z^\tau(t,x)| \le U_1\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{K\tau U_1(\frac{2\tau}{3})}, \quad \frac{2\tau}{3} < t \le \tau. \tag{2.27}$$

Продифференцируем уравнение (2.24) два раза по x. Обозначим $v^\tau(t,x) == u_{xx}^\tau(t,x)$. Получим при $t \in (\frac{2\tau}{3},\tau]$ для $v^\tau(t,x)$ уравнение

$$\begin{aligned} v_t^\tau(t,x) \;&=\; 6A(t)u_x^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)v^\tau + 3A(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)v_x^\tau + \\ &+(3A(t)u_{xx}^\tau(t-\frac{\tau}{3},x)u_x^\tau(t,x)) \end{aligned} \tag{2.28}$$

с начальными данными

$$v^\tau(t,x)\Big|_{t=\frac{2\tau}{3}} \;=\; v^\tau(\frac{2\tau}{3},x). \tag{2.29}$$

Решение v^τ задачи (2.28), (2.29) имеет вид [21]:

$$\begin{aligned} v^\tau(t,x) \;&=\; e^{\int_{\frac{2\tau}{3}}^{t} 6A(t)u_x^\tau(\xi-\frac{\tau}{3},\widetilde{\psi})d\xi}\big(u_{xx}^\tau(\frac{2\tau}{3},x) + \int\limits_{\frac{2\tau}{3}}^{t} 3A(t)u_{xx}^\tau(\xi-\frac{\tau}{3},\widetilde{\psi}) \times \\ &\times u_x^\tau(\xi,\widetilde{\psi})e^{-\int_{\frac{2\tau}{3}}^{\xi} 6A(t)u_x^\tau(\eta-\frac{\tau}{3},\widetilde{\psi})d\eta}d\xi\big), \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$\begin{aligned} |v^\tau(t,x)| \;&\le\; e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\left(U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + K\tau U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)U_1^\tau(\tau)\,e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\right) = \\ &= e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) + K\tau U_1^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{5K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})} = \\ &= U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\left(e^{2K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})} + K\tau U_1^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{5K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\right) \le \\ &\le U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{5K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}\left(1 + K\tau U_1^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)\right) \le U_2^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right)e^{6K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Взяв sup по $x \in E_1$ и $t \in [0, \frac{2\tau}{3}]$ от левых частей в оценках (2.25), (2.27), (2.30) и сложив полученные неравенства, получаем при $t \in [0, \tau]$

$$U^\tau(t) \le U^\tau(\tau) = U^\tau\left(\frac{2\tau}{3}\right) e^{6K\tau U_1^\tau(\frac{2\tau}{3})} \le U_0 e^{4K\tau} e^{6K\tau U_0 e^{4K\tau}}. \tag{2.31}$$

На первом целом шаге ($n = 1$) повторим все рассуждения, проведённые нами на нулевом шаге. Для этого в соотношение (2.31) подставим вместо U_0 значение $U^\tau(\tau)$, удовлетворяющее неравенству (2.31):

$$\begin{aligned} U(2\tau) &\le U^\tau(\tau) e^{4K\tau} e^{6K\tau U^\tau(\tau) e^{4K\tau}} = \\ &= U_0 e^{4K\tau} e^{6K\tau U_0 e^{4K\tau}} e^{4K\tau} \exp(6K\tau U_0 e^{4K\tau} e^{6K\tau U_0 e^{4K\tau}} e^{4K\tau}). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Пусть положительная постоянная t^* удовлетворяет неравенству

$$e^{12Kt^* U_0 e^{4Kt^*}} \le 2. \tag{2.33}$$

Здесь и далее будем считать τ достаточно малыми ($\tau \ll t^*$), и такими, что для некоторых целых $N = N(\tau)$ выполнено равенство $N\tau = t^*$. В силу (2.33)

$$e^{6(2i-1)K\tau U_0 e^{4iK\tau}} \le 2, i = 1..N. \tag{2.34}$$

При $i = 1$ выполняется неравенство

$$e^{6K\tau U_0 e^{4K\tau}} \le 2.$$

учитывая которое, упростим оценку (2.32):

$$U^\tau(2\tau) \le U_0 e^{8K\tau} e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}}. \tag{2.35}$$

На втором шаге ($n = 2$) в (2.31) берем U_0 равное $U^\tau(2\tau)$. Получим соотношения

$$\begin{aligned} U^\tau(3\tau) &\le U^\tau(2\tau) e^{4K\tau} e^{6K\tau U^\tau(2\tau) e^{4K\tau}} \le \\ &\le U_0 e^{8K\tau} e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}} e^{4K\tau} \exp(6K\tau U_0 e^{8K\tau} e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}} e^{4K\tau}). \end{aligned}$$

Так как (при $i=2$) $e^{18K\tau U_0 e^{8K\tau}} \le 2$, то

$$U^\tau(3\tau) \le U_0 e^{12K\tau} e^{30K\tau U_0 e^{12K\tau}}.$$

На третьем шаге:

$$\begin{aligned} U^\tau(4\tau) &\le U^\tau(3\tau) e^{4K\tau} e^{6K\tau U^\tau(3\tau) e^{4K\tau}} \le \\ &\le U_0 e^{12K\tau} e^{30K\tau U_0 e^{12K\tau}} e^{4K\tau} \exp(6K\tau U_0 e^{12K\tau} e^{30K\tau U_0 e^{12K\tau}} e^{4K\tau}) \le \\ &\le U_0 e^{16K\tau} e^{42K\tau U_0 e^{16K\tau}}. \end{aligned}$$

На (i-1)-м целом шаге

$$\begin{aligned} U^\tau(i\tau) &\le U_0 e^{4iK\tau} e^{6(2i-1)K\tau U_0 e^{4iK\tau}} \le \\ &\le U_0 e^{4Kt^*} e^{12Kt^* U_0 e^{4Kt^*}} = K', \quad K' - const. \end{aligned}$$

В силу монотонности функции $U^\tau(t)$

$$U^\tau(t) \le U^\tau(N\tau) = U^\tau(t^*) = K', \qquad t \in [0, t^*]. \tag{2.36}$$

Отсюда следует (см. 2.16), что равномерно по τ

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x) \right| \le K', (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, k = 0,1,2, \tag{2.37}$$

где $\Pi_{[0,t^*]} = \{(t,x) | 0 \le t \le t^*, x \in (-\infty, \infty)\}$.

Трижды дифференцируем задачу (2.11)-(2.15) по x, рассматривая третью производную u^τ_{xxx} в качестве неизвестной функции и учитывая уже доказанную равномерную по τ ограниченность производных по x меньшего порядка (см. (2.37)), получим оценку

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial x^3} u^\tau(t,x) \right| \le K, (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

Дифференцируя задачу по x четыре раза, получаем задачу, где в качестве неизвестной функции рассматривается производная u^τ_{xxxx}, и производные по x меньшего порядка уже оценены. Получим равномерную по τ оценку на производную

$\frac{\partial^4}{\partial x^4}u^\tau(t,x)$. Аналогично оценим производные пятого и шестого порядков. Получим равномерную по τ оценку

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}u^\tau(t,x)\right| \le K', (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, k = 0, 1...6. \tag{2.38}$$

Из (2.38) следует (в силу уравнений (2.11)-(2.14)) равномерная по τ ограниченность производных

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s u^\tau}{\partial x^s}(t,x), \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^s u^\tau}{\partial x^s}(t,x), (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, s = 0..4,$$

откуда следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность в $\Pi^M_{[0,t^*]} = \{(t,x), t \in [0,t^*], |x| < M\}$ (при любом фиксированном M) семейств функций $\{u^\tau\}, \{u^\tau_x\}, \{u^\tau_{xx}\}, \{u^\tau_{xxx}\}, \{u^\tau_{xxxx}\}$.

По теореме Арцела (Теорема 1.1) о компактности в C, существует подпоследовательность u^{τ_k}, сходящаяся равномерно в $\Pi^M_{[0,t^*]}$ вместе со своими производными по x до четвертого порядка включительно к некоторой функции $u(t,x)$. По теореме сходимости метода слабой аппроксимации (Теорема 1.5), функция $u(t,x) = \lim_{k\to\infty} u^{\tau_k}(t,x)$ принадлежащая классу

$$C^{1,4}_{t,x}(\Pi^M_{[0,t^*]}) = \{u(t,x)| \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^k}{\partial x^k}u(t,x) \in C(\Pi^M_{[0,t^*]}), k = 0, 1...4\},$$

удовлетворяет уравнению (2.8) и удовлетворяет условию (2.9) при $|x| \le M$. Так как M произвольно, функция u является решением класса $C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]})$ задачи (2.8), (2.9).

2.1.4 Доказательство существования решения обратной задачи

Докажем, что пара функций $u(t,x), g(t)$, где $g(t)$ определяется соотношением (2.7), является решением обратной задачи (2.3)-(2.6).

Так как $u(t,x)$ - решение задачи (2.8), (2.9), то функции $u(t,x)$, $g(t) = \frac{\psi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,x_0)-A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)}$ являются решением задачи (2.3), (2.4). Докажем выполнение условия (2.5).

Подставим $x = x_0$ в уравнение (2.8):

$$\begin{aligned} u_t(t,x_0) &= \mu(t)u_{xx}(t,x_0) + A(t)u(t,x_0)u_x(t,x_0) + B(t)u(t,x_0) + \\ &+ C(t) + \frac{\psi(t) - \mu(t)u_{xx}(t,x_0) - A(t)\phi(t)u_x(t,x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x_0), \\ u_t(t,x_0) - \phi'(t) &= A(t)u_x(t,x_0)(u(t,x_0) - \phi(t)). \end{aligned}$$

Для функции $\gamma(t) = u(t,x_0) - \phi(t)$, учитывая условие согласования (2.6), получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (A(t)u_x(t,x_0) + B(t))\gamma(t), \\ \gamma(0) &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет единственное нулевое решение. Следовательно, $u(t,x_0) = \phi(t)$ и условие переопределения (2.5) выполнено. Доказано существования решения $(u(t,x), g(t))$ задачи (2.3)-(2.6) в классе

$$Z = \{u(t,x), g(t) | u(t,x) \in C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}), \left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right| + \sum_{s=0}^{4}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(t,x)\right| \leq K,$$

$$(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, g(t) \in C([0,t^*])\}.$$

2.1.5 Доказательство единственности решения обратной задачи

Пусть $(u^1(t,x), g^1(t)), (u^2(t,x), g^2(t))$ - два решения задачи (2.3)-(2.5) в классе Z. Обозначим $z = u^2 - u^1, g^* = g^2 - g^1$. Пара функций (z, g^*) является решением обратной задачи

$$z_t = \mu(t)z_{xx} + A(t)(u^2 z_x + u^1_x z) + B(t)z + g^*(t)f(t,x), \qquad (2.39)$$

$$z(0,x) = 0, \qquad (2.40)$$

$$z(t,x_0) = 0. \qquad (2.41)$$

Положим $x = x_0$ в (2.39). Получим соотношения

$$\begin{aligned} z_t(t,x_0) &= \mu(t)z_{xx}(t,x_0) + A(t)(u^2(t,x_0)z_x(t,x_0) + u^1_x(t,x_0)z(t,x_0)) + \\ &+B(t)z(t,x_0) + g^*(t)f(t,x_0), \\ g^*(t) &= -\frac{\mu(t)z_{xx}(t,x_0) + z(t,x_0)(B(t) + u^1_x(t,x_0)) + A(t)u^2(t,x_0)z_x(t,x_0)}{f(t,0)}, \end{aligned}$$

Следовательно, z является решением уравнения

$$z_t = \mu(t)z_{xx} + A(t)(u^2 z_x + u^1_x z) + B(t)z + g^*(t)f(t,x), \tag{2.42}$$

$$z(0,x) = 0. \tag{2.43}$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$\gamma_k(t) = \sup_{\xi\in[0,t]}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}z(\xi,x)\right|, k = 0,1,2. \tag{2.44}$$

В силу принципа максимума для уравнения (2.42) [20] получим

$$|z(\xi,x)| \le e^{K\xi}K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))\xi, \quad (\xi,x) \in \Pi_{[0,t]}, 0 \le t \le t^*.$$

Возьмем от обеих частей данного неравенства sup по $x \in E_1$ и $\xi \in [0,t]$:

$$\gamma_0(t) \le e^{Kt}K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t. \tag{2.45}$$

Продифференцируем уравнение (2.42) k раз (k=1,2) по x. Применяя принцип максимума, получим неравенства

$$\gamma_1(t) \le e^{Kt}K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t, \tag{2.46}$$

$$\gamma_2(t) \le e^{Kt}K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t. \tag{2.47}$$

Сложим неравенства (2.45)-(2.47):

$$\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t) \le 3Ke^{Kt}(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t.$$

Отсюда следует, что при некотором $\eta > 0$, таком, что $3K\eta e^{K\eta} < 1$, при всех $t \in [0,\eta]$ функции $\gamma_k(t) \equiv 0$. Повторяя данные рассуждения при $t \in [\eta, 2\eta]$, затем при $t \in [2\eta, 3\eta]$, и так далее, через конечное число шагов получим, что $\gamma_k \equiv 0$ при всех $t \in [0, t^*]$. Следовательно, $z(t,x) \equiv 0$ и $u^1 \equiv u^2$ в $\Pi_{[0,t^*]}$.

Подставим $z = 0$ в (2.42), получим, что $g^*(t)f(t,x_0) = 0$ при $t \in [0, t^*]$. Так как $|f(t,x_0)| > \frac{1}{K}$, то $g^*(t) = 0, t \in [0, t^*]$.

Следовательно, решение обратной задачи (2.3), (2.6) единственно в классе Z. Доказана

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия (2.10) Тогда существует единственное решение* (u, g) *задачи (2.3)-(2.6) в классе*

$$Z = \{u(t,x), g(t) | u(t,x) \in C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}), \left|\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\right| + \sum_{s=0}^{4} \left|\frac{\partial^s}{\partial x^s} u(t,x)\right| \le K,$$

$$(t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, g(t) \in C([0,t^*])\},$$

$$C^{1,4}_{t,x}(\Pi^M_{[0,t^*]}) = \{u(t,x) | \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x) \in C(\Pi^M_{[0,t^*]}), k = 0, 1...4\},$$

Для любого $M > 0$

$$\left\|\frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k} - \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{C(\Pi^M_{[0,t^*]})} \to 0, \quad k = 0, 1...4,$$

при $\tau \to 0$.

2.2 Краевая задача

2.2.1 Постановка задачи

В области $Q_T = \{(t,x) | 0 < t < T, 0 < x < l\}, T, l - const > 0$ рассмотрим краевую задачу

$$u_t(t,x) = \mu u_{xx} + A(t) u u_x + Bu + g(t) f(t,x), \qquad (2.48)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \qquad (2.49)$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (2.50)$$

$$u(t,x_0) = \phi(t), \quad 0 < x_0 < l, \qquad (2.51)$$

$$u_0(x_0) = \phi(0). \qquad (2.52)$$

В уравнении (2.48) в отличие от уравнения (2.3) функция $B(t) = B - const$ и $C(t) \equiv 0$.

2.2.2 Переход от краевой задачи к задаче Коши

Предположим, что функции $u_0(x)$, $f(t,x)$ имеют непрерывные производные по x до шестого порядка включительно. Продолжим [6, с. 59-61] функцию $u_0(x)$ на отрезок $[-l,l]$: определим $u_0(x) = -u_0(-x)$ при $-l \le x < 0$. Затем продолжим функцию с $[-l,l]$ на $\mathbb{R}$ периодическим образом. Продолжим функцию $f(t,x)$ с $[0,T]\times[0,l]$ на $[0,T]\times\mathbb{R}$ до периодической и нечётной по x функции. При выполнении условий

$$u_0(0) = u_0''(0) = u_0^{(4)}(0) = u_0^{(6)}(0) = 0, \tag{2.53}$$

$$u_0(l) = u_0''(l) = u_0^{(4)}(l) = u_0^{(6)}(l) = 0. \tag{2.54}$$

$$f(t,0) = f_{xx}(t,0) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(t,0) = \frac{\partial^6}{\partial x^6} f(t,0) = 0, \tag{2.55}$$

$$f(t,l) = f_{xx}(t,l) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} f(t,l) = \frac{\partial^6}{\partial x^6} f(t,l) = 0, \tag{2.56}$$

функции $u_0(x), f(t,x)$ являются непрерывными вместе с производными по x до 6-го порядка включительно на множествах $\mathbb{R}$ и $[0,T]\times\mathbb{R}$ соответственно

Заметим, что функции $u_0(x), f(t,x)$ по способу построения удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} u_0(-x) &= -u_0(x), \qquad & u_0(l-x) &= -u_0(l+x), \\ f(t,-x) &= -f(t,x), \qquad & f(t,l-x) &= -f(t,l+x). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Продолженные данным способом функции $u_0(x), f(t,x)$ используем в качестве входных данных для задачи Коши

$$u_t(t,x) \;=\; \mu u_{xx} + A(t) u u_x + Bu + g(t) f(t,x), \tag{2.58}$$

$$u(0,x) \;=\; u_0(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{2.59}$$

2.2.3 Доказательство выполнения краевых условий

Расщепим задачу (2.58),(2.59):

$$\begin{cases} u_t^\tau = 3\mu u_{xx}^\tau + 3Bu^\tau, & t \in \big(n\tau, (n+\frac{1}{3})\tau\big], \\ u_t^\tau = 3\dfrac{\psi(t) - \mu u_{xx}^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x_0) - A(t)\phi(t)u_x^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x_0)}{f(t,x_0)} f(t,x), & \\ \qquad\qquad t \in \big((n+\frac{1}{3})\tau, (n+\frac{2}{3})\tau\big], & \\ u_t^\tau = 3A(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{3}, x)u_x^\tau(t,x), & t \in \big((n+\frac{2}{3})\tau, (n+1)\tau\big], \\ u^\tau(0,x) = u_0(x), & \end{cases} \tag{2.60}$$

где $\psi(t) = \phi'(t) - B\phi(t)$.

Пусть $u^\tau(t,x)$ - решение расщепленной задачи. Покажем, что $u^\tau(t,x)$ удовлетворяет условиям

$$u^\tau(t,-x) = -u^\tau(t,x), \qquad u^\tau(t,l-x) = -u^\tau(t,l+x). \tag{2.61}$$

На первом дробном шаге сделаем замену $u^\tau(t,x) = v^\tau(t,x)e^{3Bt}$, получим для v^τ уравнение $v_t^\tau = 3\mu v_{xx}^\tau$. Функцию v^τ можно представить в виде интеграла Пуассона [40]. Тогда

$$u^\tau(t,x) = \frac{e^{3Bt}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3\mu t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{12\mu t}} u_0(\xi) d\xi.$$

Проверим первое из условий (2.61):

$$u^\tau(t,x) + u^\tau(t,-x) = \frac{e^{3Bt}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3\mu t}} \big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{12\mu t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{12\mu t}}\big) u_0(\xi) d\xi.$$

Подинтегральная функция меняет знак при замене ξ на $-\xi$, следовательно, интеграл от нее равен нулю. Второе условие из (2.61) проверяется аналогично с помощью замены $\eta = l - \xi$ переменной интегрирования.

На втором дробном шаге $u^\tau(t,x)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
u^\tau(t,x) &= u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right)+\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\zeta(\xi)f(\xi,x)d\xi,\\
\zeta(\xi) &= 3\frac{\psi(\xi)-\mu u^\tau_{xx}(\xi-\frac{\tau}{3},x_0)-A(\xi)\phi(\xi)u^\tau_x(t-\frac{\tau}{3},x_0)}{f(\xi,x_0)}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
u^\tau(t,x)+u^\tau(t,-x) = u^\tau\left(\frac{\tau}{3},x\right)+u^\tau\big(\frac{\tau}{3},-x\big)+\int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t}\zeta(\xi)\big(f(\xi,x)+
$$

$$
+f(\xi,-x)\big)d\xi=0.
$$

Второе условие (2.61), очевидно, также выполнено.

Лемма 2.1. *Пусть функция $v(t,x)$ является решением уравнения $v_t=a(t,x)v_x$ в области $D=\{(t,x)|t_0<t<t_1, x\in\Re\}$ с начальным условием $v(t_0,x)=v_0(x)$. Пусть функция $a(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x и выполнены соотношения*

$$
a(t,c+x)=-a(t,c-x), v_0(c+x)=-v_0(c-x), c-const. \tag{2.62}
$$

Тогда функция $v(t,x)$ удовлетворяет соотношению $v(t,c+x)=-v(t,c-x)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство характеристик уравнения $v_t=a(t,x)v_x$. Любая характеристика удовлетворяет в D уравнению $\frac{dx}{dt}=-a(t,x)$. Так как $a(t,x)$ липшиц-непрерывна, то через каждую точку $(t,x)\in D$ проходит одна и только одна характеристика. Возьмем две характеристики $x_1=\phi_1(t), x_2=\phi_2(t)$, пересекающие прямую $t=t_0$ в точках $x=c+\alpha$ и $x=c-\alpha$ ($\alpha>0-const$) соответственно. Легко видеть, что $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ симметричны относительно прямой $x=c$: $\phi_1(t)-c=c-\phi_2(t)$. Действительно, $\zeta_1=\phi_1(t)-c$ является решением задачи

$$
\begin{aligned}
\frac{d\zeta_1}{dt} &= -a(t,c+\zeta_1),\\
\zeta_1(t_0) &= \alpha,
\end{aligned}
$$

Функция $\zeta_2 = c - \phi_2(t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_2}{dt} &= a(t, c - \zeta_2) = -a(t, c + \zeta_2), \\ \zeta_2(t_0) &= \alpha, \end{aligned}$$

то есть ζ_1, ζ_2 являются решением одной и той же задачи, значит $\phi_1(t) - c = c - \phi_2(t)$

Функция $v(t, x)$ обладает свойством постоянства вдоль характеристик $\phi(t)$, т.е. $v(t, \phi(t)) = const$. Рассмотрим сумму $v(t, c + x) + v(t, c - x)$. Через точки $(t, c + x)$ и $(t, c - x)$ проходят симметричные относительно $x = c$ характеристики $\phi_1(t), \phi_2(t)$. В силу (2.62) $v(t, c + x) + v(t, c - x) = v(t, \phi_1(t)) + v(t, \phi_2(t)) = v(t_0, \phi_1(t_0)) + v(t_0, \phi_2(t_0)) = v_0(c + (\phi_1(t_0) - c)) + v_0(c - (c - \phi_2(t_0))) = 0$, что и требовалось доказать.

Применяя лемму 2.1 при $c = 0$, затем при $c = l$, докажем выполнение условий (2.61) на третьем дробном шаге.

Доказано выполнение условий (2.61) на нулевом целом шаге. Так же рассуждая на последующих шагах, получим, что условия (2.61) выполнены для всех $t \in [0, T]$. Подставляя $x = 0$ в (2.61) получим, что

$$u^\tau(t, 0) = u^\tau(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.63}$$

Предположим, что выполнены условия (2.10) и $C(t) \equiv 0$. По теореме 1 последовательность $u^\tau(t, x)$ решений задачи (2.60) сходится к решению $u(t, x)$ задачи (2.58),(2.59) равномерно в $\Pi^M_{[0,t^*]}$ при любом $M > 0$ и, следовательно, в $[0, t^*] \times [0, l]$, вместе с производными по переменной x до четвертого порядка включительно.

Так как для u^τ выполняется условие (2.61), то, переходя в (2.63) к пределу при $\tau \to 0$, получим

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0.$$

Следовательно, сужение $u(t, x), g(t)$ решения задачи (2.58), (2.59) на $[0, t^*] \times [0, l]$ есть решение задачи (2.48)-(2.52) в классе

$$W = \{u(t,x), g(t) | u(t,x) \in C^{1,4}_{t,x}([0,t^*] \times [0,l]), g(t) \in C([0,t^*])\}.$$

2.2.4 Доказательство единственности решения краевой задачи

Пусть $(u^1(t,x), g^1(t)), (u^2(t,x), g^2(t))$ - два решения задачи (2.48)-(2.52) в классе W. Обозначим $z = u^2 - u^1, g^* = g^2 - g^1$. Пара функций (z, g^*) является решением обратной задачи

$$\begin{aligned} z_t &= \mu(t) z_{xx} + A(t)(u^2 z_x + u^1_x z) + B(t) z + g^*(t) f(t,x), && (2.64)\\ z(0,x) &= 0, && (2.65)\\ z(t,x_0) &= 0, && (2.66)\\ z(t,0) &= z(t,l) = 0. && (2.67) \end{aligned}$$

Положим $x = x_0$ в (2.64). Получим соотношения

$$\begin{aligned} z_t(t,x_0) &= \mu(t) z_{xx}(t,x_0) + A(t)(u^2(t,x_0) z_x(t,x_0) + u^1_x(t,x_0) z(t,x_0)) + \\ &\quad + B(t) z(t,x_0) + g^*(t) f(t,x_0),\\ g^*(t) &= -\frac{\mu(t) z_{xx}(t,x_0) + z(t,x_0)(B(t) + u^1_x(t,x_0)) + A(t) u^2(t,x_0) z_x(t,x_0)}{f(t,0)}, \end{aligned}$$

Следовательно, z является решением уравнения

$$\begin{aligned} z_t &= \mu(t) z_{xx} + A(t)(u^2 z_x + u^1_x z) + B(t) z + g^*(t) f(t,x), && (2.68)\\ z(0,x) &= 0, && (2.69)\\ z(t,0) &= z(t,l) = 0. && (2.70) \end{aligned}$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$\gamma_k(t) = \sup_{\xi \in [0,t]} \sup_{x \in E_1} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} z(\xi, x) \right|, k = 0,1,2. \qquad (2.71)$$

В силу принципа максимума для уравнения (2.68) получим

$$|z(\xi,x)| \le e^{K\xi} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))\xi, \quad (\xi,x) \in \Pi_{[0,t]}, 0 \le t \le t^*.$$

Возьмем от обеих частей данного неравенства sup по $x \in E_1$ и $\xi \in [0, t]$:

$$\gamma_0(t) \leq e^{Kt} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t. \tag{2.72}$$

Продифференцируем уравнение (2.68)k раз (k=1,2) по x. Применяя принцип максимума, получим неравенства

$$\gamma_1(t) \leq e^{Kt} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t, \tag{2.73}$$

$$\gamma_2(t) \leq e^{Kt} K(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t. \tag{2.74}$$

Сложим неравенства (2.72)-(2.74):

$$\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t) \leq 3Ke^{Kt}(\gamma_2(t) + \gamma_1(t) + \gamma_0(t))t.$$

Отсюда следует, что при некотором $\eta > 0$, таком, что $3K\eta e^{K\eta} < 1$, при всех $t \in [0, \eta]$ функции $\gamma_k(t) \equiv 0$. Повторяя данные рассуждения при $t \in [\eta, 2\eta]$, затем при $t \in [2\eta, 3\eta]$, и так далее, через конечное число шагов получим, что $\gamma_k \equiv 0$ при всех $t \in [0, t^*]$. Следовательно, $z(t, x) \equiv 0$ и $u^1 \equiv u^2$ в $\Pi_{[0,t^*]}$.

Подставим $z = 0$ в (2.68), получим, что $g^*(t)f(t, x_0) = 0$ при $t \in [0, t^*]$. Так как $|f(t, x_0)| > \frac{1}{K}$, то $g^*(t) = 0, t \in [0, t^*]$.

Следовательно, решение обратной задачи (2.48), (2.52) единственно в классе W. Доказана

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия (2.53)-(2.56), а условия (2.10) выполнены при* $0 \leq x \leq l$. *Тогда существует единственное решение (u, g) задачи (2.48)-(2.52) в классе*

$$W = \{u(t, x), g(t) | u(t, x) \in C^{1,4}_{t,x}([0, t^*] \times [0, l]), g(t) \in C([0, t^*])\}.$$

При этом

$$\left\| \frac{\partial^k u^\tau}{\partial x^k} - \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{C([0,t^*] \times [0,l])} \to 0, \quad k = 0, 1...4, \quad \tau \to 0.$$

Глава 3. О задаче идентификации функции источника для двумерного уравнения типа Бюргерса

В настоящей главе исследуется обратная задача определения функции источника для двумерного уравнения типа Бюргерса. Рассматриваются случаи задачи Коши на плоскости и смешаной краевой задачи в прямоугольной области. При некоторых ограничениях на входные данные доказана однозначная разрешимость указанных задач в классах гладких ограниченных функций.

3.1 Постановка задачи и полученные результаты

3.1.1 Задача Коши

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x,y)|0 \le t \le T, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$ рассмотрим уравнение типа Бюргерса

$$u_t(t,x,y) = \mu_1(t)u_{xx}+\mu_2(t)u_{yy}+a_1(t)u_x+a_2(t)u_y+b_1(t)uu_x+b_2(t)uu_y+g(t)f(t,x,y), \tag{3.1}$$

где $\mu_i(t) > 0, a_i(t), b_i(t), f(t,x,y), i = 1,2$ - заданные функции, с данными Коши

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.2}$$

Считаем, что выполнены условие переопределения

$$u(t,x_0,y_0) = \phi(t), \qquad x_0 = const, \quad y_0 = const, \tag{3.3}$$

и условие согласования

$$\phi(0) = u_0(x_0,y_0). \tag{3.4}$$

Под решением задачи (3.1)-(3.4) понимается пара функций $u(t,x,y), g(t)$, принадлежащая классу

$$Z_p(T) = \{u(t,x,y), g(t)|u(t,x,y) \in C^{1,p}(\Pi_{[0,T]}), \left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right| +$$
$$+\sum_{|\alpha|\le p} |D^\alpha u(t,x,y)| \le K, (t,x,y) \in \Pi_{[0,T]}, g(t) \in C([0,T])\}, \quad p \ge 2 \in \mathbb{Z},$$

где $C^{1,p}(\Pi_{[0,T]}) = \{u(t,x,y) | \frac{\partial u}{\partial t}, D^\alpha u(t,x,y) \in C(\Pi_{[0,T]}), |\alpha| \leq p\}$.

В данной главе доказана

Теорема 3.1. *При выполнении условий*

$$u_0(x,y) \in C^{p+2}(\mathbb{R}^2), \qquad f(t,x,y) \in C^{0,p+2}(\Pi_{[0,T]}), \qquad \mu_i \in C([0,T]),$$
$$a_i \in C([0,T]), \qquad b_i \in C([0,T]), \qquad \phi(t) \in C^1([0,T])$$
$$\sum_{|\alpha| \leq p+2} |D^\alpha u_0(x,y)| + \sum_{|\alpha| \leq p+2} |D^\alpha f(t,x,y)| + |\mu_i(t)| + |a_i(t)| + |b_i(t)| + \tag{3.5}$$
$$+ |\phi(t)| + |\phi'(t)| \leq K, \quad |f(t,x_0,y_0)| \geq \frac{1}{K}, \quad i = 1,2, \quad K = const > 0, \quad p \geq 4,$$

существует единственное решение задачи (3.1)-(3.4) в классе $Z_p(t^*)$, *где* $t^* > 0$ *- некоторая постоянная, зависящая от входных даных.*

3.1.2 Краевая задача

В области $Q_t = \{(t,x,y) | 0 < t < T, 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$, $T, l_1, l_2 - const > 0$, рассмотрим краевую задачу

$$u_t(t,x,y) = \mu_1(t) u_{xx} + \mu_2(t) u_{yy} + b_1(t) u u_x + g(t) f(t,x,y), \tag{3.6}$$
$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in [0,l_1] \times [0,l_2], \tag{3.7}$$
$$u(t,0,y) = u(t,l_1,y) = 0, \tag{3.8}$$
$$u_y(t,x,0) = u_y(t,x,l_2) = 0, \tag{3.9}$$
$$u(t,x_0,y_0) = \phi(t), \qquad (x_0,y_0) \in \Omega = (0,l_1) \times (0,l_2). \tag{3.10}$$

Уравнение (3.6) получено из уравнения (3.1) при $a_1(t) = a_2(t) = b_2(t) = 0$.

Доказана

Теорема 3.2. *Пусть функции* $u_0(x,y), f(t,x,y), \mu_1(t), \mu_2(t), b_1(t)$ *удовлетворя-*

ют условиям (3.5) при $(x, y) \in \bar{\Omega}$ *и* $p = 6$. *При выполнении условий*

$$\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}(0, y) = \frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}(l_1, y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, 0, y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, l_1, y) = 0, \qquad k = 0, 2, 4, 6, 8, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^m u_0}{\partial y^m}(x, 0) = \frac{\partial^m u_0}{\partial y^m}(x, l_2) = \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(t, x, 0) = \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(t, x, l_2) = 0, \qquad m = 1, 3, 5, 7, \tag{3.12}$$

существует единственное решение задачи (3.6)-(3.10) в классе

$$W = \{u(t, x, y), g(t) | u(t, x, y) \in C^{1,6}(Q_{t^*}), \left|\frac{\partial}{\partial t} u(t, x, y)\right| + \\ + \sum_{|\alpha| \le 6} |D^\alpha u(t, x, y)| \le K, (t, x, y) \in Q_{t^*}, g(t) \in C([0, t^*])\}.$$

3.2 Задача Коши

3.2.1 Переход от обратной задачи к прямой задаче

Приведем обратную задачу (3.1)-(3.3) к прямой задаче. Подставим $x = x_0, y = y_0$ в уравнение (3.1). Учитывая условие (3.3), получим соотношение

$$g(t) = f^{-1}(t, x_0, y_0)\big(\phi'(t) - \mu_1(t) u_{xx}(t, x_0, y_0) - \mu_2(t) u_{yy}(t, x_0, y_0) - \\ - (a_1(t) + \phi(t) b_1(t)) u_x(t, x_0, y_0) - (a_2(t) + \phi(t) b_2(t)) u_y(t, x_0, y_0)\big). \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.1), приходим к задаче

$$u_t(t, x, y) = \mu_1(t) u_{xx} + \mu_2(t) u_{yy} + a_1(t) u_x + a_2(t) u_y + b_1(t) u u_x + b_2(t) u u_y + \\ + \frac{f(t, x, y)}{f(t, x_0, y_0)}\big(\phi'(t) - \mu_1(t) u_{xx}(t, x_0, y_0) - \mu_2(t) u_{yy}(t, x_0, y_0) - \\ - (a_1(t) + \phi(t) b_1(t)) u_x(t, x_0, y_0) - (a_2(t) + \phi(t) b_2(t)) u_y(t, x_0, y_0)\big), \tag{3.14}$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y). \tag{3.15}$$

3.2.2 Доказательство разрешимости прямой задачи

Существование достаточно гладкого решения задачи (3.14), (3.15) докажем методом слабой аппроксимации (глава 1.4). Аппроксимируем задачу (3.14), (3.15) задачей

$$\frac{1}{2}u_t^\tau = \mu_1(n\tau)u_{xx}^\tau + \mu_2(n\tau)u_{yy}^\tau + a_1(t)u_x^\tau + a_2(t)u_y^\tau + \frac{f(t,x,y)}{f(t,x_0,y_0)}\big(\phi'(t) - \mu_1(t)\times$$
$$\times\, u_{xx}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x_0,y_0) - \mu_2(t)u_{yy}^\tau(t-\frac{\tau}{2},x_0,y_0) - (a_1(t)+\phi(t)b_1(t))\times$$
$$\times\, u_x^\tau(t-\frac{\tau}{2},x_0,y_0) - (a_2(t)+\phi(t)b_2(t))u_y^\tau(t-\frac{\tau}{2},x_0,y_0)\big),$$
$$t \in \big(n\tau,(n+\frac{1}{2})\tau\big], \tag{3.16}$$
$$\frac{1}{2}u_t^\tau = b_1(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,y)u_x^\tau + b_2(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,y)u_y^\tau,$$
$$t \in \big((n+\frac{1}{2})\tau,(n+1)\tau\big], \tag{3.17}$$
$$u^\tau\,|_{t\le 0} = u_0(x,y), \qquad 0 \le n \le N-1, \quad N\tau = T. \tag{3.18}$$

При фиксированном τ существует единственное решение u^τ расщепленной задачи (3.16)-(3.18) ([20, с. 127], [21, с. 46]), которое имеет непрерывные и ограниченные производные порядка не менее $(p+2)$ по пространственным переменным. Докажем априорные оценки этих производных.

Введем неотрицательные, монотонно возрастающие функции:

$$U_\alpha^\tau(t) = \sup_{\xi\in[0,t]}\ \sup_{(x,y)\in E_2} \left|D^\alpha u^\tau(\xi,x,y)\right|, \quad U^\tau(t) = 1 + \sum_{|\alpha|\le p+2} U_\alpha^\tau(t), \tag{3.19}$$
$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2), \qquad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2, \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x\partial^{\alpha_2}y}.$$

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n=0$). На первом дробном шаге решается задача Коши (3.16), (3.18). В силу принципа маскимума (Теорема 1.4) имеем

$$U_0^\tau(t) \le U_0^\tau(0) + K\tau\big(1 + U_{(2,0)}^\tau(0) + U_{(0,2)}^\tau(0) + U_{(1,0)}^\tau(0) + U_{(0,1)}^\tau(0)\big), \quad t\in\big(0,\frac{\tau}{2}\big]. \tag{3.20}$$

Дифференцируя задачу (3.16), (3.18) по переменным x,y до $(p+2)$ раз включительно и применяя принцип максимума, получим

$$U_\alpha^\tau(t) \le U_\alpha^\tau(0) + K\tau\big(1 + U_{(2,0)}^\tau(0) + U_{(0,2)}^\tau(0) + U_{(1,0)}^\tau(0) + U_{(0,1)}^\tau(0)\big) \le U_\alpha^\tau(0)+$$
$$+\,K\tau U^\tau(0), t\in\big(0,\frac{\tau}{2}\big], \quad |\alpha|\le p+2. \tag{3.21}$$

Складывая оценки (3.21) при $|\alpha| \leq p+2$, получим

$$U^\tau(t) \leq U^\tau(0) + S_p \cdot K\tau U^\tau(0) \leq U^\tau(0)e^{\tilde{K}\tau}, \quad t \in \big(0, \frac{\tau}{2}\big], \tag{3.22}$$

где $S_p = const$ - количество частных производных порядков до $(p+2)$ включительно, $\tilde{K} = S_p \cdot K$.

На втором дробном шаге решается задача Коши для линейного дифференциального уравнения (3.17) с начальными данными $u^\tau(\frac{\tau}{2}, x, y)$. При фиксированном τ для данного уравнения можно воспользоваться следующим результатом (см. [53]).

Теорема 3.3. *Пусть $u(t,x)$ является решением задачи*

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}, \tag{3.23}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in E_n \tag{3.24}$$

в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$, принадлежащем классу $C^{1,p}(\Pi_{[0,T]})$. Здесь $u_0(x), b_i(t,x)$ - функции, заданные на E_n и $\Pi_{[0,T]}$ соответственно. Пусть входные данные данной задачи удовлетворяют неравенствам

$$|D^\alpha b_i(t,x)| \leq M(p), \quad |\alpha| \leq p, i = 1, \ldots, n; \tag{3.25}$$

$$|D^\alpha u_0(x)| \leq C(p), \quad |\alpha| \leq p. \tag{3.26}$$

Тогда имеет место неравенство

$$|D^\alpha u(t,x)| \leq C(p)e^{l(p)M(p)T}, \quad |\alpha| \leq p, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{3.27}$$

где $l(p) > 0$ зависит только от p, и не зависит от входных данных.

В силу (3.20), (3.21) выполняются условия (3.25), (3.26) данной теоремы в полосе $\Pi_{[\frac{\tau}{2},\tau]}$, следовательно на втором дробном шаге выполняется

$$|D^\alpha u^\tau(t,x,y)| \leq U^\tau_\alpha\big(\frac{\tau}{2}\big)e^{l(\alpha)U^\tau_\alpha(\frac{\tau}{2})\tau}, \tag{3.28}$$

откуда

$$U^\tau_\alpha(t) \leq U^\tau_\alpha(\frac{\tau}{2})e^{l(\alpha)U^\tau_\alpha(\frac{\tau}{2})\tau}, \qquad t \in \big(\frac{\tau}{2}, \tau\big]. \tag{3.29}$$

Складывая оценки (3.29) при $|\alpha| \le p+2$ и прибавляя единицу к обеим частям получившегося неравнества, получим

$$U^\tau(t) \le U^\tau(\frac{\tau}{2}) e^{lU^\tau(\frac{\tau}{2})\tau}, \qquad l = \max_{|\alpha|\le p+2} l(\alpha), \tag{3.30}$$

$$U^\tau(t) \le U^\tau(0) e^{\tilde{K}\tau} e^{lU^\tau(0)e^{\tilde{K}\tau}\tau}, \qquad t \in (0,\tau]. \tag{3.31}$$

На первом целом шаге ($n = 1$) повторим все рассуждения, проведённые нами на нулевом шаге. Для этого в соотношение (3.31) подставим вместо $U^\tau(0)$ значение $U^\tau(\tau)$, удовлетворяющее неравенству (3.31):

$$U^\tau(2\tau) \le U^\tau(\tau) e^{\tilde{K}\tau} e^{lU^\tau(\tau)e^{\tilde{K}\tau}\tau},$$

$$U^\tau(2\tau) \le U^\tau(0) e^{\tilde{K}\tau} \exp(lU^\tau(0)e^{\tilde{K}\tau}\tau) e^{\tilde{K}\tau} \exp(lU^\tau(0)e^{\tilde{K}\tau} e^{lU^\tau(0)e^{\tilde{K}\tau}\tau} e^{\tilde{K}\tau}\tau). \tag{3.32}$$

Рассуждая далее, через конечное число шагов получим оценку

$$U^\tau(t) \le R(\tau), \qquad t \in [0,T].$$

Докажем, что в некотором малом временном интервале $0 \le t \le t^*$ имеет место равномерная по τ оценка множества производных $\{D^\alpha u^\tau\}, |\alpha| \le p+2$. Предположим, что положительная постоянная t^* удовлетворяет неравенству

$$e^{2lt^* U^\tau(0) e^{\tilde{K}t^*}} \le 2. \tag{3.33}$$

Здесь и далее будем считать τ достаточно малыми ($\tau \ll t^*$), и такими, что для некоторых целых $N' = N'(\tau)$ выполнено равенство $N'\tau = t^*$. В силу (3.33)

$$e^{(2i-1)l\tau U^\tau(0) e^{i\tilde{K}\tau}} \le 2, i = 1, \dots, N'. \tag{3.34}$$

Докажем неравенство

$$U^\tau(i\tau) \le U^\tau(0) e^{i\tilde{K}\tau} \exp((2i-1)lU^\tau(0)e^{i\tilde{K}\tau}\tau), \quad i = 1, \dots, N', \tag{3.35}$$

методом математической индукции. При $i = 1$ неравенство верно в силу (3.31). Предположим, что при некотором $i < N'$ неравенство (3.35) верно, тогда, повторяя все рассуждения, проведённые на нулевом шаге, получим

$$U^\tau((i+1)\tau) \le U^\tau(i\tau) e^{\tilde{K}\tau} e^{lU^\tau(i\tau)e^{\tilde{K}\tau}\tau} \le$$

$$\leq U^\tau(0)e^{i\tilde{K}\tau}\exp((2i-1)l^\tau(0)e^{i\tilde{K}\tau}\tau)e^{\tilde{K}\tau}\exp\Big(lU^\tau(0)e^{i\tilde{K}\tau}\times$$

$$\times\exp((2i-1)lU^\tau(0)e^{i\tilde{K}\tau}\tau)e^{\tilde{K}\tau}\tau\Big)\leq$$

$$\leq U^\tau(0)e^{(i+1)\tilde{K}\tau}\exp((2i-1)lU^\tau(0)e^{(i+1)\tilde{K}\tau}\tau)\exp\Big(lU^\tau(0)2e^{(i+1)\tilde{K}\tau}\tau\Big)\leq$$

$$\leq U^\tau(0)e^{(i+1)\tilde{K}\tau}\exp((2(i+1)-1)lU^\tau(0)e^{(i+1)\tilde{K}\tau}\tau),$$

следовательно, неравенство (3.35) верно и для $i+1$. Отсюда, в силу принципа математической индукии, оно верно при всех $i < N'$.

Заметим, что $U^\tau(0)$ определяется только входными данными, и не зависит от τ. В силу монотонности функции $U^\tau(t)$ и неравенства (3.35)

$$U^\tau(t)\leq U^\tau(N'\tau)=U^\tau(0)e^{\tilde{K}t^*}\exp(2t^*lU^\tau(0)e^{\tilde{K}t^*})=K'-const,\qquad t\in[0,t^*]. \tag{3.36}$$

Отсюда следует (см. (3.19)), что равномерно по τ

$$|D^\alpha u^\tau(t,x,y)|\leq K', (t,x,y)\in\Pi_{[0,t^*]}, |\alpha|\leq p+2, \tag{3.37}$$

где $\Pi_{[0,t^*]}=\{(t,x,y)|0\leq t\leq t^*,(x,y)\in E_2\}$.

Из (3.37) следует (в силу уравнений (3.16), (3.17)) равномерная по τ ограниченность производных

$$\frac{\partial}{\partial t}D^\alpha u^\tau(t,x,y),\frac{\partial}{\partial x}D^\alpha u^\tau(t,x,y),\frac{\partial}{\partial y}D^\alpha u^\tau(t,x,y),(t,x,y)\in\Pi^{M_0}_{[0,t^*]},|\alpha|\leq p,$$

где $\Pi^{M_0}_{[0,t^*]}=\{(t,x,y),t\in[0,t^*],|x|<M_0,|y|<M_0\}$, при любом фиксированном $M_0>0$, откуда следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность в $\Pi^{M_0}_{[0,t^*]}$ семейств функций $\{D^\alpha u^\tau\},|\alpha|\leq p$.

По теореме Арцела (Теорема 1.1), существует подпоследовательность u^{τ_k}, сходящаяся равномерно в $\Pi^{M_0}_{[0,t^*]}$ вместе со своими производными по x и y до порядка p включительно к некоторой функции $u(t,x,y)$. По теореме сходимости метода слабой аппроксимации (Теорема 1.5), функция $u(t,x,y)=\lim_{k\to\infty}u^{\tau_k}(t,x,y)$ принадлежащая классу

$$C^{1,p}(\Pi^{M_0}_{[0,t^*]})=\{u(t,x,y)|\frac{\partial u}{\partial t},D^\alpha u(t,x,y)\in C(\Pi^{M_0}_{[0,t^*]}),|\alpha|\leq p\},$$

удовлетворяет уравнению (3.14) и удовлетворяет условию (3.15) при $|x| \leq M_0, |y| \leq M_0$, при этом

$$\|D^\alpha u^\tau - D^\alpha u\|_{C(\Pi^{M_0}_{[0,t^*]})} \to 0, \quad |\alpha| \leq p \tag{3.38}$$

при $\tau \to 0$. Так как $M_0 > 0$ произвольно, функция u является решением класса $C^{1,p}(\Pi_{[0,t^*]})$ задачи (3.14), (3.15).

3.2.3 Доказательство существования решения обратной задачи

Докажем, что пара функций $u(t,x,y), g(t)$, где $g(t)$ определяется соотношением (3.13), является решением обратной задачи (3.1)-(3.4).

Так как $u(t,x)$ - решение задачи (3.14), (3.15), то функции $u(t,x,y)$, $g(t)$ являются решением задачи (3.1), (3.2). Докажем выполнение условия (3.3).

Подставим $x = x_0, y = y_0$ в уравнение (3.14):

$$\begin{aligned}
u_t(t,x_0,y_0) &= \mu_1(t)u_{xx}(t,x_0,y_0) + \mu_2(t)u_{yy}(t,x_0,y_0) + a_1(t)u_x(t,x_0,y_0) + \\
&+ a_2(t)u_y(t,x_0,y_0) + b_1(t)u(t,x_0,y_0)u_x(t,x_0,y_0) + b_2(t) \times \\
&\times u(t,x_0,y_0)u_y(t,x_0,y_0) + \frac{f(t,x_0,y_0)}{f(t,x_0,y_0)}\big(\phi'(t) - \mu_1(t)u_{xx}(t,x_0,y_0) - \\
&- \mu_2(t)u_{yy}(t,x_0,y_0) - (a_1(t) + \phi(t)b_1(t))u_x(t,x_0,y_0) - \\
&- (a_2(t) + \phi(t)b_2(t))u_y(t,x_0,y_0)\big), \quad t \in [0,t^*].
\end{aligned}$$

Для функции $\gamma(t) = u(t,x_0,y_0) - \phi(t)$, учитывая условие согласования (3.4), получим задачу Коши

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (b_1(t)u_x(t,x_0,y_0) + b_2(t)u_y(t,x_0,y_0))\gamma(t), \\
\gamma(0) &= 0,
\end{aligned}$$

которая имеет единственное нулевое решение. Следовательно, $u(t,x_0,y_0) = \phi(t)$ при $t \in [0,t^*]$. Условие переопределения (3.3) выполнено. Доказано существования решения $(u(t,x,y), g(t))$ задачи (3.1)-(3.4) в классе

$$Z_p(t^*) = \{u(t,x,y), g(t) | u(t,x,y) \in C^{1,p}(\Pi_{[0,t^*]}), \left|\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)\right| +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\le p} |D^\alpha u(t,x,y)| \le K, (t,x,y) \in \Pi_{[0,t^*]}, g(t) \in C([0,t^*])\}, \quad p \ge 2 \in \mathbb{Z},$$

3.2.4 Доказательство единственности решения обратной задачи

Пусть $(u^1(t,x,y), g^1(t)), (u^2(t,x,y), g^2(t))$ - два решения задачи (3.1)-(3.4) в классе $Z_p(t^*), p \ge 4$. Обозначим $z = u^2 - u^1, g^* = g^2 - g^1$. Пара функций (z, g^*) является решением обратной задачи

$$z_t = \mu_1(t) z_{xx} + \mu_2(t) z_{yy} + a_1(t) z_x + a_2(t) z_y + b_1(t) \times \tag{3.39}$$
$$\times (u^2 z_x + u^1_x z) + b_2(t)(u^2 z_y + u^1_y z) + g^*(t) f(t,x,y), \tag{3.40}$$
$$z(0,x,y) = 0, \tag{3.41}$$
$$z(t,x_0,y_0) = 0. \tag{3.42}$$

Полагая $x = x_0, y = y_0$ в (3.39), получим соотношение

$$g^*(t) = -\frac{\mu(t)_1 z_{xx}(t,x_0,y_0) + \mu(t)_2 z_{yy}(t,x_0,y_0) + (a_1(t) + b_1(t)u^2) z_x(t,x_0,y_0)}{f(t,x_0,y_0)} - $$
$$-\frac{(a_2(t) + b_2(t)u^2) z_y(t,x_0,y_0) + (b_1(t)u^1_x + b_2(t)u^2_x) z(t,x_0,y_0)}{f(t,x_0,y_0)},$$

Следовательно, z является решением задачи

$$z_t = \mu_1(t) z_{xx} + \mu_2(t) z_{yy} + (a_1(t) + b_1(t)u^2) z_x + (a_2(t) + b_2(t)u^2) z_y +$$
$$+ (b_1 u^1_x + b_2 u^1_y) z + g^*(t) f(t,x,y), \tag{3.43}$$
$$z(0,x,y) = 0. \tag{3.44}$$

Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$\gamma_\alpha(t) = \sup_{\xi\in[0,t]} \sup_{x\in E_2} |D^\alpha z(\xi,x,y)|, |\alpha| \le 2. \tag{3.45}$$

В силу принципа максимума для уравнения (3.44) получим

$$|z(\xi,x,y)| \le e^{K\xi}K(\gamma_{(2,0)}(t)+\gamma_{(0,2)}(t)+\gamma_{(1,0)}(t)+\gamma_{(0,1)}(t)+\gamma_{(0,0)}(t))\xi,$$
$$(\xi,x)\in\Pi_{[0,t]},\, 0\le t\le t^*.$$

Возьмем от обеих частей данного неравенства sup по $x\in E_1$ и $\xi\in[0,t]$:

$$\gamma_{(0,0)}(t) \le e^{Kt}K(\gamma_{(2,0)}(t)+\gamma_{(0,2)}(t)+\gamma_{(1,0)}(t)+\gamma_{(0,1)}(t)+\gamma_{(0,0)}(t))t. \qquad (3.46)$$

Продифференцируем уравнение (3.44) k раз (k=1,2) по переменным x, y. Применяя принцип максимума, получим неравенства

$$\gamma_{\alpha}(t) \le e^{Kt}K(\gamma_{(2,0)}(t)+\gamma_{(0,2)}(t)+\gamma_{(1,0)}(t)+\gamma_{(0,1)}(t)+\gamma_{(0,0)}(t))t. \qquad (3.47)$$

Сложим неравенства (3.46)-(3.47):

$$\sum_{|\alpha|\le 2}\gamma_\alpha(t) \le 6Ke^{Kt}(\sum_{|\alpha|\le 2}\gamma_\alpha(t))t.$$

Отсюда следует, что при некотором $\eta>0$, таком, что $6K\eta e^{K\eta}<1$, при всех $t\in[0,\eta]$ функции $\gamma_\alpha(t)\equiv 0$. Повторяя данные рассуждения при $t\in[\eta,2\eta]$, затем при $t\in[2\eta,3\eta]$, и так далее, через конечное число шагов получим, что $\gamma_\alpha(t)\equiv 0$ при всех $t\in[0,t^*]$. Следовательно, $z(t,x,y)\equiv 0$ и $u^1\equiv u^2$ в $\Pi_{[0,t^*]}$.

Подставим $z=0$ в (3.44), получим, что $g^*(t)f(t,x_0,y_0)=0$ при $t\in[0,t^*]$. Так как $|f(t,x_0,y_0)|>\frac{1}{K}$, то $g^*(t)=0, t\in[0,t^*]$.

Доказана единственность решения обратной задачи (3.1)-(3.4) в классе $Z_p(t^*)$.

Теорема 3.1 доказана.

3.3 Краевая задача

3.3.1 Переход от краевой задачи к задаче Коши

В предположении, что выполнены условия теоремы 3.2, продолжим [6, с. 59-61] функцию $u_0(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$ до периодической по x, y функции, нечетной по x и четной по y (см. (3.48), (3.49)). Продолжим функцию $f(t,x,y)$ на $[0,T]\times\mathbb{R}^2$ до периодической по x,y, нечетной по x четной по y функции (см. (3.50), (3.51)). Продолжения функций $u_0(x,y), f(t,x,y)$ принадлежат классам $C^7(\mathbb{R}^2)$ и $C^{0,7}([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ соответственно. В силу периодичности функций u_0, f по x с периодом $2l_1$ и по y с периодом $2l_2$ имеют место соотношения

$$u_0(-x,y) = -u_0(x,y), \quad u_0(l_1-x,y) = u_0(-l_1-x,y) = -u_0(l_1+x,y), \tag{3.48}$$

$$u_0(x,-y) = u_0(x,y), \quad u_0(x,l_2-y) = u_0(x,-l_2-y) = u_0(x,l_2+y), \tag{3.49}$$

$$f(t,-x,y) = -f(t,x,y), \quad f(t,l_1-x,y) = f(t,-l_1-x,y) = -f(t,l_1+x,y), \tag{3.50}$$

$$f(t,x,-y) = f(t,x,y), \quad f(t,x,l_2-y) = f(t,x,-l_2-y) = f(t,x,l_2+y). \tag{3.51}$$

Рассмотрим продолженные данным способом функции $u_0(x,y), f(t,x,y)$ в качестве входных данных для задачи Коши (3.6), (3.2)-(3.4).

3.3.2 Доказательство существования решения краевой задачи

По теореме 3.1, существует решение $u(t,x,y), g(t)$ задачи (3.6), (3.2)-(3.4) класса $Z_5(t^*)$. Расщепим данную задачу на два дробных шага:

$$\frac{1}{2}u_t^\tau = \mu_1(n\tau)u_{xx}^\tau + \mu_2(n\tau)u_{yy}^\tau + g(t)f(t,x,y), t\in\big(n\tau,(n+\frac{1}{2})\tau\big], \tag{3.52}$$

$$\frac{1}{2}u_t^\tau = b_1(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,y)u_x^\tau, \qquad t\in\big((n+\frac{1}{2})\tau,(n+1)\tau\big], \tag{3.53}$$

$$u_t^\tau(0,x,y) = u_0(x,y). \tag{3.54}$$

Покажем, что решение $u^\tau(t,x,y)$ расщепленной задачи (3.52)-(3.54) удовлетворяет условиям

$$u^\tau(t,x,y) + u^\tau(t,-x,y) = 0, \quad u^\tau(t,l_1+x,y) + u^\tau(t,l_1-x,y) = 0, \tag{3.55}$$

$$u^\tau(t,x,y) - u^\tau(t,x,-y) = 0, \quad u^\tau(t,x,l_2+y) - u^\tau(t,x,l_2-y) = 0. \tag{3.56}$$

На первом дробном шаге воспользуемся интегральным представлением решения уравнения (3.52) [34, с. 33]:

$$u^\tau(t,x,y)=\int\limits_0^t dz\int\limits_{\mathbb{R}^2} g(z)f(t,\xi,\eta)W(x,y,\xi,\eta,t,z)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^2} u_0(\xi,\eta)W(x,y,\xi,\eta,t,0)d\xi d\eta, \tag{3.57}$$

где

$$W(x,y,\xi,\eta,t,z)=\frac{1}{4\pi(t-z)\sqrt{\mu_1(n\tau)\mu_2(n\tau)}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\frac{1}{\mu_1(n\tau)}(x-\xi)^2+\frac{1}{\mu_2(n\tau)}(y-\eta)^2}{4(t-z)}\right). \tag{3.58}$$

Рассмотрим выражение

$$u^\tau(t,c+x,y)+u^\tau(t,c-x,y)=\int\limits_0^t dz\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{g(t)f(t,\xi,\eta)}{4\pi(t-z)\sqrt{\mu_1(n\tau)\mu_2(n\tau)}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4\mu_2(n\tau)(t-z)}\right)\left[\exp\left(-\frac{(c+x-\xi)^2}{4\mu_1(n\tau)(t-z)}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(c-x-\xi)^2}{4\mu_1(n\tau)(t-z)}\right)\right]d\xi d\eta+\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{u_0(\xi,\eta)}{4\pi t\sqrt{\mu_1(n\tau)\mu_2(n\tau)}}\exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4\mu_2(n\tau)t}\right)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{(c+x-\xi)^2}{4\mu_1(n\tau)t)}\right)+\exp\left(-\frac{(c-x-\xi)^2}{4\mu_1(n\tau)t}\right)\right]d\xi d\eta,$$

где c - некоторая вещественная постоянная. Заменой переменных $\xi'=c-\xi$, $\eta'=\eta$ в двойных интегралах приведем данное выражение к виду

$$u^\tau(t,c+x,y)+u^\tau(t,c-x,y)=-\int\limits_0^t dz\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{g(t)f(t,c-\xi',\eta')}{4\pi(t-z)\sqrt{\mu_1(n\tau)\mu_2(n\tau)}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(y-\eta')^2}{4\mu_2(n\tau)(t-z)}\right)\left[\exp\left(-\frac{(x+\xi')^2}{4\mu_1(n\tau)(t-z)}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x-\xi')^2}{4\mu_1(n\tau)(t-z)}\right)\right]d\xi' d\eta'-\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{u_0(c-\xi',\eta')}{4\pi t\sqrt{\mu_1(n\tau)\mu_2(n\tau)}}\exp\left(-\frac{(y-\eta')^2}{4\mu_2(n\tau)t}\right)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{(x+\xi')^2}{4\mu_1(n\tau)t)}\right)+\exp\left(-\frac{(x-\xi')^2}{4\mu_1(n\tau)t}\right)\right]d\xi' d\eta'. \tag{3.59}$$

Рассматривая выражение (3.59) при $c = 0$ и $c = l_1$, заметим, что подинтегральные функции в силу условий (3.48)–(3.51) меняют знак при замене ξ' на $-\xi'$. Так как интегралы по $\mathbb{R}^2$, входящие в (3.59), сходятся равномерно, то все выражение (3.59) равно нулю. Следовательно, условия (3.55) выполняются на первом дробном шаге. Аналогично, рассматривая выражение

$$u^\tau(t,x,c-y) - u^\tau(t,x,c+y) = -\int\limits_0^t dz \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{g(t)f(t,\xi,c-\eta)}{4\pi(t-z)\sqrt{\mu_1(n\tau)\mu_2(n\tau)}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_1(n\tau)(t-z)}\right)\left[\exp\left(-\frac{(y+\eta)^2}{4\mu_2(n\tau)(t-z)}\right) -\right.$$
$$\left.-\exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4\mu_2(n\tau)(t-z)}\right)\right] d\xi d\eta - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{u_0(\xi,c-\eta)}{4\pi t\sqrt{\mu_1(n\tau)\mu_2(n\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_1(n\tau)t}\right) \times$$
$$\times \left[\exp\left(-\frac{(y+\eta)^2}{4\mu_2(n\tau)t}\right) - \exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4\mu_2(n\tau)t}\right)\right] d\xi d\eta, \tag{3.60}$$

при $c = 0$ и $c = l_2$, получим выполнение условий (3.56) на первом дробном шаге.

На втором дробном шаге u^τ является решением задачи Коши для одномерного уравнения

$$\frac{1}{2}u^\tau_t(t,x,y) = b_1(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,y)u^\tau_x(t,x,y), \tag{3.61}$$
$$u^\tau(\frac{\tau}{2},x,y) = u^\tau\big|_{t=\frac{\tau}{2}}. \tag{3.62}$$

Для задачи (3.61), (3.62) выполнены условия Леммы 2.1, следовательно на втором дробном шаге выполнены условия (3.55). Рассмотрим функцию $\psi(t,x,y) = u^\tau(t,x,y) - u^\tau(t,x,-y)$. ψ является решением задачи

$$\frac{1}{2}\psi_t(t,x,y) = b_1(t)u^\tau(t-\frac{\tau}{2},x,y)\psi_x(t,x,y), \tag{3.63}$$
$$\psi(\frac{\tau}{2},x,y) = 0, \tag{3.64}$$

имеющей единственное нулевое решение (см. [21]). Аналогично проверяется второе из условий (3.56). Рассуждая аналогично на последующих целых шагах получим, что условия (3.55), (3.56) выполнены при всех $t \in [0,T]$.

Переходя в (3.55) к пределу при $x \to 0$, получим

$$u^\tau(t,0,y) = 0, \quad u^\tau(t,l_1,y) = 0; \tag{3.65}$$

дифференцируя (3.56) по y и переходя к пределу при $y \to 0$, получим

$$u^\tau_y(t,x,0) = 0, \quad u^\tau_y(t,x,l_2) = 0. \tag{3.66}$$

В силу (3.38) существует подпоследовательность $\{u^{\tau_k}\}$, сходящаяся при $\tau_k \to 0$ вместе с производными по пространственным переменным до пятого порядка включительно к решению задачи (3.1)-(3.4) в области $\Pi^{M_0}_{[0,t^*]} = \{(t,x,y), t \in [0,t^*], |x| < M_0, |y| < M_0\}$. Так как M_0 произвольно, для сходимости в Ω достаточно взять $M_0 > \max(l_1,l_2)$. Переходя в (3.65), (3.66) к пределу при $\tau_k \to 0$, получим краевые условия (3.8), (3.9).

Сделовательно, в области $Q_{t^*} = \{(t,x,y)|0 < t < t^*, (x,y) \in \Omega\}$ существует решение задачи (3.6)-(3.10) в классе W.

3.3.3 Доказательство единственности решения краевой задачи

Пусть $(u_1(t,x,y), g_1(t)), (u_2(t,x,y), g_2(t))$ - два решения задачи (3.6)-(3.10) в классе W. Обозначим $z = u_2 - u_1, g^* = g_2 - g_1$. Пара функций (z, g^*) является решением задачи

$$z_t(t,x,y) = \mu_1(t)z_{xx} + \mu_2(t)z_{yy} + b_1(t)(u_2 z_x + u_{1x}z) + g^*(t)f(t,x,y), \tag{3.67}$$

$$z(0,x,y) = 0, \qquad (x,y) \in [0,l_1] \times [0,l_2], \tag{3.68}$$

$$z(t,0,y) = z(t,l_1,y) = 0, \tag{3.69}$$

$$z_y(t,x,0) = z_y(t,x,l_2) = 0, \tag{3.70}$$

$$z(t,x_0,y_0) = 0. \tag{3.71}$$

Оценим норму функции $g^*(t)$. Подставляя $x = x_0, y = y_0$ в (3.67) и учитывая (3.71), получим

$$g^*(t) = -\frac{\mu_1 z_{xx}(t,x_0,y_0) + \mu_2 z_{yy}(t,x_0,y_0) + b_1(t)(u_2(t,x_0,y_0)z_x(t,x_0,y_0))}{f(t,x_0,y_0)},$$

откуда, в силу ограниченности входных данных,

$$|g^*(t)| \leq K_1 \cdot |z_{xx}(t, x_0, y_0) + z_{yy}(t, x_0, y_0) + z_x(t, x_0, y_0)| \leq$$

$$\leq K_1 \cdot ||z_{xx}(t, x, y) + z_{yy}(t, x, y) + z_x(t, x, y)||_{C(\Omega)}.$$

Здесь и далее, K_i - некоторые постоянные, зависящие от входных данных и не зависящие от z. Применяя теорему вложения ([38, с. 74]) при фиксированном t, получим

$$|g^*(t)| \leq K_2 \cdot ||z_{xx}(t, x, y) + z_{yy}(t, x, y) + z_x(t, x, y)||_{W_2^2(\Omega)}. \tag{3.72}$$

Возведем обе части неравенства (3.72) в квадрат. Учитывая определения нормы в пространстве $W_2^2(\Omega)$ [38, с. 61], запишем

$$g^{*2}(t) \leq K_2^2 \cdot \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} \left[D^\alpha \big(z_{xx}(t, x, y) + z_{yy}(t, x, y) + z_x(t, x, y)\big)\right]^2 dxdy. \tag{3.73}$$

Проинтегрировав неравенство (3.73) сначала по t в пределах от 0 до σ ($0 < \sigma \leq t^*$), затем по Ω, получим

$$||g^*||^2_{L_2(Q_\sigma)} \leq K_3^2 \cdot || \sum_{|\alpha| \leq 4} D^\alpha z||^2_{L_2(Q_\sigma)},$$

откуда

$$||g^*||_{L_2(Q_\sigma)} \leq K_3 \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq 4} ||D^\alpha z||^2_{L_2(Q_\sigma)}} \leq K_3 \sum_{|\alpha| \leq 4} ||D^\alpha z||_{L_2(Q_\sigma)}. \tag{3.74}$$

Продифференцируем уравнение (3.67) по пространственным переменным до четвертого порядка включительно, умножим результат дифференцирования на $e^{-\theta t} z_\alpha$ ($z_\alpha = D^\alpha z, |\alpha| \leq 4, \theta > 0$), и проинтегрируем полученное равенство по $Q_\sigma, 0 < \sigma \leq t^*$. Получим

$$\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha z_{\alpha t} dxdydt = \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} (\mu_1(t) z_\alpha z_{\alpha xx} + \mu_2(t) z_\alpha z_{\alpha yy}) dxdydt + \tag{3.75}$$

$$+\int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha \left(b_1 u_2 z_{\alpha x} + \sum_{|\alpha|\le 4} \beta_\alpha z_\alpha \right) dxdydt + \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha g^*(t) f_\alpha(t,x,y) dxdydt,$$

где $\beta_\alpha(t,x,y)$ - некоторые функции класса $C^{0,0}(Q_\sigma)$. Оценим интегралы, входящие в соотношение (3.75):

$$I_1 = \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha z_{\alpha t} dxdydt = \int\limits_{\Omega} e^{-\theta t} \frac{z_\alpha^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=\sigma} dxdy +$$

$$+\frac{\theta}{2} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha^2 dxdydt \ge \frac{\theta}{2} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha^2 dxdydt, \tag{3.76}$$

$$I_2 = \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \mu_1(t) z_\alpha z_{\alpha xx} dxdydt = \int\limits_0^\sigma \int\limits_0^{l_2} \Big(e^{-\theta t} \mu_1(t) z_\alpha z_{\alpha x}\Big|_{x=0}^{x=l_1} -$$

$$- \int\limits_0^{l_1} e^{-\theta t} \mu_1(t) z_{\alpha x}^2 dx \right) dydt \le 0, \tag{3.77}$$

$$I_3 = \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} \mu_2(t) z_\alpha z_{\alpha yy} dxdydt = \int\limits_0^\sigma \int\limits_0^{l_1} \Big(e^{-\theta t} \mu_2(t) z_\alpha z_{\alpha y}\Big|_{y=0}^{y=l_2} -$$

$$- \int\limits_0^{l_2} e^{-\theta t} \mu_2(t) z_{\alpha y}^2 dy \right) dxdt \le 0, \tag{3.78}$$

$$I_4 = \left| \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} b_1(t) u_2 z_\alpha z_{\alpha x} dxdydt \right| = \left| \int\limits_0^\sigma \int\limits_0^{l_2} \Big(e^{-\theta t} b_1(t) u_2 \frac{z_\alpha^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=l_1} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{l_1} e^{-\theta t} b_1(t) u_{2x} \frac{z_\alpha^2}{2} dx \right) dydt \Bigg| \le \left| K_4 \int\limits_{Q_\sigma} z_\alpha^2 dxdydt \right| = K_4 \cdot ||z_\alpha||^2_{L_2(Q_\sigma)}, \tag{3.79}$$

$$I_5 = \left| \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha \sum_{|\alpha|\le 4} \beta_\alpha z_\alpha dxdydt \right| \le \left| K_5 \left(z_\alpha, \sum_{|\alpha|\le 4} z_\alpha \right)_{L_2(Q_\sigma)} \right| \le K_5 \cdot ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)} \times$$

$$\times \sum_{|\alpha|\le 4} ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)}, \tag{3.80}$$

$$I_6 = \left| \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha g^*(t) f_\alpha(t,x,y) dxdydt \right| = \left| K_6 \left(z_\alpha, g^*(t) \right)_{L_2(Q_\sigma)} \right| \leq$$

$$\leq K_6 \cdot ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)} \cdot ||g^*||_{L_2(Q_\sigma)}. \qquad (3.81)$$

В силу (3.75) и (3.76)-(3.81) справедлива оценка

$$\frac{\theta}{2} \int\limits_{Q_\sigma} e^{-\theta t} z_\alpha^2 dxdydt \leq K_7 \cdot ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)} \cdot \sum_{|\alpha| \leq 4} ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)},$$

откуда

$$\frac{\theta e^{-\theta \sigma}}{2} ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)} \leq K_7 \cdot \sum_{|\alpha| \leq 4} ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)}. \qquad (3.82)$$

Сложим оценки (3.82) при всех α таких, что $|\alpha| \leq 4$.

$$\sum_{|\alpha| \leq 4} ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)} \leq \frac{2S_4 e^{\theta \sigma} K_7}{\theta} \sum_{|\alpha| \leq 4} ||z_\alpha||_{L_2(Q_\sigma)}, \qquad (3.83)$$

где S_4 - количество всех частных производных по пространственным переменным до 4-го порядка включительно. Выберем θ, σ так, чтобы выполнялось

$$\frac{2S_4 e^{\theta \sigma} K_7}{\theta} < 1. \qquad (3.84)$$

В силу (3.74), (3.83) и (3.84) значение $||z(t,x,y)||_{L_2(Q_\sigma)} = 0$, следовательно $z(t,x,y) \equiv 0$ при $0 < t < \sigma$.

Повторяя данные рассуждения при $t \in [\sigma, 2\sigma]$, затем при $t \in [2\sigma, 3\sigma]$, и так далее, через конечное число шагов получим, что $z(t,x,y) \equiv 0$ при всех $t \in [0, t^*]$. Следовательно, $u_1 \equiv u_2$ в Q_{t^*}.

Подставим $z = 0$ в (3.67), получим, что $g^*(t) f(t, x_0, y_0) = 0$ при $t \in [0, t^*]$. Так как $|f(t, x_0, y_0)| \neq 0$, то $g^*(t) = 0, t \in [0, t^*]$.

Следовательно, решение обратной задачи (3.6)-(3.10) единственно в классе W.

Теорема 3.2 доказана.

Глава 4. О разрешимости задачи Коши для системы нагруженных уравнений

В данной главе рассмотрена задача Коши для системы нагруженных параболических уравнений типа Бюргерса. Приведен пример обратной задачи математической физики, сводящейся к рассматриваемой задаче. Получены достаточные условия существования решения задачи в классе гладких ограниченных функций.

4.1 Постановка задачи и полученные результаты

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n\}$ рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \mu(t, \bar{\omega}(t))\Delta \bar{u} + \nu(\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} + \bar{f}(t, x, \bar{u}, \bar{\omega}(t)), \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$\bar{u}(0, x) = \bar{\varphi}(x), \tag{4.2}$$

где $\bar{u} = \big(u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x)\big)$ - неизвестные функции, $\mu(t, \bar{\omega}(t))$, $\bar{f} = \big(f_1, \ldots, f_n\big)$, $\bar{\varphi} = \big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big)$ - заданные функции, $\nu \in \mathbb{R}$ - заданный коэффициент,

$$(\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} = \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \ldots, u_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right).$$

Через $\bar{\omega}(t) = \big(u_i(t, x^j), D^\alpha u_i(t, x^j)\big); \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, r; \quad |\alpha| = 0, \ldots, p_0$ обозначена вектор-функция, компонентами которой являются следы неизвестных функций и их производных по пространственным переменным до порядка p_0 включительно, взятые в точках $x^1, \ldots, x^r \in \mathbb{R}^n$ [43]. $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdot \cdots \cdot \partial^{\alpha_n} x_n}$ - оператор дифференцирования по пространственным переменным.

Введем некоторые обозначения

$$U^i_\alpha(0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D^\alpha \varphi_i(x) \right|,$$

$$U^i_\alpha(t) = \sup_{\xi \in [0,t]} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D^\alpha u_i(\xi, x) \right|,$$

$$U^i(t) = \max_{|\alpha| \le p+2} U^i_\alpha(t), \quad U(t) = 1 + \sum_{i=1}^{n} U^i(t);$$

$$C^{q,s}(\Pi_{[0,T]}) = \left\{ \bar{u} = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x)) \left| \frac{\partial^j u_i}{\partial t^j}, D^\alpha u_i(t,x) \in C(\Pi_{[0,T]}); \right. \right.$$
$$\left. \left| \frac{\partial^j u_i}{\partial t^j} \right| \le K, |D^\alpha u_i(t,x)| \le K; \quad i = 1, \ldots, n; j \le q; |\alpha| \le s; K - const \right\} -$$

класс достаточно гладких ограниченных вектор-функций.

Пусть $p \ge \max(p_0, 2)$, функция $\bar{\varphi}$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_i(x) \in C^{p+2}(\mathbb{R}^n), \quad |D^\alpha \varphi_i(x)| \le K_1; \quad i = 1, \ldots, n; \quad |\alpha| \le p+2, \tag{4.3}$$

функции μ и $\bar{f}$ являются непрерывными по всем переменным и удовлетворяют соотношениям

$$\mu(t, \bar{\omega}(t)) \ge \mu_0 > 0, \quad \forall \bar{u}(t,x) \in C^{1,p+2}(\Pi_{[0,T]})$$

$$|D^\alpha f_i(t, x, \bar{u}, \bar{\omega})| \le K_2 \left(1 + U(t) + U(t)^2\right), \quad |\alpha| \le p+2. \tag{4.4}$$

Здесь и далее, K_i - некоторые постоянные, зависящие только от входных данных. В данной главе доказана

Теорема 4.1. *Пусть входные данные задачи (4.1), (4.2) удовлетворяют условиям (4.3), (4.4) при некотором p. Тогда существует решение задачи (4.1), (4.2) класса* $C^{1,p}(\Pi_{[0,T]})$.

4.2 Пример

Во второй главе была рассмотрена обратная задача определения пары функций $(u(t,x), g(t))$ в задаче Коши для уравнения типа Бюргерса

$$u_t(t,x) = \mu(t) u_{xx} + A(t) u u_x + B(t) u + C(t) + g(t) f(t,x), \tag{2.3}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

которая, с помощью переопределения $u(t,x_0)=\psi(t)$ неизвестной функции, сводится к задаче Коши для нагруженного уравнения

$$u_t(t,x)=\mu(t)u_{xx}+A(t)uu_x+B(t)u+F(t,u), \tag{4.5}$$

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad 0\le t\le T, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{4.6}$$

где

$$F(t,u)=\frac{f(t,x)}{f(t,x_0)}\left(\psi'(t)-B(t)\psi(t)-\mu(t)u_{xx}(t,x_0)-\right.$$
$$\left.-A(t)\psi(t)u_x(t,x_0)\right)-C(t)-$$

функционал от решения, содержащий следы неизвестной функции и её производных в точке. Задача (4.5)-(4.6) является частным случаем задачи (4.1)-(4.2) при $n=1$, $\bar u=u(t,x)$, $\bar f=F(t,u)$, $\bar\varphi=u_0(x)$.

Пусть входные данные задачи (4.5)-(4.6) при некотором целом $p\ge 2$ удовлетворяют условиям

$$u_0(x)\in C^{p+2}(\mathbb{R}), \quad \left|\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right|\le K_0-const, \quad k=0,\dots,p+2, \tag{4.7}$$

$$A(t),B(t)\in C([0,T]),\ \psi(t)\in C^1([0,T]),\ |f(t,x_0)|\ge\frac{1}{K_0},$$
$$|A(t)|+|B(t)|+|\psi(t)|+|\psi'(t)|\le K_0, \tag{4.8}$$
$$\mu(t)\ge\mu_0>0,\ \frac{\partial^k f}{\partial x^k}\in C([0,T]\times\mathbb{R}),\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right|\le K_0,\ k=0,\dots,p+2.$$

Условия (4.7) гарантируют выполнение условий (4.3) теоремы 4.1. При выполнении (4.8) легко проверяются соотношения (4.4). Для любой непрерывной ограниченной функции $u(t,x)$

$$u(t,x)\le\sup_{\xi\in[0,t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}u(\xi,x),$$

следовательно

$$\forall u(t,x)\in C^{1,p+2}([0,T]\times\mathbb{R})\ \forall k=0,\dots,p+2\ \left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}F(t,u)\right|\le$$

$$\le K_0^2\left(2K_0+K_0U_2^1(t)+K_0^2U_1^1(t)\right)\le K_2\left(1+U(t)\right),$$

где $K_2 = \max(2K_0^3, K_0^4)$. Следовательно, в данном частном случае применима теорема (4.1), в силу которой существует решение задачи (4.5)-(4.6) класса $C^{1,p}([0,T]\times\mathbb{R})$.

4.3 Доказательство разрешимости

Для доказательства существования решения рассматриваемой задачи воспользуемся методом слабой аппроксимации. Расщепим исходную задачу на три дробных шага и сделаем сдвиг по времени на ${}^{\tau}/_{3}$ в следах неизвестных функций и нелинейных членах. Получим систему

$$\frac{\partial u_i^\tau}{\partial t} = 3\mu(t, \bar\omega(t -^\tau /_3))\Delta u_i^\tau, \quad t \in \left(m\tau, \left(m +^1 /_3\right)\tau\right], \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial u_i^\tau}{\partial t} = 3\nu(\bar u^\tau(t -^\tau /_3)\cdot\nabla)u_i^\tau, \quad t \in \left(\left(m +^1 /_3\right)\tau, \left(m +^2 /_3\right)\tau\right], \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial u_i^\tau}{\partial t} = 3f_i(t -^\tau /_3, x, \bar u^\tau(t -^\tau /_3, x), \bar\omega(t -^\tau /_3)), \tag{4.11}$$

$$t \in \left(\left(m +^2 /_3\right)\tau, \left(m+1\right)\tau\right],$$

$$u_i^\tau(t,x)\big|_{t\le 0} = \varphi_i(x); \quad i = 1,\ldots,n; \quad m = 0,\ldots,M-1; \quad M\tau = T. \tag{4.12}$$

Введем обозначения:

$$U_\alpha^{i\tau}(t) = \sup_{\xi\in[0,t]}\sup_{x\in\mathbb{R}_n}\left|D^\alpha u_i^\tau(\xi,x)\right|,$$

$$U^{i\tau}(t) = \max_{|\alpha|\le p+2} U_\alpha^{i\tau}(t), \quad U^\tau(t) = 1 + \sum_{i=1}^n U^{i\tau}(t).$$

Рассмотрим нулевой целый шаг ($m = 0$). На первом дробном шаге система распадается на n задач Коши (4.9), (4.12) для параболических уравнений, к которым применим принцип максимума. Дифференцируя (4.9), (4.12) по пространственным переменным до (p+2) раз включительно, получим

$$U_\alpha^{i\tau}(t) \le U_\alpha^i(0), \quad U^\tau(t) \le U(0), \quad |\alpha| \le p+2, \quad t \in (0,^\tau /_3]. \tag{4.13}$$

На втором дробном шаге система (4.10), (4.12) представляет собой n линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_i^\tau}{\partial t} = 3\nu u_1^\tau(t -^\tau /_3, x)\frac{\partial u_1^\tau}{\partial x_1} + \cdots + 3\nu u_n^\tau(t -^\tau /_3, x)\frac{\partial u_1^\tau}{\partial x_n},$$
$$u_i^\tau(0, x) = u_i^\tau(t, x)|_{t=\frac{\tau}{3}},$$

для которых имеет место теорема 3.3, в силу которой

$$|D^\alpha u_i^\tau(t, x)| \le U^{i\tau}(^\tau/_3)e^{\tau K_3 U^\tau(^\tau/_3)}, \quad |\alpha| \le p + 2, \quad t \in (^\tau/_3, ^{2\tau}/_3],$$

откуда

$$U^\tau(t) \le U^\tau(^\tau/_3)e^{\tau K_3 U^\tau(^\tau/_3)}, \quad t \in (^\tau/_3, ^{2\tau}/_3]. \tag{4.14}$$

На третьем дробном шаге $u_i^\tau(t, x)$ являются решениями задач Коши (4.11), (4.12) для обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых - известные функции. Следовательно, $u_i^\tau(t, x)$ и их производные по пространственным переменным можно выписать в явном виде

$$D^\alpha u_i^\tau(t, x) = D^\alpha u_i^\tau(\frac{2\tau}{3}, x) + \int\limits_{^{2\tau}/_3}^{t} 3D^\alpha f_i\left(\xi - \frac{\tau}{3}, x, \bar{u}^\tau(\xi - \frac{\tau}{3}, x), \bar{\omega}(\xi - \frac{\tau}{3})\right) d\xi,$$
$$|\alpha| \le p + 2, \quad t \in (^{2\tau}/_3, \tau],$$

Возьмём модуль от обеих частей равенства. В силу (4.4) и свойств модуля

$$|D^\alpha u_i^\tau(t, x)| \le \left|D^\alpha u_i^\tau(\frac{2\tau}{3}, x)\right| + \int\limits_{^{2\tau}/_3}^{t} 3K_2\left(1 + U^\tau(\xi -^\tau /_3) + U^\tau(\xi -^\tau /_3)^2\right) d\xi.$$

Так как $^{2\tau}/_3 \le \xi \le t \le \tau$, а функция $U(t)$ является неубывающей, имеет место неравенство $U(\xi -^\tau /_3) \le U(^{2\tau}/_3)$:

$$|D^\alpha u_i^\tau(t, x)| \le \left|D^\alpha u_i^\tau(^{2\tau}/_3, x)\right| + \int\limits_{^{2\tau}/_3}^{t} 3K_2\left(1 + U^\tau(^{2\tau}/_3) + U^\tau(^{2\tau}/_3)^2\right) d\xi.$$

Подинтегральную функцию, не зависящую от переменной интегрирования, можно вынести из-под знака интеграла. Так как $U^\tau(t) \ge 1$, имеет место неравенство

$U^\tau({}^{2\tau}/_3)^2 \geq U^\tau({}^{2\tau}/_3) \geq 1$. Следовательно,

$$|D^\alpha u_i^\tau(t,x)| \leq \left|D^\alpha u_i^\tau({}^{2\tau}/_3, x)\right| + 3\tau K_2 U^\tau({}^{2\tau}/_3)^2.$$

Возьмем от обеих частей предыдущего неравенства сначала sup по $x \in \mathbb{R}^n$, затем по $[0,t]$:

$$U_\alpha^{i\tau}(t) \leq U_\alpha^{i\tau}({}^{2\tau}/_3) + 3\tau K_2 U^\tau({}^{2\tau}/_3)^2.$$

В данном неравенстве возьмем от обеих частей max по всем α таким, что $|\alpha| \leq p+2$, затем сложим при $i = 1, \dots, n$:

$$U^\tau(t) \leq U^\tau({}^{2\tau}/_3) + 3n\tau K_2 U^\tau({}^{2\tau}/_3)^2.$$

Обозначая $K_4 = 3nK_2$, вынесем $U^\tau({}^{2\tau}/_3)$ за скобки:

$$U^\tau(t) \leq U^\tau({}^{2\tau}/_3) \cdot \left(1 + \tau K_4 U^\tau({}^{2\tau}/_3)\right).$$

В силу неравенства $1 + x \leq e^x$

$$U^\tau(t) \leq U^\tau({}^{2\tau}/_3) e^{\tau K_4 U^\tau({}^{2\tau}/_3)}, \quad t \in ({}^{2\tau}/_3, \tau]. \tag{4.15}$$

Докажем, что в некотором малом временном интервале $0 \leq t \leq t^*$ имеет место равномерная по τ оценка производных $\{D^\alpha u_i^\tau\}, |\alpha| \leq p+2$. Предположим, что положительная постоянная t^* удовлетворяет неравенству

$$e^{6t^* K_5 U(0)} \leq 2, \qquad K_5 = \max(K_3, K_4). \tag{4.16}$$

Здесь и далее будем считать τ достаточно малыми ($\tau \ll t^*$), и такими, что для некоторых целых $M' = M'(\tau)$ выполнено равенство $M'\tau = t^*$. В силу (4.16)

$$e^{(2i-1)\cdot 3\tau K_5 U(0)} \leq 2, i = 1, \dots, M'. \tag{4.17}$$

Используя (4.17), из соотношений (4.13)-(4.15) получим оценку, справедливую при $t \in [0, \tau]$

$$U^\tau(t) \leq U(0) e^{3\tau K_5 U(0)}. \tag{4.18}$$

Докажем неравенство

$$U^\tau(i\tau) \le U(0)\exp((2i-1)3\tau K_5 U(0)) = K_6, \quad i = 1, \dots, M', \tag{4.19}$$

методом математической индукции. При $i = 1$ неравенство верно в силу (4.18). Предположим, что при некотором $i < M'$ неравенство (4.19) верно, тогда, повторяя все рассуждения, проведённые на нулевом шаге, получим

$$U^\tau((i+1)\tau) \le U^\tau(i\tau)e^{3\tau K_5 U^\tau(i\tau)} \le$$

$$\le U(0)\exp((2i-1)\cdot 3\tau K_5 U(0))\exp(3\tau K_5 U(0)e^{(2i-1)3\tau K_5 U(0)}) \le$$

$$\le U(0)\exp((2i+1)\cdot 3\tau K_5 U(0)) = U(0)\exp((2(i+1)-1)\cdot 3\tau K_5 U(0)),$$

следовательно, неравенство (4.19) верно и для $i+1$. Отсюда, в силу принципа математической индукии, оно верно при всех $i < M'$.

В силу монотонности функции $U^\tau(t)$ и неравенства (4.19)

$$U^\tau(t) \le U^\tau(M'\tau) = K_6 - const, \quad t \in [0, t^*].$$

Отсюда следует, что равномерно по τ

$$|D^\alpha u_i^\tau(t,x)| \le K_6, (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, |\alpha| \le p+2, \tag{4.20}$$

где $\Pi_{[0,t^*]} = \{(t,x)|0 \le t \le t^*, x \in \mathbb{R}^n\}$.

Из (4.20) следует (в силу уравнений (4.9)-(4.11)) равномерная по τ ограниченность производных

$$\frac{\partial}{\partial t}D^\alpha \bar{u}^\tau(t,x), \frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha \bar{u}^\tau(t,x), \quad (t,x) \in \Pi^{M_0}_{[0,t^*]}, \quad |\alpha| \le p, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\Pi^{M_0}_{[0,t^*]} = \{(t,x), t \in [0,t^*], |x_i| \le M_0\}$, откуда следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность в $\Pi^{M_0}_{[0,t^*]}$ (при любом фиксированном $M_0 > 0$) семейств функций $\{D^\alpha \bar{u}^\tau\}, |\alpha| \le p,$.

По теореме Арцела, существует подпоследовательность $\bar{u}^{\tau_k}$, сходящаяся равномерно в $\Pi^{M_0}_{[0,t^*]}$ вместе со своими производными по пространственным переменным до порядка p включительно к некоторой функции $\bar{u}(t,x)$. По теореме сходимости метода слабой аппроксимации [6], функция $\bar{u}(t,x)=\lim_{k\to\infty}\bar{u}^{\tau_k}(t,x)$ принадлежащая классу $C^{1,p}(\Pi_{[0,t^*]}^{M_0})$ удовлетворяет уравнению (4.1) и удовлетворяет условию (4.2) при $|x_i|\le M_0$, при этом

$$\|D^\alpha\bar{u}^\tau - D^\alpha\bar{u}\|_{C(\Pi_{[0,t^*]}^{M_0})}\to 0, \quad |\alpha|\le p$$

при $\tau\to 0$. Так как M_0 произвольно, функция u является решением класса $C^{1,p}(\Pi_{[0,t^*]})$ задачи (4.1), (4.2). Теорема 4.1 доказана.

Глава 5. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с параметром

В настоящей главе рассмотрена обратная задача для параболического уравнения с параметром [49], [50], [3], в которой размерность параметра совпадает с размерностью пространства. Данная задача является задачей управления. Её решение позволяет найти функцию источника таким образом, чтобы искомая физическая величина (температура, концентрация, и.т.д.) принимала заданные значения в некоторой фиксированной ограниченной области.

Задачи, содержащие параметры, встречаются при решении различных задач: при исследовании краевых задач для уравнений и систем составного типа [9], [11], [12], [18], [29], при решении обратных задач [5], [8], [13], при решении задач методом фиктивных областей [16], [25], [32], при исследовании краевых задач для систем уравнений, содержащих малые параметры [10], [33].

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \lambda \Delta_x u(t,x,y) + \mu(t,y) f(t,x,y), \tag{5.1}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \tag{5.2}$$

$$u(t,x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{5.3}$$

$$u(t,x,y)|_{x=y} = \phi(t,y),\ (t,x,y) \in Q_T, \tag{5.4}$$

где

$$Q_T = \{(t,x,y) | t \in [0,T],\ x \in \Omega,\ y \in D\},$$

$T > 0$, Ω – прямоугольный параллелепипед $[0,l_1] \times [0,l_2] \times \cdots \times [0,l_n]$ в $\mathbb{R}^n$, D – компактное подмножество Ω с достаточно гладкой границей ∂D, $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $u(t,x,y)$ и $\mu(t,y)$ – неизвестные функции. Функции $f(t,x,y)$, $u_0(x,y)$ заданы.

Введем обозначения:

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} -$$

оператор дифференцирования по пространственным переменным $x_1 \dots x_n$, α – мультииндекс ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$);

$$D_y^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial^{\beta_1} y_1 \dots \partial^{\beta_n} y_n} -$$

оператор дифференцирования по параметру y;

$$K_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{N} -$$

неотрицательные постоянные, зависящие только от входных данных задачи (5.1)-(5.4);

$$Z_p(\Omega) = \{(u(t,x,y), \mu(t,y)) \, | D_x^\alpha u(t,x,y) \in C([0,T] \times \Omega \times D),$$

$$|D_x^\alpha u(t,x,y)| \leq K, \ \mu(t,y) \in C([0,T] \times D), \ |\alpha| \leq p-2\}.$$

Пусть выполняются условия:

$$\begin{aligned} &|f(t,y,y)| \geq K_1 > 0, \quad y \in D, \\ &\left| D_x^\alpha D_y^\beta u_0(x,y) \right| \leq K_2, \quad \left| D_x^\alpha D_y^\beta \frac{f(t,x,y)}{f(t,y,y)} \right| \leq K_3, \quad \left| D_y^\beta \phi_t(t,y) \right| \leq K_4, \\ &|\alpha| \leq p, \quad |\beta| \leq 1, (t,x,y) \in Q_T, \quad p \geq 6; \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u_0(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)|_{x_i=0, x_i=l_i} = 0, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f(t, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y)|_{x_i=0, x_i=l_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ k = 0, 2, 4, 6. \tag{5.7}$$

В настоящей главе получены следующие результаты:

Теорема 5.1. *Пусть входные данные задачи (5.1)–(5.4) удовлетворяют условиям (5.5)–(5.7) при некотором значении p. Тогда задача (5.1)–(5.4) имеет решение класса $Z_p(\Omega)$.*

Теорема 5.2. *Решение задачи (5.1)–(5.4) класса* $Z_p(\Omega)$ *единственно.*

Теорема 5.3. *Рассмотрим задачу Коши (5.1), (5.2), (5.4) в полосе*

$$E = \{(t, x, y)|t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n, y \in D\}.$$

а) Задача (5.1), (5.2), (5.4) имеет решение класса $Z_p(\mathbb{R}^n)$*, если условия (5.5) выполняются в* E*.*

б) Решение задачи (5.1), (5.2), (5.4) единственно в классе $Z_p(\mathbb{R}^n)$*.*

5.2 Переход от краевой задачи к задаче Коши

Доказательство теоремы 5.1 основано на приведении краевой задачи к задаче Коши. Построим продолжение функций u_0, f с области Q_T на E за n шагов. На первом шаге продолжим функции u_0, f с $[0, l_1]$ на $\mathbb{R}$ по переменной x_1:

$$u_0(-x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = -u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, y),$$

$$f(t, -x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = -f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y), \quad x_1 \in [0, l_1];$$

$$u_0(x_1 + 2kl_1, x_2, \ldots, x_n, y) = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, y),$$

$$f(t, x_1 + 2kl_1, x_2, \ldots, x_n, y) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_1 \in [0, l_1].$$

На i-м шаге $(2 \le i \le n)$ продолжим функции u_0, f с $[0, l_i]$ на $\mathbb{R}$ по переменной x_i аналогичным образом. Обозначим продолжения функций u_0, f как u_0^*, f^* соответственно.

В силу условий (5.5), (5.6), функции u_0^*, f^* имеют непрерывные частные производные по переменным x_1, ..., x_n до порядка p включительно на всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Заметим, что функции u_0^*, f^* являются нечётными и периодическими по переменным x_i с периодом $2l_i$. Следовательно, выполняются условия:

$$u_0^*(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,y)+u_0^*(x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_n,y)=0, \tag{5.8}$$

$$u_0^*(x_1,\ldots,l_i+x_i,\ldots,x_n,y)+u_0^*(x_1,\ldots,l_i-x_i,\ldots,x_n,y)=0, \tag{5.9}$$

$$f^*(t,x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,y)+f^*(t,x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_n,y)=0, \tag{5.10}$$

$$f^*(t,x_1,\ldots,l_i+x_i,\ldots,x_n,y)+f^*(t,x_1,\ldots,l_i-x_i,\ldots,x_n,y)=0. \tag{5.11}$$

5.3 Доказательство существования решения задачи Коши

Рассмотрим функции u_0^*, f^* в качестве входных данных задачи Коши

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t}=\lambda\Delta_x u(t,x,y)+\mu(t,y)f^*(t,x,y), \tag{5.12}$$

$$u(0,x,y)=u_0^*(x,y), \tag{5.13}$$

$$u(t,x,y)|_{x=y}=\phi(t,y), \qquad t\in[0,T], \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad y\in D\subset\mathbb{R}^n. \tag{5.14}$$

Подставляя $x=y$, $y\in D$ в (5.12), выразим $\mu(t,y)$:

$$\mu(t,y)=\frac{1}{f^*(t,y,y)}\left(\phi_t(t,y)-\lambda\Delta_x u(t,y,y)\right), \qquad y\in D. \tag{5.15}$$

Используя (5.15), приведем задачу (5.12)–(5.14) к вспомогательной задачи Коши для нагруженного уравнения

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t}=\lambda\Delta_x u(t,x,y)+\frac{1}{f^*(t,y,y)}\left(\phi_t(t,y)-\lambda\Delta_x u(t,y,y)\right)f^*(t,x,y), \tag{5.16}$$

$$u(0,x,y)=u_0^*(x,y), \quad t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in D. \tag{5.17}$$

Существование решения задачи (5.16)–(5.17) доказывается методом слабой аппроксимации. Расщепим задачу на два дробных шага и сделаем сдвиг по временной переменной на ${}^{\tau}/_{2}$ в следах неизвестной функции:

$$\frac{\partial u^{\tau}(t,x,y)}{\partial t}=2\lambda\Delta_x u^{\tau}(t,x,y),\quad t\in(k\tau,(k+{}^{1}/_{2})\tau], \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial u^{\tau}(t,x,y)}{\partial t}=2\frac{f^{*}(t,x,y)}{f^{*}(t,y,y)}\left(\phi_t(t,y)-\lambda\Delta_x u^{\tau}(t-{}^{\tau}/_{2},y,y)\right),\quad t\in((k+{}^{1}/_{2})\tau,(k+1)\tau] \tag{5.19}$$

$$u^{\tau}(0,x,y)=u_0^{*}(x,y),\qquad k=0,\ldots,N-1,\quad N\tau=T,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in D. \tag{5.20}$$

Расщепленная задача (5.18)–(5.20) представляет собой n-мерную задачу Коши для параболического уравнения (5.18), (5.20) на первом дробном шаге, и задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (5.19), (5.20) на втором дробном шаге. Заметим, что входные данные расщепленной задачи удовлетворяют условиям (5.5).

Введем обозначения:

$$U^{\tau}_{\alpha,\beta}(t)=\sup_{\xi\in[0,t]}\sup_{x\in\mathbb{R}^n,y\in D}\left|D_x^{\alpha}D_y^{\beta}u^{\tau}(\xi,x,y)\right|,\ U^{\tau}(t)=\sum_{|\alpha|\le p}\sum_{|\beta|\le 1}U^{\tau}_{\alpha,\beta}(t), \tag{5.21}$$

$$\tilde{U}^{\tau}(t)=\sum_{|\alpha|\le p}U^{\tau}_{\alpha,0}(t)-$$

неотрицательные возрастающие функции, которые ограничивают u^{τ} их производные.

Рассмотрим нулевой целый шаг ($k=0$). На первом дробном шаге продифференцируем (5.18), (5.20) до p раз включительно по переменным x_i и до q раз включительно по переменным y_i, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}D_x^{\alpha}D_y^{\beta}u^{\tau}(t,x,y)=2\lambda\Delta_x D_x^{\alpha}D_y^{\beta}u^{\tau}(t,x,y),\ \ t\in(0,{}^{\tau}/_{2}],x\in\mathbb{R}^n,y\in D.$$

Для данного уравнением можно применить принцип максимума:

$$\left|D_x^{\alpha}D_y^{\beta}u^{\tau}(t,x,y)\right|\le K_2,\ t\in[0,{}^{\tau}/_{2}]. \tag{5.22}$$

Решение задачи (5.18), (5.20) на втором дробном шаге ($t\in[{}^{\tau}/_{2},\tau]$) можно выразить в явном виде:

$$u^\tau(t,x,y) = u^\tau(^\tau/_2,x,y) + 2\int\limits_{^\tau/_2}^{t} \frac{f(\xi,x,y)}{f(\xi,y,y)}\left(\phi_t(\xi,y) - \lambda\Delta_x u^\tau(\xi -^\tau/_2,y,y)\right)d\xi.$$

Дифференцируя данное равенство по переменным x_i до p раз включительно, получим оценки на частные производные:

$$|D_x^\alpha u^\tau(t,x,y)| \le |D_x^\alpha u^\tau(^\tau/_2,x,y)| + K_5\tau\left(1 + \sup_{\xi\in[^\tau/_2,\tau]}|\Delta_x u^\tau(\xi -^\tau/_2,y,y)|\right). \tag{5.23}$$

Используя обозначения (5.21), (5.22)–(5.23) можно записать в виде:

$U^\tau_{\alpha,0}(t) \le U^\tau_{\alpha,0}(0), t\in[0,^\tau/_2]$,

$$U^\tau_{\alpha,0}(t) \le U^\tau_{\alpha,0}(0) + K_5\tau\left(1+\sum_{|\alpha|=2}U^\tau_{\alpha,0}(0)\right) \le U^\tau_{\alpha,0}(0) + K_5\tau\left(1+\tilde U^\tau(0)\right), t\in[0,\tau].$$

Повторим данные рассуждения на первом и последующих целых шагах. На первом целом шаге ($k = 1$) оценки u^τ и их частных производных имеют следующий вид:

$$U^\tau_{\alpha,0}(t) \le U^\tau_{\alpha,0}(0) + K_5\tau\left(1+\tilde U^\tau(0)\right), t\in[\tau,^{3\tau}/_2],$$

на первом дробном шаге, и

$$|D_x^\alpha u^\tau(t,x,y)| \le \left|D_x^\alpha u^\tau(^{3\tau}/_2,x,y)\right| + K_5\tau\left(1 + \sup_{\xi\in[^{3\tau}/_2,2\tau]}|\Delta_x u^\tau(\xi -^\tau/_2,y,y)|\right),$$

$$t\in\left[^{3\tau}/_2,2\tau\right],$$

на втором, таким образом

$$U^\tau_{\alpha,0}(t) \le U^\tau_{\alpha,0}(0) + K_5\tau\left(1+\tilde U^\tau(0) + 1 + \tilde U^\tau(\tau)\right), t\in[\tau,2\tau].$$

Повторяя данные рассуждения k раз, получим

$$U^\tau_{\alpha,0}(t) \le U^\tau_{\alpha,0}(0) + K_5\tau\sum_{j=1}^{k}\left(1+\tilde U^\tau((j-1)\tau)\right),\ t\in[0,k\tau],\ k=1,\dots,N. \tag{5.24}$$

Складывая неравенства (5.24) для всех α таких, что $|\alpha| \le p$, получим

$$\tilde{U}^\tau(t) \le \tilde{U}^\tau(0) + K_6\tau \sum_{j=1}^{k} \Big(1 + \tilde{U}^\tau((j-1)\tau)\Big) \le \tag{5.25}$$

$$\le \Big(1 + \tilde{U}^\tau(0)\Big)(1 + K_6\tau)^k - 1 \le K_7, \quad t \in [0, k\tau], \quad k = 1, \ldots, N. \tag{5.26}$$

Так как

$$(1 + K_6\tau)^k \le (1 + K_6\tau)^N \le \left(e^{K_6\tau}\right)^N = e^{K_6 N\tau} = e^{K_6 T},$$

K_7 не зависит от τ, таким образом (5.26) – равномерная по τ оценка.

Рассмотрим частные производные первого порядка $\frac{\partial}{\partial y_i} D_x^\alpha u^\tau$. На первых дробных шагах они оцениваются (5.22) при $|\beta| = 1$. На вторых дробных шагах продифференцируем решение задачи (5.19), (5.20) сначала по переменным x_i, затем по переменным y_i (рассматривая $u^\tau(\xi, y, y)$ как сложную функцию от y):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} D_x^\alpha u^\tau(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial y_i} D_x^\alpha u^\tau(^\tau/_2, x, y) + \int\limits_{^\tau/_2}^{t} \left(2 D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{f(\xi, x, y)}{f(\xi, y, y)}\right) \times$$

$$\times \left(\phi_t(\xi, y) - \lambda \Delta_x u^\tau(\xi -^\tau/_2, y, y)\right) d\xi + \int\limits_{^\tau/_2}^{t} \left(2 D_x^\alpha \frac{f(\xi, x, y)}{f(\xi, y, y)}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \phi_t(\xi, y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_x u^\tau(\xi -^\tau/_2, y, y) - \lambda \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta_x u^\tau(\xi -^\tau/_2, y, y)\right) d\xi.$$

Так как все производные $D_x^\alpha u^\tau$ оцениваются (5.26), верны следующие неравенства:

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i} D_x^\alpha u^\tau(t, x, y)\right| \le \left|\frac{\partial}{\partial y_i} D_x^\alpha u^\tau(^\tau/_2, x, y)\right| + \tau(K_3 \cdot (K_4 + \lambda K_7) + K_3 \cdot (K_4 + \lambda K_7 +$$

$$+ \lambda \sup_{\xi \in [0, ^\tau/_2]} \left|\frac{\partial}{\partial y_i} \Delta_x u^\tau(\xi -^\tau/_2, y, y)\right|)),$$

$$U^\tau_{\alpha,\beta}(t) \le U^\tau_{\alpha,\beta}(0) + K_8\tau \left(1 + \sum_{|\alpha|=2} U^\tau_{\alpha,\beta}(0)\right) \le U^\tau_{\alpha,\beta}(0) + K_8\tau\left(1 + U^\tau(0)\right), t \in [0, \tau]. \tag{5.27}$$

Аналогично доказательству (5.25), повторим данные рассуждения на всех целых шагах:

$$U^{\tau}_{\alpha,\beta}(t) \le U^{\tau}_{\alpha,\beta}(0) + K_8\tau \sum_{j=1}^{k} \left(1 + U^{\tau}((j-1)\tau)\right), \ t \in [0, k\tau], \ k = 1, \ldots, N, \tag{5.28}$$

затем просуммируем (5.28) для всех α, β, $|\alpha| \le p$, $|\beta| = 1$:

$$U^{\tau}(t) \le U^{\tau}(0) + K_9\tau \sum_{j=1}^{k} \left(1 + U^{\tau}((j-1)\tau)\right) \le \tag{5.29}$$

$$\le \left(1 + U^{\tau}(0)\right)\left(1 + K_9\tau\right)^k - 1 \le K_{10}, \quad t \in [0, k\tau], \quad k = 1, \ldots, N.$$

Неравенства (5.29) гарантируют равномерную по τ ограниченность производных

$$D^{\alpha}_x D^{\beta}_y u^{\tau}(t, x, y).$$

Продифференцируем (5.18), (5.19) по переменным x_i до $p-2$ раз включительно. Так как правые части уравнений – ограниченные функции, левые части

$$\frac{\partial}{\partial t} D^{\alpha}_x u^{\tau}(t, x, y), \ |\alpha| \le p - 2,$$

также ограничены.

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} D^{\alpha}_x u^{\tau}(t, x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\alpha}_x u^{\tau}(t, x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y_i} D^{\alpha}_x u^{\tau}(t, x, y), \quad |\alpha| \le p - 2 \tag{5.30}$$

равномерно по τ ограничены на E. Отсюда следует равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность множеств функций $\{D^{\alpha}_x u^{\tau}\}$, $|\alpha| \le p - 2$ на компакте

$$\Pi_M = \{(t, x, y) | t \in [0, T], \ |x_i| \le M, \ y \in D, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

По теореме Арцела, существует подпоследовательность $u^{\tau_k}(t, x, y)$ последовательности $u^{\tau}(t, x, y)$, которая сходится к некоторой функции $u(t, x, y)$ вместе с производными $\{D_x^\alpha u^\tau\}$, $|\alpha| \le p-2$. По теореме сходимости метода слабой аппроксимации, функция $u(t,x,y)$ является решением задачи (5.16)–(5.17) на Π_M, и

$$\|D_x^\alpha u^\tau - D_x^\alpha u\|_{C(\Pi_M)} \to 0, \quad |\alpha| \le p-2$$

при $\tau \to 0$. Так как M – произвольная постоянная, функция $u(t,x,y)$ – решение задачи (5.16)–(5.17) на всей области E.

Докажем, что пара функций $(u(t,x,y),\ \mu(t,y))$ (где $\mu(t,y)$ определяется равенством (5.15)) является решением задачи (5.12)–(5.14). Так как $u(t,x,y)$ – решение задачи (5.16), (5.17), подстановка $(u(t,x,y),\ \mu(t,y))$ в (5.12), (5.13) приводит к верному равенству (5.16), (5.17). Подставляя $x=y$, $y \in D$ в (5.16), (5.17) получим, что $u(t,x,y)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial u(t,y,y)}{\partial t} = \phi_t(t,y),\ y \in D.$$

Предположим, что $\phi(t,y)$ согласовано с начальными данными:

$$u_0(y,y) = \phi(0,y),\ y \in D.$$

При данном предположении $\psi(t) = u(t,y,y) - \phi(t,y)$ является решением задачи Коши

$$\psi'(t) = 0,$$
$$\psi(0) = 0.$$

Таким образом, $\psi(t) \equiv 0$, и условие (5.14) выполнено.

Замечание. *Рассмотрим в качестве u_0^*, f^* произвольные функции, удовлетворяющие условиям (5.5) в E. Повторяя вышеизложенные рассуждения, получим доказательство Теоремы 5.3а.*

5.4 Доказательство выполнения краевых условий

Докажем, что полученное решение $u(t,x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (5.3).

Покажем, что решение u^τ расщепленной задачи (5.18)–(5.20) удовлетворяет условиям

$$u^\tau(t, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y) + u^\tau(t, x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n, y) = 0, \tag{5.31}$$

$$u^\tau(t, x_1, \dots, l_i + x_i, \dots, x_n, y) + u^\tau(t, x_1, \dots, l_i - x_i, \dots, x_n, y) = 0 \tag{5.32}$$

для всех $\tau > 0$. При $t = 0$ (5.31), (5.32) верны в силу (5.8), (5.9). На первом дробном шаге u^τ является решением задачи Коши (5.18), (5.20), которое можно выписать в явном виде (см. [34]):

$$u^\tau(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, y) W(x, \xi, t, 0) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n,$$

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t, z) = \frac{1}{4\pi(t-z)\sqrt{(2\lambda)^n}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\xi_i)^2}{2\lambda}}{4(t-z)}\right).$$

Подставим данное выражение в (5.31) и (5.32):

$$\begin{gathered}
u^\tau(t, x_1, \dots, c_i + x_i, \dots, x_n, y) + u^\tau(t, x_1, \dots, c_i - x_i, \dots, x_n, y) = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{u_0^*(\xi_1, \dots, \xi_n, y)}{4\pi t (2\lambda)^{n/2}} \left[\exp\left(-\frac{(c_i + x_i - \xi_i)^2 + \sum_{j\neq i}(x_j - \xi_j)^2}{8\lambda t}\right) + \right. \\
\left. + \exp\left(-\frac{(c_i - x_i - \xi_i)^2 + \sum_{j\neq i}(x_j - \xi_j)^2}{8\lambda t}\right)\right] d\xi_1 \dots d\xi_n = \\
= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{u_0^*(\xi_1, \dots, c_i - \xi_i, \dots, \xi_n, y)}{4\pi t (2\lambda)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\sum_{j\neq i}(x_j - \xi_j)^2}{8\lambda t}\right) \times \\
\times \left[\exp\left(-\frac{(x_i + \xi_i)^2}{8\lambda t}\right) + \exp\left(-\frac{(x_i - \xi_i)^2}{8\lambda t}\right)\right] d\xi_1 \dots d\xi_n, \\
i = 1, \dots, n,\ c_i = 0, l_1,\ t \in (0, {}^\tau/_2].
\end{gathered}$$

Заметим, что все подинтегральные выражения является нечетными по ξ_i функциями, поэтому интегралы равны нулю.

На втором дробном шаге, u^τ имеет вид:

$$u^\tau(t, x, y) = u^\tau({}^\tau/_2, x, y) + 2\int\limits_{{}^\tau/_2}^{t} \frac{f(\xi, x, y)}{f(\xi, y, y)} \left(\phi_t(\xi, y) - \lambda \Delta_x u^\tau(\xi - {}^\tau/_2, y, y)\right) d\xi, t \in [{}^\tau/_2, \tau]$$

Подставим данное выражение в (5.31) и (5.32):

$$u^\tau(t, x_1, \ldots, c_i + x_i, \ldots, x_n, y) + u^\tau(t, x_1, \ldots, c_i - x_i, \ldots, x_n, y) =$$

$$= u^\tau(\frac{\tau}{2}, x_1, \ldots, c_i + x_i, \ldots, x_n, y) + u^\tau(\frac{\tau}{2}, x_1, \ldots, c_i - x_i, \ldots, x_n, y) +$$

$$+2\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} (f^*(\xi, x_1, \ldots, c_i + x_i, \ldots, x_n, y) + f^*(\xi, x_1, \ldots, c_i - x_i, \ldots, x_n, y)) \cdot \ldots d\xi = 0,$$

где $i = 1, \ldots, n$, $c_i = 0, l_1$. По доказаному ранее, все слагаемые в данном выражении равны нулю.

Таким образом, (5.31), (5.32) выполняются при $t \in [0, \tau]$. Повторяя данные рассуждения k раз, получим, что (5.31) и (5.32) выполнены при $t \in [0, k\tau]$, следовательно, при всех $t \in [0, T]$.

Так как $u^\tau(t, x, y)$ сходится $u(t, x, y)$ in Π_M для всех $M > 0$, возьмём $M_0 > \max(l_1, \ldots, l_n)$, таким образом, $Q_T \subset \Pi_{M_0}$. В силу сходимости, можно перейти к пределу в (5.31)–(5.32) при $\tau \to 0$. Подставим $\tau \to 0$ и $x_i = 0$ в (5.31)–(5.32), получим (5.3). Решение задачи Коши (5.12)–(5.14) удовлетворяет условиям (5.1), (5.2), (5.4) в Q_T и выполнено (5.3). Теорема 5.1 доказана.

5.5 Доказательство единственности решения краевой задачи

Пусть $(u_1(t, x, y), \mu_1(t, y))$, $(u_2(t, x, y), \mu_2(t, y))$ – два решения задачи (5.1) - (5.4) класса Z_p. Обозначим $u^* = u_1 - u_2$, $\mu^* = \mu_1 - \mu_2$. Функции u^*, μ^* являются решением задачи

$$\frac{\partial u^*(t, x, y)}{\partial t} = \lambda \Delta_x u^*(t, x, y) + \mu^*(t, y) f(t, x, y), \tag{5.33}$$

$$u^*(0, x, y) = 0, \tag{5.34}$$

$$u^*(t, x, y)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \tag{5.35}$$

$$u^*(t, x, y)|_{x=y} = 0, \quad (t, x, y) \in Q_T. \tag{5.36}$$

Подставляя $x = y$, $y \in D$ в (5.33), получим выражения для $\mu^*(t, y)$ аналогично (5.15) (где $\phi(t) \equiv 0$). Затем подставим $\mu^*(t, y)$ в (5.33). Функция u^*

является решением задачи

$$\frac{\partial u^*(t,x,y)}{\partial t} = \lambda \Delta_x u^*(t,x,y) - \frac{\lambda \cdot f(t,x,y) \cdot \Delta_x u^*(t,y,y)}{f(t,y,y)}, \tag{5.37}$$

$$u^*(0,x,y) = 0, \tag{5.38}$$

$$u^*(t,x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad (t,x,y) \in Q_T. \tag{5.39}$$

Дважды продифференцируем (5.37)-(5.39) по x_i. Функции $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i^2}$ являются решениями задач

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(t,x,y) = \lambda \Delta_x \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(t,x,y) - \frac{\lambda \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(t,x,y) \cdot \Delta_x u^*(t,y,y)}{f(t,y,y)}, \tag{5.40}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(0,x,y) = 0, \tag{5.41}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(t,x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{5.42}$$

$$\tag{5.43}$$

Для (5.40)-(5.42) применим принцип максимума, получим

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(t,x,y)\right| \le K_3 t \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\Delta_x u^*(t,x,y)|\,, \; i = 1,\dots,n.$$

Складывая данные неравенства при $i = 1,\dots,n$, получим

$$\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(t,x,y)\right| \le K_3 n t \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\Delta_x u^*(t,x,y)| \le K_3 n t \sum_{i=1}^n \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(t,x,y)\right|.$$

Выберем ξ так, чтобы $K_3 n \xi < 1$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u^*(t,x,y)\right| = 0, \quad t \in [0,\xi].$$

Мы доказали, что правая часть (5.37) равна нулю. В силу принципа максимума, $u^*(t,x,y) \equiv 0$ для всех $t \in [0,\xi]$.

Далее, рассмотрим задачу (5.37), (5.39) при $t \in [\xi, T]$ с начальными данными $u^*(\xi,x,y) = 0$. Рассуждая аналогично, получим, что $u^*(t,x,y) \equiv 0$ при $t \in [\xi, 2\xi]$. После конечного числа шагов, $u^*(t,x,y) \equiv 0$ для всех $t \in [0,T]$.

Подставим $u^* = 0$ в (5.33):

$$\mu^*(t, y) f(t, x, y) = 0, \ \forall x \in \Omega, \ \forall y \in D.$$

Так как $f(t, x, y) \neq 0$ при $x = y$, $\mu(t, y) \equiv 0$. Теорема 5.2 доказана.

Замечание. Пусть (u_1, μ_1), (u_2, μ_2) – два решения задачи Коши (5.1), (5.2), (5.4) в области E. Для функций $u^* = u_1 - u_2$, $\mu^* = \mu_1 - \mu_2$ получим задачу Коши

$$\frac{\partial u^*(t, x, y)}{\partial t} = \lambda \Delta_x u^*(t, x, y) + \mu^*(t, y) f(t, x, y), \tag{5.44}$$

$$u^*(0, x, y) = 0, \tag{5.45}$$

$$u^*(t, y, y) = 0, \quad (t, x, y) \in E. \tag{5.46}$$

Рассуждения, проведенные для (5.33)–(5.36) справедливы и в данном случае, следовательно, $u^* \equiv 0$, $\mu^* \equiv 0$. Теорема 5.3б доказана.

Заключение

В диссертации решены актуальные задачи идентификации функции источника для квазилинейных параболических уравнений типа Бюргерса в одно- и двумерном случаях, как с начальными данными Коши, так и с различными начально-краевыми условиями. Также решена более общая задача разрешимости системы нагруженных уравнений к которой приводятся различные коэффициентные обратные задачи для квазилинейных параболических уравнений.

Основные результаты диссертации:

1. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса в случаях задачи Коши и первой краевой задачи.

2. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для двумерного уравнения типа Бюргерса в случаях задачи Коши и смешанной краевой задачи в прямоугольной области.

3. Доказана теорема разрешимости для системы нагруженных уравнений, к которой приводятся некоторые обратные задачи для параболических уравнений и систем.

4. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи идентификации функции источника для параболического уравнения с параметром в случаях задачи Коши и первой краевой задачи.

Полученные результаты имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

Список литературы

1. Алексеев, А. С. Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли / А. С. Алексеев и др. – Новосибирск: Издательство СО РАН. – 2010. – 310 с.

2. Аниконов, Ю. Е. Обратные задачи математической физики и биологии / Ю. Е. Аниконов // Доклады академии наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 6 – С. 1350-1354.

3. Аниконов, Ю. Е. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром / Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим // Сибирские электронные математические известия. – 2012. – Т. 9. – С. 45-63.

4. Аниконов, Ю. Е. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения / Ю. Е. Аниконов, Ю. Я. Белов // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 306, № 6. – С. 1289–1293.

5. Ахтамова, С.С. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений / С.С. Ахтамова, Ю.Я. Белов // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 316, № 4. – С. 791-795.

6. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы. – 1961. – 937 с.

7. Белов, Ю. Я. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Ю. Я. Белов, Е. Г. Саватеев // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 334, № 5. – С. 800–804.

8. Белов, Ю.Я. Об одной обратной задаче для полулинейного параболического уравнения / Ю.Я. Белов // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 316, № 5. – С. 1034-1038.

9. Белов, Ю.Я. Об одной линейной стационарной задаче динамики океана / Ю.Я. Белов // Математические заметки. – 1979. – Т. 26, № 1. – С. 45-52.

10. Белов, Ю.Я. О некоторых системах линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / Ю.Я. Белов // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 231, № 5. – С. 1037-1040.

11. Белов, Ю.Я. Расщепление вырождающегося квазилинейного параболического уравнения / Ю.Я. Белов // Математические заметки. – 1989. – Т. 46, вып. 6. – С. 26-31.

12. Белов, Ю.Я. Теоремы однозначной разрешимости и аппроксимации некоторых краевых задач для систем уравнений, описывающих течения океана / Ю.Я. Белов // Сибирский математический журнал. – 1979. – Т. 20, № 6. – С. 1206-1225.

13. Белов, Ю.Я. Об одной обратной задаче для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при производной по времени / Ю.Я. Белов, Е.Г. Саватеев // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 316, № 5. – С. 1034-1038.

14. Белов, Ю. Я. Метод слабой аппроксимации / Ю. Я. Белов, С. А. Кантор. – Красноярск:КрасГУ. – 1999.

15. Белов, Ю. Я. Неклассические и обратные краевые задачи: учебное пособие [Электронный ресурс]/ Ю. Я. Белов, С. В. Полынцева, Р. В. Сорокин, И. В. Фроленков, О. Н. Черепанова // Сибирский федеральный университет. – 2007. – Режим доступа: http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/20/u_posob.pdf.

16. Вабищевич, П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П.Н. Вабищевич. – М.: Издательство Московского университета. – 1991. – 156 с.

17. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М.: Физматлит. – 2007. – 224 с.

18. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. – Новосибирск: НГУ. – 1983. – 84 с.

19. Демидов, Г.В. Теорема существования решения задачи краткосрочного прогноза погоды. / Г. В. Демидов, Г. И. Марчук // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 170, № 5. – С. 1006–1009.

20. Ильин, А. М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник // Успехи математических наук. – 1962. – т.17, №3. – С. 3-146.

21. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М.: Наука. – 1966.

22. Ковеня, В.М. Метод расщепления в задачах газовой динамики. / В. М. Ковеня, Н Н. Яненко, Ю. И. Шокин. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. – 1981. – 304 с.

23. Кожанов, А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А И. Кожанов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 4. – С. 694-716.

24. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Физматлит. – 2009. – 575 с.

25. Коновалов, А. Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил / А.Н. Коновалов // Численные методы механики сплошной среды. – 1972. – Т. 3, № 5. – С. 52-67.

26. Косьянов, А. Н. Методология решения обратных задач геофизики / А. Н. Косьянов, В. А. Сосов // Молодой ученый. – 2012. – №1. Т.1. – С. 77-79.

27. Лаврентьев, М. М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. – 1969. – 67 с.

28. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – М.: Наука. – 1980. – 285 с.

29. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир. – 1972. – 587 с.

30. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука. – 1976. – 391 с.

31. Новиков, В.А. Некоторые вопросы сходимости метода слабой аппроксимации. / В. А. Новиков // Сибирский математический журнал. – 1977. – Т. 18, № 5. – С. 1125–1139.

32. Орунханов, М.К. К теории метода фиктивных областей / М.К. Орунханов, Ш. Смагулов // Численные методы механики сплошной среды. – 1982. – Т. 13, № 2. – С. 125-137.

33. Осколков, А.П. Об одной квазилинейной параболической системе с малым параметром, аппроксимирующей систему уравнений Навье-Стокса / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1971. – Т. 32. – С 78-103.

34. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. / А. Д. Полянин. – М.: Физматлит. – 2001. – 576 с.

35. Прилепко, А. И. Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением / А. И. Прилепко, Д. С. Ткаченко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 9. – С. 1392–1401.

36. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – М.: Наука. – 1984. – 262 с.

37. Романов, В. Г. Обратные задачи электродинамики / В. Г. Романов, С. И. Кабанихин, Т. П. Пухначева. – Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН СССР. – 1984. – 210 с.

38. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / Соболев С. Л. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1988. – 336 с.

39. Соболева, О. В. Обратные экстремальные задачи для стационарного уравнения конвекции - диффузии - реакции / О. В. Соболева // Дальневосточный математический журнал. – 2010. – Т. 10, № 2. – С. 170-184.

40. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука. – 1977. – 736 с.

41. Тихоцкий, С. А. Комбинированная инверсия данных сейсмологии и гравиметрии в задаче определения положения геологической границы в трёхмерном случае / С. А. Тихоцкий, У. Ашауер // Геоинформатика. – 2006. – № 3. – С. 25–28.

42. Треногин, В. А. Функциональный анализ. / В А. Треногин. – М.: Физматлит. – 2002. – 488 с.

43. Фроленков, И. В. О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши / И. В. Фроленков,

Ю. Я. Белов // Неклассические уравнения математической физики. – 2012. – С. 262-279.

44. Фроленков, И. В. О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении / И. В. Фроленков, Е. Н. Кригер // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 556-564.

45. Яненко, Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Л. Б. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М.: Наука. – 1978. - 687 с.

46. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. / Н. Н. Яненко. – Новосибирск. – 1967. – 195 с.

47. Яненко, Н. Н. Исследование задачи Коши методом слабой аппроксимации / Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 6. – С. 1242–1244.

48. Anikonov, Yu. E. Inverse and Ill-Posed Sources Problems / Yu. E. Anikonov, B. A. Bubnov, G. N. Erokhin. – Utrecht: VSP. – 1997. – 239 p.

49. Anikonov, Yu. E. Inverse problems for evolution and differential-difference equations with a parameter / Yu. E. Anikonov // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2003. – V. 11, no. 5. – P. 439-473.

50. Anikonov, Yu. E. The indetification problem for the functional equation with a parameter / Yu. E. Anikonov // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2012. – V. 20(4). – P. 401–409.

51. Belleni, Morante A. Inverse problems in photon transport - Part I: determination of physical and geometrical features of an interstellar cloud. / R. Monaco, S.

Pennisi, S. Rionero, T. Ruggeri // Proceedings of the XII Int. Conference on Waves and Stability in Continuous Media. – World Scientific. – 2004. – P. 52-59.

52. Belov, Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equations / Yu. Ya. Belov. – Utrecht etc.:VSP. – 2002. – 211 p.

53. Belov, Yu. Ya. On Estimates of Solutions of the Split Problems for Some Multi-Dimensional Partial Differential Equations / Yu. Ya. Belov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2009. – no. 2(3). – P. 258-270.

54. Burgers, I. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence / I. M. Burgers // Advances of mechanics. – 1948. – no. 1. – P. 171-199.

55. Cannon, J.R. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations / J. R. Cannon, Lin Yanping // J. Ill-Posed and Inverse Problems. – 1988. – V.4. N1. – P.595–606.

56. Cole, I. D. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics / I. D. Cole // Quart. Appl. Math. – 1951. – no. 9. – P. 226-236.

57. Francini, E. An inverse problem for higher order parabolic equation with integral overdetermination. Unique solvability and stabilization of the solution. / E. Francini, V. Kamynin // Pubblicazioni Dell'istituto di analisi globale e applicazioni. Serie "Problemi non ben pasti ed inversi". – Firenze. – 1996.

58. Hopf, E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ / E. Hopf // Comm. Pure Appl. Math. – 1950. – no. 3. – P. 201-230.

59. Lorenzi, A. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator eqations / A. Lorenzi, E. Paparoni // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 1998. – V. 5. N6. – P. 523–548.

60. Prilepko, A. I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – New York: Marcel Dekkar, inc. – 1999. – 709 p.

61. Ramm, A. G. Inverse Problems, Tomography, and Image Processing / A. G. Ramm. – New York: Springer US. – 1998. – 258 p.

Список работ автора по теме диссертации

62. Коршун, К.В. Задача идентификации коэффициентов квазилинейного параболического уравнения / К. В. Коршун // Материалы XLIX международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2011. – С 48.

63. Коршун, К.В. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Материалы 50-й юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2012. – С. 34.

64. Коршун, К. В. О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 497–506.

65. Коршун, К. В. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых

с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска [Электронный ресурс] № заказа 2394/отв. ред. О. А. Краев. – Красноярск: Сибирский федеральный университет. – 2013. – Режим доступа: http://conf.sfu-kras.ru/sites/mn2013/thesis/s062/s062-010.pdf

66. Коршун, К. В. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2013. – С. 88.

67. Коршун, К. В. Задача идентификации функции источника для многомерного уравнения типа Бюргерса / К. В. Коршун // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. (Новосибирск, 18-24 августа 2013 г.): Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт математики СО РАН. – 2013. – С. 173.

68. Коршун, К. В. Об одной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Сибирский журнал индустриальной математики. Июль-сентябрь, 2013. – 2013. – Т. 16, № 3(55). – С. 28–40.

69. Коршун, К. В. О разрешимости задачи Коши для системы нагруженных параболических уравнений / К. В. Коршун // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2014. – С. 84.

70. Коршун, К.В. О разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения с параметром / К. В. Коршун // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы Тринадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2014". - Казань: Издательство Казанского университета. - 2014. - Том 50. - С. 106-107.

71. Коршун, К.В. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с параметром. / К. В. Коршун // Материалы 53-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2015: Математика. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2015. – С. 30.

72. Коршун, К.В. Об обратной задаче для параболического уравнения с параметром. / Ю. Я. Белов, К. В. Коршун // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование". – 2015. – С. 65–66.

73. Korshun, K V. On Solvability of the Cauchy Problem for a Loaded System / Yu. Ya. Belov, K. V. Korshun // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2014. – V. 7, no. 2. – P. 155—161.

74. Korshun K.V. On some inverse problem for a parabolic equation with a parameter / K. V. Korshun // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2015. – V. 8, no 3. – P. 281–290.